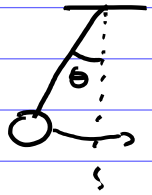
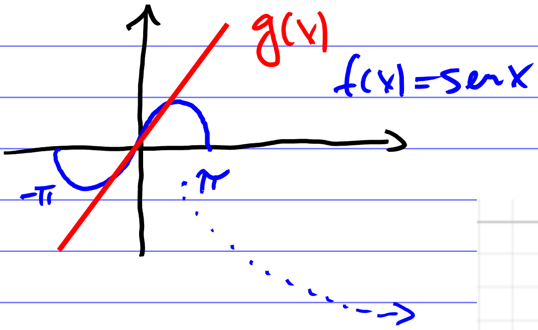
# Aproximação Linear

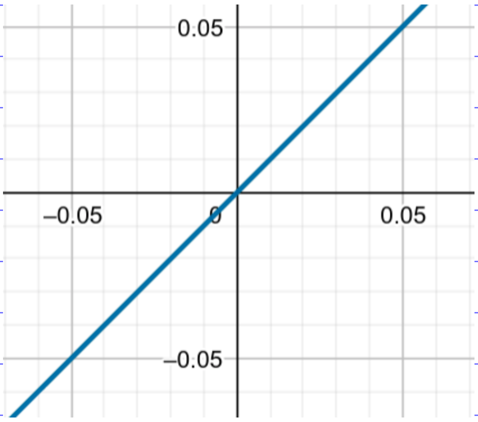
$$f(x) = \text{sen}\, x$$




$\text{sen}\, x \approx x$ perto do zero




ZOOM




## Eq. da reta tangente

$$y = y_0 + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} (x - x_0)$$

$$(x_0, y_0) = (0, 0)$$

$$f(x) = \text{sen}\, x$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \cos x \quad \therefore \quad \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=0} = 1$$

$$y = 0 + 1\,(x - 0)$$

$$\boxed{y = x}$$ Eq. da reta

Vou transformá-la em função

$$\boxed{g(x) = x}$$ → Essa é aproximação linear.

É a aproximação linear para funções de mais de uma variável?

Basta calcular a eq. do plano tangente.

Exemplo: Calcule a aproximação linear para $f(x,y)=\sqrt{xy}$ em torno do ponto $(1,2)$

Solução: Vamos calcular a eq. do plano tangente à superfície dada por $f(x,y)=\sqrt{xy}$ no ponto $(1,2)$

$$Z = z_0 + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}(x-x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}(y-y_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{y}{\sqrt{xy}} \therefore \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy)^{1/2} = \frac{1}{2}(xy)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(xy)$$

$$= \frac{x}{2\sqrt{xy}}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,2)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$Z = z_0 + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}(x-x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}(y-y_0)$$

Quem é $z_0$? $z=\sqrt{xy}$

$z_0=\sqrt{x_0y_0}$

$z_0=\sqrt{1(2)}=\sqrt{2}$

$$z = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x-1) + \frac{\sqrt{2}}{4}(y-2)$$

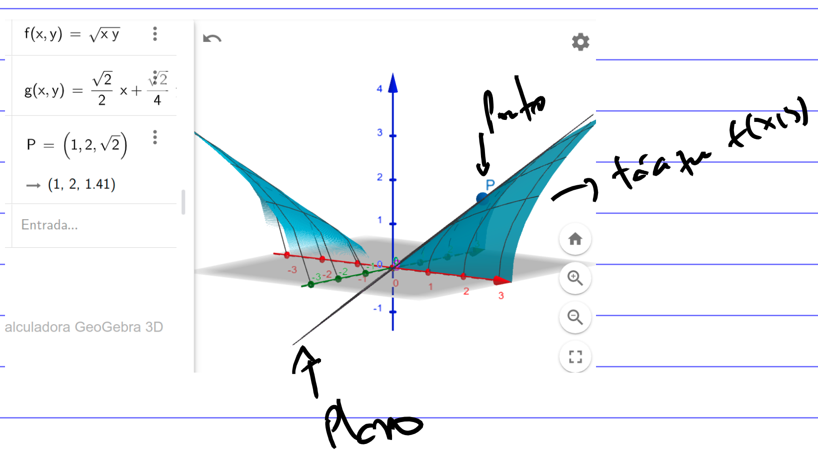
$$z = \cancel{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}x - \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{4}y - \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\boxed{z = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}y}$$

A aproximação linear é portanto

$$g(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}y$$

$g(x,y)$ é a aproximação linear para $f(x,y)$ nas vizinhanças do ponto $(1,2)$.




https://www.geogebra.org/3d/pqzzgmfb

# Regra da cadeia

$$f(x) = \cos(x^2)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = -\text{sen}(x^2) \cdot 2x$$

## Notações

$\dot{x}$ é a notação de Newton $\quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$

velocidade $\quad$ aceleração

$\frac{dx}{dt}$ é a notação de Leibniz

$x'$ é a notação de Lagrange.

$$f(x) = \cos(x^2)$$

$f(x) = \cos(g(x))$ onde $g(x) = x^2$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

$$\frac{df}{dx} = -\text{sen}(g(x))\, 2x$$

$$= -\text{sen}(x^2) \cdot 2x$$

## OUTRO EXEMPLO.

$$y = \text{sen}(\exp[\cos(x^3)])$$

$$\frac{dy}{dx} = ?$$

$u = x^3$

$y = \text{sen}(\exp(\cos(u)))$

$v = \cos(u)$

$y = \text{sen}(\exp(v))$

$w = \exp(v)$

$y = \text{sen}\, w$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos w \cdot \exp(v)\,(-\text{sen}(u))\, 3x^2$$

$$= \cos(\exp(\cos(x^3))) \cdot \exp[\cos(x^3)] \cdot (-\text{sen}\, x^3) \cdot 3x^2$$

# Regra da cadeia

$$f(x,y) = x^2 y$$

$$x = \cos^2 t \qquad y = e^t$$

$$\frac{df}{dt} = ?$$

A maneira mais fácil é substituir e derivar

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

derivada pois x é função apenas de t.

derivada parcial pois f é função de x e y.

$$f(x,y) = x^2 y$$

$$x = \cos^2 t \qquad y = e^t$$

$$\frac{df}{dt} = 2xy \cdot 2\cos t \cdot (-\operatorname{sen} t) + x^2 e^t$$

$$\frac{df}{dt} = -4xy\cos t \operatorname{sen} t + x^2 e^t$$

$$= -4\cos^2 t \cdot e^t \cdot \cos t \operatorname{sen} t + \cos^4 t\, e^t$$

$$= -4\cos^3 t \operatorname{sen} t\, e^t + \cos^4 t\, e^t$$

Exemplo:

Escreva a expressão para $\frac{df}{dt}$

sabendo que $f = f(x,y,z)$ e

$x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Exemplo:

Escreva a expressão para $\frac{\partial f}{\partial t}$

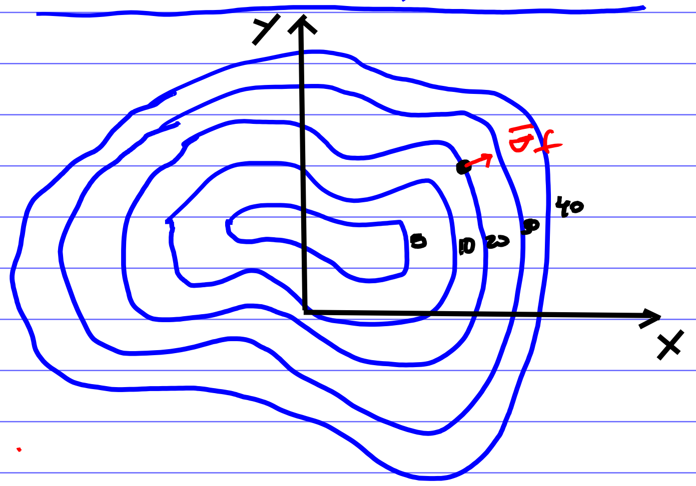
sabendo que $f=f(x,y,z)$ e

$x=x(t,u)$, $y=y(t,u)$ e

$z=z(t,u)$.

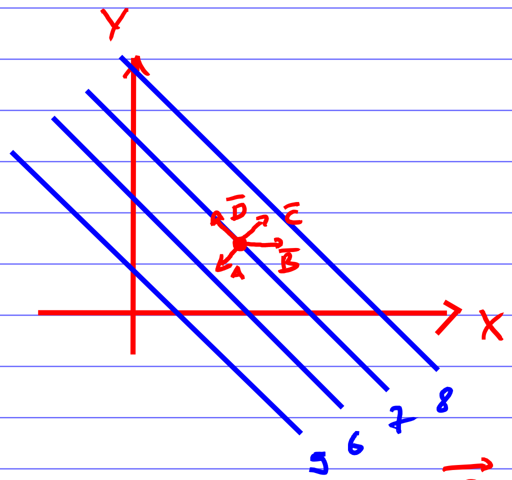
$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

## Derivada Parcial




$$\vec{\nabla} f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle$$

Vetor Gradiente




Qual daqueles vetores tem a mesma direção do gradiente?

$\vec{C}$ tem mesma direção do $\vec{\nabla} f$.

$\vec{D}$ é a direção em que a função não cresce.

# Derivada direcional

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{P_0,\hat{u}} = \vec{\nabla} f \circ \hat{u}$$

Exemplo. Calcule a derivada de $f(x,y) = x^2 + y$ na direção do vetor $\vec{v} = \langle 1,2 \rangle$ no ponto $(2,3)$.

$$\hat{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\langle 1,2 \rangle}{\sqrt{1+2^2}} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right\rangle$$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{(2,3),\left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right\rangle} = \left\langle 2x, 1 \right\rangle \Big|_{(2,3)} \circ \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right\rangle$$

$$= \langle 4, 1 \rangle \circ \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right\rangle$$

$$= \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

Qual é o vetor que indica direção $-x$?

$$\langle -1, 0 \rangle$$