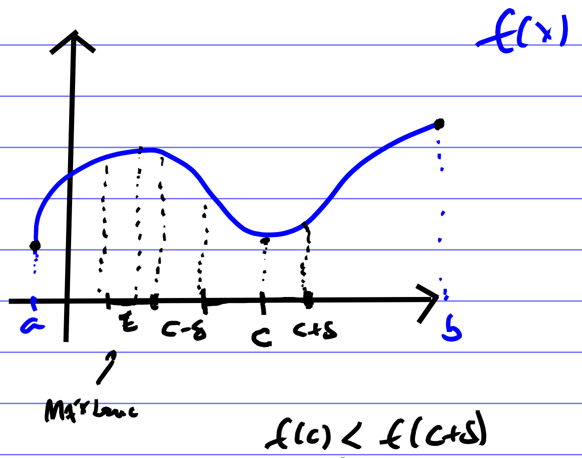
Máximos e Mínimos Locais



C é um ponto de mínimo local

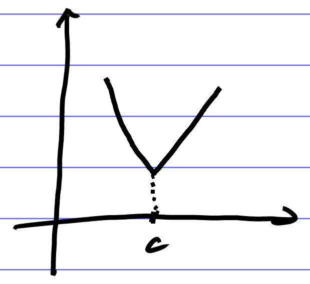
f(c) é um valor de mínimo local.

$f(c) < f(c+\delta)$

$f(c) < f(c-\delta)$

P.C. $f'(x) = 0$

$f'(x)\ \nexists$



Teste da derivada segunda → $\boxed{f'(x) = 0}$

$f''(x) > 0$ É Ponto MÍN. local

$f''(x) < 0$ É Ponto MÁX. local

$f''(x) = 0$ É Ponto de inflexão

Agora p/ funções de 2 variáveis:

1. Determine os máximos e mínimos locais de

$$f(x,y) = x^2+y^2-2x-6y+14$$

1º Passo.

Localizar os pontos críticos.

$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$ ou $f_x \nexists$ e $f_y \nexists$

$f_x = 2x-2$

$f_y = 2y-6$

$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-2 = 0 \\ 2y-6 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x = 2 \therefore x = 1 \\ 2y = 6 \therefore y = 3 \end{cases}$

Ponto crítico $(1,3)$

$D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$

$f_x = 2x-2$, $f_{xx} = 2$ $\left\{ f_y = 2y-6,\ f_{yy} = 2 \right\}$ $f_x = 2x-2$, $f_{xy} = 0$

$D = 2.2 - 0^2 = 4$

$D(x,y) = 4$

$D(1,3) = 4$, $f_{xx}(1,3) = 2 > 0$ então $(1,3)$ é MIN. Local

Se $D > 0$, $f_{xx}(x,y) > 0$ (x,y) é Ponto de mínimo local

Se $D > 0$, $f_{xx}(x,y) < 0$ (x,y) é Ponto de máximo local

Se $D < 0$, (x,y) é um ponto de sela

Se $D = 0$, o teste é inconclusivo.

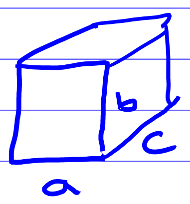
Notações

$$f_{ABC} = \frac{\partial}{\partial C}\left[\frac{\partial}{\partial B}\left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)\right]$$

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\boxed{f_{yx} = f_{xy}}$$

② Encontre as dimensões de uma caixa com volume $1000\ cm^3$ que utilize a menor quantidade de material para sua produção?



$abc = 1000$ Vínculo

$$Q(a,b,c) = 2ab + 2bc + 2ac$$

$$abc = 1000$$

$$c = \frac{1000}{ab}$$

$$Q(a,b) = 2ab + 2b\frac{1000}{ab} + 2a\frac{1000}{ab}$$

$$Q(a,b) = 2ab + \frac{2000}{a} + \frac{2000}{b}$$

Vamos encontrar o mínimo.

$$\begin{cases} Q_a = 0 \\ Q_b = 0 \end{cases} \qquad Q_a = \frac{\partial Q}{\partial a} = 2b - \frac{2000}{a^2} = 0$$

$$Q_b = \frac{\partial Q}{\partial b} = 2a - \frac{2000}{b^2} = 0$$

$$\begin{cases} 2b = \frac{2000}{a^2} \quad \therefore \quad ba^2 = 1000 \\ 2a = \frac{2000}{b^2} \quad \therefore \quad b^2a = 1000 \end{cases}$$

$$b = \frac{1000}{a^2}$$

$$\downarrow$$

$$b^2a = 1000$$

$$\left(\frac{1000}{a^2}\right)^2 a = 1000$$

$$1000^2 \frac{a}{a^4} = 1000$$

$$1000 = a^3$$

$$\therefore \boxed{a = 10}$$

$$b = \frac{1000}{a^2}$$

$$b = \frac{1000}{100}$$

$$\boxed{b = 10}$$

Achei um P.c $(10,10)$

A natureza do problema garante que é ponto de mínimo. MAS VAMOS TESTAR

$$\boxed{a = 10,\ b = 10,\ c = 10}$$

$$Q_a = 2b - 2000a^{-2} \therefore Q_{aa} = 4000a^{-3}$$

$$Q_b = 2a - 2000b^{-2} \therefore Q_{bb} = 4000b^{-3}$$

$$Q_{ab} = 2$$

$$D = Q_{aa}Q_{bb} - Q_{ab}^2$$

$$D(a,b) = (4000)^2 a^{-3} b^{-3} - 2^2$$

$$D(10,10) = \frac{(4000)^2}{10^3 \cdot 10^3} - 4 > 0$$

Como $D > 0$ vamos testar $Q_{aa}(10,10) = \frac{4000}{10^3}$

$$= 4$$

Como $Q_{aa} > 0$ trata-se de um mínimo local.

③ Determine as equações do plano tangente no ponto $(-2, 1, -3)$ ao elipsóide $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=3$.

Solução

Quando a superfície é dada por uma função $f(x,y)$, o plano tangente é calculado assim

$$z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}(y-y_0)$$

$$\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=3.$$

$$\frac{z^2}{9} = 3 - \frac{x^2}{4} - y^2$$

$$z^2 = 27 - \frac{9}{4}x^2 - 9y^2$$

$$z = +\sqrt{27 - \frac{9}{4}x^2 - 9y^2}$$

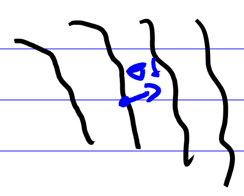
$$z = -\sqrt{27 - \frac{9}{4}x^2 - 9y^2}$$

$$f(x,y) = -\sqrt{27 - \frac{9}{4}x^2 - 9y^2}$$

Pois o ponto tem coord. z negativa.

$(-2, 1, -3)$

Nova maneira



O gradiente de uma função sempre é perpendicular aos níveis dessa função.

Qual é a função para a qual a superfície $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=3$ é apenas uma superfície de nível?

$$g(x,y,z) = \frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}$$

$$\boxed{g(x,y,z) = \text{Nível}}$$

A eq. do plano

$$\nabla g\Big|_{(x_0,y_0,z_0)} \circ (\vec{r}-\vec{r}_0)=0$$

$$\nabla g\Big|_{(x_0,y_0,z_0)} \circ (\langle x,y,z\rangle - \langle x_0,y_0,z_0\rangle)=0$$

$$\vec{\nabla} g = \left\langle \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right\rangle$$

$$\vec{\nabla} g = \left\langle \frac{x}{2}, 2y, \frac{2}{9}z \right\rangle$$

$$g(x,y,z) = \frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}$$

$$\vec{\nabla} g\Big|_{(-2,1,-3)} = \left\langle -1, 2, -\frac{6}{9} \right\rangle$$

$$\vec{\nabla} g\Big|_{(x_0,y_0,z_0)} \circ (\vec{r}-\vec{r}_0)=0$$

$$\left\langle -1, 2, -\frac{2}{3} \right\rangle \circ (\langle x,y,z\rangle - \langle -2,1,-3\rangle)=0$$

$$\boxed{-1(x+2)+2(y-1)-\frac{2}{3}(z+3)=0}$$