Métodos numéricos

Diego Alejandro Becerra Becerra

Universidad ECCI

dbecerrab@ecci.edu.co

11 de febrero de 2026

Estructura del curso y evaluación

Distribución temática del curso:

- **Aproximación de raíces y solución de sistemas:** Semana 1 a la semana 5 **33 %**
- **Interpolación e integración numérica:** Semana 6 a la semana 10 **33 %**
- **Diferenciación numérica y ecuaciones diferenciales ordinarias:** Semana 11 a la semana 16 **34 %**

Bibliografía sugerida

- Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2015). *Métodos numéricos para ingenieros* (7.ª ed.). McGraw-Hill.
- Sauer, T. (2013). *Análisis numérico* (2.ª ed.). Pearson Education.
- Kincaid, D., & Cheney, W. (2008). *Numerical Analysis and Computing* (6th ed.). Thomson.
- Suli, E., & Mayers, D. (2003). *An Introduction to Numerical Analysis*. Cambridge University Press.

Plan de trabajo – Primer corte

- **Semana 1**
  Presentación del curso y acuerdos pedagógicos.
  Aproximación y errores de redondeo: redondeo, truncamiento, errores absolutos y relativos.
- **Semana 2**
  Aproximación de raíces: Método de Bisección, Regula Falsi, Punto Fijo y Newton-Raphson.
- **Semana 3**
  Método de Newton-Raphson.
  Métodos iterativos para sistemas lineales: Jacobi y Gauss-Seidel.
- **Semana 4**
  Métodos iterativos para sistemas lineales: Relajación.
  Métodos iterativos para sistemas no lineales: Método de Newton.
- **Semana 5**
  Entrega de taller resuelto, Examen Parcial 1 y avance del trabajo escrito aplicado.

¿Qué aprenderemos en Métodos Numéricos?

Aprenderemos a transformar modelos matemáticos en algoritmos computacionales.

Para poder resolver:

- Ecuaciones que no se pueden despejar
- Sistemas muy grandes
- Modelos dependientes del tiempo
- Problemas reales de ingeniería

¿Cómo se resuelven realmente los problemas en ingeniería?

En ingeniería no basta con observar.
Tampoco basta con conocer teoría.

Los problemas reales se resuelven con un doble enfoque:

Datos (empirismo) $+$ **Teoría (modelos)**

Cuando ese modelo se vuelve complejo...

entra en juego los métodos numéricos y la computadora.

¿Qué es un modelo matemático?

Un modelo matemático describe un sistema mediante una relación:

$$\text{Variable dependiente} = f(\text{variable independiente, parámetros})$$

Ejemplo:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Cuando el modelo se puede resolver exactamente

Dada la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Se puede resolver fácilmente integrando:

$$y = \int 2x \, dx$$

$$y = x^2 + C$$

Aquí obtenemos la **familia de soluciones exactas**.

¿Qué ocurre si existe una condición inicial?

Si se conoce un valor inicial:

$$y(0) = 1$$

Sustituimos en la solución general:

$$y = x^2 + C$$

$$1 = 0^2 + C \Rightarrow C = 1$$

La solución particular es:

$$y = x^2 + 1$$

Ya no es una familia, ahora es **una única solución**.

La pregunta clave

Dada la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x^2}$$

La pregunta no es:

"no se puede resolver"

La pregunta correcta es:

¿POR QUÉ no se puede resolver analíticamente?

Intentando el método de sustitución

Miremos la integral:

$$\int e^{-x^2}\,dx$$

Supongamos que hacemos la sustitución:

$$u = -x^2 \quad \Rightarrow \quad du = -2x\,dx \quad \Rightarrow \quad dx = -\frac{du}{2x}$$

Sustituimos en la integral:

$$\int e^u\,dx = \int e^u \left(-\frac{du}{2x}\right) = -\frac{1}{2}\int \frac{e^u}{x}\,du$$

¡Aquí aparece el problema! Aparece una x en el denominador que **no se puede expresar en términos de u** de manera simple:

$$x = \sqrt{-u} \quad \text{o} \quad x = -\sqrt{-u}$$

Conclusión sobre sustitución

- La sustitución falla porque no podemos escribir toda la integral solo en función de u. - Esto significa que $\int e^{-x^2} dx$ **no tiene solución cerrada** usando funciones elementales.
- Sin embargo, **sí se puede calcular aproximadamente con métodos numéricos**, como:

- Regla del trapecio
- Regla de Simpson

Ejemplo de aproximación numérica

Queremos calcular:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

Dividimos el intervalo $[0, 1]$ en $n = 4$ subintervalos de ancho $h = 0{,}25$.
La regla del trapecio dice:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{h}{2}\Big(f(0) + 2f(0{,}25) + 2f(0{,}5) + 2f(0{,}75) + f(1)\Big)$$

Cálculo paso a paso

Valores de la función en cada punto:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, \\ f(0{,}25) &\approx 0{,}9394, \\ f(0{,}5) &\approx 0{,}7788, \\ f(0{,}75) &\approx 0{,}5698, \\ f(1) &\approx 0{,}3679 \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula del trapecio:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{0{,}25}{2}\Big(f(0) + 2(f(0{,}25) + f(0{,}5) + f(0{,}75)) + f(1)\Big)$$

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0{,}7468$$

- Con más subintervalos, la aproximación mejora significativamente.

Resumen

- $\int e^{-x^2} dx$ **no tiene solución cerrada**. - La sustitución falla porque no se puede expresar todo en función de u. - **Se puede aproximar con métodos numéricos**, obteniendo valores muy cercanos al real. - Métodos numéricos son fundamentales cuando la integral no se puede expresar en forma explícita.

¿Dónde aparecen los métodos numéricos?

Cuando el modelo es:

- No lineal
- Grande
- No ideal
- Dependiente del tiempo

Aquí ya no sirve el álgebra.

Sirven los algoritmos.

Aproximación y errores de redondeo

Hasta ahora vimos:

- Algunos modelos matemáticos **no tienen solución exacta**.
- Podemos usar **métodos numéricos** para obtener aproximaciones.

Pregunta clave

Al trabajar con aproximaciones, **nunca obtenemos el valor exacto**.

¿Qué tan confiable es nuestra aproximación?

Conceptos importantes:

- **Error absoluto** y **error relativo**
- **Errores por redondeo** y **truncamiento**
- **Cifras significativas** para controlar la precisión

¿Por qué estudiar el error en Métodos Numéricos?

Los métodos numéricos no entregan soluciones exactas, sino aproximaciones.

Ejemplo práctico

Solución exacta:

$$x = 2{,}7182818$$

Resultado numérico:

$$x_a = 2{,}72$$

Discrepancia: existe una diferencia llamada **error**.

Reflexión clave en ingeniería

No se trata de eliminar el error, sino de:

¿Qué tan grande es el error y es tolerable para el problema?

Limitaciones de los números en la computadora

Los números en una computadora se almacenan en **punto flotante**.
Esto implica dos limitaciones fundamentales:

1. El rango de números representables es **limitado**.
2. Solo puede almacenarse un **número finito de cifras significativas**.

Consecuencias

- Números muy grandes producen **overflow**.
- Números muy pequeños producen **underflow**.
- Muchos números reales no pueden representarse exactamente.

Error absoluto y error relativo

Definiciones

- **Error absoluto:** Diferencia en magnitud entre el valor exacto y el valor aproximado.
- **Error relativo porcentual:** Relación entre el error absoluto y el valor exacto, expresado en porcentaje.

Si el valor exacto es x y el aproximado es x_a:

$$E_a = |x - x_a| \qquad E_r(\%) = \frac{|x - x_a|}{|x|} \times 100$$

Ejemplo explicado

Valor exacto: $x = 50$
Valor aproximado: $x_a = 47$

$$E_a = |50 - 47| = 3$$

Esto significa que el valor aproximado se aleja **3 unidades** del valor real.

Cálculo del error absoluto y relativo

Usando la regla del trapecio con $n = 4$ subintervalos, obtuvimos:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0{,}7468$$

Valor real (usando software o tablas):

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0{,}746824$$

Cálculo del error

Error absoluto: $E_a = |0{,}746824 - 0{,}7468| \approx 0{,}000024$

Error relativo: $E_r = \dfrac{0{,}000024}{0{,}746824} \approx 3{,}2 \times 10^{-5} \approx 0{,}0032\,\%$

Interpretación: Con solo 4 subintervalos, la aproximación es muy cercana al valor real y el error relativo es prácticamente despreciable.

¿Qué son las cifras significativas?

Las **cifras significativas** son los dígitos de un número en los que se puede confiar.

Ejemplo del velocímetro

Si el velocímetro marca entre 48 y 49 km/h, no es correcto decir:

$$48{,}8642138 \text{ km/h}$$

Lo razonable es afirmar:

$$48{,}5 \text{ km/h}$$

Los dos primeros dígitos son seguros y el tercero es estimado.

Idea clave: Un número no es exacto, sino una aproximación confiable hasta cierto número de dígitos.

Idea clave: No todos los ceros indican precisión en un número.

1) Ceros a la izquierda no son significativos

$$0{,}0001845 = 1{,}845 \times 10^{-4}$$

Los ceros desaparecen en notación científica, por lo tanto no aportan información del valor.

Las cifras significativas son: 1, 8, 4, 5 $\Rightarrow$ 4 cifras significativas.

2) En números grandes existe ambigüedad

$$45300 \quad (\text{¿3, 4 o 5 cifras significativas?})$$

No es posible saber si los ceros finales son exactos o producto de un redondeo.

La ambigüedad se elimina con notación científica:

$$4{,}53 \times 10^{4} \quad (3 \text{ cifras})$$

$$4{,}530 \times 10^{4} \quad (4 \text{ cifras})$$

Error por redondeo

Definición

El **redondeo** aproxima un número al valor representable más cercano según una cantidad fija de cifras significativas.

Regla de redondeo

- Si el dígito siguiente es ≥ 5, se aumenta en una unidad la última cifra conservada.
- Si el dígito siguiente es < 5, la última cifra conservada se mantiene igual.

Ejemplo

Redondear $\pi = 3{,}141592$ a 4 cifras significativas:
Primeras 4 cifras: 3,141
El siguiente dígito es 5 $\Rightarrow$ se redondea hacia arriba:

$$3{,}141592 \approx 3{,}142$$

Error por redondeo: errores absoluto y relativo

Ejemplo

Redondear $\pi = 3{,}141592$ a 4 cifras significativas.
Primeras 4 cifras: 3,141
El siguiente dígito es 5 $\Rightarrow$ se redondea hacia arriba:

$$x_a = 3{,}142$$

Cálculo de errores
Valor exacto:

$$x = 3{,}141592$$

$$E_a = |x - x_a| = |3{,}141592 - 3{,}142| = 0{,}000408$$

$$E_r = \frac{E_a}{|x|} = \frac{0{,}000408}{3{,}141592} \approx 0{,}0001299$$

$$E_r \approx 0{,}01299\,\%$$

Definición

El **truncamiento** consiste en cortar el número después de cierta cantidad de cifras significativas, **sin aplicar la regla de redondeo**.

Ejemplo

Truncar $\pi = 3{,}141592$ a 4 cifras significativas:

$$x_a = 3{,}141$$

Cálculo de errores

Valor exacto:

$$x = 3{,}141592$$

$$E_a = |x - x_a| = |3{,}141592 - 3{,}141| = 0{,}000592$$

$$E_r = \frac{E_a}{|x|} = \frac{0{,}000592}{3{,}141592} \approx 0{,}0001885$$

Redondeo vs Truncamiento

Valor real	Redondeo (4 cifras)	Truncamiento (4 cifras)
3.141592	3.142	3.141

$$E_{redondeo} = 0{,}000408, \quad E_{truncamiento} = 0{,}000592$$

Conclusión: Truncar genera mayor error, por eso es preferible redondear correctamente.

Taller : Error con redondeo

Valor real:

$$x = 8{,}37654$$

Trabaje con **4 cifras significativas** usando **redondeo**.

Paso 1. Determine el valor aproximado x_a.

Paso 2. Calcule el error absoluto:

$$E_a = |x - x_a|$$

Paso 3. Calcule el error relativo porcentual:

$$E_r(\%) = \frac{|x - x_a|}{|x|} \times 100$$

Pregunta: ¿Qué tan grande es el error respecto al valor real?

Valor real:

$$x = 8{,}37654$$

Trabaje con **4 cifras significativas** usando **truncamiento**.

Paso 1. Determine el valor aproximado x_a.

Paso 2. Calcule el error absoluto:

$$E_a = |x - x_a|$$

Paso 3. Calcule el error relativo porcentual:

$$E_r(\%) = \frac{|x - x_a|}{|x|} \times 100$$

Compare con el taller anterior: ¿En cuál caso el error es mayor?

Resultados: Redondeo vs Truncamiento

Valor real

$$x = 8{,}37654$$

Trabajando con **4 cifras significativas**

	Redondeo	**Truncamiento**
Valor aproximado x_a	8.377	8.376
Error absoluto E_a	0.00046	0.00054
Error relativo $E_r(\,\%)$	0.00549 %	0.00645 %

Conclusión
El truncamiento genera un error mayor que el redondeo, por lo tanto reduce más la precisión del cálculo.

¿Qué significa encontrar una raíz?
Encontrar un valor x tal que:

$$f(x) = 0$$

Es decir, el punto donde la gráfica de la función corta el eje x.

Este problema aparece en:

- Física
- Ingeniería
- Economía
- Estadística
- Modelos matemáticos

Lo que ya conocemos: fórmula cuadrática

Para ecuaciones de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

existe una fórmula exacta:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Problema: Esta fórmula solo funciona para ecuaciones cuadráticas.

¿Qué ocurre cuando la ecuación es más compleja?

$$x^3 - x - 2 = 0$$

No existe una fórmula directa.

Cuando no existe solución exacta

Muchas ecuaciones reales no pueden resolverse con fórmulas.
Ejemplos:

$$e^{-x} = x \qquad x^3 - x - 2 = 0 \qquad \cos(x) = x$$

En estos casos se utilizan **métodos numéricos** para **aproximar** la raíz.

Idea clave para aproximar raíces

Si una función es **continua** y en un intervalo cambia de signo, entonces necesariamente debe cruzar el eje x.

Esto se basa en el **Teorema del Valor Intermedio**.

Condición matemática

Si:

$$f(x_l) \cdot f(x_u) < 0$$

entonces existe un valor $x_r \in (x_l, x_u)$ tal que:

$$f(x_r) = 0$$

Idea intuitiva: Si la función pasa de valores negativos a positivos (o viceversa), obligatoriamente tuvo que pasar por el cero.

Idea clave para aproximar raíces

Ejemplo sencillo

Sea la función:

$$f(x) = x - 3$$

Evaluamos en dos puntos del intervalo:

$$f(2) = -1 \qquad f(5) = 2$$

Observa el cambio de signo:

$$f(2) \cdot f(5) = (-1)(2) = -2 < 0$$

Esto garantiza que entre 2 y 5 existe una raíz.

Y en efecto:

$$f(3) = 0$$

La función cruzó el eje x dentro del intervalo.

Fundamento teórico del método de bisección

Definición formal

Si $f(x)$ es una función **real y continua** en el intervalo $[x_l, x_u]$ y los valores de la función en los extremos tienen **signos opuestos**, es decir,

$$f(x_l)\,f(x_u) < 0$$

entonces existe **al menos una raíz real** en el intervalo (x_l, x_u).

Esta propiedad permite localizar raíces buscando intervalos donde la función cambie de signo.

Sobre este principio se construye el **método de bisección**.

Método de Bisección

El método de bisección es un método numérico que:

- Parte de un intervalo donde hay cambio de signo
- Divide el intervalo siempre en dos partes iguales
- Conserva únicamente la mitad donde sigue existiendo el cambio de signo

La aproximación de la raíz en cada paso es el punto medio:

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2}$$

Pasos del método de bisección (Algoritmo)

El método de bisección es un **algoritmo iterativo**, es decir, un conjunto de pasos que se repiten hasta cumplir una condición de parada.

Paso 1: Elegir un intervalo inicial que encierre la raíz:

$$f(x_l)\, f(x_u) < 0$$

Esto garantiza, por el Teorema del Valor Intermedio, que existe al menos una raíz entre x_l y x_u.

Paso 2: Calcular el punto medio del intervalo:

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2}$$

Este punto medio es la nueva aproximación de la raíz.

Regla de decisión y repetición del algoritmo

Paso 3: Evaluar los signos para decidir el nuevo intervalo:

- Si $f(x_l)f(x_r) < 0 \Rightarrow$ la raíz está a la izquierda. Entonces $x_u = x_r$.
- Si $f(x_l)f(x_r) > 0 \Rightarrow$ la raíz está a la derecha. Entonces $x_l = x_r$.
- Si $f(x_l)f(x_r) = 0 \Rightarrow x_r$ es la raíz exacta.

Después de actualizar el intervalo, **se regresa al Paso 2**.

El proceso se repite hasta que:

$$|x_u - x_l| < \varepsilon$$

donde ε es la tolerancia deseada.

Ejemplo: intervalo con raíz

Sea la función:

$$f(x) = x^3 - x - 2$$

$$f(1) = -2 \qquad f(2) = 4$$

Como $f(1)f(2) < 0$, existe una raíz en $[1, 2]$.
Criterio de parada:

$$|x_u - x_l| < \varepsilon, \qquad \varepsilon = 0{,}01$$

Iteración 1

$$x_l = 1 \qquad x_u = 2$$

$$x_r = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$$

$$f(1) = -2 \qquad f(1{,}5) = -0{,}125$$

Paso 3: Evaluar los signos

$$f(x_l)f(x_r) = (-2)(-0{,}125) = 0{,}25 > 0$$

$$\Rightarrow \text{La raíz está a la derecha}$$

$$x_l = x_r = 1{,}5$$

$$|2 - 1{,}5| = 0{,}5 > 0{,}01$$

Iteración 2

$$x_l = 1{,}5 \qquad x_u = 2$$

$$x_r = 1{,}75$$

$$f(1{,}5) = -0{,}125 \qquad f(1{,}75) = 1{,}6094$$

Paso 3: Evaluar los signos

$$f(x_l)f(x_r) = (-0{,}125)(1{,}6094) = -0{,}201 < 0$$

$$\Rightarrow \text{La raíz está a la izquierda}$$

$$x_u = x_r = 1{,}75$$

$$|1{,}75 - 1{,}5| = 0{,}25 > 0{,}01$$

Iteración 3

$$x_l = 1{,}5 \qquad x_u = 1{,}75$$

$$x_r = 1{,}625$$

$$f(1{,}5) = -0{,}125 \qquad f(1{,}625) = 0{,}6660$$

Paso 3: Evaluar los signos

$$f(x_l)f(x_r) = (-0{,}125)(0{,}6660) = -0{,}083 < 0$$

$$\Rightarrow \text{La raíz está a la izquierda}$$

$$x_u = x_r = 1{,}625$$

$$|1{,}625 - 1{,}5| = 0{,}125 > 0{,}01$$

Tabla de iteraciones

Iter	x_l	x_u	x_r	$f(x_r)$	$\lvert x_u - x_l \rvert$
1	1.0000	2.0000	1.5000	-0.1250	1.0000
2	1.5000	2.0000	1.7500	1.6094	0.5000
3	1.5000	1.7500	1.6250	0.6660	0.2500
4	1.5000	1.6250	1.5625	0.2522	0.1250
5	1.5000	1.5625	1.5313	0.0591	0.0625
6	1.5000	1.5313	1.5156	-0.0340	0.0313
7	1.5156	1.5313	1.5234	0.0123	0.0157
8	1.5156	1.5234	1.5195	-0.0109	0.0078

En la iteración 8 se cumple:

$$|x_u - x_l| < 0{,}01$$

Resultado

La raíz aproximada es el punto medio del último intervalo:

$$x \approx \frac{1{,}5156 + 1{,}5234}{2} = 1{,}5195$$