DM - L'algorithme de Kaprekar

Question 1 Écrire une fonction `log : int -> int -> int` telle que `log b n` renvoie le plus entier k tel que $\mathtt{n} < \mathtt{b}^k$ (avec $\mathtt{b} \geq 2$).

Vous essayerez d'en écrire une version itérative et une version récursive.

Question 2 Écrire une fonction `vers_tableau : int -> int -> int array` telle que `vers_tableau b n` renvoie le tableau de la décomposition de `n` en base $\mathtt{b} \geq 2$.

Par exemple, on veut :

```
# vers_tableau 10 1492 ;;
- : int array = [|2; 9; 4; 1|]
```

Question 3 Écrire de même la fonction

`depuis_tableau : int -> int array -> int`.

Par exemple, on veut :

```
# depuis_tableau 10 [|2; 9; 4; 1|] ;;
- : int array = 1492
```

Nous allons maintenant implémenter la transformation de Kaprekar. Elle consiste, à partir d'un nombre n, par exemple 3721, de faire la différence des nombres obtenus en classant les chiffres en base 10 par ordre décroissant (on obtient ici 7321) et du nombre où les chiffres vont croissant (ici 1237). Ainsi, la transformation de Kaprekar appliquée à 3721 donne $7321 - 1237 = 6084$.

Question 4 Écrire la fonction

`kaprekar : int -> int`

qui effectue cette opération. À partir du tableau `t` des chiffres de l'écriture décimale d'un entier, on pourra le trier par ordre croissant en effectuant la commande `Array.sort (fun x y -> x - y) t` et par ordre décroissant en effectuant `Array.sort (fun x y -> y - x) t`.

Question 5 Écrire une fonction

`point_fixe : ('a -> 'a) -> 'a -> 'a`

telle que `point_fixe f x` renvoie le premier terme x_n de la suite $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ tel que $x_{n+1} = x_n$ où la suite $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est définie par :

$$x_0 = \mathtt{x} \quad \forall k \in \mathbf{N},\ x_{k+1} = \mathtt{f}(x_k)$$

On supposera que $\{k \in \mathbf{N} \mid x_{k+1} = x_k\} \neq \emptyset$.

Question 6 En déduire une fonction `point_fixe_kaprekar : int -> int` qui renvoie le point fixe obtenu à partir de l'entier donné en appliquant la transformation de Kaprekar.

Question 7 Calculer le nombre d'entiers $n \in [\![1000, 9999]\!]$ dont le point fixe précédent est égal à 6174.