Substituição trigonométrica

$$\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$x = a\,\text{sen}\theta$

$a = ?$

$a = 1 \therefore \boxed{x = \text{sen}\theta}$

$\boxed{\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1}$

$\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta$

$dx = \cos\theta\, d\theta$

Quando $x = 0$, $\theta = ?$

$0 = \text{sen}\theta$

$\theta = \text{arc sen}(0)$

$\theta = 0$

Quando $x = 1$

$1 = \text{sen}\theta$

$\theta = \text{arc sen}(1)$

$\theta = \pi/2$

$$\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$$

1ª téc. S.T.

$$= \int_0^{\pi/2} \text{sen}^3\theta\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}\,\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \text{sen}^3\theta\sqrt{\cos^2\theta}\,\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \text{sen}^3\theta\,|\cos\theta|\,\cos\theta\, d\theta$$

Atenção

$\sqrt{x^2} = |x|$

Função

$f(x) = \sqrt{x}$

$f(25) = \sqrt{25}$

$= 5$

Eq.

$x^2 = 25$

$\therefore$

$x = 5$

ou

$x = -5$

Nossa região o $\cos\theta > 0$.

$$= \int_0^{\pi/2} \text{sen}^3\theta\,\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \text{sen}^3\theta\,\cos^2\theta\, d\theta$$

2ª téc. uso de R.T.

$$= \int_0^{\pi/2} (\text{sen}^2\theta)\,\text{sen}\theta\,\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2\theta)\,\text{sen}\theta\,\cos^2\theta\, d\theta$$

$u = \cos\theta$

$\frac{du}{d\theta} = -\text{sen}\theta \therefore -du = \text{sen}\theta\, d\theta$

Quando $\theta = 0$, $u = \cos 0 = 1$

" $\theta = \frac{\pi}{2}$, $u = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$$= -\int_1^0 (1-u^2)\,u^2\,du$$

$$= \int_0^1 (1-u^2)\,u^2\,du$$

$$= \int_0^1 (u^2-u^4)\,du$$

$$= \left(\frac{u^3}{3}-\frac{u^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)-(0)$$

$$= \frac{5-3}{15} = \frac{2}{15}$$

Teorema da variação total

51. Se $w'(t)$ for a taxa de crescimento de uma criança em quilogramas por ano, o que $\boxed{\int_5^{10} w'(t)\,dt \text{ representa?}}$

52. A corrente em um fio elétrico é definida como a derivada da carga: $I(t) = Q'(t)$. (Veja o Exemplo 3 na Seção 3.7.) O que $\int_a^b I(t)\,dt$ representa?

$$\int_a^b I\,dt = \int_a^b Q'\,dt = Q(b) - Q(a)$$

53. Se vazar óleo de um tanque a uma taxa de $r(t)$ galões por minuto em um instante t, o que $\int_0^{120} r(t)\,dt$ representa?

$$\int_0^{120} r(t)\,dt$$

54. Uma colmeia com uma população inicial de 100 abelhas cresce a uma taxa de $n'(t)$ por semana. O que representa $100 + \int_0^{15} n'(t)\,dt$?

55. Na Seção 4.7 definimos a função rendimento marginal $R'(x)$ como a derivada da função rendimento $R(x)$, onde x é o número de unidades vendidas. O que representa $\int_{1000}^{5000} R'(x)\,dx$?

56. Se $f(x)$ for a inclinação de uma trilha a uma distância de x quilômetros do começo dela, o que $\int_3^5 f(x)\,dx$ representa?

$$f(x) = \frac{cm}{m}$$

57. Se x é medido em metros e $f(x)$, em newtons, quais são as unidades de $\int_0^{100} f(x)\,dx$?

$$\int_3^5 f(x)\,dx$$

58. Se as unidades para x são pés e as unidades para $a(x)$ são libras por pé, quais são as unidades para da/dx? Quais são as unidades para $\int_2^8 a(x)\,dx$?

$$\int_3^5 F'(x)\,dx = F(5) - F(3)$$

58

$$[a] = \frac{\text{Libras}}{\text{Pés}}$$

$$\left[\frac{da}{dx}\right] = \frac{\frac{\text{Libras}}{\text{Pés}}}{\text{Pés}} = \frac{\text{Libras}}{\text{Pés}^2}$$

$$\int_2^8 a\,dx$$

$$\frac{\text{Libras}}{\text{Pés}} \cdot \text{Pés} = \text{Libras}$$

$$v = \frac{m}{s}$$

$$\left[\int v\,dt\right] = m$$

$$\left[\frac{dv}{dt}\right] = \frac{m}{s^2}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$f(x) = F'(x)$$

$$\int_a^b \underbrace{F'(x)}_{\text{TAXA DE VARIAÇÃO}}\,dx = F(b) - F(a)$$