1) Qual é o comprimento de arco da curva dada por $r = 1 + \cos(\theta)$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$?

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_f} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\theta$$

$$r = 1 + \cos\theta \therefore r' = -\operatorname{sen}\theta$$

$$r^2 = 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta \; \Big\{ \; (r')^2 = \operatorname{sen}^2\theta$$

$$L = \int_0^{\pi/3} \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (-\operatorname{sen}\theta)^2}\, d\theta$$

$$L = \int_0^{\pi/3} \sqrt{1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + (-\operatorname{sen}\theta)^2}\, d\theta$$

$$L = \int_0^{\pi/3} \sqrt{1 + 2\cos\theta + \underbrace{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}_{=1}}\, d\theta$$

$$L = \int_0^{\pi/3} \sqrt{2 + 2\cos\theta}\, d\theta$$

Uso de relações trigonométrica

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2\varphi)}{2}$$

$$2\cos^2\varphi = 1 + \cos(2\varphi)$$

$$4\cos^2\varphi = 2 + 2\cos(2\varphi)$$

Escolhas $\rightarrow$ $\boxed{2\varphi = \theta \quad \varphi = \frac{\theta}{2}}$

$$4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2 + 2\cos(\theta)$$

$$L = \int_0^{\pi/3} \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\, d\theta$$

$$L = \int_0^{\pi/3} 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

$$u = \frac{\theta}{2} \therefore \frac{du}{d\theta} = \frac{1}{2} \therefore 2du = d\theta$$

Quando $\theta = 0, u = 0$

Quando $\theta = \frac{\pi}{3}, u = \frac{\pi}{6}$

$$L = \int_0^{\pi/6} 2\cos(u)\, 2du$$

$$L = \int_0^{\pi/6} 4\cos u\, du$$

$$L = 4[\operatorname{sen} u]\Big|_0^{\pi/6}$$

$$L = 4\left(\operatorname{sen}(\pi/6) - \operatorname{sen} 0\right)$$

$$L = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \text{ u.c.}$$

$$\boxed{L = 2 \text{ u.c.}}$$

1) Qual é o valor de k que faz com que a curva dada por $\vec{r}(t) = < 3 \cdot \cos(t), 3 \cdot \sin(t), k \cdot t >$, com $0 \leq t \leq \pi$ possua comprimento igual a $\sqrt{13}\,\pi$?

$$\vec{r}'(t) = < -3\,\text{sen}\,t, 3\cos t, k >$$

$$L = \int_{t_i}^{t_f} |\vec{r}'|\,dt = \int_0^{\pi} \sqrt{9\,\text{sen}^2 t + 9\cos^2 t + k^2}\,dt$$

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{9 + k^2}\,dt$$

$$L = \sqrt{9 + k^2} \int_0^{\pi} dt$$

$$\sqrt{13}\,\pi = \sqrt{9 + k^2}\,\pi$$

$$\sqrt{13} = \sqrt{9 + k^2} \quad \therefore \quad 13 = 9 + k^2$$

$$k^2 = 4$$

$$\boxed{k = 2} \text{ ou } \boxed{k = -2}$$

1) Qual é o **módulo da componente tangencial** (em $\frac{m}{s^2}$) da aceleração de uma partícula cuja velocidade escalar no instante em questão é 2 m/s, cuja aceleração escalar é $10\ \frac{m}{s^2}$ e cuja curvatura do ponto onde se encontra é $2\ m^{-1}$?

$$\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{T} + K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\vec{N}$$

$$\frac{ds}{dt} = |\vec{v}|$$

$$\vec{a} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{T} + K|\vec{v}|^2\vec{N}$$

$$\boxed{\vec{a} = (a_T)\ \vec{T} + (a)_N\vec{N}}$$

$$\boxed{|\vec{v}| = 2\,m/s \qquad |\vec{a}| = 10\frac{m}{s^2} \qquad K = 2\,m^{-1}}$$

$|a_T|$

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$$

$$a^2 = a_T^2 + a_N^2$$

$$10^2 = a_T^2 + (K|\vec{v}|^2)^2$$

$$100 = a_T^2 + (2\ 2^2)^2$$

$$100 = a_T^2 + (8)^2$$

$$100 = a_T^2 + 64$$

$$36 = a_T^2$$

$$a_T = 6$$

$$\boxed{|a_T| = 6}$$

ول

1) Qual é o vetor binormal no ponto $\mathrm{t} = \pi$ para a trajetória descrita por $\vec{\mathrm{r}}(\mathrm{t}) =< \cos(\mathrm{t}), \mathrm{t}, \ \sin(\mathrm{t}) >$?

a) $< 0, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2} >$
b) $< 0, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} >$
c) $< \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, 0 >$
d) $< \frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} >$
e) $< \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, 0 >$
f) $< 1, \ 0 \ , 0 >$
g) $< 0, \ 1, \ 0 >$
h) $< 0, \ 0, \ 1 >$

1) Qual das seguintes funções vetoriais é perpendicular à própria derivada?

a) $< \cos\left(t^2\right), \sin\left(t^2\right),\ 1 >$
b) $< \cos\left(t^2\right), \sin\left(t^2\right), t >$
c) $< \cos(t), \sin(t), t >$
d) $< 5, 3, t >$
e) $< \cos(t), t, t^2 >$
f) $< \cos(t), \sin(t),\ e^t >$

1) Qual é a expressão que fornece corretamente a área de interseção entre os dois círculos da figura? (A área hachurada).