Métodos numéricos

Diego Alejandro Becerra Becerra

Universidad ECCI

dbecerrab@ecci.edu.co

18 de febrero de 2026

¿Qué significa encontrar una raíz?
Encontrar un valor x tal que:

$$f(x) = 0$$

Es decir, el punto donde la gráfica de la función corta el eje x.

Este problema aparece en:

- Física
- Ingeniería
- Economía
- Estadística
- Modelos matemáticos

Lo que ya conocemos: fórmula cuadrática

Para ecuaciones de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

existe una fórmula exacta:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Problema: Esta fórmula solo funciona para ecuaciones cuadráticas.

¿Qué ocurre cuando la ecuación es más compleja?

$$x^3 - x - 2 = 0$$

No existe una fórmula directa.

Cuando no existe solución exacta

Muchas ecuaciones reales no pueden resolverse con fórmulas.
Ejemplos:

$$e^{-x} = x \qquad x^3 - x - 2 = 0 \qquad \cos(x) = x$$

En estos casos se utilizan **métodos numéricos** para **aproximar** la raíz.

Idea clave para aproximar raíces

Si una función es **continua** y en un intervalo cambia de signo, entonces necesariamente debe cruzar el eje x.

Esto se basa en el **Teorema del Valor Intermedio**.

Condición matemática

Si:

$$f(x_l) \cdot f(x_u) < 0$$

entonces existe un valor $x_r \in (x_l, x_u)$ tal que:

$$f(x_r) = 0$$

Idea intuitiva: Si la función pasa de valores negativos a positivos (o viceversa), obligatoriamente tuvo que pasar por el cero.

Ejemplo sencillo

Sea la función:

$$f(x) = x - 3$$

Evaluamos en dos puntos del intervalo:

$$f(2) = -1 \qquad f(5) = 2$$

Observa el cambio de signo:

$$f(2) \cdot f(5) = (-1)(2) = -2 < 0$$

Esto garantiza que entre 2 y 5 existe una raíz.

Y en efecto:

$$f(3) = 0$$

La función cruzó el eje x dentro del intervalo.

Fundamento teórico del método de bisección

Definición formal

Si $f(x)$ es una función **real y continua** en el intervalo $[x_l, x_u]$ y los valores de la función en los extremos tienen **signos opuestos**, es decir,

$$f(x_l)\,f(x_u) < 0$$

entonces existe **al menos una raíz real** en el intervalo (x_l, x_u).

Esta propiedad permite localizar raíces buscando intervalos donde la función cambie de signo.

Sobre este principio se construye el **método de bisección**.

Método de Bisección

El método de bisección es un método numérico que:

- Parte de un intervalo donde hay cambio de signo
- Divide el intervalo siempre en dos partes iguales
- Conserva únicamente la mitad donde sigue existiendo el cambio de signo

La aproximación de la raíz en cada paso es el punto medio:

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2}$$

Pasos del método de bisección (Algoritmo)

El método de bisección es un **algoritmo iterativo**, es decir, un conjunto de pasos que se repiten hasta cumplir una condición de parada.

Paso 1: Elegir un intervalo inicial que encierre la raíz:

$$f(x_l)\,f(x_u) < 0$$

Esto garantiza, por el Teorema del Valor Intermedio, que existe al menos una raíz entre x_l y x_u.

Paso 2: Calcular el punto medio del intervalo:

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2}$$

Este punto medio es la nueva aproximación de la raíz.

Regla de decisión y repetición del algoritmo

Paso 3: Evaluar los signos para decidir el nuevo intervalo:

- Si $f(x_l)f(x_r) < 0 \Rightarrow$ la raíz está a la izquierda. Entonces $x_u = x_r$.
- Si $f(x_l)f(x_r) > 0 \Rightarrow$ la raíz está a la derecha. Entonces $x_l = x_r$.
- Si $f(x_l)f(x_r) = 0 \Rightarrow x_r$ es la raíz exacta.

Después de actualizar el intervalo, **se regresa al Paso 2**.

El proceso se repite hasta que:

$$|x_u - x_l| < \varepsilon$$

donde ε es la tolerancia deseada.

Ejemplo: intervalo con raíz

Sea la función:

$$f(x) = x^3 - x - 2$$

$$f(1) = -2 \qquad f(2) = 4$$

Como $f(1)f(2) < 0$, existe una raíz en $[1, 2]$.
Criterio de parada:

$$|x_u - x_l| < \varepsilon, \qquad \varepsilon = 0{,}01$$

Iteración 1

$$x_l = 1 \qquad x_u = 2$$

$$x_r = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$$

$$f(1) = -2 \qquad f(1{,}5) = -0{,}125$$

Paso 3: Evaluar los signos

$$f(x_l)f(x_r) = (-2)(-0{,}125) = 0{,}25 > 0$$

$$\Rightarrow \text{La raíz está a la derecha}$$

$$x_l = x_r = 1{,}5$$

$$|2 - 1{,}5| = 0{,}5 > 0{,}01$$

Iteración 2

$$x_l = 1{,}5 \qquad x_u = 2$$

$$x_r = 1{,}75$$

$$f(1{,}5) = -0{,}125 \qquad f(1{,}75) = 1{,}6094$$

Paso 3: Evaluar los signos

$$f(x_l)f(x_r) = (-0{,}125)(1{,}6094) = -0{,}201 < 0$$

$$\Rightarrow \text{La raíz está a la izquierda}$$

$$x_u = x_r = 1{,}75$$

$$|1{,}75 - 1{,}5| = 0{,}25 > 0{,}01$$

Iteración 3

$$x_l = 1{,}5 \qquad x_u = 1{,}75$$

$$x_r = 1{,}625$$

$$f(1{,}5) = -0{,}125 \qquad f(1{,}625) = 0{,}6660$$

Paso 3: Evaluar los signos

$$f(x_l)f(x_r) = (-0{,}125)(0{,}6660) = -0{,}083 < 0$$

$$\Rightarrow \text{La raíz está a la izquierda}$$

$$x_u = x_r = 1{,}625$$

$$|1{,}625 - 1{,}5| = 0{,}125 > 0{,}01$$

Tabla de iteraciones

Iter	x_l	x_u	x_r	$f(x_r)$	$\lvert x_u - x_l \rvert$
	1.0000	2.0000	1.5000	-0.1250	1.0000
1	1.5000	2.0000	1.7500	1.6094	0.5000
2	1.5000	1.7500	1.6250	0.6660	0.2500
3	1.5000	1.6250	1.5625	0.2522	0.1250
4	1.5000	1.5625	1.5313	0.0591	0.0625
5	1.5000	1.5313	1.5156	-0.0340	0.0313
6	1.5156	1.5313	1.5234	0.0123	0.0157
7	1.5156	1.5234	1.5195	-0.0109	0.0078

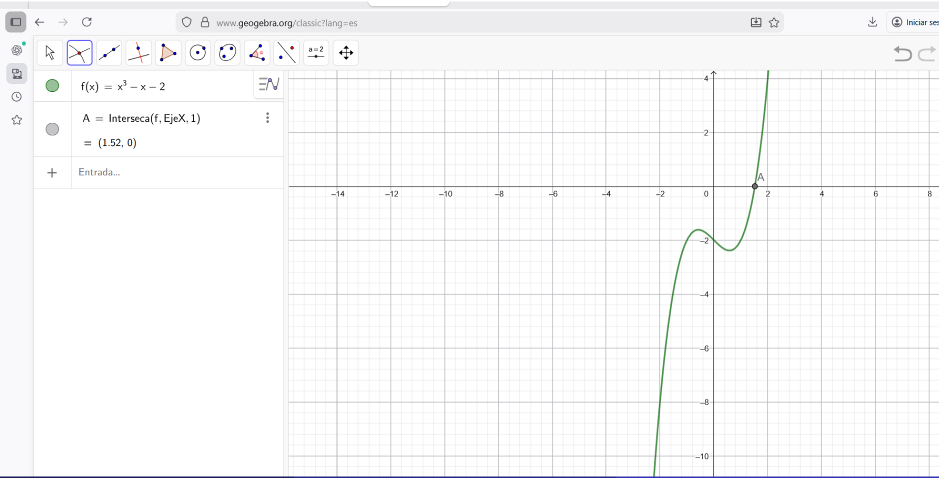
En la iteración 7 se cumple:

$$|x_u - x_l| < 0{,}01$$

Resultado

La raíz aproximada es el punto medio del último intervalo:

$$x \approx \frac{1{,}5156 + 1{,}5234}{2} = 1{,}5195$$



Actividad – Método de Bisección en Python (Colab)

Problema
Encontrar la raíz de:

$$f(x) = x^3 - x - 2$$

En el intervalo $[1, 2]$, ya que:

$$f(1) = -2 < 0, \quad f(2) = 4 > 0$$
$$\implies f(1)f(2) < 0$$

Criterio de parada:

$$|x_u - x_l| < 0{,}01$$

Pasos a desarrollar en Python (Colab)

- Definir la función $f(x)$ usando `def`
- Inicializar el intervalo: $x_l = 1, \; x_u = 2$
- Implementar el ciclo `while` con criterio de convergencia: $|x_u - x_l| < 0{,}01$
- Calcular el punto medio: $x_r = (x_l + x_u)/2$
- Evaluar condición para actualizar el intervalo: $f(x_l) * f(x_r) < 0$
- Mostrar por iteración:
  - Número de iteración
  - x_l, x_u, x_r
  - $f(x_r)$
  - $|x_u - x_l|$
- Reportar raíz aproximada y número de iteraciones
- Graficar la función y marcar la raíz usando `matplotlib`

Ejemplo de aproximación de raíz

Problema: En un proceso industrial, se desea encontrar el valor de x (por ejemplo, temperatura, velocidad o producción) para el cual la función de desempeño

$$f(x) = x^3 - 4x - 9$$

se anula, es decir, el punto donde la variable alcanza un equilibrio o condición crítica.

Buscamos un intervalo $[x_l, x_u]$ donde la función cambie de signo:

$$f(2) = -9, \quad f(3) = 6 \quad \Rightarrow f(2)f(3) < 0$$

Por el Teorema del Valor Intermedio, existe una raíz en $[2, 3]$.

Criterio de parada y fórmula del método

Se usa tolerancia:

$$\varepsilon = 0{,}01, \quad |x_u - x_l| < \varepsilon$$

El método de bisección itera:

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2}$$

y se actualiza el intervalo según:

$$\begin{cases} f(x_l)f(x_r) < 0 \Rightarrow x_u = x_r \\ f(x_l)f(x_r) > 0 \Rightarrow x_l = x_r \\ f(x_l)f(x_r) = 0 \Rightarrow x_r \text{ es raíz exacta} \end{cases}$$

Tabla de iteraciones

Iter	x_l	x_u	x_r	$f(x_r)$	$\lvert x_u - x_l \rvert$
1	2.0000	3.0000	2.5000	-3.3750	1.0000
2	2.5000	3.0000	2.7500	0.7969	0.5000
3	2.5000	2.7500	2.6250	-1.4121	0.2500
4	2.6250	2.7500	2.6875	-0.3594	0.1250
5	2.6875	2.7500	2.7188	0.2143	0.0625
6	2.6875	2.7188	2.7031	-0.0748	0.0313
7	2.7031	2.7188	2.7109	0.0693	0.0156
8	2.7031	2.7109	2.7070	-0.0027	0.0078

En la iteración 8 se cumple:

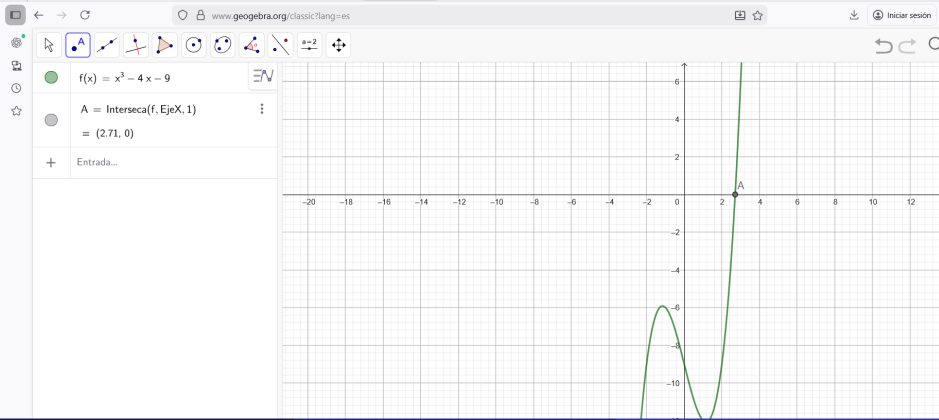
$$|x_u - x_l| < 0{,}01$$

Resultado final

La raíz aproximada es el punto medio del último intervalo:

$$x \approx \frac{2{,}7031 + 2{,}7109}{2} = 2{,}7070$$

Conclusión: La raíz de $f(x) = x^3 - 4x - 9$ se aproxima a $x \approx 2{,}707$.



Ejercicio práctico – Método de Bisección en Python (Colab)

Problema

Se desea encontrar el valor de x para el cual:

$$f(x) = x^3 - 4x - 9$$

En el intervalo $[2, 3]$, ya que:

$$f(2) = -9 < 0, \quad f(3) = 6 > 0 \implies f(2)f(3) < 0$$

Tolerancia requerida:

$$\varepsilon = 0{,}01$$

Pasos a desarrollar en Python (Colab)

- Definir la función $f(x)$ usando `def`
- Inicializar el intervalo: $x_l = 2,\ x_u = 3$
- Implementar el ciclo `while` con criterio de convergencia: $|x_u - x_l| < 0{,}01$
- Calcular el punto medio: $x_r = (x_l + x_u)/2$
- Evaluar condición para actualizar el intervalo: $f(x_l) * f(x_r) < 0$
- Mostrar por iteración:
  - Número de iteración
  - x_l, x_u, x_r
  - $f(x_r)$
  - $|x_u - x_l|$
- Reportar raíz aproximada y número de iteraciones
- Graficar la función y marcar la raíz usando `matplotlib`

Tarea – Método de Bisección en Python (Colab)

Problema
Se desea encontrar la raíz de:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6{,}1$$

En el intervalo $[1, 1{,}5]$, ya que:

$$f(1) = -0{,}1 < 0, \quad f(1{,}5) = 0{,}275 > 0$$

$$\Longrightarrow f(x_l)f(x_u) < 0$$

Tolerancia requerida:

$$\varepsilon = 0{,}01$$

Pasos a desarrollar en Python (Colab)

- Definir la función $f(x)$ usando `def`
- Inicializar el intervalo: $x_l = 1, \; x_u = 1{,}5$
- Implementar el ciclo `while` con criterio de convergencia: $|x_u - x_l| < 0{,}01$
- Calcular el punto medio: $x_r = (x_l + x_u)/2$
- Evaluar condición para actualizar el intervalo: $f(x_l) * f(x_r) < 0$
- Mostrar por iteración:
    - Número de iteración
    - x_l, x_u, x_r
    - $f(x_r)$
    - $|x_u - x_l|$
- Reportar raíz aproximada y número de iteraciones
- No usar funciones de raíz predefinidas

Fundamento teórico del método de la falsa posición

Definición formal

Si $f(x)$ es una función **real y continua** en el intervalo $[x_l, x_u]$ y

$$f(x_l)\,f(x_u) < 0$$

entonces existe **al menos una raíz real** en el intervalo (x_l, x_u).

A diferencia del método de bisección, la falsa posición **no divide el intervalo en partes iguales**.

Se aproxima la raíz mediante la **intersección de la recta** que une $(x_l, f(x_l))$ y $(x_u, f(x_u))$ con el eje x.

Idea geométrica del método

Se construye la recta secante entre los puntos extremos:

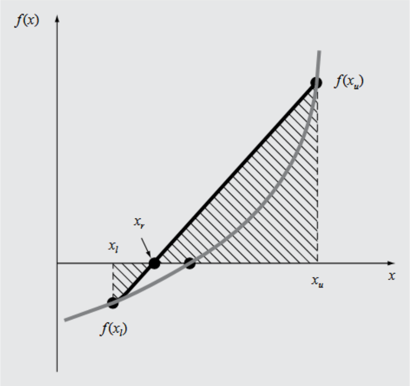
$$(x_l, f(x_l)) \quad \text{y} \quad (x_u, f(x_u))$$

Usando triángulos semejantes:

$$\frac{f(x_l)}{x_r - x_l} = \frac{f(x_u)}{x_r - x_u}$$

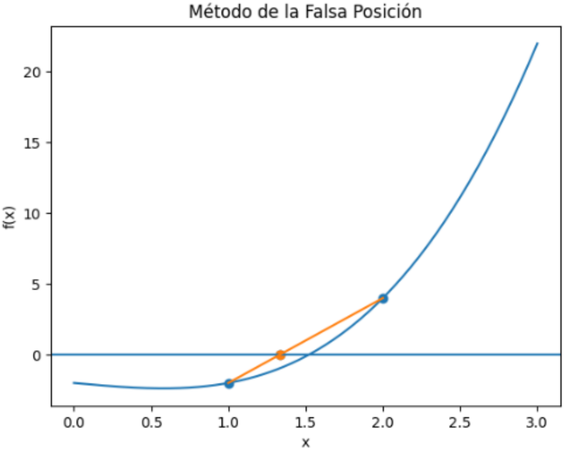
Despejando x_r:

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$



Esta es la **fórmula de la falsa posición**.

Primer ejemplo en bisección



Método de la Falsa Posición

Es un método numérico cerrado que:

- Parte de un intervalo con cambio de signo
- Aproxima la función por una recta
- Usa la intersección con el eje x como nueva aproximación

La aproximación de la raíz es:

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

Algoritmo del método de falsa posición

Paso 1: Elegir intervalo inicial tal que

$$f(x_l)f(x_u) < 0$$

Paso 2: Calcular

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

Paso 3: Evaluar $f(x_r)$.

Regla de decisión

Paso 4: Actualizar el intervalo:

- Si $f(x_l)f(x_r) < 0 \Rightarrow$ la raíz está a la izquierda $\Rightarrow x_u = x_r$
- Si $f(x_l)f(x_r) > 0 \Rightarrow$ la raíz está a la derecha $\Rightarrow x_l = x_r$
- Si $f(x_r) = 0 \Rightarrow$ raíz exacta

Se repite hasta que:

$$|x_r^{(k)} - x_r^{(k-1)}| < \varepsilon$$

Ejemplo

Sea:

$$f(x) = x^3 - x - 2$$

$$f(1) = -2 \qquad f(2) = 4$$

Como $f(1)f(2) < 0$, existe raíz en $[1, 2]$.

Tolerancia:

$$\varepsilon = 0{,}01$$

Iteración 1

$$x_l = 1 \qquad x_u = 2$$

$$\begin{aligned} x_r &= 2 - \frac{4(1-2)}{-2-4} \\ &= 2 - \frac{4(-1)}{-6} \\ &= 2 - \frac{-4}{-6} \\ &= 2 - 0{,}6667 \end{aligned}$$

$$x_r = 1{,}3333$$

$$f(1{,}3333) = (1{,}3333)^3 - 1{,}3333 - 2 = -0{,}9629$$

$$f(x_l)f(x_r) > 0 \Rightarrow x_l = 1{,}3333$$

Iteración 2

$$x_l = 1{,}3333 \qquad x_u = 2$$

$$\begin{aligned} x_r &= 2 - \frac{4(1{,}3333 - 2)}{-0{,}9629 - 4} \\ &= 2 - \frac{4(-0{,}6667)}{-4{,}9629} \\ &= 2 - \frac{-2{,}6668}{-4{,}9629} \\ &= 2 - 0{,}5373 \end{aligned}$$

$$x_r = 1{,}4627$$

$$f(1{,}4627) = -0{,}3333$$

$$\text{Error} = |1{,}4627 - 1{,}3333| = 0{,}1294$$

Iteración 3

$$x_l = 1{,}4627 \qquad x_u = 2$$

$$\begin{aligned} x_r &= 2 - \frac{4(1{,}4627 - 2)}{-0{,}3333 - 4} \\ &= 2 - \frac{4(-0{,}5373)}{-4{,}3333} \\ &= 2 - \frac{-2{,}1492}{-4{,}3333} \\ &= 2 - 0{,}4960 \end{aligned}$$

$$x_r = 1{,}5040$$

$$f(1{,}5040) = -0{,}1019$$

$$\text{Error} = |1{,}5040 - 1{,}4627| = 0{,}0413$$

Iteración 4

$$x_l = 1{,}5040 \qquad x_u = 2$$

$$\begin{aligned} x_r &= 2 - \frac{4(1{,}5040 - 2)}{-0{,}1019 - 4} \\ &= 2 - \frac{4(-0{,}4960)}{-4{,}1019} \\ &= 2 - \frac{-1{,}9840}{-4{,}1019} \\ &= 2 - 0{,}4837 \end{aligned}$$

$$x_r = 1{,}5163$$

$$f(1{,}5163) = -0{,}0304$$

$$\text{Error} = |1{,}5163 - 1{,}5040| = 0{,}0123$$

Iteración 5

$$x_l = 1{,}5163 \qquad x_u = 2$$

$$\begin{aligned} x_r &= 2 - \frac{4(1{,}5163 - 2)}{-0{,}0304 - 4} \\ &= 2 - \frac{4(-0{,}4837)}{-4{,}0304} \\ &= 2 - \frac{-1{,}9348}{-4{,}0304} \\ &= 2 - 0{,}4801 \end{aligned}$$

$$x_r = 1{,}5199$$

$$f(1{,}5199) = -0{,}0091$$

$$\text{Error} = |1{,}5199 - 1{,}5163| = 0{,}0036$$

Como:

Tabla de iteraciones

Iter	x_l	x_u	x_r	$f(x_r)$	Error
1	1.0000	2.0000	1.3333	-0.9629	—
2	1.3333	2.0000	1.4627	-0.3333	0.1294
3	1.4627	2.0000	1.5040	-0.1019	0.0413
4	1.5040	2.0000	1.5163	-0.0304	0.0123
5	1.5163	2.0000	1.5199	-0.0091	0.0036

Resultado

La raíz aproximada es:

$$x \approx 1{,}52$$

El método converge porque el error absoluto disminuye en cada iteración hasta ser menor que la tolerancia establecida.

Ejercicio práctico – Método de Falsa Posición en Python (Colab)

Problema
Se desea encontrar la raíz de:

$$f(x) = x^3 - 4x - 9$$

En el intervalo $[2, 3]$, ya que:

$$f(2) = -9 < 0, \quad f(3) = 6 > 0 \implies f(2)f(3) < 0$$

Tolerancia requerida:

$$\varepsilon = 0{,}01$$

Pasos a desarrollar en Python (Colab)

- Definir la función $f(x)$ usando `def` y el intervalo x_l, x_u
- Implementar ciclo `while` hasta que $|x_r^{(k)} - x_r^{(k-1)}| < 0{,}01$
- Calcular x_r con la fórmula de falsa posición:

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

- Actualizar el intervalo según el signo de $f(x_l) * f(x_r)$
- Mostrar por iteración: $x_l, x_u, x_r, f(x_r)$, error
- Reportar raíz aproximada y número de iteraciones
- Graficar función y marcar la raíz con `matplotlib`