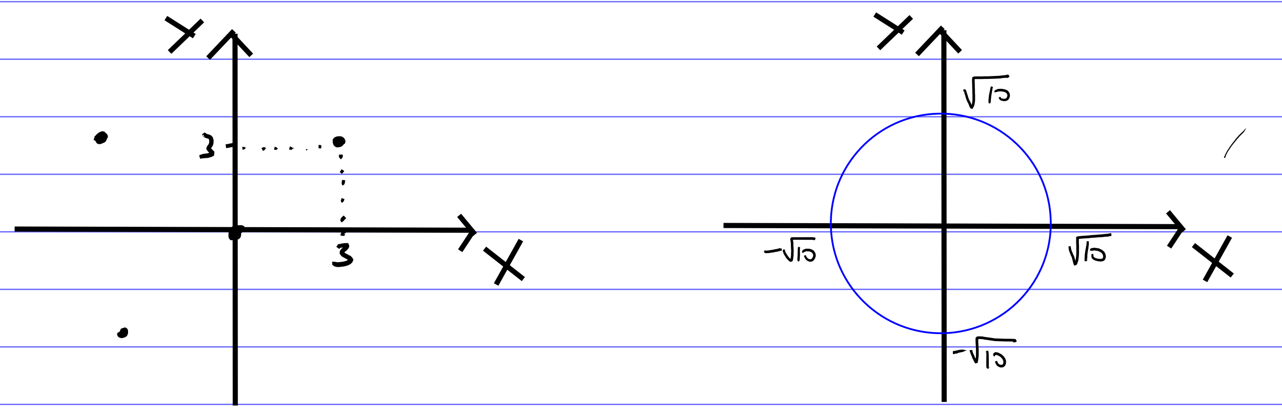
3–14 Cada um desses problemas de valor extremo tem uma solução tanto com valor máximo quanto com valor mínimo. Use multiplicadores de Lagrange para encontrar os valores extremos da função sujeita à restrição dada.

1) $f(x,y) = 3x + y \quad ; \quad x^2 + y^2 = 10$



Técnicas dos multiplicadores de Lagrange

$$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$$

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle = \lambda \left\langle \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right\rangle$$

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 10$$

Essa função tem o vínculo como um sinal mudado.

$$\langle 3, 1 \rangle = \lambda \langle 2x, 2y \rangle$$

$$\begin{cases} 3 = \lambda 2x & \text{(i)} \\ 1 = \lambda 2y & \text{(ii)} \\ x^2 + y^2 = 10 & \text{(iii)} \end{cases}$$

o vínculo sempre é a última equação.

De (i) $x = \dfrac{3}{2\lambda}$

De (ii) $y = \dfrac{1}{2\lambda}$

$\rightarrow$ (iii) $\rightarrow \left(\dfrac{9}{4\lambda^2}\right) + \left(\dfrac{1}{4\lambda^2}\right) = 10$

$$\frac{10}{4\lambda^2} = 10 \therefore 1 = 4\lambda^2 \therefore \frac{1}{4} = \lambda^2 \therefore \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Quando $\lambda = \frac{1}{2}$, $x = \dfrac{3}{2\left(\frac{1}{2}\right)} = 3$

$y = \dfrac{1}{2\lambda} = \dfrac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)} = 1$

Quando $\lambda = -\frac{1}{2}$, $x = \dfrac{3}{2\left(-\frac{1}{2}\right)} = -3$

$y = \dfrac{1}{2\lambda} = \dfrac{1}{2\left(-\frac{1}{2}\right)} = -1$

	(x,y)	$f(x,y)$	
Ponto de máximo ←	$(3,1)$	10	→ valor de máximo
Ponto de mínimo ←	$(-3,-1)$	-10	→ valor de mínimo

2) $f(x,y) = xe^y \quad ; \quad x^2 + y^2 = 2$

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 2$$

$$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$$

$$\langle e^y, xe^y \rangle = \lambda \langle 2x, 2y \rangle$$

$$\begin{cases} e^y = \lambda 2x & \text{(i)} \\ xe^y = \lambda 2y & \text{(ii)} \\ x^2 + y^2 = 2 & \text{(iii)} \end{cases}$$

De (i) $e^y = \lambda 2x \therefore \lambda = \dfrac{e^y}{2x}$

De (ii) $xe^y = \lambda 2y \therefore \lambda = \dfrac{xe^y}{2y}$

$$\frac{\cancel{e^y}}{\cancel{2}x} = \frac{x\cancel{e^y}}{\cancel{2}y}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{y} \therefore \boxed{y = x^2}$$

(iii)

$$x^2 + y^2 = 2$$

$$x^2 + x^4 = 2$$

$$x^4 + x^2 - 2 = 0$$

$$w = x^2$$

$$w^2 + w - 2 = 0$$

$$w = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$w = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-2)}}{2}$$

$$w = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$w = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$w = -2$ ou $w = 1$

O $w = -2$ é inaceitável pois $-2 = x^2$ não tem solução.

$w = 1$ leva a $1 = x^2 \therefore x = 1$ ou $x = -1$

Como $y = x^2$

Quando $x = 1$, $y = 1$

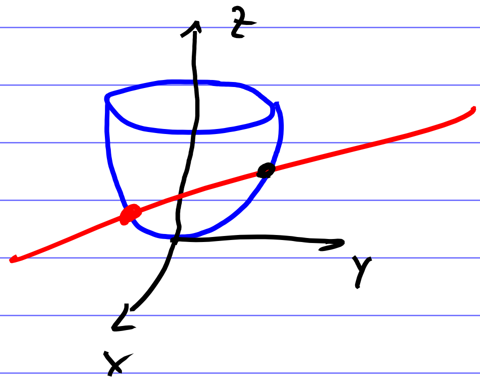
e $x = -1$, $y = 1$

(x,y)	$f(x,y)$	
$(1,1)$	e	MAX
$(-1,1)$	$-e$	MIN

(3) Encontre as dimensões de uma caixa com volume $1000\,cm^3$ que utilize a menor quantidade de material para sua produção?

Vocês tentarão!

59. Onde a reta normal ~~à parábola~~ ao paraboloide $z = x^2 + y^2$ no ponto $(1, 1, 2)$ intercepta o paraboloide uma segunda vez?



$$\vec{R}(\alpha) = \vec{R_0} + \alpha \vec{V}$$

Eq. vetorial da reta que é Paralela $\vec{V}$ e passa em $\vec{R_0}$.

$$\vec{R}(\alpha) = \vec{R_0} + \alpha \vec{N}$$

↳ vetor normal.

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$$

$$\vec{N} = \vec{\nabla} g \Big|_{(1,1,2)} = \langle 2x, 2y, -1 \rangle \Big|_{(1,1,2)}$$

$$\vec{N} = \langle 2, 2, -1 \rangle$$

$$\vec{R}(\alpha) = \langle 1, 1, 2 \rangle + \alpha \langle 2, 2, -1 \rangle$$

Eq. vetorial da reta.

Equações paramétricas da reta

$$\begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = 2 - \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{Eq. da parabola}$$

$$(2 - \alpha) = (1 + 2\alpha)^2 + (1 + 2\alpha)^2$$

$$2 - \alpha = 2(1 + 2\alpha)^2$$

$$2 - \alpha = 2(1 + 4\alpha + 4\alpha^2)$$

$$\cancel{2} - \alpha = \cancel{2} + 8\alpha + 8\alpha^2$$

$$0 = 9\alpha + 8\alpha^2$$

$$\alpha(9 + 8\alpha) = 0$$

$$\alpha = 0 \quad \begin{cases} 9 + 8\alpha = 0 \\ 8\alpha = -9 \\ \alpha = -\frac{9}{8} \end{cases}$$

$$x = 1 + 2\left(-\frac{9}{8}\right) = 1 - \frac{18}{8}$$

$$y = 1 + 2\left(-\frac{9}{8}\right) = 1 - \frac{18}{8}$$

$$z = 2 - \left(-\frac{9}{8}\right) = 2 + \frac{9}{8}$$

57. Mostre que todo plano que é tangente ao cone $x^2 + y^2 = z^2$ passa pela origem.

Vocês tentam.