Substituição

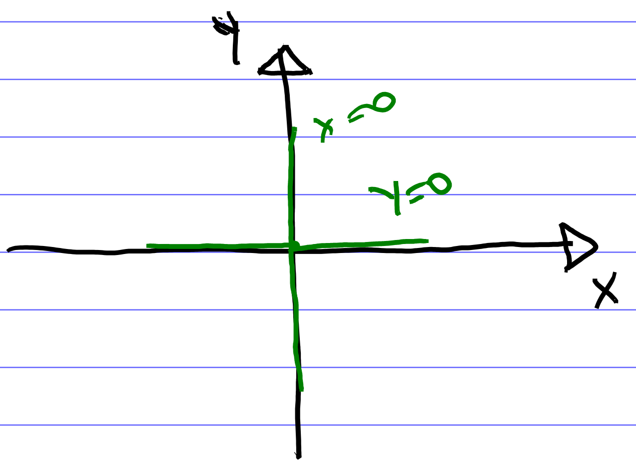
$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} x^3+x^2+y = 1$$

Manipulação algébrica

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x^2-1)y}{(x-1)} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)y}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} (x+1)y = 2$$

Limites

(1) Mostre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ não existe



caminho

$y=0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-0^2}{x^2+0^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1$$

caminho

$x=0$

$$\lim_{y\to 0} \frac{0^2-y^2}{0^2+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2} = -1$$

Como existem dois caminhos com resultados distintos, afirmo que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \nexists$$

(2) Se $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$, calcule $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Caminho $x=0$

$$\lim_{y\to 0} \frac{0}{0^2+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = 0$$

Caminho $x=y$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Como existem dois caminhos com resultados distintos, afirmo que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \nexists$$

INDETERMINAÇÃO

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x}{x} = 3$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{100x}{x} = 100$$

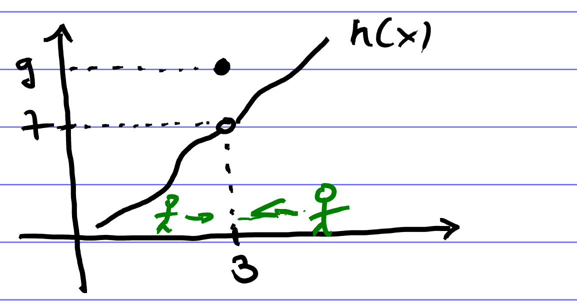
$f(x) = \frac{x}{x},\ x\neq 0$

$f(x) = 1,\ x\in\mathbb{R}$

$g(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

$\neq$

$g(x) = x-1$

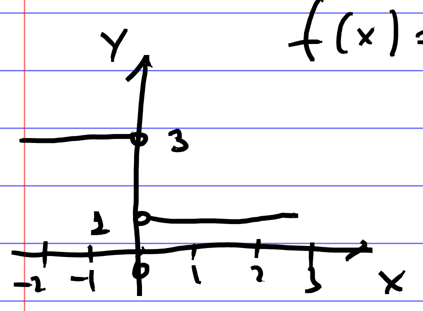


$$\lim_{x\to 3} h(x) = 7$$

$h(3) = 9$

Como $\lim_{x\to 3} h(x) \neq h(3)$ a função é descontínua no ponto 3

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x<0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$$



$$\lim_{x\to 0} f(x) =$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 3$$

Como os limites laterais são diferentes então $\lim_{x\to 0} f(x) \nexists$

$H \longrightarrow$

$T \downarrow$

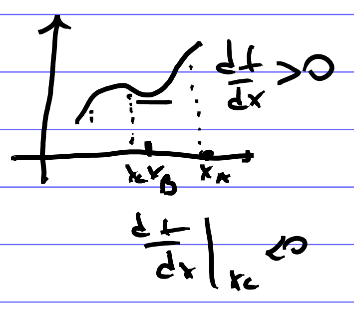
Umidade relativa (%)

T \ H	40	45	50	55	60	65	70	75	80
26	28	28	29	31	31	32	33	34	35
28	31	32	33	34	35	36	37	38	39
30	34	35	36	37	38	40	41	42	43
32	37	38	39	41	42	43	45	46	47
34	41	42	43	45	47	48	49	51	52
36	43	45	47	48	50	51	53	54	56

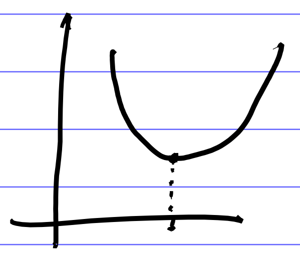
Temperatura real (°C)

$S(H, T)$

$S(40, 26) = 28$



$\frac{\partial S}{\partial H}$ Calcule a derivada parcial de S em relação a H.



$\frac{\partial S}{\partial T}$ Calcule a derivada parcial de S em relação a T.

$f = f(x)$ $\quad \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$S = S(H,T)$ $\quad \frac{\partial S}{\partial H} = \lim_{\Delta H \to 0} \frac{S(H+\Delta H, T) - S(H,T)}{\Delta H}$

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{S(H, T+\Delta T) - S(H,T)}{\Delta T}$$

Estimativas

Umidade relativa (%)

T \ H	40	45	50	55	60	65	70	75	80
26	28	28	29	31	31	32	33	34	35
28	31	32	33	34	35	36	37	38	39
30	34	35	36	37	$\boxed{38}$	40	41	42	43
32	37	38	39	41	42	43	45	46	47
34	41	42	43	45	47	48	49	51	52
36	43	45	47	48	50	51	53	54	56

Temperatura real (°C)

$$\left.\frac{\partial S}{\partial H}\right|_{(60,30)} = \frac{\partial S(60,30)}{\partial H} = S_H(60,30)$$

$$\left.\frac{\partial S}{\partial H}\right|_{(60,30)} \approx \frac{S(H+\Delta H, T) - S(H,T)}{\Delta H}$$

$\Delta H = 5$

$$\approx \frac{S(60+5,30) - S(60,30)}{5}$$

$$\approx \frac{40 - 38}{5}$$

$$\approx \frac{2}{5}$$

Melhoramos a estimativa:

$\Delta H = -5$

$$\approx \frac{S(60-5,30) - S(60,30)}{-5}$$

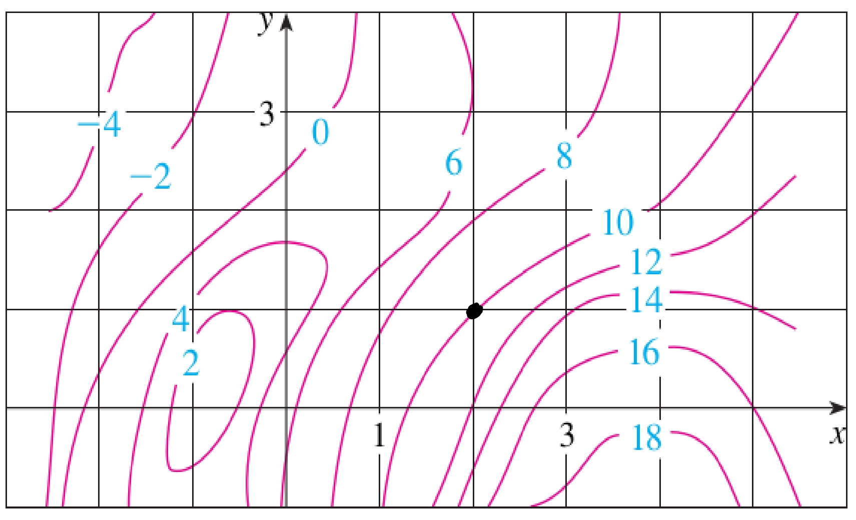
$$\approx \frac{37 - 38}{-5}$$

$$\approx \frac{-1}{-5}$$

$$\approx \frac{1}{5}$$

A média: $\left.\frac{\partial S}{\partial H}\right|_{(60,30)} \approx \frac{\frac{1}{5} + \frac{2}{5}}{2} = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{3}{10}$

10. Um mapa de contorno de uma função f é apresentado. Utilize-o para estimar $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$.



$$f_x(2,1) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,1)} \approx \frac{\frac{f(2+1,1) - f(2,1)}{1} + \frac{f(2-1,1) - f(2,1)}{(-1)}}{2}$$

$$\approx \frac{\frac{14 - 10}{1} + \frac{7 - 10}{(-1)}}{2}$$

$$\approx \frac{4 + (-3)}{2} = \frac{1}{2}$$

Notações para as Derivadas Parciais Se $z = f(x, y)$, escrevemos

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Regra para Determinar as Derivadas Parciais de $z = f(x, y)$

1. Para determinar f_x, trate y como uma constante e derive $f(x, y)$ com relação a x.
2. Para determinar f_y, trate x como uma constante e derive $f(x, y)$ com relação a y.

15–40 Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função.

15. $f(x, y) = y^5 - 3xy$

16. $f(x, y) = x^4 y^3 + 8x^2 y$

17. $f(x, t) = e^{-t} \cos \pi x$

18. $f(x, t) = \sqrt{x} \ln t$

29. $F(x, y) = \int_y^x \cos(e^t)\, dt$

30. $F(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta \sqrt{t^3 + 1}\, dt$

$f(x,y) = x + y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x+y) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$= 1 + 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x+y) = \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial y}$$

$$= 0 + 1 = 1$$

$g(x,y) = xy$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) = y\frac{\partial x}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy) = x\frac{\partial y}{\partial y} = x$$

$g(x,y) = y^5 - 3xy$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y^5 - 3xy) = \frac{\partial y^5}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(3xy)$$

$$= 0 - 3y\frac{\partial x}{\partial x}$$

$$= -3y$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y^5 - 3xy) = \frac{\partial}{\partial y}y^5 - \frac{\partial}{\partial y}(3xy)$$

$$= 5y^4 - 3x\frac{\partial y}{\partial y}$$

$$= 5y^4 - 3x$$