Substituição Trigonométrica

		TF Trigonométrica
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\,\text{sen}\,\theta$	$1-\text{sen}^2\theta = \cos^2\theta$ $\boxed{a^2 - a^2\text{sen}^2\theta = a^2\cos^2\theta}$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a\,\text{tg}\,\theta$	$1+\text{tg}^2\theta = \sec^2\theta$ $\boxed{a^2+a^2\text{tg}^2\theta = a^2\sec^2\theta}$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\sec\theta$	$\sec^2\theta - 1 = \text{tg}^2\theta$ $\boxed{a^2\sec^2\theta - a^2 = a^2\text{tg}^2\theta}$

① $\displaystyle\int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,dx$

$1-\text{sen}^2\theta = \cos^2\theta$

$5^2 - 5^2\text{sen}^2\theta = \boxed{5^2\cos^2\theta}$

$x = 5\,\text{sen}\,\theta$ ∴ $\dfrac{dx}{d\theta} = 5\cos\theta$

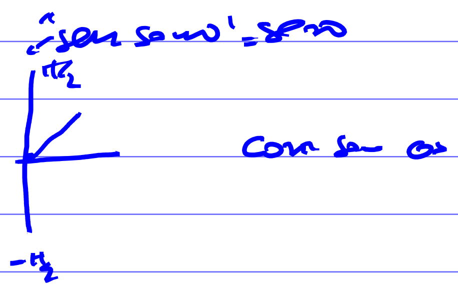
Quando $x=-5$, $\quad -5 = 5\,\text{sen}\,\theta \qquad dx = 5\cos\theta\, d\theta$

$-1 = \text{sen}\,\theta$

$\text{sen}\,\theta = -1$

$\theta = \text{arc sen}(-1)$

$\theta = -\frac{\pi}{2}$



Quando $x = 5$, $\quad 5 = 5\,\text{sen}\,\theta$

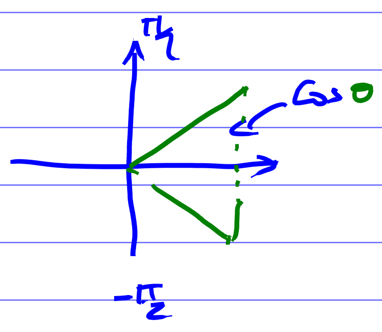
$1 = \text{sen}\,\theta$

$\text{sen}\,\theta = 1$

$\theta = \text{arc sen}(1)$

$\theta = \frac{\pi}{2}$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{25\cos^2\theta}\;5\cos\theta\,d\theta$$



$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 5\cos\theta\;5\cos\theta\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 25\cos^2\theta\,d\theta$$

$\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$

$\text{sen}^2\theta = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$

Agora vou utilizar a técnica chamada
Uso de Relações Trigonométricas

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 25\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\theta)\right)d\theta$$

Fiz de cabeça.
Poderia ter feito
Por substituição ***

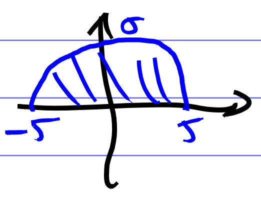
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 25\left(\frac{1}{2}\right)d\theta + \boxed{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 25\left(\frac{1}{2}\cos(2\theta)\right)d\theta}$$

$$= \frac{25}{2}\theta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{25}{2}\left[\frac{\text{sen}(2\theta)}{2}\right]\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{25}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] + \frac{25}{2}\left[\frac{\text{sen}(\pi)}{2} - \frac{\text{sen}(-\pi)}{2}\right]$$

$$= \frac{25\pi}{2} + 0 = \frac{25\pi}{2}$$

Poderíamos ter feito graficamente



$A = \dfrac{\text{Área do círculo}}{2}$

$A = \dfrac{\pi r^2}{2}$

$A = \dfrac{\pi\, 25}{2}$

$A = \dfrac{25\pi}{2}$

*** Fazendo por substituição.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 25\left(\frac{1}{2}\cos(2\theta)\right)d\theta$$

$u = 2\theta$ ∴ $\dfrac{du}{d\theta} = 2$ ∴ $\dfrac{du}{2} = d\theta$

Quando $\theta = -\frac{\pi}{2}$, $u = -\pi$

" $\theta = \frac{\pi}{2}$, $u = \pi$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{25}{2}\cos u\,\frac{du}{2} = \frac{25}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\cos u\,du$$

$$= \frac{25}{4}\,\text{sen}\,u\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{25}{4}\left(\text{sen}\,\pi\right) - \left(\text{sen}(-\pi)\right)$$

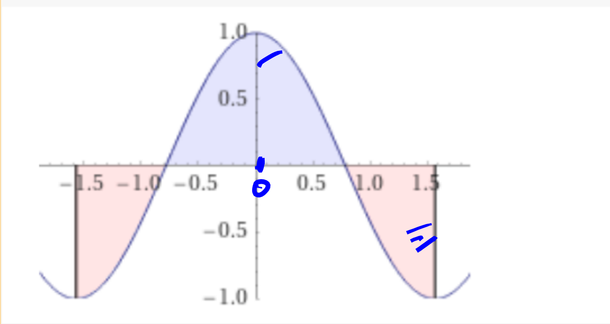
$$= \frac{25}{4}(0-0)$$

$$= 0$$

Definite integral:

$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(2x)\,dx = 0 \quad = 2\int_0^{\pi/2}\cos(2x)\,dx$

Visual representation of the integral:



(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

$1 + tg^2\theta = sec^2\theta$

$tg^2\theta + 1 = sec^2\theta$

$x^2 + 1 = sec^2\theta$

$sec\,\theta = \frac{1}{cos\theta}$

$x = tg\theta$

$cossec\,\theta = \frac{1}{sen\theta}$

$x = tg\theta \quad \therefore \quad \frac{d}{d\theta}\left(\frac{sen\theta}{cos\theta}\right) = \frac{cos\theta\, cos\theta - sen\theta\,(-sen\theta)}{cos^2\theta}$

$= \frac{cos^2\theta + sen^2\theta}{cos^2\theta}$

$= \frac{1}{cos^2\theta} = sec^2\theta$

$\frac{dx}{d\theta} = sec^2\theta$

Quando $x = 0$, $\overset{x = tg\theta}{0 = tg\theta}$

$\theta = arctg\, 0$

Quando $x = 1$, $1 = tg\theta$

$\theta = arctg\,(1)$

$\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{sec^2\theta \; d\theta}{(sec^2\theta)^2}$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{sec^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} cos^2\theta \; d\theta = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{2} + \frac{cos(2\theta)}{2}\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}\, d\theta + \int_0^{\pi/4} \frac{cos(2\theta)}{2}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) + \left.\frac{sen(2\theta)}{4}\right|_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{\pi}{8} + \left[\frac{sen\left(\frac{\pi}{2}\right)}{4} - \frac{sen(0)}{4}\right]$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

Integral imprópria

(1) $$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$$

(2) $$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$$

(3) $$\int_0^{1} \frac{1}{x^{1/2}}\, dx$$

Teorema da variação total

51. Se $w'(t)$ for a taxa de crescimento de uma criança em quilogramas por ano, o que $\int_5^{10} w'(t)\,dt$ representa?

52. A corrente em um fio elétrico é definida como a derivada da carga: $I(t) = Q'(t)$. (Veja o Exemplo 3 na Seção 3.7.) O que $\int_a^b I(t)\,dt$ representa?

53. Se vazar óleo de um tanque a uma taxa de $r(t)$ galões por minuto em um instante t, o que $\int_0^{120} r(t)\,dt$ representa?

54. Uma colmeia com uma população inicial de 100 abelhas cresce a uma taxa de $n'(t)$ por semana. O que representa $100 + \int_0^{15} n'(t)\,dt$?

55. Na Seção 4.7 definimos a função rendimento marginal $R'(x)$ como a derivada da função rendimento $R(x)$, onde x é o número de unidades vendidas. O que representa $\int_{1000}^{5000} R'(x)\,dx$?

56. Se $f(x)$ for a inclinação de uma trilha a uma distância de x quilômetros do começo dela, o que $\int_3^5 f(x)\,dx$ representa?

57. Se x é medido em metros e $f(x)$, em newtons, quais são as unidades de $\int_0^{100} f(x)\,dx$?

58. Se as unidades para x são pés e as unidades para $a(x)$ são libras por pé, quais são as unidades para da/dx? Quais são as unidades para $\int_2^8 a(x)\,dx$?