Substituição trigonométrica

$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec\theta$	$a^2\sec^2\theta-a^2=a^2tg^2\theta$
$\sqrt{x^2+a^2}$	$x=a\,tg\,\theta$	$a^2tg^2\theta+a^2=a^2\sec^2\theta$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\,sen\,\theta$	$a^2-a^2sen^2\theta=a^2\cos^2\theta$

$tg^2\theta+1=\sec^2\theta$

$a^2tg^2\theta+a^2=a^2\sec^2\theta$

$a^2tg^2\theta=a^2\sec^2\theta-a^2$

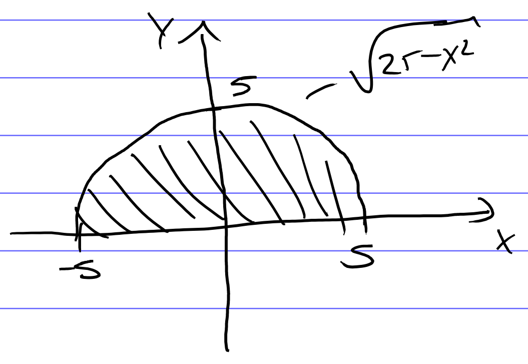
$\cos^2\theta+sen^2\theta=1$

$a^2\cos^2\theta+a^2sen^2\theta=a^2$

$\boxed{a^2\cos^2\theta=a^2-a^2sen^2\theta}$

(1) $\displaystyle\int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,dx$

Por Geometria



$\displaystyle\int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,dx=\frac{\pi(5)^2}{2}$

$=\frac{25\pi}{2}$

$x=5sen\theta$

$\frac{dx}{d\theta}=5\cos\theta \therefore dx=5\cos\theta\,d\theta$

Quando $x=-5$, $\theta=?$

$x=5sen\theta$

$-5=5sen\theta \therefore sen\theta=-1$

$\theta=arc\,sen(-1)$

$\theta=-\pi/2$

Quando $x=5$, $\theta=?$

$x=5sen\theta$

$5=5sen\theta \therefore sen\theta=1$

$\theta=arc\,sen(1)$

$\theta=+\pi/2$

$$\int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{25-(5sen\theta)^2}\,5\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{25-25sen^2\theta}\,5\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{25\cos^2\theta}\,5\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}5\cos\theta\,5\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}25\cos^2\theta\,d\theta$$

USO DE RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

$\cos^2\theta=\frac{1}{2}+\frac{\cos(2\theta)}{2}$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}25\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos(2\theta)}{2}\right)d\theta$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{25}{2}\,d\theta+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{25}{2}\cos(2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{25}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)+\frac{25}{2}\frac{sen(2\theta)}{2}\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$=\frac{25}{2}\pi+\frac{25}{4}\left[sen(\pi)-sen(-\pi)\right]$$

$$=\frac{25}{2}\pi$$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

$x = tg\,\theta$

$x^2+1 = tg^2\theta + 1 = sec^2\theta$

$\frac{dx}{d\theta} = sec^2\theta \therefore dx = sec^2\theta\, d\theta$

Quando $x=0$, $\theta=?$

$x = tg\,\theta$

$0 = tg\,\theta$

$\theta = arc\,tg(0)$

$\theta = 0$

Quando $x=1$, $\theta=?$

$1 = tg\,\theta$

$\theta = arc\,tg(1)$

$\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{sec^2\theta}{sec^4\theta}\,d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{sec^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\pi/4} cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{2} + \frac{cos(2\theta)}{2}\right) d\theta$$

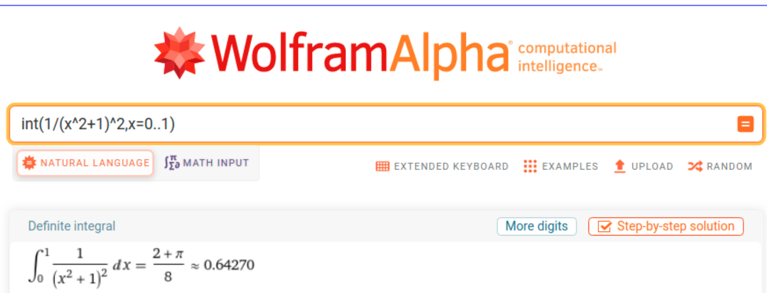
$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}\,d\theta + \int_0^{\pi/4} \frac{cos(2\theta)}{2}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{sen(2\theta)}{2}\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\left(sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen(0)\right)$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

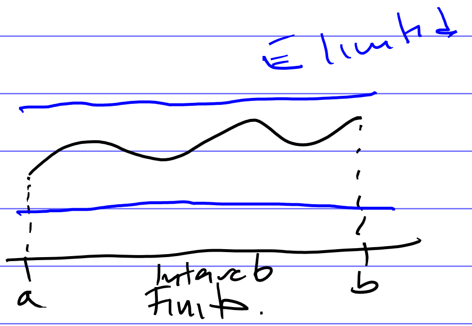
$$= \frac{\pi+2}{8}$$



Integral imprópria

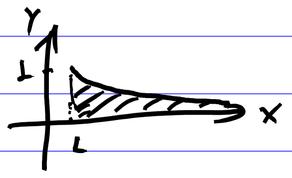
① $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$

É imprópria porque o intervalo de integração é infinito.



A função é limitada superiormente e inferiormente.

$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ Exemplo de função não limitada superiormente. $f(x)=\frac{1}{x}$, $]0,1]$

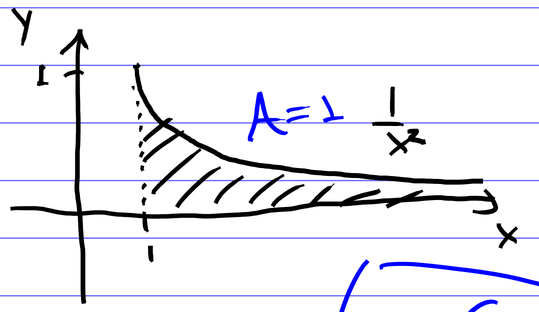


$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_1^R \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to+\infty} [\ln x]\Big|_1^R = \lim_{R\to+\infty} \left([\ln R]-[\ln 1]\right) = \lim_{R\to+\infty} \left([\ln R]\right) = +\infty$$

Afirmamos que a integral DIVERGE.

---

② $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$



$$\lim_{R\to+\infty} \int_1^R \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]\Big|_1^R = \lim_{R\to+\infty} \left[\left(-\frac{1}{R}\right)-\left(-\frac{1}{1}\right)\right] = \lim_{R\to+\infty} \left[-\cancel{\frac{1}{R}}^{\,0}+1\right] = +1$$

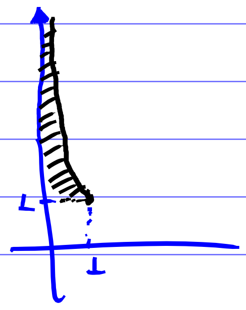
$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{x^{-1}}{-1} = \left(-\frac{1}{x}\right)$$

A integral CONVERGE.

③ $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx$ $\qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

Por que é imprópria?

$\frac{1}{\sqrt{x}}$



Porque a função não é limitada superiormente!

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx = \lim_{R\to0^+} \int_R^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{R\to0^+} \int_R^1 x^{-1/2}\,dx = \lim_{R\to0^+} \left[\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]\Bigg|_R^1$$

$$= \lim_{R\to0^+} \left[\frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{R^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \lim_{R\to0^+} \left[2 - 2\cancel{\sqrt{R}}^{\,0}\right]$$

$$= 2$$

Conforme a intuição de Enthony falou!

Teorema da variação total

51. Se $w'(t)$ for a taxa de crescimento de uma criança em quilogramas por ano, o que $\int_5^{10} w'(t)\,dt$ representa?

52. A corrente em um fio elétrico é definida como a derivada da carga: $I(t) = Q'(t)$. (Veja o Exemplo 3 na Seção 3.7.) O que $\int_a^b I(t)\,dt$ representa?

53. Se vazar óleo de um tanque a uma taxa de $r(t)$ galões por minuto em um instante t, o que $\int_0^{120} r(t)\,dt$ representa?

54. Uma colmeia com uma população inicial de 100 abelhas cresce a uma taxa de $n'(t)$ por semana. O que representa $100 + \int_0^{15} n'(t)\,dt$?

55. Na Seção 4.7 definimos a função rendimento marginal $R'(x)$ como a derivada da função rendimento $R(x)$, onde x é o número de unidades vendidas. O que representa $\int_{1000}^{5000} R'(x)\,dx$?

56. Se $f(x)$ for a inclinação de uma trilha a uma distância de x quilômetros do começo dela, o que $\int_3^5 f(x)\,dx$ representa?

57. Se x é medido em metros e $f(x)$, em newtons, quais são as unidades de $\int_0^{100} f(x)\,dx$?

58. Se as unidades para x são pés e as unidades para $a(x)$ são libras por pé, quais são as unidades para da/dx? Quais são as unidades para $\int_2^8 a(x)\,dx$?