THEME :

ELIMINATION DES CONTRAINTES DANS R^n

INFO210 : TECHNIQUES D'OPTIMISATION

Liste des membres du groupe

N°	Noms et prénoms	Matricule
1-	EVINA EVINA LILIANE	17Q2970
2-	MAFOGANG KEVINE LETICIA	17R2950
3-	MINGUE TCHANKWE MAHIEU	17Q2750
4-	MOUNDJONGUE NTOCKE SUZANNE FLORE	17Q2859
5-	NANA MBOUENDEU MARLENE	17R2192
6-	NGUELOH TALLA CYRIL RONSARD	17S2905
7-	NGUETCHE KEVIN DILAN	17Q2998

SOMMAIRE

Introduction

I- Description du problème à résoudre

1) Présentation générale du problème à résoudre par cette méthode

2) Situation et apport de cette méthode à la résolution du problème

II- Principe de la méthode d'élimination des contraintes

1) Définition des mots clés

2) Description du principe

III- Astuces permettant d'appliquer facilement la méthode

IV- Application à la résolution complète d'un problème d'optimisation

1) Application de la méthode à un problème précis

2) Détermination du minimum de la fonction

V- Remarques et critiques

Conclusion

Annexe :

INTRODUCTION

En permanence dans notre entourage, nous sommes confrontes à des problèmes d’optimisation qui pour la plupart possèdent des contraintes . Dans le soucis d’apporter des solutions à ces problèmes , plusieurs méthodes rapides et précises ont été développées ; elles peuvent être classées en deux(02) catégories à savoir : méthodes directes telles que les conditions de Kuhn et Trücher et les méthodes de directions admissibles ; les méthodes indirectes telles que la méthode des pénalités, celle du multiplicateur de Lagrange et la méthode d’élimination des contraintes. Dans le cadre de cet exposer nous étudierons de manière détaillée la méthode d’élimination des contraintes.

I-DESCRIPTION DU PROBLÈME A RÉSOUDRE

1) Présentation du problème de manière générale

De manière générale, les problèmes avec contraintes dans R^n se présentent comme suite : Soit à optimiser une fonction F: R^n → R

possédant des contraintes g_j(x)≤ 0 avec j = 1,…,n.

Optimiser F revient donc à la minimiser ou à la maximiser sur l'ensemble de ses contraintes. Notons que maximiser la fonction F(x) (pour tout x appartenant à R^n) revient à minimiser la fonction -F(x) et vis-versa. Ainsi on a :

Min F(x)= Max(-F(x)) et Max F(x)= Min (-F(x))

Dans la suite, lors de nos illustrations , nous allons donc nous intéresser uniquement aux problèmes de minimisation des fonctions .

2) Situation et apport de la méthode d 'élimination des contraintes a la résolution d'un problème.

la méthode d'élimination des contraintes est une méthode indirecte parmi les méthodes générales dans R^n, utilisées pour résoudre les problèmes d'optimisation avec contraintes. Elle consiste à transformer un problème d'optimisation avec contraintes en un problème équivalent sans contraintes, afin qu'il soit résolu par des méthodes de résolution des problèmes d'optimisation sans contrainte (méthode du gradient et autres).

- Remarque :

Il est très important de noter que la méthode d'élimination des contraintes ne consiste pas à résoudre le problème avec contrainte mais plutôt et uniquement à transformer un problème avec contraintes en un problème équivalent sans contraintes.

2) Situation et apport de la méthode d ‘élimination des contraintes a la résolution d’un problème.

La question qu’il faudrait se poser ici est celle de savoir : pourquoi passer d’un problème d’optimisation avec contraintes à un problème d’optimisation sans contraintes ? Une réponse simple à cette question est que résoudre un problème d’optimisation sans contraintes revient tout simplement à déterminer les points critiques et à étudier leurs natures.

Si vous ne connaissez pas ce qu’est un point critique ce n’est pas grave, la partie suivante le définira ainsi que plusieurs autres termes.

II- PRINCIPE DE LA METHODE D'ELIMINATION DES CONTRAINTES

1) Définition des mots clés

Afin de bien cerner aussi bien le principe de la méthode d'élimination des contraintes que tout ce qui va suivre, il est important de connaître les concepts suivants :

Soit P : MIN F(x) tel que : $\begin{cases} x \in \mathbb{R}^N \\ g_j(x) \leq 0 \text{ avec } j = 1,\ldots,n \end{cases}$

-Fonction objectif : il s'agit de la fonction F à Minimiser .

-Point critique : c'est le point x_0 de coordonnée $\left(\frac{df}{dx_1} = 0, \frac{df}{dx_2} = 0, \ldots, \frac{df}{dx_n} = 0\right)$.

-Matrice hessienne : c'est la matrice donnée par : $\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$.

Remarque : il est important de noter que la matrice hessienne est symétrique lorsque toutes ses dérivées sont continues .

II- PRINCIPE DE LA METHODE D’ELIMINATION DES CONTRAINTES

1) Définition des mots clés

- Une matrice n × n symétrique A est définie positive si :

$$\det([a_{11}]) > 0 \text{ , } \det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) > 0 \text{ , } \det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right) > 0 \text{ , …… } \det(A) > 0 \text{ .}$$

- Soit x_0 un point critique et A La matrice hessienne associe à l’élément x :
  - Si A est définit positif, alors x_0 est un minimum local.
  - Si – (A) est définit positif, alors x_0 est un maximum local.

puisque vous connaissez déjà les concepts clés , il est temps que vous sachiez en quoi consiste réellement la méthode d’élimination des contraintes.

II- PRINCIPE DE LA METHODE D'ELIMINATION DES CONTRAINTES

2) Principe de la méthode

Utiliser la méthode d'élimination des contraintes consiste a appliquer un changement de variable successivement aux différentes contraintes de la fonction a optimisée afin que ces dernières soient toujours vérifiées ; on obtient ainsi une fonction objective sans contrainte équivalente a la fonction objectif précédant.

Afin de mieux appliquer cette méthode, nous avons diviser la marche a suivre a cinq(05) étapes a savoir :

- Etape 1 : identifier les différentes contraintes et la fonction objectif.
- Etape 2 : recenser les propriétés (pour la plupart vues au secondaire) vérifiant pourtour réel une condition précise(∀ x ∈ $\mathbb{R}^N$, $e^x > 0; x^2 > 0$ etc.).

II- PRINCIPE DE LA METHODE D'ELIMINATION DES CONTRAINTES

2) Principe de la méthode

- Etape 3 : Pour chaque contrainte , se pose la question je peux remplacer ces variables par quelle propriété identifier a l'étape 2 pour que cette contrainte soit toujours vérifiée ?
- Etape 4 : Appliquer les changements de variables respectifs aux différentes contraintes et exprimer chaque variable en fonction des nouvelles variables posées.
- Etape 5 : Remplacer chaque variable nouvellement exprimée dans la fonction objectif ; la nouvelle fonction obtenue est donc sans contraintes et est équivalente a la fonction objectif .

Je sais que c'est un peut flou pour vous pour le moment c'est pourquoi nous allons illustrer chaque étape a l'aide d'un exemple.

II- PRINCIPE DE LA METHODE D'ELIMINATION DES CONTRAINTES

2) Principe de la méthode

Exemple : Soit le problème P : $\begin{cases} Min\ F(x_1, x_2, x_3\ ) \\ -x_1\ \leq 0 \\ -1 \leq 2x_2 + x_3 \leq 1 \\ -1 \leq -x_2 + x_3 \leq 1 \end{cases}$

étape 1 :

fonction objectif : $F(x_1, x_2, x_3\ )$

contraintes : $\begin{cases} -x_1\ \leq 0 \\ -1 \leq 2x_2 + x_3 \leq 1 \\ -1 \leq -x_2 + x_3 \leq 1 \end{cases}$

II- PRINCIPE DE LA METHODE D'ELIMINATION DES CONTRAINTES

2) Principe de la méthode

Etape 2 : Au secondaire, j'ai appris que $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x^2 \geq 0}$ ***de meme*** $\boldsymbol{-1 \leq \sin x \leq 1}$ ***et***

$\boldsymbol{-1 \leq \cos x \leq 1}$.

Etape 3 & 4:

on a : $-x_1 \leq 0 \Rightarrow x_1 \geq 0$ en posant $x_1 = y_1^2$ on obtient $y_1^2 \geq$ ce qui n'est plus une contrainte.

de même lorsqu'on a : $\begin{cases} -1 \leq 2x_2 + x_3 \leq 1 \\ -1 \leq -x_2 + x_3 \leq 1 \end{cases}$ en posant $\begin{cases} 2x_2 + x_3 = \sin y_2 & (1) \\ -x_2 + x_3 = \sin y_3 & (2) \end{cases}$

(1) + 2 * (2) : $x_3 + 2\, x_3 = \sin y_2 + 2 \sin y_3$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{1}{3}(\sin y_2 + 2 \sin y_3)$$

(2) : $-x_2 + x_3 = \sin y_3 \Rightarrow x_2 = x_3 - \sin y_3$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{3}(\sin y_2 - \sin y_3)$$

Etape 5 : $F(x_2, x_2, x_2) \Leftrightarrow F(y_1^2, \frac{1}{3}(\sin y_2 - \sin y_3), \frac{1}{3}(\sin y_2 + 2 \sin y_3))$.

II- PRINCIPE DE LA METHODE D’ELIMINATION DES CONTRAINTES

2) Principe de la méthode

A partir d’ici nous constatons que cette méthode est très simple a utiliser. Toute fois une question se pose : comment faire si on arrive pas a voir du premier coup d’œil le changement de variable idéal ? La partie suivante nous permettra de répondre a cette question.

III- ASTUCES

Dans l'optique de facilite la recherche des changements de variable permettant d'éliminer les contraintes, nous vous proposons une liste de transformations a utiliser selon les expressions de vos contraintes:

$$x_i \geq 0 : \begin{cases} x_i = y_i^2 \\ x_i = e^{y_i} \end{cases}$$

$$0 \leq x_i \leq 1 : \begin{cases} x_i = \frac{y_i^2}{1+y_i^2} \\ x_i = \sin^2 y_i \\ x_i = \frac{e^{y_i}}{e^{y_i}+e^{-y_i}} \end{cases}$$

$$-1 \leq x_i \leq 1 : \begin{cases} x_i = \sin y_i \\ x_i = \cos y_i \\ x_i = \frac{2y_i}{1+y_i^2} \end{cases}$$

$$\alpha_i \leq x_i \leq \beta_i : x_i = \alpha_i + (\beta_i - \alpha_i)\sin^2 y_i$$

IV.APPLICATION A LA RESOLUTION COMPLETE D'UN PROBLEME.

Soit a résoudre en utilisant la méthode d'élimination des contraintes le

problème P : $\begin{cases} MIN\ F(x_1, x_2) = -5(x_1 + x_2) \\ -x_1 + 3x_2 \ \leq 0 \\ 2x_1 - x_2 \ \leq 0 \end{cases}$

1) Utilisation de la méthode d'élimination des contraintes :

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \ \leq 0 \\ 2x_1 - x_2 \ \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 \ \geq 0 \\ -2x_1 + x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On peut donc poser conformément a la partie précédente (III) :

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = \ y_1^2 & (1) \\ -2x_1 + x_2 = \ y_2^2 & (2) \end{cases}$$

2 * (1) + (2) : $-5x_2 = 2y_1^2 + y_2^2 \quad \Rightarrow x_2 = \frac{-1}{5}(2y_1^2 + y_2^2)$

IV.APPLICATION A LA RESOLUTION COMPLETE D'UN PROBLEME.

1) **Utilisation de la méthode d'élimination des contraintes** :

On a donc a partir de la relation (1) :

(1) $: x_1 - 3x_2 = y_1^2 \Rightarrow x_1 = y_1^2 + 3x_2$

$$= y_1^2 - \frac{6}{5}y_1^2 - \frac{3}{5}y_2^2$$

$$= \frac{-1}{5}(y_1^2 + 3y_2^2)$$

donc $x_1 = \frac{-1}{5}(y_1^2 + 3y_2^2)$

Ainsi,

$F(x_1, x_2) = -5(x_1 + x_2)$

$$\Rightarrow F\left(\frac{-1}{5}(2y_1^2 + y_2^2), \frac{-1}{5}(y_1^2 + 3y_2^2)\right) = -5\left[\frac{-1}{5}(2y_1^2 + y_2^2) + \frac{-1}{5}(y_1^2 + 3y_2^2)\right)$$

$$= 2y_1^2 + y_2^2 + y_1^2 + 3y_2^2$$

$$= 3y_1^2 + 4y_2^2$$

$F\left(\frac{-1}{5}(2y_1^2 + y_2^2), \frac{-1}{5}(y_1^2 + 3y_2^2)\right) = 3y_1^2 + 4y_2^2$ est ainsi la fonction équivalente sans contraintes

IV.APPLICATION A LA RESOLUTION COMPLETE D'UN PROBLEME.

2) Résolution de la fonction sans contrainte :

On a : $F\left(\frac{-1}{5}(2y_1^2 + y_2^2), \frac{-1}{5}(y_1^2 + 3y_2^2)\right) = 3y_1^2 + 4y_2^2$

- Détermination du point critique :

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} = 6y_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y_2} = 8y_2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y_1} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y_2} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 6y_1 & = 0 \\ 8y_2 & = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y_1 & = 0 \\ y_2 & = 0 \end{cases}$$

Ainsi, le point $A\binom{0}{0}$ est un point critique a F.

IV.APPLICATION A LA RESOLUTION COMPLETE D'UN PROBLEME.

2) Résolution de la fonction sans contrainte :

- Etude de la nature du point critique

F($\frac{-1}{5}(2y_1^2 + y_2^2)$, $\frac{-1}{5}(y_1^2 + 3y_2^2)$) $= 3y_1^2 + 4y_2^2$

$$\begin{cases} x_1 = 2(0) + 0 \\ x_2 = 0 + 3(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

on a : $\frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_1} = 6$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y_2 \partial y_2} = 8$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_2} = 0$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial y_2 \partial y_1} = 0$.

la matrice hessienne associée est : D = $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

6 > 0 et det(D) = 48 > 0 donc D est définit positif et par conséquent A$\binom{0}{0}$ est le minimum de F.

V. Remarques et critiques

1)Remarques

Nous pouvons constater que pour un certain nombre de contraintes($x_i \geq 0$, $-1 \leq x_i \leq 1$,$0 \leq x_i \leq 1$ et $\alpha_i \leq x_i \leq \beta_i$), il est préférable d'utiliser la méthode d'élimination des contraintes afin de transformer le problème en un problème sans contraintes car elle s'avère très rapide et efficace.

V. Remarques et critiques

2) Critiques :

La Méthode d’élimination des contraintes ne garantie pas que l’on trouvera toujours des bons changements de variables afin d’éliminer les contraintes également, il n’est pas toujours possible d’exprimer chaque variable en fonction des nouvelles variables utilisées afin d’éliminer les contraintes.

Exemple : $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 0 \end{cases}$ il ne sera pas possible d’exprimer toutes les variables et donc d’éliminer toutes les contraintes.

V. Remarques et critiques

2) Critiques :

Comme autre inconvénient de cette méthode, nous avons le fait que généralement, la fonction obtenue est très complexe.

Exemple : pour la fonction a maximiser F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^3 -x_2^2+$x_3^2x_1^3$

Avec pour valeur de variable : $x_1 = \frac{e^{y_1}}{e^{y_1}+e^{-y_1}}$; $x_2 = \frac{e^{y_1}}{e^{y_1}+e^{-y_1}}$+ $x_i = \frac{e^{y_2}}{e^{y_2}+e^{-y_2}}$

Et $x_3 = \frac{e^{y_1}}{e^{y_1}+e^{-y_1}}$ - 2 * $\frac{e^{y_2}}{e^{y_2}+e^{-y_2}}$

il est très claire que la fonction obtenue est très complexe.

CONCLUSION

Parvenu au terme de notre analyse dont les propos étaient de présenter la méthode d'élimination des contraintes , il ressort de cette présentation d'une part que cette méthode est utilisée pour transformer une fonction à minimiser avec contraintes en fonction sans contraintes et d'autre part qu'elle est très rapide et efficace lorsqu'il est possible d'éliminer toutes les contraintes et enfin que son principal inconvénient est la complexité de la fonction obtenue .

NOUS VOUS REMERCIONS POUR VOTRE ATTENTION