

# Wirtschaftsmathematik

Prof. Dr. Stefan Böcker, FRM

3. Juni 2025

Wir geben Impulse

- 1 Einführung in die Finanzmathematik
- 2 Funktionen
- 3 Lineare Gleichungssysteme
- 4 Lineare Optimierung

- 1 Der Wert einer Zahlung ist **abhängig vom Zeitpunkt**, zu dem diese zu leisten ist.
- 2 Es gilt stets das **Äquivalenzprinzip**.
- 3 Das Gerüst der klassischen Finanzmathematik wird aus **ganz wenigen Formeln** gebildet.
- 4 In der klassischen Finanzmathematik gibt es einfache, mittelschwere und relativ kompliziert zu lösende Probleme. Die größte Schwierigkeit ist in der Regel die **Modellierung**.
- 5 Ein **grafisches Schema** bringt fast immer Klarheit.
- 6 Das wichtigste Konzept ist das der **Rendite**, auch **Effektiv- oder Realzins** genannt.
- 7 Die klassische Finanzmathematik lässt sich klar umreißen. Das wichtigste Konzept ist das des **Zinssatzes**.

**Kapital** Geldbetrag, der angelegt bzw. jemand anderem überlassen wird.

**Laufzeit** Dauer der Überlassung/Anlage

**Zinsen** Vergütung für die Kapitalüberlassung innerhalb einer Zinsperiode

**Zinsperiode** der vereinbarten Verzinsung zugrunde liegender Zeitrahmen; meist ein Jahr, oftmals kürzer (Monat, Quartal, Halbjahr), selten länger

**Zinssatz** insbetrag in Geldeinheiten (GE), der für ein Kapital von 100 GE in einer Zinsperiode zu zahlen ist; auch **Zinsfuß** genannt.

**Zeitwert** der von der Zeit abhängige Wert des Kapitals

Folgende Notation wird (in der Regel) im folgenden benutzt:

**Kapital**  $K_t$  ist das Kapital zum Zeitpunkt  $t$

**Zinssatz**  $i = \frac{p}{100}$ , wobei  $p$  der Zinssatz/Zinsfuß in Prozent ist

**Aufzinsungsfaktor**  $q = (1 + i) = \left(1 + \frac{p}{100}\right)$

**Zinsen**  $Z_t$  Zinsen für den Zeitraum  $t$ .

Damit gelten folgende Zusammenhänge:

	$p$	$i$	$q$
$p$	$p$	$100i$	$100(q - 1)$
$i$	$\frac{p}{100}$	$i$	$q - 1$
$q$	$1 + \frac{p}{100}$	$1 + i$	$q$

**Zinsformel** Zinsen hängen proportional vom Kapital  $K$ , der Laufzeit  $t$  und dem Zinssatz  $i$  ab:

$$Z_t = K \cdot i \cdot t$$

**Laufzeit** In Deutschland wird meist das Jahr zu 360 Tagen und der Monat zu 30 Zinstagen gerechnet. Daher kann man meist  $t = \frac{T}{360}$  setzen, wobei  $T$  die Anzahl an Tagen ist.

$$Z_T = K \cdot i \cdot \frac{T}{360}$$

**Frage** Welche Zinsen fallen an, wenn ein Kapital von 3500 € vom 3. März bis zum 18. August eines Jahres bei einem Zinssatz von 3.25 % p.a. angelegt wird?

**Antwort** Da  $165 = 27 + 30 + 30 + 30 + 30 + 18$  Zinstage zugrunde zu legen sind, ergibt sich aus der Zinsformel

$$Z_{165} = 3500\text{€} \cdot \frac{3.25}{100} \frac{165}{360} = 52.135416667\text{€} \approx 52.14\text{€}$$

**Frage** Wie hoch ist ein Kredit, für den in einem halben Jahr bei 8 % Jahreszinsen 657.44 € Zinsen zu zahlen sind?

**Antwort** Durch Umstellen der Zinsformel ermittelt man:

$$K = Z_T \frac{100}{p} \frac{360}{T} = 657.44 \text{ €} \cdot \frac{100}{8} \frac{360}{180} = 16436 \text{ €}$$



**Frage** Ein Wertpapier über 5000 €, das mit einem Kupon (Nominalzins) von 6.25 % ausgestattet ist, wurde einige Zeit nach dem Emissionsdatum erworben. Es sind Stückzinsen in Höhe von 36.46 € zu zahlen. Wieviele Zinstage wurden dabei berechnet?

**Antwort** Umstellen der Zinsformel führt auf

$$T = \frac{Z_T \cdot 100 \cdot 360}{K \cdot p} = \frac{36.46 \cdot 100 \cdot 360}{5000 \cdot 6.25} = 42 \text{ (Tage)}$$

**Zeitwert** Da sich das Kapital  $K_t$  zum Zeitpunkt  $t$  aus dem Anfangskapital  $K_0$  zuzüglich der im Zeitraum  $t$  angefallenen Zinsen  $Z_t$  ergibt, also

$$K_t = K_0 + Z_t$$

\$\$

gilt, folgt aus der Zinsformel eine sehr wichtige Formel der Finanzmathematik, die **Endwertformel bei linearer Verzinsung**

$$K_t = K_0 + Z_t = K_0 + K_0 \cdot i \cdot t = K_0 (1 + i \cdot t) = K_0 \left( 1 + \frac{p}{100} \cdot t \right)$$

Barwert : Man kann durch Umstellen der Endwertformel auch den **Barwert**  $K_0$  einer zukünftigen Zahlung  $K_t$  berechnen

$$K_0 = \frac{K_t}{1 + i \cdot t}$$

**Frage** In einem halben Jahr ist eine Forderung von 8000 € fällig. Wie viel ist bei einer Sofortzahlung zu leisten, wenn mit einem kalkulatorischen Zins von  $i = 5\%$  gerechnet wird?

**Antwort** Aus der Barwertformel ergibt sich

$$K_0 = \frac{8000}{1 + 0.05 \cdot \frac{1}{2}} \text{ €} = 7804.88 \text{ €}$$

## Äquivalenzprinzip

Das **Äquivalenzprinzip** nutzt man in der Finanzmathematik meist in der Form eines **Barwert-Vergleichs**, indem die Barwerte von Zahlungen, die zu verschiedenen Zeitpunkten geleistet werden, berechnet werden.

## Beispiel: Äquivalenzprinzip und Barwert (1/2)

**Aufgabe** Beim Verkauf einer Maschine werden dem Käufer zwei Angebote gemacht: Entweder 9000 € in 30 Tagen oder 9085 € in 90 Tagen. Welches Angebot ist günstiger, wenn jährlich mit 6 % bzw. mit 3 % verzinst wird? Bei welchem Zinssatz ergibt sich Gleichheit?

### Lösung (1/2)

Bei einer Verzinsung von 6 % ergeben sich folgende Barwerte:

$$K_0^{30} = \frac{9000}{1 + 0.06 \cdot \frac{30}{360}} = 8955.22 \quad K_0^{90} = \frac{9085}{1 + 0.06 \cdot \frac{90}{360}} = 8950.74$$

Das zweite Angebot ist also bei 6 % günstiger.

Bei einer Verzinsung von 3 % ergeben sich folgende Barwerte:

$$K_0^{30} = \frac{9000}{1 + 0.03 \cdot \frac{30}{360}} = 8977.55 \quad K_0^{90} = \frac{9085}{1 + 0.03 \cdot \frac{90}{360}} = 9017.37$$

Das erste Angebot ist also bei 3 % günstiger.

### Lösung (2/2) Gleichheit der Angebote

Gleichwertigkeit beider Angebote bedeutet Gleichheit der Barwerte und führt so auf die Gleichung

$$\frac{9000}{1 + i \cdot \frac{30}{360}} = \frac{9085}{1 + i \cdot \frac{90}{360}} \Leftrightarrow 9000 \cdot \left(1 + i \frac{1}{4}\right) = 9085 \left(1 + i \frac{1}{12}\right)$$

Daraus folgt  $i = 0.0569 = 5.69\%$

## Zinssatz- und Laufzeitberechnung

Man kann aus der Endwertformel bei linearer Verzinsung sowohl den Zinssatz als auch die Laufzeit berechnen:

$$i = \frac{1}{t} \left( \frac{K_t}{K_0} - 1 \right) \quad t = \frac{1}{i} \left( \frac{K_t}{K_0} - 1 \right)$$

## Beispiel

**Frage** In welcher Zeit wächst eine Spareinlage von 1200 € bei 2.8 % jährlicher Verzinsung auf 1225.20 € an?

**Antwort**

$$t = \frac{1}{0.028} \left( \frac{1225.20}{1200} - 1 \right) = 0.75 = \frac{3}{4}$$









- 1 Einführung in die Finanzmathematik
- 2 Funktionen
- 3 Lineare Gleichungssysteme
- 4 Lineare Optimierung















- 1 Einführung in die Finanzmathematik
- 2 Funktionen
- 3 Lineare Gleichungssysteme
- 4 Lineare Optimierung







- 1 Einführung in die Finanzmathematik
- 2 Funktionen
- 3 Lineare Gleichungssysteme
- 4 Lineare Optimierung



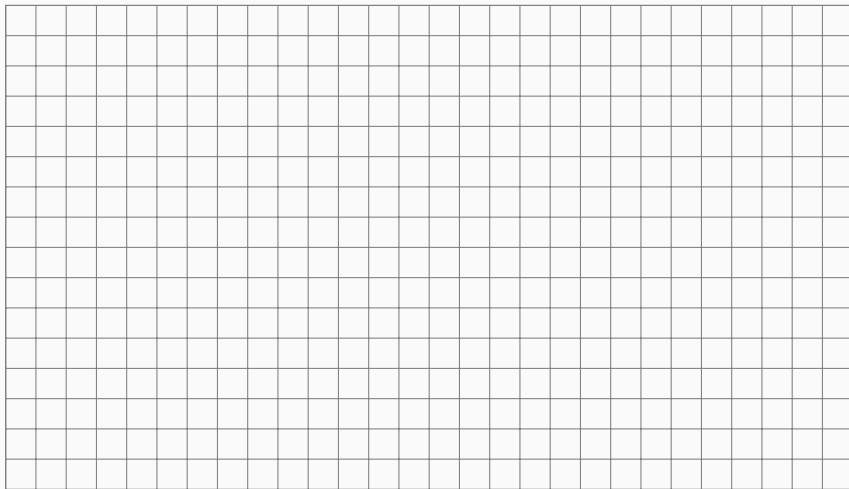




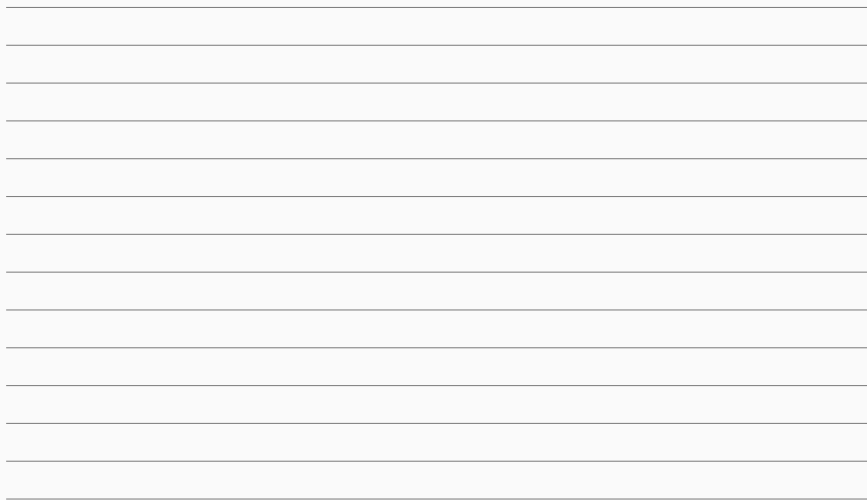
Use \alert to **highlight** some text

# Squared Paper

- `\squared{}` (or `\kariert{}`) can be used to produce squared paper



- `\lined{}` (or `\liniert{}`) can be used to produce lined paper



# Slide with R output

```
summary(cars)
```

```
##      speed      dist
## Min.   : 4.0    Min.    :  2
## 1st Qu.:12.0    1st Qu.: 26
## Median :15.0    Median : 36
## Mean   :15.4    Mean    : 43
## 3rd Qu.:19.0    3rd Qu.: 56
## Max.   :25.0    Max.    :120
```

Quantile score for observation  $y$ . For  $0 < p < 1$ :

$$S(y_t, q_t(p)) = \begin{cases} p(y_t - q_t(p)) & \text{if } y_t \geq q_t(p) \\ (1 - p)(q_t(p) - y_t) & \text{if } y_t < q_t(p) \end{cases}$$

Average score over all percentiles gives the best distribution forecast:

$$QS = \frac{1}{99T} \sum_{p=1}^{99} \sum_{t=1}^T S(q_t(p), y_t)$$

A simple `knitr::kable` example:

```
knitr::kable(mtcars[1:4, 1:7],  
             caption="(Parts of) the mtcars dataset")
```

**Tabelle 1:** (Parts of) the mtcars dataset

	mpg	cyl	disp	hp	drat	wt	qsec
Mazda RX4	21.0	6	160	110	3.90	2.620	16.46
Mazda RX4 Wag	21.0	6	160	110	3.90	2.875	17.02
Datsun 710	22.8	4	108	93	3.85	2.320	18.61
Hornet 4 Drive	21.4	6	258	110	3.08	3.215	19.44

## For more information:

- See the RMarkdown repository for more on RMarkdown
- See the binb repository for more on binb
- See the binb vignettes for more examples.