59. (a) Mostre que $d\mathbf{B}/ds$ é perpendicular a $\mathbf{B}$.
(b) Mostre que $d\mathbf{B}/ds$ é perpendicular a $\mathbf{T}$.

a) $|\vec{B}(s)| = 1$

$\sqrt{\vec{B} \circ \vec{B}} = 1 \therefore \vec{B} \circ \vec{B} = 1$

$$\frac{d}{ds}(\vec{B} \circ \vec{B}) = \frac{d1}{ds}$$

Mudei a notação de propósito

$$\vec{B}' \circ \vec{B} + \vec{B} \circ \vec{B}' = 0$$

$$2\,\vec{B}' \circ \vec{B} = 0$$

$$\vec{B}' \circ \vec{B} = 0$$

Concluímos que $\vec{B}'$ é perpendicular a $\vec{B}$.

b) Mostre que $\vec{B}' \circ \vec{T} = 0$.

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$$

$$\vec{B}' = \vec{T}' \times \vec{N} + \vec{T} \times \vec{N}'$$

$$\vec{N} = \frac{\vec{T}'}{|\vec{T}'|}$$

$$\vec{B}' = \vec{T}' \times \frac{\vec{T}'}{|\vec{T}'|} + \vec{T} \times \vec{N}'$$

Atenção

$\vec{A} \times \vec{A} = 0$

$\vec{A} \times k\vec{A} = 0$

$$\vec{B}' = \vec{T} \times \vec{N}'$$

$$\vec{B}' \circ \vec{T} = (\vec{T} \times \vec{N}') \circ \vec{T}$$

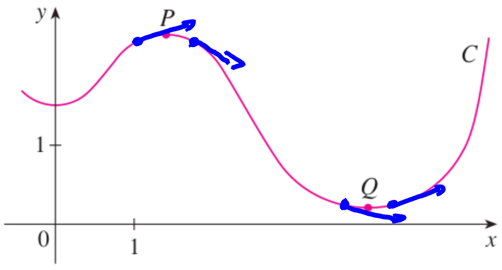
$\boxed{\text{Sabemos que } \vec{T} \times \vec{N}' \text{ nos fornece um vetor que é perpendicular a } \vec{T} \text{ e } \vec{N}'.}$

Assim sendo

$$\vec{B}' \circ \vec{T} = 0$$

Mostramos então que $\vec{B}'$ é perpendicular a $\vec{T}$.

33. (a) A curvatura da curva C mostrada na figura é maior em P ou em Q? Explique.
(b) Estime a curvatura em P e Q desenhando o círculo osculador nesses pontos.



A curvatura é maior em P, pois o vetor tangente unitário muda mais rapidamente durante uma caminhada de tamanho fixo.

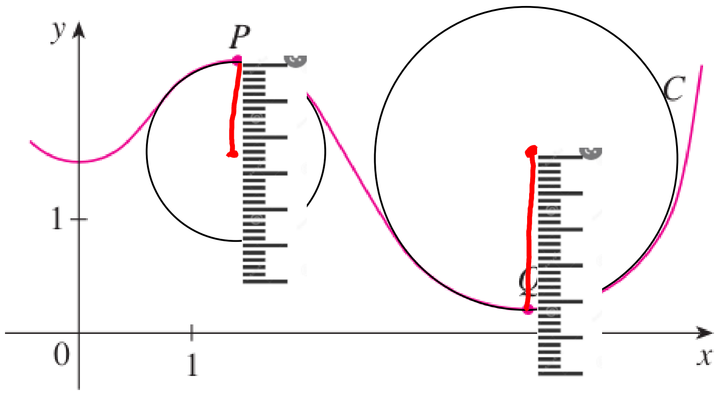
$$K = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = \frac{\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right|}{|\vec{v}|}$$

$$K = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\vec{T}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}\right| = \frac{\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right|}{\left|\frac{ds}{dt}\right|} = \frac{\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right|}{|\vec{v}|}$$

K, se $\vec{T} = \vec{T}(s)$

K, se $\vec{T} = \vec{T}(t)$

33. (a) A curvatura da curva C mostrada na figura é maior em P ou em Q? Explique.
(b) Estime a curvatura em P e Q desenhando o círculo osculador nesses pontos.



$K = \frac{1}{R}$ $\therefore$ $K_Q = \frac{1}{R_Q}$

$K_P = \frac{1}{R_P}$

$K_P = \frac{1}{2{,}3} \approx 0{,}43$

$K_Q = \frac{1}{4{,}1} \approx 0{,}24$

Uma reta tem círculo osculador de raio infinito.

32. Determine a equação de uma parábola que tenha curvatura 4 na origem.

$$K = \left|\frac{dT}{ds}\right| \qquad \boxed{K = \frac{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|}{|\vec{r}\,'|^3}}$$

Quando eu tenho uma curva expressa por $y = y(x)$.

$$\boxed{K = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{3/2}}}$$

$$y = ax^2$$
$$y' = 2ax$$
$$y'' = 2a$$

$$K = \frac{|2a|}{(1+(2ax)^2)^{3/2}}$$

Na origem, $x=0$ e $K=4$.

$$4 = \frac{|2a|}{(1+(2a0)^2)^{3/2}}$$

$$4 = |2a|$$

$$2 = |a| \quad a = 2 \quad a = -2$$

$$y = 2x^2$$

ou

$$y = -2x^2$$

21–23 Utilize o Teorema 10 para encontrar a curvatura.

21. $\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$

$$\boxed{k = \frac{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|}{|\vec{r}\,'|^3}}$$

$$\vec{r}(t) = \langle 0, t^3, t^2 \rangle$$

$$\vec{r}\,' = \langle 0, 3t^2, 2t \rangle$$

$$\vec{r}\,'' = \langle 0, 6t, 2 \rangle$$

$$\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' = \left|\begin{array}{ccc|cc} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & \hat{i} & \hat{j} \\ 0 & 3t^2 & 2t & 0 & 3t^2 \\ 0 & 6t & 2 & 0 & 6t \end{array}\right|$$

$$= 0\hat{k} - 12t^2\hat{i} + 0\hat{j} \quad 6t^2\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$= \langle -6t^2, 0, 0 \rangle$$

$$|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''| = \sqrt{36t^4 + 0^2 + 0^2} = 6t^2$$

$$\vec{r}\,' = \langle 0, 3t^2, 2t \rangle$$

$$|\vec{r}\,'| = \sqrt{0^2 + 9t^4 + 4t^2} =$$

$$\boxed{k = \frac{6t^2}{(9t^4 + 4t^2)^{3/2}}}$$

$$k = \frac{6t^2}{\left(\sqrt{9t^4 + 4t^2}\right)^3}$$

$$k = \frac{6t^2}{\left(|t|\sqrt{9t^2 + 4}\right)^3}$$

$$k = \frac{6t^2}{|t|^3\sqrt{9t^2 + 4}}$$

$$k = \frac{6}{|t|\sqrt{9t^2 + 4}}$$

9–14 Determine a velocidade, a aceleração e a velocidade escalar da partícula cuja função posição é dada.

9. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2 + 1, t^3, t^2 - 1 \rangle$

$$\vec{v}(t) = \langle 2t, 3t^2, 2t \rangle$$

$$\vec{a}(t) = \langle 2, 6t, 2 \rangle$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{4t^2 + 9t^4 + 4t^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{9t^4 + 8t^2}$$

$$\boxed{|\vec{v}| = |t|\sqrt{9t^2 + 8}}$$

Se $\vec{a} = \langle t^2, t, t \rangle$ e $\vec{v}(0) = \langle 0, 0, 1 \rangle$ garante de

$\vec{v}(t) = ?$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} \therefore \vec{v} = \int \vec{a}\, dt$$

$$\vec{v} = \int \langle t^2, t, t \rangle\, dt$$

$$\vec{v} = \left\langle \frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2}, \frac{t^2}{2} \right\rangle + C$$

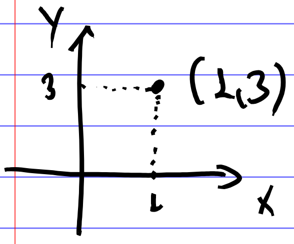
$$\vec{v}(0) = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

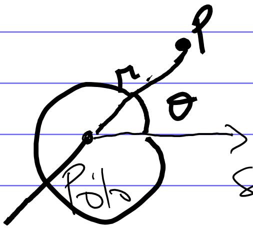
$$\vec{v}(0) = \left\langle \frac{0}{3}, \frac{0}{2}, \frac{0}{2} \right\rangle + \vec{C} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

$$\vec{C} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \left\langle \frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2}, \frac{t^2}{2} + 1 \right\rangle}$$

Coordenadas Polares





semieixo polar

(r, θ)

$\boxed{(5, \frac{\pi}{6})}$

a) $(5, \frac{\pi}{6})$ $\quad$ $(5, \frac{\pi}{6} + 2\pi)$

b) $(5, \frac{13\pi}{6})$ $\quad$ $(5, \frac{\pi}{6} + 4\pi)$

c) $(5, \frac{25\pi}{6})$

~~d)~~ $(5, 2\pi)$