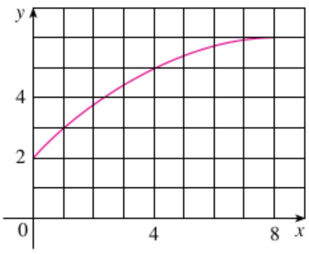
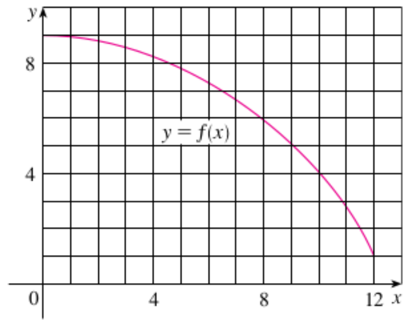
Lista de Exercícios
Cálculo II

1.1 Definição e Interpretação Geométrica

1. (a) Lendo os valores do gráfico dado de f, utilize quatro retângulos para encontrar as estimativas inferior e superior para a área sob o gráfico dado de f de $x = 0$ até $x = 8$. Em cada caso, esboce os retângulos que você usar.
(b) Encontre novas estimativas, usando oito retângulos em cada caso.



2. (a) Use seis retângulos para achar estimativas de cada tipo para a área sob o gráfico dado de f de $x = 0$ até $x = 12$.
(i) L_6 (pontos amostrais são extremidades esquerdas)
(ii) R_6 (pontos amostrais são extremidades direitas)
(iii) M_6 (pontos amostrais são pontos médios)
(b) L_6 é uma subestimativa ou superestimativa em relação à área verdadeira?
(c) R_6 é uma subestimativa ou superestimativa em relação à área verdadeira?
(d) Entre os números L_6, R_6 ou M_6, qual fornece a melhor estimativa? Explique.



2 Definição A **área** A da região S que está sob o gráfico de uma função contínua f é o limite da soma das áreas dos retângulos aproximantes:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x]$$

19–21 Use a Definição 2 para achar uma expressão para a área sob o gráfico de f como um limite. Não calcule o limite.

19. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 3$

20. $f(x) = x^2 + \sqrt{1+2x}, \quad 4 \leqslant x \leqslant 7$

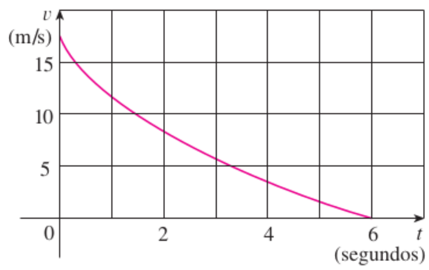
21. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

3. (a) Estime a área sob o gráfico $f(x) = \cos x$ de $x = 0$ até $x = \pi/2$ usando quatro retângulos aproximantes e extremidades direitas. Esboce o gráfico e os retângulos. Sua estimativa é uma subestimativa ou uma superestimativa?
(b) Repita a parte (a) usando extremidades esquerdas.

4. (a) Estime a área sob o gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ de $x = 0$ até $x = 4$ usando quatro retângulos aproximantes e extremidades direitas. Esboce o gráfico e os retângulos. Sua estimativa é uma subestimativa ou uma superestimativa?
(b) Repita a parte (a) usando extremidades esquerdas.

5. (a) Estime a área sob o gráfico $f(x) = 1 + x^2$ de $x = -1$ até $x = 2$ usando três retângulos aproximantes e extremidades direitas. Então, aperfeiçoe sua estimativa utilizando seis retângulos aproximantes. Esboce a curva e os retângulos aproximantes.
(b) Repita a parte (a) usando extremidades esquerdas.
(c) Repita a parte (a) empregando os pontos médios.
(d) A partir de seus esboços das partes (a), (b) e (c), qual parece ser a melhor estimativa?

17. O gráfico da velocidade de um carro freando é mostrado. Use-o para estimar a distância percorrida pelo carro enquanto os freios estão sendo aplicados.



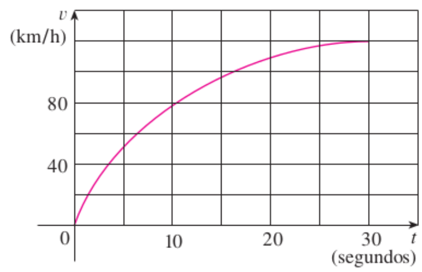
14. A leitura do velocímetro de uma motocicleta em intervalos de 12 segundos é mostrada na tabela a seguir.
(a) Estime a distância percorrida pela motocicleta durante esse período, usando a velocidade no começo dos intervalos de tempo.
(b) Dê outra estimativa utilizando a velocidade no fim dos intervalos de tempo.
(c) As estimativas feitas nas partes (a) e (b) são estimativas superior e inferior? Explique.

t (s)	0	12	24	36	48	60
v (m/s)	9,1	8,5	7,6	6,7	7,3	8,2

15. Óleo vaza de um tanque a uma taxa de $r(t)$ litros por hora. A taxa decresce à medida que o tempo passa e os valores da taxa em intervalos de duas horas são mostrados na tabela a seguir. Encontre estimativas superior e inferior para a quantidade total de óleo que vazou.

t (h)	0	2	4	6	8	10
$r(t)$ (L/h)	8,7	7,6	6,8	6,2	5,7	5,3

18. O gráfico da velocidade de um carro em aceleração a partir do repouso até uma velocidade de 120 km/h em um período de 30 segundos é mostrado. Estime a distância percorrida durante esse período.



1.2 Integral de Riemann

5.2 Exercícios

1. Calcule a soma de Riemann para $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$, $2 \leqslant x \leqslant 14$, com seis subintervalos, tomando os pontos amostrais como as extremidades esquerdas. Explique, com a ajuda de um diagrama, o que representa a soma de Riemann.

2 Se $f(x) = x^2 - 2x$, $0 \leqslant x \leqslant 3$, calcule a soma de Riemann com $n = 6$, tomando como pontos amostrais as extremidades direitas. O que representa a soma de Riemann? Ilustre com um diagrama.

3. Se $f(x) = e^x - 2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, calcule a soma de Riemann com $n = 4$ correta até a sexta casa decimal, tomando como pontos amostrais os pontos médios. O que representa a soma de Riemann? Ilustre com um diagrama.

4. (a) Calcule a soma de Riemann para $f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant 3\pi/2$ e com seis termos, tomando os pontos amostrais como as extremidades direitas. (Dê a resposta correta até a sexta casa decimal). Explique o que a soma de Riemann representa com a ajuda de um esboço.

   (b) Repita a parte (a) tomando como pontos amostrais os pontos médios.

17–20 Expresse o limite como uma integral definida no intervalo dado.

17. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(1 + x_i^2)\, \Delta x$, $[2, 6]$

18. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\cos x_i}{x_i}\, \Delta x$, $[\pi, 2\pi]$

19. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [5(x_i^*)^3 - 4x_i^*]\, \Delta x$, $[2, 7]$

20. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^*}{(x_i^*)^2 + 4}\, \Delta x$, $[1, 3]$

4 Teorema Se f for integrável em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

onde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ e $x_i = a + i\,\Delta x$

21–25 Use a forma da definição de integral dada no Teorema 4 para calcular a integral.

21. $\int_{-1}^{5} (1 + 3x)\,dx$

22. $\int_{1}^{4} (x^2 + 2x - 5)\,dx$

23. $\int_{-2}^{0} (x^2 + x)\,dx$

24. $\int_{0}^{2} (2x - x^3)\,dx$

25. $\int_{0}^{1} (x^3 - 3x^2)\,dx$

26. (a) Encontre uma aproximação para a integral $\int_0^4 (x^2 - 3x)\,dx$ usando uma soma de Riemann com as extremidades direitas e $n = 8$.

   (b) Faça um diagrama como a Figura 3 para ilustrar a aproximação da parte (a).

   (c) Use o Teorema 4 para calcular $\int_0^4 (x^2 - 3x)\,dx$.

   (d) Interprete a integral da parte (c) como uma diferença de áreas e ilustre com diagramas como o da Figura 4.

35–40 Calcule a integral, interpretando-a em termos das áreas.

35. $\int_{-1}^{2} (1 - x)\,dx$

36. $\int_{0}^{9} \left(\frac{1}{3}x - 2\right)dx$

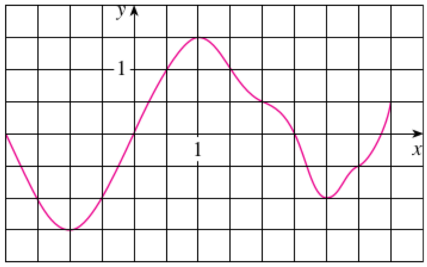
37. $\int_{-3}^{0} \left(1 + \sqrt{9 - x^2}\right)dx$

38. $\int_{-5}^{5} \left(x - \sqrt{25 - x^2}\right)dx$

39. $\int_{-1}^{2} |x|\,dx$

40. $\int_{0}^{10} |x - 5|\,dx$

6. O gráfico de g é apresentado. Estime $\int_{-2}^{4} g(x)\,dx$ com seis subintervalos usando (a) extremidades direitas, (b) extremidades esquerdas e (c) pontos médios.



7. Uma tabela de valores de uma função crescente f é dada. Use a tabela para encontrar uma estimativa inferior e superior para $\int_0^{25} f(x)\,dx$.

x	0	5	10	15	20	25
$f(x)$	−42	−37	−25	−6	15	36

41. Calcule $\int_{\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\,dx$.

42. Dado que $\int_0^1 3x\sqrt{x^2 + 4}\,dx = 5\sqrt{5} - 8$, o que é $\int_1^0 3u\sqrt{u^2 + 4}\,du$?

27. Demonstre que $\int_a^b x\,dx = \dfrac{b^2 - a^2}{2}$.

55–58 Use as propriedades das integrais para verificar a desigualdade sem calcular as integrais.

55. $\int_0^4 (x^2 - 4x + 4)\,dx \geqslant 0$

56. $\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\,dx \leqslant \int_0^1 \sqrt{1 + x}\,dx$

57. $2 \leqslant \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + x^2}\,dx \leqslant 2\sqrt{2}$

58. $\dfrac{\sqrt{2}\,\pi}{24} \leqslant \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos x\,dx \leqslant \dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{24}$

59–64 Use a Propriedade 8 para estimar o valor da integral.

59. $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$

60. $\int_0^2 \dfrac{1}{1 + x^2}\,dx$

61. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{tg} x\,dx$

62. $\int_0^2 (x^3 - 3x + 3)\,dx$

63. $\int_0^2 xe^{-x}\,dx$

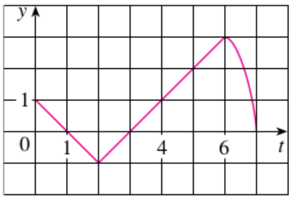
64. $\int_{\pi}^{2\pi} (x - 2\operatorname{sen} x)\,dx$

1.3 Teorema Fundamental do Cálculo

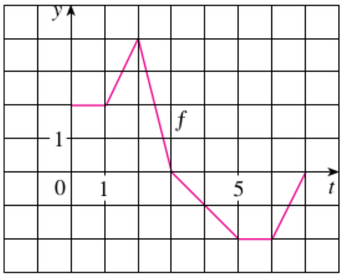
5.3 Exercícios

1. Explique exatamente o significado da afirmação "derivação e integração são processos inversos".

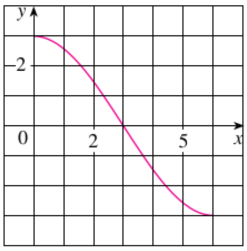
2. Seja $g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, em que f é a função cujo gráfico é mostrado.
(a) Calcule $g(x)$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ e 6.
(b) Estime $g(7)$.
(c) Onde g tem um valor máximo? Onde possui um valor mínimo?
(d) Faça um esboço do gráfico de g.



3. Seja $g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, em que f é a função cujo gráfico é mostrado.
(a) Calcule $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$ e $g(6)$.
(b) Em que intervalos g está crescendo?
(c) Onde g tem um valor máximo?
(d) Faça um esboço do gráfico de g.



4. Seja $g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, em que f é a função cujo gráfico é mostrado.
(a) Calcule $g(0)$ e $g(6)$.
(b) Estime $g(x)$ para $x = 1, 2, 3, 4$, e 5.
(c) Em que intervalo g está crescendo?
(d) Onde g tem um valor máximo?
(e) Faça um esboço do gráfico de g.
(f) Use o gráfico da parte (e) para esboçar o gráfico de $g'(x)$. Compare com o gráfico de f.



7–18 Use a Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo para encontrar a derivada da função.

7. $g(x) = \int_1^x \dfrac{1}{t^3 + 1}\, dt$ **8.** $g(x) = \int_3^x e^{t^2 - t}\, dt$

9. $g(s) = \int_5^s (t - t^2)^8\, dt$ **10.** $g(r) = \int_0^r \sqrt{x^2 + 4}\, dx$

11. $F(x) = \int_x^\pi \sqrt{1 + \sec t}\, dt$

$\left[\textit{Dica}: \int_x^\pi \sqrt{1 + \sec t}\, dt = -\int_\pi^x \sqrt{1 + \sec t}\, dt \right]$

12. $G(x) = \int_x^1 \cos \sqrt{t}\, dt$

13. $h(x) = \int_1^{e^x} \ln t\, dt$ **14.** $h(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \dfrac{z^2}{z^4 + 1}\, dz$

15. $y = \int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{t + \sqrt{t}}\, dt$ **16.** $y = \int_0^{x^4} \cos^2\theta\, d\theta$

17. $y = \int_{1-3x}^1 \dfrac{u^3}{1 + u^2}\, du$ **18.** $y = \int_{\operatorname{sen} x}^1 \sqrt{1 + t^2}\, dt$

19–44 Calcule a integral.

19. $\int_{-1}^2 (x^3 - 2x)\, dx$ **20.** $\int_{-1}^1 x^{100}\, dx$

21. $\int_1^4 (5 - 2t + 3t^2)\, dt$ **22.** $\int_0^1 \left(1 + \frac{1}{2}u^4 - \frac{2}{5}u^9\right) du$

23. $\int_0^1 x^{4/5}\, dx$ **24.** $\int_1^8 \sqrt[3]{x}\, dx$

25. $\int_1^2 \dfrac{3}{t^4}\, dt$ **26.** $\int_\pi^{2\pi} \cos\theta\, d\theta$

27. $\int_0^2 x(2 + x^5)\, dx$ **28.** $\int_0^1 (3 + x\sqrt{x})\, dx$

29. $\int_1^9 \dfrac{x - 1}{\sqrt{x}}\, dx$ **30.** $\int_0^2 (y - 1)(2y + 1)\, dy$

31. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 t\, dt$ **32.** $\int_0^{\pi/4} \sec\theta\ \operatorname{tg}\theta\, d\theta$

33. $\int_1^2 (1 + 2y)^2\, dy$ **34.** $\int_0^3 (2 \operatorname{sen} x - e^x)\, dx$

35. $\int_1^2 \dfrac{v^3 + 3v^6}{v^4}\, dv$ **36.** $\int_1^{18} \sqrt{\dfrac{3}{z}}\, dz$

37. $\int_0^1 (x^e + e^x)\, dx$ **38.** $\int_0^1 \cosh t\, dt$

39. $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \dfrac{8}{1 + x^2}\, dx$ **40.** $\int_1^2 \dfrac{4 + u^2}{u^3}\, du$

41. $\int_{-1}^1 e^{u+1}\, du$ **42.** $\int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \dfrac{4}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

43. $\int_0^\pi f(x)\, dx$ onde $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } 0 \leqslant x < \pi/2 \\ \cos x & \text{se } \pi/2 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$

44. $\int_{-2}^2 f(x)\, dx$ onde $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ 4 - x^2 & \text{se } 0 < x \leqslant 2 \end{cases}$

45–48 O que está errado na equação?

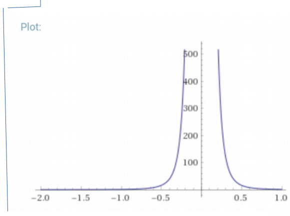
45. $\int_{-2}^1 x^{-4}\, dx = \dfrac{x^{-3}}{-3}\Big]_{-2}^1 = -\dfrac{3}{8}$

46. $\int_{-1}^2 \dfrac{4}{x^3}\, dx = -\dfrac{2}{x^2}\Big]_{-1}^2 = \dfrac{3}{2}$

47. $\int_{\pi/3}^\pi \sec\theta\ \operatorname{tg}\theta\, d\theta = \sec\theta\Big]_{\pi/3}^\pi = -3$

48. $\int_0^\pi \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x\Big]_0^\pi = 0$

Use o site WolframAlpha para desenhar o gráfico função do integrando no intervalo da integral.



WolframAlpha computational knowledge engine.

plot(x^(-4) , x=-2..1)

Web Apps Examples Random

49–52 Use um gráfico para dar uma estimativa grosseira da área da região que fica abaixo da curva dada. Encontre a seguir a área exata.

49. $y = \sqrt[3]{x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 27$ **50.** $y = x^{-4}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 6$

51. $y = \text{sen}\, x, \ 0 \leqslant x \leqslant \pi$ **52.** $y = \sec^2 x, \ 0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

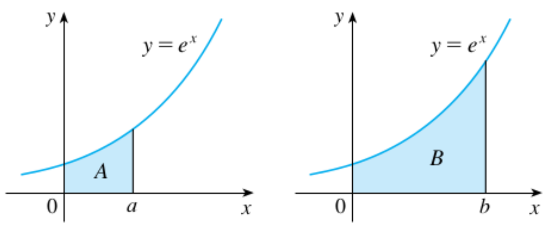
53–54 Calcule a integral e interprete-a como uma diferença de áreas. Ilustre com um esboço.

53. $\int_{-1}^{2} x^3\, dx$ **54.** $\int_{\pi/6}^{2\pi} \cos x\, dx$

77. Encontre uma função f e um número a tais que

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\, dt = 2\sqrt{x} \qquad \text{para todo } x > 0$$

78. A área marcada B é três vezes a área marcada A. Expresse b em termos de a.



72. Se f é contínua e g e h são funções deriváveis, encontre uma fórmula para

$$\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\, dt$$

73. (a) Mostre que $1 \leqslant \sqrt{1 + x^3} \leqslant 1 + x^3$ para $x \geqslant 0$.

(b) Mostre que $1 \leqslant \int_0^1 \sqrt{1 + x^3}\, dx \leqslant 1{,}25$.

74. (a) Mostre que $\cos(x^2) \geqslant \cos x$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$.

(b) Deduza que $\int_0^{\pi/6} \cos(x^2)\, dx \geqslant \frac{1}{2}$.

75. Mostre que

$$0 \leqslant \int_5^{10} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}\, dx \leqslant 0{,}1$$

comparando o integrando a uma função mais simples.

55–59 Encontre a derivada da função.

55. $g(x) = \displaystyle\int_{2x}^{3x} \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}\, du$

$$\left[Dica: \int_{2x}^{3x} f(u)\, du = \int_{2x}^{0} f(u)\, du + \int_{0}^{3x} f(u)\, du \right]$$

56. $g(x) = \displaystyle\int_{1-2x}^{1+2x} t \,\text{sen}\, t\, dt$

57. $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} e^{t^2}\, dt$ **58.** $F(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{2x} \text{arctg}\, t\, dt$

59. $y = \displaystyle\int_{\cos x}^{\text{sen}\, x} \ln(1 + 2v)\, dv$

60. Se $f(x) = \int_0^x (1 - t^2)e^{t^2}\, dt$, em qual intervalo f é crescente?

61. Em qual intervalo a curva

$$y = \int_0^x \frac{t^2}{t^2 + t + 2}\, dt$$

é côncava para baixo?

62. Se $f(x) = \int_0^{\text{sen}\, x} \sqrt{1 + t^2}\, dt$ e $g(y) = \int_3^y f(x)\, dx$, encontre $g''(\pi/6)$.

63. Se $f(1) = 12$, f' é contínua e $\int_1^4 f'(x)\, dx = 17$, qual é o valor de $f(4)$?

5.4 Exercícios

1–4 Verifique, por derivação, que a fórmula está correta.

1. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sqrt{x^2+1} + C$

2. $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\,\text{sen}\,2x + C$

3. $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx = \text{sen}\,x - \tfrac{1}{3}\,\text{sen}^3 x + C$

4. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}}\,dx = \frac{2}{3b^2}(bx-2a)\sqrt{a+bx} + C$

Regra do Ponto Médio

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x = \Delta x\,[f(\bar{x}_1) + \cdots + f(\bar{x}_n)]$$

onde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

e $\bar{x}_i = \tfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) =$ ponto médio de $[x_{i-1}, x_i]$

64. A água escoa pelo fundo de um tanque de armazenamento a uma taxa de $r(t) = 200 - 4t$ litros por minuto, onde $0 \leqslant t \leqslant 50$. Encontre a quantidade de água que escoa do tanque durante os primeiros dez minutos.

65. A velocidade de um carro foi lida de seu velocímetro em intervalos de 10 segundos e registrada na tabela. Use a Regra do Ponto Médio para estimar a distância percorrida pelo carro.

t (s)	v (mi/h)	t (s)	v (mi/h)
0	0	60	56
10	38	70	53
20	52	80	50
30	58	90	47
40	55	100	45
50	51		

66. Suponha que um vulcão esteja em erupção e que as leituras da taxa $r(t)$, cujos materiais sólidos são lançados na atmosfera, sejam as dadas na tabela. O tempo t é medido em segundos e a unidade para $r(t)$ é toneladas por segundo.

t	0	1	2	3	4	5	6
$r(t)$	2	10	24	36	46	54	60

(a) Dê estimativas superior e inferior para a quantidade $Q(6)$ do material proveniente da erupção após 6 segundos.

(b) Use a Regra do Ponto Médio para estimar $Q(6)$.

69. Uma população de bactérias é de 4 000 no tempo $t = 0$ e sua taxa de crescimento é de $1000 \cdot 2^t$ bactérias por hora depois de t horas. Qual é a população depois de uma hora?

51. Se $w'(t)$ for a taxa de crescimento de uma criança em quilogramas por ano, o que $\int_5^{10} w'(t)\,dt$ representa?

52. A corrente em um fio elétrico é definida como a derivada da carga: $I(t) = Q'(t)$. (Veja o Exemplo 3 na Seção 3.7.) O que $\int_a^b I(t)\,dt$ representa?

53. Se vazar óleo de um tanque a uma taxa de $r(t)$ galões por minuto em um instante t, o que $\int_0^{120} r(t)\,dt$ representa?

54. Uma colmeia com uma população inicial de 100 abelhas cresce a uma taxa de $n'(t)$ por semana. O que representa $100 + \int_0^{15} n'(t)\,dt$?

55. Na Seção 4.7 definimos a função rendimento marginal $R'(x)$ como a derivada da função rendimento $R(x)$, onde x é o número de unidades vendidas. O que representa $\int_{1000}^{5000} R'(x)\,dx$?

56. Se $f(x)$ for a inclinação de uma trilha a uma distância de x quilômetros do começo dela, o que $\int_3^5 f(x)\,dx$ representa?

57. Se x é medido em metros e $f(x)$, em newtons, quais são as unidades de $\int_0^{100} f(x)\,dx$?

58. Se as unidades para x são pés e as unidades para $a(x)$ são libras por pé, quais são as unidades para da/dx? Quais são as unidades para $\int_2^8 a(x)\,dx$?

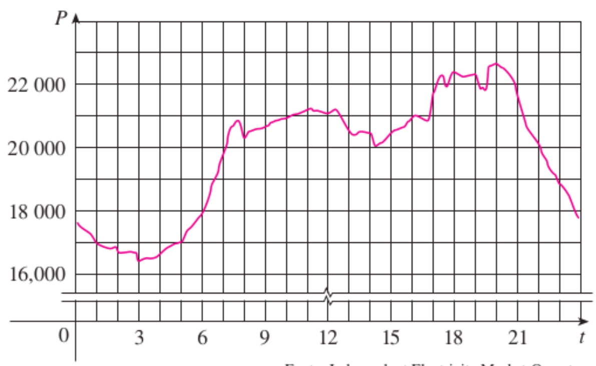
61–62 A função aceleração (em m/s^2) e a velocidade inicial são dadas para uma partícula movendo-se ao longo de uma reta. Encontre (a) a velocidade no instante t e (b) a distância percorrida durante o intervalo de tempo dado.

61. $a(t) = t + 4, \quad v(0) = 5, \quad 0 \leqslant t \leqslant 10$

62. $a(t) = 2t + 3, \quad v(0) = -4, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

63. A densidade linear de uma barra de comprimento 4 m é dada por $\rho(x) = 9 + 2\sqrt{x}$, medida em quilogramas por metro, em que x é medido em metros a partir de uma extremidade da barra. Encontre a massa total da barra.

71. A seguir, está ilustrada a potência consumida na cidade de Ontário, Canadá, em 9 de dezembro de 2004 (P é medida em megawatts; t é medido em horas a partir da meia-noite). Usando o fato de que a potência é a taxa de variação da energia, estime a energia usada naquele dia.



Fonte: Independent Electricity Market Operator

5.5 Exercícios

1.4 Técnicas de resolução (Substituição)

1–6 Calcule a integral fazendo a substituição dada.

1. $\int \cos 3x\, dx, \quad u = 3x$

2. $\int x(4 + x^2)^{10}\, dx, \quad u = 4 + x^2$

3. $\int x^2\sqrt{x^3 + 1}\, dx, \quad u = x^3 + 1$

4. $\int \dfrac{dt}{(1 - 6t)^4}, \quad u = 1 - 6t$

5. $\int \cos^3\theta \;\text{sen}\,\theta\, d\theta, \;\theta = \cos\theta$

6. $\int \dfrac{\sec^2(1/x)}{x^2}\, dx, \quad u = 1/x$

53–73 Avalie a integral definida.

53. $\int_0^1 \cos(\pi t/2)\, dt$

54. $\int_0^1 (3t - 1)^{50}\, dt$

55. $\int_0^1 \sqrt[3]{1 + 7x}\, dx$

56. $\int_0^3 \dfrac{dx}{5x + 1}$

57. $\int_0^{\pi} \sec^2(t/4)\, dt$

58. $\int_{1/6}^{1/2} \text{cossec}\,\pi t\;\text{cotg}\,\pi t\, dt$

59. $\int_1^2 \dfrac{e^{1/x}}{x^2}\, dx$

60. $\int_0^1 xe^{-x^2}\, dx$

61. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (x^3 + x^4\,\text{tg}\,x)\, dx$

62. $\int_0^{\pi/2} \cos x\;\text{sen}(\text{sen}\,x)\, dx$

63. $\int_0^{13} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(1 + 2x)^2}}$

64. $\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

65. $\int_0^a x\sqrt{x^2 + a^2}\, dx \quad (a > 0)$

66. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} x^4\,\text{sen}\,x\, dx$

67. $\int_1^2 x\sqrt{x - 1}\, dx$

68. $\int_0^4 \dfrac{x}{\sqrt{1 + 2x}}\, dx$

69. $\int_e^{e^4} \dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

70. $\int_0^{1/2} \dfrac{\text{sen}^{-1}x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

71. $\int_0^1 \dfrac{e^z + 1}{e^z + z}\, dz$

72. $\int_0^{T/2} \text{sen}(2\pi t/T - \alpha)\, dt$

73. $\int_0^1 \dfrac{dx}{(1 + \sqrt{x})^4}$

77. Calcule $\int_{-2}^{2} (x + 3)\sqrt{4 - x^2}\, dx$ escrevendo-a como uma soma de duas integrais e interpretando uma dessas integrais em termos de uma área.

78. Calcule $\int_0^1 x\sqrt{1 - x^4}\, dx$ fazendo uma substituição e interpretando a integral resultante em termos de uma área.

74. Verifique que $f(x) = \text{sen}\,\sqrt[3]{x}$ é uma função ímpar e use este fato para mostrar que

$$0 \leqslant \int_{-2}^{3} \text{sen}\,\sqrt[3]{x}\, dx \leqslant 1.$$

81. Um tanque de armazenamento de petróleo sofre uma ruptura em $t = 0$ e o petróleo vaza do tanque a uma taxa de $r(t) = 100e^{-0{,}01t}$ litros por minuto. Quanto petróleo vazou na primeira hora?

82. Uma população de bactérias tem inicialmente 400 bactérias e cresce a uma taxa de $r(t) = (450{,}268)e^{1{,}12567t}$ bactérias por hora. Quantas bactérias existirão após 3 horas?

83. A respiração é cíclica e o ciclo completo respiratório desde o início da inalação até o fim da expiração demora cerca de 5 s. A taxa máxima de fluxo de ar nos pulmões é de cerca de 0,5 L/s. Isso explica, em partes, porque a função $f(t) = \frac{1}{2}\,\text{sen}(2\pi t/5)$ tem sido frequentemente utilizada para modelar a taxa de fluxo de ar nos pulmões. Use esse modelo para encontrar o volume de ar inalado nos pulmões no instante t.

84. A Alabama Instruments Company preparou uma linha de montagem para fabricar uma nova calculadora. A taxa de produção dessas calculadoras após t semanas é

$$\frac{dx}{dt} = 5\,000\left(1 - \frac{100}{(t + 10)^2}\right) \text{calculadoras}/\textit{semana}.$$

(Observe que a produção tende a 5 000 por semana à medida que passa o tempo, mas a produção inicial é baixa, pois os trabalhadores não estão familiarizados com as novas técnicas.) Encontre o número de calculadoras produzidas no começo da terceira semana até o fim da quarta semana.

5 Revisão

Verificação de Conceitos

1. (a) Escreva uma expressão para uma soma de Riemann de uma função f. Explique o significado da notação que você usar.
(b) Se $f(x) \geqslant 0$, qual a interpretação geométrica de uma soma de Riemann? Ilustre com um diagrama.
(c) Se $f(x)$ assumir valores positivos e negativos, qual a interpretação geométrica de uma soma de Riemann? Ilustre com um diagrama.

2. (a) Escreva a definição de integral definida de uma função contínua de a até b.
(b) Qual a interpretação geométrica de $\int_a^b f(x)\, dx$ se $f(x) \geqslant 0$?
(c) Qual a interpretação geométrica de $\int_a^b f(x)\, dx$ se $f(x)$ assumir valores positivos e negativos? Ilustre com um diagrama.

3. Enuncie ambas as partes do Teorema Fundamental do Cálculo.

4. (a) Enuncie o Teorema da Variação Total.
(b) Se $r(t)$ for a taxa segundo a qual a água escoa para dentro de um reservatório, o que representa $\int_{t_1}^{t_2} r(t)\, dt$?

5. Suponha que uma partícula mova-se para a frente e para trás ao longo de uma linha reta com velocidade $v(t)$, medida em metros por segundo, com aceleração $a(t)$.
(a) Qual o significado de $\int_{60}^{120} v(t)\, dt$?
(b) Qual o significado de $\int_{60}^{120} |v(t)|\, dt$?
(c) Qual o significado de $\int_{60}^{120} a(t)\, dt$?

6. (a) Explique o significado da integral indefinida $\int f(x)\, dx$.
(b) Qual a conexão entre a integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ e a integral indefinida $\int f(x)\, dx$?

7. Explique exatamente o significado da afirmação “derivação e integração são processos inversos”.

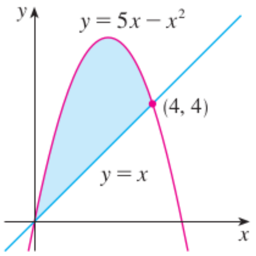
8. Enuncie a Regra da Substituição. Na prática, como fazer uso dela?

2.Aplicações da integral: Área entre curvas

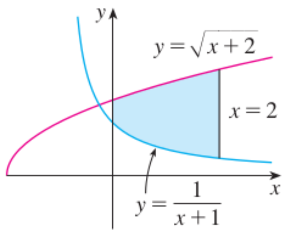
6.1 Exercícios

1–4 Encontre a área da região sombreada.

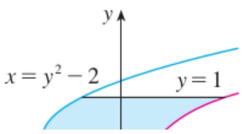
1.



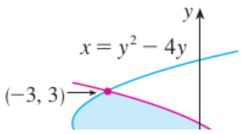
2.



3.



4.



31–32 Calcule a integral e interprete-a como a área de uma região. Esboce a região.

31. $\int_0^{\pi/2} |\,\text{sen}\, x - \cos 2x\,|\, dx$ **32.** $\int_0^{4} |\sqrt{x+2} - x|\, dx$

50. Encontre a área da região delimitada pela parábola $y = x^2$, pela reta tangente a esta parábola em (1, 1) e pelo eixo x.

51. Encontre o número b tal que a reta $y = b$ divida a região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4$ em duas regiões com área igual.

52. (a) Encontre o número a tal que a reta $x = a$ bissecte a área sob a curva $y = 1/x^2$, $1 \leqslant x \leqslant 4$.
(b) Encontre o número b tal que a reta $y = b$ bissecte a área da parte (a).

53. Encontre os valores de c tais que a área da região delimitada pelas parábolas $y = x^2 - c^2$ e $y = c^2 - x^2$ seja 576.

54. Suponha que $0 < c < \pi/2$. Para qual valor de c a área da região delimitada pelas curvas $y = \cos x$, $y = \cos(x - c)$ e $x = 0$ é igual à área da região delimitada pelas curvas $y = \cos(x - c)$, $x = \pi$ e $y = 0$?

55. Para quais valores de m a reta $y = mx$ e a curva $y = x/(x^2 + 1)$ delimitam uma região? Encontre a área da região.

5–12 Esboce a região delimitada pelas curvas indicadas. Decida quando integrar em relação a x ou y. Desenhe um retângulo aproximante típico e identifique sua altura e largura. Então, calcule a área da região.

5. $y = e^x$, $y = x^2 - 1$, $x = -1$, $x = 1$

6. $y = \text{sen}\, x$, $y = x$, $x = \pi/2$, $x = \pi$

7. $y = x$, $y = x^2$

8. $y = x^2 - 2x$, $y = x + 4$

9. $y = 1/x$, $y = 1/x^2$, $x = 2$

10. $y = \text{sen}\, x$, $y = 2x/\pi$, $x \geqslant 0$

11. $x = 1 - y^2$, $x = y^2 - 1$

12. $4x + y^2 = 12$, $x = y$

13–28 Esboce a região delimitada pelas curvas indicadas e encontre sua área.

13. $y = 12 - x^2$, $y = x^2 - 6$

14. $y = x^2$, $y = 4x - x^2$

15. $y = e^x$, $y = xe^x$, $x = 0$

16. $y = \cos x$, $y = 2 - \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

17. $x = 2y^2$, $x = 4 + y^2$

18. $y = \sqrt{x - 1}$, $x - y = 1$

19. $y = \cos \pi x$, $y = 4x^2 - 1$

20. $x = y^4$, $y = \sqrt{2 - x}$, $y = 0$

21. $y = \text{tg}\, x$, $y = 2\,\text{sen}\, x$, $-\pi/3 \leqslant x \leqslant \pi/3$

22. $y = x^3$, $x = y$

23. $y = \cos x$, $y = \text{sen}\, 2x$, $x = 0$, $x = \pi/2$

24. $y = \cos x$, $y = 1 - \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$

25. $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{2}x$, $x = 9$

26. $y = |x|$, $y = x^2 - 2$

27. $y = 1/x$, $y = x$, $y = \frac{1}{4}x$, $x > 0$

28. $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = 2x^2$, $x + y = 3$, $x \geqslant 0$

29–30 Use o cálculo para encontrar a área do triângulo com os vértices dados.

29. (0, 0), (3, 1), (1, 2)

30. (0, 5), (2, −2), (5, 1)

2.1 Volumes por Fatiamento e Rotação em Torno de um Eixo

6.2 Exercícios

1–18 Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas em torno das retas especificadas. Esboce a região, o sólido e um disco ou arruela típicos.

1. $y = 2 - \frac{1}{2}x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 2;$ em torno do eixo x

2. $y = 1 - x^2,\ y = 0;$ em torno do eixo x

3. $y = 1/x,\ x = 1,\ x = 2,\ y = 0;$ em torno do eixo x

4. $y = \sqrt{25 - x^2},\ y = 0,\ x = 2,\ x = 4;$ em torno do eixo x

5. $x = 2\sqrt{y},\ x = 0,\ y = 9;$ em torno do eixo y

6. $y = \ln x,\ y = 1,\ y = 2,\ x = 0;$ em torno do eixo y

7. $y = x^3,\ y = x,\ x \geqslant 0;$ em torno do eixo x

8. $y = \frac{1}{4}x^2,\ y = 5 - x^2;$ em torno do eixo x

9. $y^2 = x,\ x = 2y;$ em torno do eixo y

10. $y = \frac{1}{4}x^2,\ x = 2,\ y = 0;$ em torno do eixo y

11. $y = x^2,\ x = y^2;$ em torno de $y = 1$

12. $y = e^{-x},\ y = 1,\ x = 2;$ em torno de $y = 2$

13. $y = 1 + \sec x,\ y = 3;$ em torno de $y = 1$

14. $y = \operatorname{sen} x,\ y = \cos x,\ 0 \leq x \leq \pi/4;$ em torno de $y = -1$

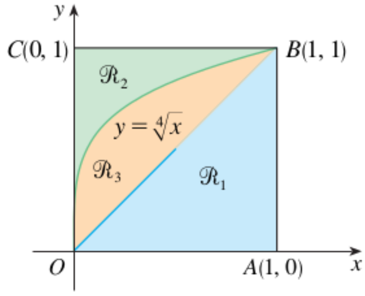
15. $x = y^2,\ x = 1;$ em torno de $x = 1$

16. $y = x,\ y = \sqrt{x};$ em torno de $x = 2$

17. $y = x^2,\ x = y^2;$ em torno de $x = -1$

18. $y = x,\ y = 0,\ x = 2,\ x = 4;$ em torno de $x = 1$

19–30 Veja a figura e encontre o volume gerado pela rotação da região ao redor da reta especificada.



19. $\mathcal{R}_1$ em torno de OA

20. $\mathcal{R}_1$ em torno de OC

21. $\mathcal{R}_1$ em torno de AB

22. $\mathcal{R}_1$ em torno de BC

23. $\mathcal{R}_2$ em torno de OA

24. $\mathcal{R}_2$ em torno de OC

25. $\mathcal{R}_2$ em torno de AB

26. $\mathcal{R}_2$ em torno de BC

27. $\mathcal{R}_3$ em torno de OA

28. $\mathcal{R}_3$ em torno de OC

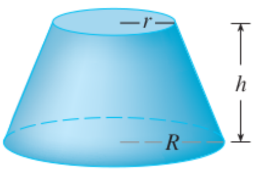
29. $\mathcal{R}_3$ em torno de AB

30. $\mathcal{R}_3$ em torno de BC

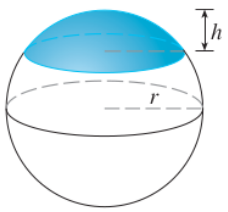
47–59 Encontre o volume do sólido S descrito.

47. Um cone circular reto com altura h e base com raio r.

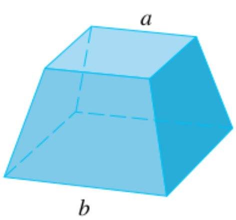
48. Um tronco de um cone circular reto com altura h, raio da base inferior R e raio de base superior r.



49. Uma calota de uma esfera de raio r e altura h.



50. Um tronco de pirâmide com base quadrada de lado b, topo quadrado de lado a e altura h.



O que acontece se $a = b$? O que acontece se $a = 0$?

51. Uma pirâmide com altura h e base retangular com lados b e $2b$.

53. Um tetraedro com três faces perpendiculares entre si e as três arestas perpendiculares entre si com comprimentos de 3 cm, 4 cm e 5 cm.

54. A base de S é um disco circular com raio r. As secções transversais paralelas, perpendiculares à base, são quadradas.

55. A base de S é uma região elíptica delimitada pela curva $9x^2 + 4y^2 = 36$. As secções transversais perpendiculares ao eixo x são triângulos isósceles retos com hipotenusa na base.

56. A base de S é a região triangular com vértices (0,0), (1,0), e (0,1). As secções transversais perpendiculares ao eixo y são triângulos equiláteros.

57. A base de S é a mesma base do Exercício 56, mas as secções transversais perpendiculares ao eixo x são quadradas.

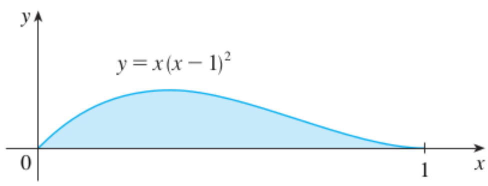
58. A base de S é a região delimitada pela parábola $y = 1 - x^2$ e pelo eixo x. As secções transversais perpendiculares ao eixo y são quadradas.

59. A base de S é a mesma base do Exercício 58, mas as secções transversais perpendiculares ao eixo x são triângulos isósceles com altura igual à base.

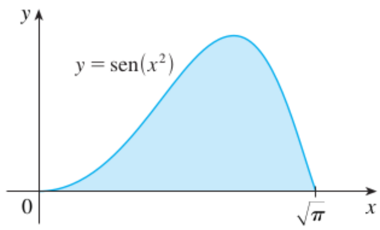
2.2 Volumes por Cascas Finitas

6.3 Exercícios

1. Considere S o sólido obtido pela rotação da região mostrada na figura em torno do eixo y. Explique por que é complicado usar fatias para encontrar o volume V de S. Esboce uma casca de aproximação típica. Quais são a circunferência e a altura? Use cascas para encontrar V.



2. Considere S o sólido obtido pela rotação da região mostrada na figura em torno do eixo y. Esboce uma casca cilíndrica típica e encontre sua circunferência e altura. Use cascas para encontrar o volume S. Você acha que esse método é preferível ao fatiamento? Explique.



3–7 Use o método das cascas cilíndricas para achar o volume gerado pela rotação da região delimitada pelas curvas em torno do eixo y.

3. $y = 1/x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2$

4. $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 1$

5. $y = e^{-x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

6. $y = 4x - x^2, \quad y = x$

7. $y = x^2, \quad y = 6x - 2x^2$

15–20 Use o método das cascas cilíndricas para achar o volume gerado pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas em torno do eixo especificado.

15. $y = x^4, \; y = 0, \; x = 1;$ em torno de $x = 2$

16. $y = \sqrt{x}, \; y = 0, \; x = 1;$ em torno de $x = -1$

17. $y = 4x - x^2, \; y = 3;$ em torno de $x = 1$

18. $y = x^2, \; y = 2 - x^2;$ em torno de $x = 1$

19. $y = x^3, \; y = 0, \; x = 1;$ em torno de $y = 1$

20. $y = x^2 + 1, \; x = 2;$ em torno de $y = -2$

1.4 Técnicas de Resolução (Integração por Partes)

7.1 Exercícios

1–2 Calcule a integral usando a integração por partes com as escolhas de u e dv indicadas.

1. $\int x^2 \ln x \, dx; \quad u = \ln x, \; dv = x^2\, dx$

2. $\int \theta \cos \theta \, d\theta; \quad u = \theta, \; dv = \cos\theta \, d\theta$

3–36 Calcule a integral.

3. $\int x \cos 5x \, dx$

4. $\int xe^{-x} \, dx$

5. $\int re^{r/2} \, dr$

6. $\int t \operatorname{sen} 2t \, dt$

19. $\int z^3 e^z \, dz$

20. $\int x \operatorname{tg}^2 x \, dx$

21. $\displaystyle\int \frac{xe^{2x}}{(1 + 2x)^2} \, dx$

22. $\int (\operatorname{arcsen} x)^2 \, dx$

23. $\int_0^{1/2} x \cos \pi x \, dx$

24. $\int_0^1 (x^2 + 1)\, e^{-x} \, dx$

25. $\int_0^1 t \cosh t \, dt$

26. $\displaystyle\int_4^9 \frac{\ln y}{\sqrt{y}} \, dy$

27. $\int_1^3 r^3 \ln r \, dr$

28. $\int_0^{2\pi} t^2 \operatorname{sen} 2t \, dt$

29. $\displaystyle\int_0^1 \frac{y}{e^{2y}} \, dy$

30. $\int_1^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\,(1/x) \, dr$

31. $\int_0^{1/2} \cos^{-1} x \, dx$

32. $\displaystyle\int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x^3} \, dx$

33. $\int \cos x \ln(\operatorname{sen} x) \, dx$

34. $\displaystyle\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{4 + r^2}} \, dr$

35. $\int_1^2 x^4 (\ln x)^2 \, dx$

36. $\int_0^t e^s \operatorname{sen}(t - s) \, ds$

1.4 Técnicas de Resolução (Relações Trigonométricas)

7.2 Exercícios

1–49 Calcule a integral.

1. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \, dx$

2. $\int \operatorname{sen}^6 x \cos^3 x \, dx$

3. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^7 \theta \cos^5 \theta \, d\theta$

4. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \, dx$

5. $\int \operatorname{sen}^2(\pi x) \cos^5(\pi x) \, dx$

6. $\int \dfrac{\operatorname{sen}^3(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \, dx$

7. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \, d\theta$

8. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(\frac{1}{3}\theta) \, d\theta$

9. $\int_0^{\pi} \cos^4(2t) \, dt$

10. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 t \cos^4 t \, dt$

11. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx$

12. $\int_0^{\pi/2} (2 - \operatorname{sen} \theta)^2 \, d\theta$

13. $\int t \operatorname{sen}^2 t \, dt$

14. $\int \cos \theta \cos^5(\operatorname{sen} \theta) \, d\theta$

15. $\int \dfrac{\cos^5 \alpha}{\sqrt{\operatorname{sen} \alpha}} \, d\alpha$

16. $\int x \operatorname{sen}^3 x \, dx$

17. $\int \cos^2 x \operatorname{tg}^3 x \, dx$

18. $\int \operatorname{cotg}^5 \theta \operatorname{sen}^4 \theta \, d\theta$

19. $\int \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x} \, dx$

20. $\int \cos^2 x \operatorname{sen} 2x \, dx$

1.4 Técnicas de Resolução (Substituição Trigonométrica)

7.3 Exercícios

1–3 Calcule a integral usando a substituição trigonométrica indicada. Esboce e coloque legendas no triângulo retângulo associado.

1. $\int \dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2 - 9}} \, dx; \quad x = 3 \sec \theta$

2. $\int x^3 \sqrt{9 - x^2} \, dx; \quad x = 3 \operatorname{sen} \theta$

3. $\int \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2 + 9}} \, dx; \quad x = 3 \operatorname{tg} \theta$

4–30 Calcule a integral.

4. $\int_0^1 x^3 \sqrt{1 - x^2} \, dx$

5. $\int_{\sqrt{2}}^2 \dfrac{1}{t^3\sqrt{t^2 - 1}} \, dt$

6. $\int_0^3 \dfrac{x}{\sqrt{36 - x^2}} \, dx$

7. $\int_0^a \dfrac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}; \quad a > 0$

8. $\int \dfrac{dt}{t^2\sqrt{t^2 - 16}}$

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + 16}}$

10. $\int \dfrac{t^5}{\sqrt{t^2 + 2}} \, dt$

11. $\int \sqrt{1 - 4x^2} \, dx$

12. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{5 - u^2}}$

21. $\int_0^{0,6} \dfrac{x^2}{\sqrt{9 - 25x^2}} \, dx$

22. $\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} \, dx$

1.4 Técnicas de Resolução (Frações Parciais)

7.4 Exercícios

1–6 Escreva as formas de decomposição em frações parciais da função (como no Exemplo 7). Não determine os valores numéricos dos coeficientes.

1. (a) $\dfrac{1 + 6x}{(4x - 3)(2x + 5)}$ (b) $\dfrac{10}{5x^2 - 2x^3}$

2. (a) $\dfrac{x}{x^2 + x - 2}$ (b) $\dfrac{x^2}{x^2 + x + 2}$

3. (a) $\dfrac{x^4 + 1}{x^5 + 4x^3}$ (b) $\dfrac{1}{(x^2 + 9)^2}$

4. (a) $\dfrac{x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1}$ (b) $\dfrac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 + x}$

7–38 Calcule a integral.

15. $\int_3^4 \dfrac{x^3 - 2x^2 - 4}{x^3 + 2x^2} dx$

16. $\int_0^1 \dfrac{x^3 - 4x - 10}{x^2 - x - 6} \, dx$

17. $\int_1^2 \dfrac{4y^2 - 7y - 12}{y(y + 2)(y - 3)} dy$

18. $\int \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - x} \, dx$

1.5 Integrais Impróprias

7.8 Exercícios

1. Explique por que cada uma das seguintes integrais é imprópria.

(a) $\int_1^2 \frac{x}{x-1}\,dx$ (b) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,dx$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx$ (d) $\int_{-\infty}^{\pi/4} \cot x\,dx$

2. Quais das seguintes integrais são impróprias? Por quê?

(a) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx$ (b) $\int_0^{\pi} \operatorname{tg} x\,dx$

(c) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-x-2}\,dx$ (d) $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$

3. Encontre a área sob a curva $y = 1/x^3$ de $x = 1$ a $x = t$ e calcule-a para $t = 10$, 100 e 1 000. Então encontre a área total dessa curva para $x \geqslant 1$.

49–54 Use o Teorema da Comparação para determinar se a integral é convergente ou divergente.

49. $\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx$

50. $\int_1^\infty \frac{2+e^{-x}}{x}\,dx$

51. $\int_1^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^4-x}}\,dx$

52. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{2+e^x}\,dx$

53. $\int_0^1 \frac{\sec^2 x}{x\sqrt{x}}\,dx$

54. $\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{x}}\,dx$

5–40 Determine se cada integral é convergente ou divergente. Calcule aquelas que são convergentes.

5. $\int_3^\infty \frac{1}{(x-2)^{3/2}}\,dx$

6. $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{1+x}}\,dx$

7. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{3-4x}\,dx$

8. $\int_1^\infty \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$

9. $\int_2^\infty e^{-5p}\,dp$

10. $\int_{-\infty}^0 2^r\,dr$

11. $\int_0^\infty \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}\,dx$

12. $\int_{-\infty}^\infty (y^3-3y^2)\,dy$

13. $\int_{-\infty}^\infty x e^{-x^2}\,dx$

14. $\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

25. $\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx$

26. $\int_0^\infty \frac{x \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}\,dx$

27. $\int_0^1 \frac{3}{x^5}\,dx$

28. $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx$

29. $\int_{-2}^{14} \frac{1}{\sqrt[4]{x+2}}\,dx$

30. $\int_6^8 \frac{4}{(x-6)^3}\,dx$

31. $\int_{-2}^3 \frac{1}{x^4}\,dx$

32. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

33. $\int_0^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$

34. $\int_0^5 \frac{w}{w-2}\,dw$

35. $\int_0^3 \frac{dx}{x^2-6x+5}$

36. $\int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{cossec} x\,dx$

37. $\int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$

38. $\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$

39. $\int_0^2 z^2 \ln z\,dz$

40. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

2.3 Comprimento de Curvas Planas

8.1 Exercícios

1. Use a fórmula do comprimento de arco $\boxed{3}$ para encontrar o comprimento da curva $y = 2x - 5, -1 \leqslant x \leqslant 3$. Verifique o seu resultado observando que a curva é um segmento de reta e calculando seu comprimento pela fórmula da distância.

2. Use a fórmula do comprimento de arco para encontrar o comprimento da curva $y = \sqrt{2 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Verifique sua resposta observando que a curva é parte de um círculo.

3–6 Escreva uma integral para o comprimento da curva. Use sua calculadora para encontrar o comprimento da curva com precisão de quatro casas decimais.

3. $y = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

4. $y = xe^{-x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2$

5. $x = \sqrt{y} - y, \quad 1 \leqslant y \leqslant 4$

6. $x = y^2 - 2y, \quad 0 \leqslant y \leqslant 2$

7–18 Encontre o comprimento exato da curva.

7. $y = 1 + 6x^{3/2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

8. $y^2 = 4(x + 4)^3, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \quad y > 0$

9. $y = \dfrac{x^5}{6} + \dfrac{1}{10x^3}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2$

10. $x = \dfrac{y^4}{8} + \dfrac{1}{4y^2}, \quad 1 \leqslant y \leqslant 2$

11. $x = \frac{1}{3}\sqrt{y}\,(y - 3), \quad 1 \leqslant y \leqslant 9$

12. $y = \ln(\cos x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

13. $y = \ln(\sec x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/4$

14. $y = 3 + \frac{1}{2}\cosh 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

15. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2$

16. $y = \sqrt{x - x^2} + \operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{x})$

17. $y = \ln(1 - x^2), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$

18. $y = 1 - e^{-x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2$

2.4 Áreas de Superfícies de Revolução

8.2 Exercícios

1–4

(a) Escreva uma integral para a área da superfície obtida pela rotação da curva em torno do (i) eixo x e (ii) eixo y.

(b) Use o recurso de integração numérica de sua calculadora para calcular as áreas da superfície com precisão de quatro casas decimais.

1. $y = \operatorname{tg} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

2. $y = x^{-2}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2$

3. $y = e^{-x^2}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$

3. $x = \ln(2y + 1), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$

5–12 Calcule a área exata da superfície obtida pela rotação da curva em torno do eixo x.

5. $y = x^3, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2$

6. $9x = y^2 + 18, \quad 2 \leqslant x \leqslant 6$

7. $y = \sqrt{1 + 4x}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 5$

8. $y = \sqrt{1 + e^x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

9. $y = \operatorname{sen} \pi x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

10. $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}, \quad \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$

11. $x = \frac{1}{3}(y^2 + 2)^{3/2}, \quad 1 \leqslant y \leqslant 2$

12. $x = 1 + 2y^2, \quad 1 \leqslant y \leqslant 2$

13–16 A curva dada é girada em torno do eixo y. Calcule a área da superfície resultante.

13. $y = \sqrt[3]{x}, \quad 1 \leqslant y \leqslant 2$

26. Se a curva infinita $y = e^{-x}$, $x \geqslant 0$, é girada em torno do eixo x, calcule a área da superfície resultante.

27. (a) Se $a > 0$, encontre a área da superfície gerada pela rotação da curva $3ay^2 = x(a - x)^2$ em torno do eixo x.

(b) Encontre a área da superfície se a rotação for em torno do eixo y.

28. Um grupo de engenheiros está construindo uma antena parabólica cujo formato será formado pela rotação da curva $y = ax^2$ em torno do eixo y. Se a antena tiver 10 pés de diâmetro e uma profundidade máxima de 2 pés, encontre o valor de a e a área de superfície da antena.