Encontre os pontos críticos da função

$$f(x) = \int_0^{x^2} (t-1)\, e^{t^2}\, dt$$

e classifique-os:

Solução:

Os Pontos críticos (P.C) acontecem onde

$f'(x) = 0$ ou $f'(x)$ não existe.

Vamos então derivar:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\int_0^{x^2} (t-1)\, e^{t^2}\, dt$$

$$= \underbrace{\frac{d}{du}\int_0^{u} (t-1)\, e^{t^2}\, dt}_{\text{TFC 1}} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\boxed{u = x^2}$$

$$= (u-1)\, e^{u^2} \cdot 2x$$

$$= (x^2-1)\, e^{x^4} \cdot 2x$$

Existe algum x que faz essa expressão não existir? NÃO

Se existisse ele teria que ser testado para saber se seria maior ou menor valor em suas vizinhanças. O teste da derivada segunda não serviria.

Quando isso é zero?

$$\frac{df(x)}{dx} \overset{?}{=} 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} (x^2-1)\, e^{x^4} \cdot 2x = 0 \\ e^{x^4} \text{ sempre é maior que zero.} \end{array} \right.$$

$(x^2-1)\, 2x = 0$

Isso é zero quando $2x = 0 \therefore \boxed{x=0}$

ou

$x^2 - 1 = 0 \therefore x^2 = 1$

$\boxed{x=1}$ ou $\boxed{x=-1}$

Temos três pontos $x=1$, $x=-1$ e $x=0$

Vamos aplicar o teste da derivada segunda:

$$\frac{df(x)}{dx} = (x^2-1)e^{x^4} \cdot 2x = (2x^3-2x)\, e^{x^4}$$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left([2x^3-2x]\, e^{x^4}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}[2x^3-2x]\, e^{x^4} + [2x^3-2x]\frac{d}{dx}e^{x^4}$$

Mudei a notação p/ a de Lagrange.

$$f''(x) = [6x^2-2]e^{x^4} + [2x^3-2x] \cdot e^{x^4} \cdot 4x^3$$

$$f''(x) = e^{x^4}[6x^2-2 + 8x^6 - 8x^4]$$

Vamos testar os pontos

$f''(0) = e^0 [\ -2\ ] = -2$ é negativo

$f''(1) = e^1 [6 - 2 + 8 - 8] = 4$ é positivo

$f''(-1) = e^1 [6 - 2 + 8 - 8] = 4$ é positivo

$\boxed{-1, 1 \text{ são pontos de mínimo.} \quad 0 \text{ é ponto de máximo}}$