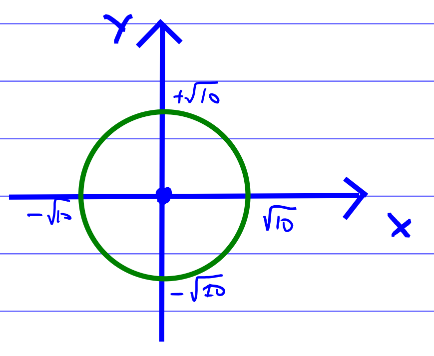
3–14 Cada um desses problemas de valor extremo tem uma solução tanto com valor máximo quanto com valor mínimo. Use multiplicadores de Lagrange para encontrar os valores extremos da função sujeita à restrição dada.

(1) $f(x,y) = 3x + y$; $x^2 + y^2 = 10$

função implícita de uma variável



Técnica dos multiplicadores de Lagrange

$$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$$

g é a função para a qual o vínculo é um simples nível.

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 10$$

função explícita de duas variáveis.

$$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$$

$f(x,y) = 3x + y$ e $g(x,y) = x^2 + y^2 - 10$

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle = \lambda \left\langle \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right\rangle$$

$$\langle 3, 1 \rangle = \lambda \langle 2x, 2y \rangle$$

$$\begin{cases} 3 = \lambda 2x & (i) \\ 1 = \lambda 2y & (ii) \\ x^2 + y^2 = 10 & (iii) \text{ (o vínculo é a última equação)} \end{cases}$$

De (i) $\frac{3}{2\lambda} = x$; De (ii) $\frac{1}{2\lambda} = y$

(iii)

$$x^2 + y^2 = 10$$

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 10 \quad \therefore \quad \frac{10}{4\lambda^2} = 10 \quad \therefore \frac{1}{4} = \lambda^2$$

$$\lambda = \pm \frac{1}{2}$$

Quando $\lambda = \frac{1}{2}$

$$x = \frac{3}{2\lambda} \quad \therefore x = \frac{3}{2(\frac{1}{2})} = 3$$

$$y = \frac{1}{2\lambda} \quad \therefore y = \frac{1}{2(\frac{1}{2})} = 1$$

$(3, 1)$

Quando $\lambda = -\frac{1}{2}$

$$x = \frac{3}{2\lambda} \quad \therefore x = \frac{3}{2(-\frac{1}{2})} = -3$$

$$y = \frac{1}{2\lambda} \quad \therefore y = \frac{1}{2(-\frac{1}{2})} = -1$$

$(-3, -1)$

Tabela

	(x,y)	$f(x,y)$	
Ponto MÁX →	$(3,1)$	10	⇐ VALOR MÁX
MIN →	$(-3,-1)$	-10	⇐ MIN

(2) $f(x,y) = xe^y$; $x^2 + y^2 = 2$

$f(x,y) = xe^y$ $\quad g(x,y) = x^2 + y^2 - 2$

$$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$$

$$\langle e^y, xe^y \rangle = \lambda \langle 2x, 2y \rangle$$

$$\begin{cases} e^y = \lambda 2x & (i) \\ xe^y = \lambda 2y & (ii) \\ x^2 + y^2 = 2 & (iii) \end{cases}$$

De (i) $\lambda = \frac{e^y}{2x}$ $\quad$ De (ii) $\lambda = \frac{xe^y}{2y}$

$$\frac{\cancel{e^y}}{\cancel{2}x} = \frac{x\cancel{e^y}}{\cancel{2}y}$$

$$y = x^2$$

(iii)

$$x^2 + y^2 = 2$$

$$x^2 + x^4 = 2$$

$$x^4 + x^2 - 2 = 0$$

$$w = x^2$$

$$w^2 + w - 2 = 0$$

$$w = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$w = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-2)}}{2}$$

$$w = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$w = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$w = -2$ ou $w = 1$

$w = x^2 \quad \therefore \quad w = -2$ é inaceitável.

$w = 1$ leva $x = 1$ ou $x = -1$

Quando $x = 1$, $y = 1$

" $x = -1$, $y = 1$

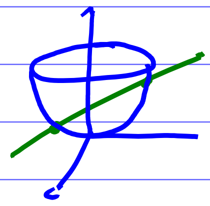
(x,y)	$f(x,y)$	
$(1,1)$	e^1	MÁX.
$(-1,1)$	$-1e$	MÍN.

③ Encontre as dimensões de uma caixa com volume $1000\,cm^3$ que utilize a menor quantidade de material para sua produção?

Vocês vão tentar usando a téc. dos multiplicadores de Lagrange.

Paraboloide

59. Onde a reta normal à parábola $z = x^2 + y^2$ no ponto (1, 1, 2) intercepta o paraboloide uma segunda vez?



$\vec{R}(\alpha) = \vec{R}_0 + \alpha \vec{V}$ → vetor paralelo à reta.

$\vec{R}(\alpha) = \vec{R}_0 + \alpha \vec{N}$

$g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$

$\vec{\nabla} g$ é perpendicular à $z = x^2 + y^2$.

já que isso é normal de $g(x,y,z)$

$\vec{N} = \vec{\nabla} g(1,1,2)$

$\vec{N} = \langle 2x, 2y, -1 \rangle \Big|_{(1,1,2)} = \langle 2, 2, -1 \rangle$

$\vec{N} = \langle 2, 2, -1 \rangle$

$\vec{R}(\alpha) = \vec{R}_0 + \alpha \vec{N}$

$\vec{R}(\alpha) = \langle 1, 1, 2 \rangle + \alpha \langle 2, 2, -1 \rangle$

$\langle x, y, z \rangle = \langle 1, 1, 2 \rangle + \alpha \langle 2, 2, -1 \rangle$

$$\begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = 2 - \alpha \end{cases}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ faz surgir pontos da reta normal.

Qual é o α que faz surgir um ponto que intercepta o paraboloide?

$z = x^2 + y^2$

$2 - \alpha = (1 + 2\alpha)^2 + (1 + 2\alpha)^2$

$2 - \alpha = 2(1 + 2\alpha)^2$

$2 - \alpha = 2(1 + 4\alpha + 4\alpha^2)$

$2 - \alpha = 2 + 8\alpha + 8\alpha^2$

$0 = 9\alpha + 8\alpha^2$

$0 = \alpha(9 + 8\alpha)$

$\alpha = 0 \quad \Big| \quad 9 + 8\alpha = 0, \quad \alpha = -\frac{9}{8}$

$x = 1 + 2\left(-\frac{9}{8}\right) = 1 - \frac{18}{8}$

$y = 1 + 2\left(-\frac{9}{8}\right) = 1 - \frac{18}{8}$

$z = 2 - \left(-\frac{9}{8}\right) = 2 + \frac{9}{8}$

https://www.geogebra.org/3d/p4ssbgn5

57. Mostre que todo plano que é tangente ao cone $x^2 + y^2 = z^2$ passa pela origem.

Vocês vão tentar fazer.