Substituição Trigonométrica

$\sqrt{a^2-x^2}$ $\quad x = a\,\text{sen}\,\theta \quad 1-\text{sen}^2\theta = \cos^2\theta$

$\sqrt{a^2+x^2}$ $\quad x = a\,\text{tg}\,\theta \quad 1+\text{tg}^2\theta = \sec^2\theta$

$\sqrt{x^2-a^2}$ $\quad x = a\sec\theta \quad \sec^2\theta - 1 = \text{tg}^2\theta$

1) $\displaystyle\int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,dx$

$x = 5\,\text{sen}\,\theta$

$25-(5\,\text{sen}\,\theta)^2 =$

$25-25\,\text{sen}^2\theta = 25\cos^2\theta$

$x = 5\,\text{sen}\,\theta \quad \therefore \quad \frac{dx}{d\theta} = 5\cos\theta$

$\therefore \quad dx = 5\cos\theta\,d\theta$

$\displaystyle\int_{?}^{?}\sqrt{25\cos^2\theta}\cdot 5\cos\theta\,d\theta$

Quando $x=-5$, $\quad x = 5\,\text{sen}\,\theta$

$-5 = 5\,\text{sen}\,\theta$

$-1 = \text{sen}\,\theta \quad \therefore \quad \theta = \text{arc sen}(-1)$

$\theta = -\frac{\pi}{2}$

Quando $x=5$, $\quad x = 5\,\text{sen}\,\theta$

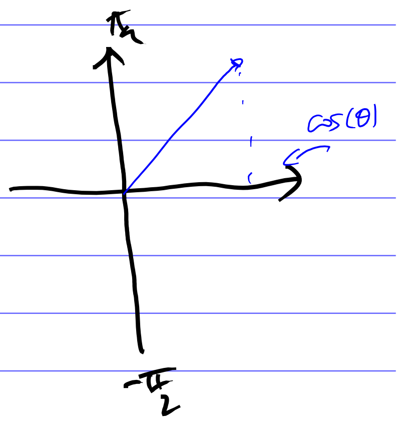
$5 = 5\,\text{sen}\,\theta$

$\text{sen}\,\theta = 1$

$\theta = \text{arc sen}(1)$

$\theta = \frac{\pi}{2}$

$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{25\cos^2\theta}\cdot 5\cos\theta\,d\theta$



$= \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 5\cos\theta\; 5\cos\theta\,d\theta$

$= \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (5\cos\theta)^2\,d\theta = 25\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$

Agora vou utilizar a técnica chamada
Uso de Relações Trigonométricas

$\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$

$\text{sen}^2\theta = \dfrac{1-\text{sen}(2\theta)}{2}$

$25\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta = 25\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\theta)\right)d\theta$

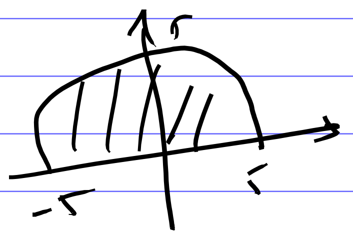
$= 25\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\,d\theta + 25\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos(2\theta)\,d\theta$

$= 25\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] + 25\cdot\frac{1}{2}\left.\frac{\text{sen}(2\theta)}{2}\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= 25\cdot\frac{1}{2}[\pi] + \frac{25}{4}\left(\text{sen}(\pi)-\text{sen}(-\pi)\right)$

$= \dfrac{25\pi}{2}$

$\displaystyle\int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,dx$ $\quad$ Graficamente:



$A = \dfrac{\pi r^2}{2}$

$\boxed{A = \dfrac{25\pi}{2}}$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ $x = tg\,\theta$ $tg^2\theta + 1 = sec^2\theta$

Quando $x=0$, $0 = tg\,\theta$
$\theta = arc\,tg\,0$
$\theta = 0$

Quando $x=1$, $1 = tg\,\theta$
$\theta = arc\,tg(1)$
$\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{d}{d\theta} tg\theta = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{sen\theta}{cos\theta}\right)$$
$$= \frac{cos\theta\,cos\theta - sen\theta(-sen\theta)}{cos^2\theta}$$
$$= \frac{cos^2\theta + sen^2\theta}{cos^2\theta}$$
$$= \frac{1}{cos^2\theta} = sec^2\theta$$

$$sec\theta = \frac{1}{cos\theta}$$
$$cossec\theta = \frac{1}{sen\theta}$$

$x = tg\theta \therefore \frac{dx}{d\theta} = sec^2\theta \therefore dx = sec^2\theta\, d\theta$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{sec^2\theta\, d\theta}{(sec^2\theta)^2} = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{sec^2\theta}\, d\theta$$

Usar relação trigonométrica

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2\theta\, d\theta$$

Novamente vou usar relação trigonométrica

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{\frac{1}{2} + \frac{cos(2\theta)}{2}\right\} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\, d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{cos(2\theta)}{2}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) + \frac{sen(2\theta)}{4}\Bigg|_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{\pi}{8} + \left[\left(\frac{sen(\frac{\pi}{2})}{4}\right) - \left(\frac{sen(0)}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

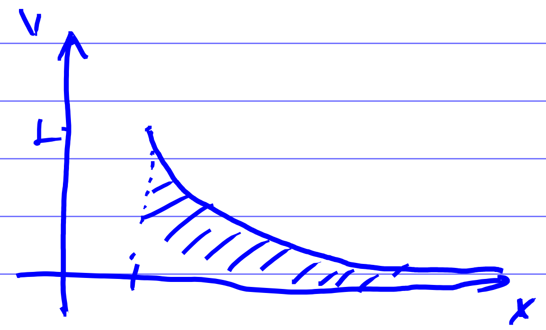
$\boxed{\text{Integral imprópria}}$

$\boxed{\text{Fractal}}$ ← Procurar no google.

① $$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \ln x \Big|_1^R$$

$$= \lim_{R\to+\infty} (\ln R - \ln 1)$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \ln R = +\infty$$



Nós afirmamos que a integral DIVERGE.

② $$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_1^R \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_1^R x^{-2}\,dx$$

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{x^{-2+1}}{(-2+1)}\Bigg|_1^R = \lim_{R\to+\infty} \left\{ \left(\frac{R^{-1}}{-1}\right) - \left(\frac{1^{-1}}{-1}\right) \right\}$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \left\{ \left(-\frac{1}{R}\right) + 1 \right\}$$

$$= 1$$

Dizemos que a integral $\boxed{\text{converge}}$.

③ $$\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx$$ Pq é imprópria?

$$\lim_{R\to 0^+} \int_R^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx = \dots$$

Teorema da variação total

51. Se $w'(t)$ for a taxa de crescimento de uma criança em quilogramas por ano, o que $\int_5^{10} w'(t)\,dt$ representa? $\int_5^{10} w'(t)dt = w(10) - w(5)$

52. A corrente em um fio elétrico é definida como a derivada da carga: $I(t) = Q'(t)$. (Veja o Exemplo 3 na Seção 3.7.) O que $\int_a^b I(t)\,dt$ representa? $\int_a^b I(t)\,dt = \int_a^b Q'(t)dt = Q(b) - Q(a)$

53. Se vazar óleo de um tanque a uma taxa de $r(t)$ galões por minuto em um instante t, o que $\int_0^{120} r(t)\,dt$ representa?

54. Uma colmeia com uma população inicial de 100 abelhas cresce a uma taxa de $n'(t)$ por semana. O que representa $\boxed{100 + \boxed{\int_0^{15} n'(t)\,dt}}$? variação na popul. População na 15ª sem.

55. Na Seção 4.7 definimos a função rendimento marginal $R'(x)$ como a derivada da função rendimento $R(x)$, onde x é o número de unidades vendidas. O que representa $\int_{1000}^{5000} R'(x)\,dx$?

56. Se $f(x)$ for a inclinação de uma trilha a uma distância de x quilômetros do começo dela, o que $\int_3^5 f(x)\,dx$ representa?

57. Se x é medido em metros e $f(x)$, em newtons, quais são as unidades de $\int_0^{100} f(x)\,dx$?

58. Se as unidades para x são pés e as unidades para $a(x)$ são libras por pé, quais são as unidades para da/dx? Quais são as unidades para $\int_2^8 a(x)\,dx$?