DM - Détection de cycles

I. Étude générale

1. Suites récurrentes

Étant donné un ensemble E et une fonction $f : E \to E$, on intéresse aux suites récurrentes, autrement aux suites (u_n) définies par

$$u_0 = a \qquad \forall\, n \in \mathbf{N},\, u_{n+1} = f(u_n).$$

dépendant d'un élément $a \in E$.

Question 1 Écrire une fonction `termes` qui, étant donné une fonction f, une valeur initiale u_0 et un nombre de termes n, renvoie la liste des n premiers termes de la suite $(u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$. La fonction a donc pour type :

$$\texttt{termes} : \underbrace{\texttt{('a -> 'a)}}_{f} \texttt{ -> } \underbrace{\texttt{'a}}_{u_0} \texttt{ -> } \underbrace{\texttt{int}}_{n} \texttt{ -> 'a list}$$

Si vous avez du mal à obtenir une liste dans le bon sens (ce qui ne sera pas forcément le cas), vous pouvez toujours l'inverser à l'aide de la fonction `List.rev`.

2. Suites cycliques

Une telle suite est dite **cyclique** s'il existe deux indices $i < j$ tels que $u_i = u_j$.

Question 2 Montrer que si E est fini, alors la suite (u_n) est nécessairement cyclique, quel que soit son terme initial $a \in E$.

Question 3 Montrer que si (u_n) est cyclique, alors il existe un couple d'entiers $(\mu, \lambda) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^\star$ tels que les valeurs

$$u_0, u_1, \ldots, u_{\mu+\lambda-1}$$

soient toutes distinctes deux à deux et tels que :

$$\forall\, n \geq \mu,\, u_{n+\lambda} = u_n$$

Ce couple est-il unique ?

On a alors bien sûr $u_{n+k\lambda} = u_n$ pour tous $n \geq \mu$ et $k \in \mathbf{N}$.

Il est alors intéressant de déterminer les valeurs de μ (la longueur de la *queue*) et λ (la longueur de la *boucle*). C'est ce que l'on appelle la *détection de cycles*.

Question 4 Décrire une méthode permettant de calculer μ et λ avec une complexité temporelle en $O\big((\mu+\lambda)^2\big)$, en supposant que l'appel à la fonction f se fait en temps constant. On ne demande pas de la programmer.

Pour pouvoir faire cela efficacement, nous allons étudier quelques propriétés d'une telle situation.

Question 5

1. Montrer que l'ensemble $\{k \in \mathbf{N}^\star \mid u_{2k} = u_k\}$ est non vide.
2. Montrer que son minimum, que l'on notera ν, appartient à l'intervalle d'entiers $[\![\mu, \mu+\lambda]\!]$.

Question 6 Montrer que $\mu = \min\{k \in \mathbf{N} \mid u_k = u_{\nu+k}\}$.

On a alors bien sûr $\lambda = \min\{k \in \mathbf{N} \mid u_{\mu+k} = u_\mu\}$.

Ces différents résultats permettent d'obtenir une méthode efficace pour calculer μ et λ.

Question 7 Écrire une fonction `calculer_nu` qui, étant donné une fonction f et une valeur initiale u_0, renvoie le couple (ν, u_ν). La fonction aura pour type

$$\texttt{calculer\_nu} : \underbrace{\texttt{('a -> 'a)}}_{f} \texttt{ -> } \underbrace{\texttt{'a}}_{u_0} \texttt{ -> } \underbrace{\texttt{int}}_{\nu} \texttt{ * } \underbrace{\texttt{'a}}_{u_\nu}$$

On rappelle que, par définition, on a $\nu > 0$. On pourra utiliser une fonction auxilliaire ayant pour arguments f, k, u_k et u_{2k}.

Question 8 Écrire une fonction `calculer_mu` qui, étant donné la fonction f, la valeur initiale u_0 ainsi que u_ν, retourne le couple (μ, u_μ). La fonction aura donc comme type :

$$\texttt{calculer\_mu} : \underbrace{\texttt{('a -> 'a)}}_{f} \texttt{ -> } \underbrace{\texttt{'a}}_{u_0} \texttt{ -> } \underbrace{\texttt{'a}}_{u_\nu} \texttt{ -> } \underbrace{\texttt{int}}_{\mu} \texttt{ * } \underbrace{\texttt{'a}}_{u_\mu}$$

Question 9 Écrire, enfin, une fonction

$$\texttt{calculer\_lambda} : \underbrace{\texttt{('a -> 'a)}}_{f} \texttt{ -> } \underbrace{\texttt{'a}}_{u_\mu} \texttt{ -> } \underbrace{\texttt{int}}_{\lambda}$$

qui calcule λ. On rappelle que, par définition, $\lambda > 0$.

Question 10 Écrire une fonction

$$\texttt{cycle : }\underbrace{\texttt{('a -> 'a)}}_{f}\texttt{ -> }\underbrace{\texttt{'a}}_{u_0}\texttt{ -> 'a list * 'a list}$$

qui, étant donné une fonction f et une valeur initiale u_0, retourne les listes correspondant aux valeurs $(u_0, u_1, \dots, u_{\mu-1})$ et $(u_\mu, u_{\mu+1}, \dots, u_{\mu+\lambda-1})$.

II. Applications

1. L'algorithme de Prabekhar

La transformation de Prabekhar est la fonction p qui transforme un entier naturel non nul n en le nombre $p(n)$ égal à la somme des carrés de ses chiffres. Ainsi, $n = 1492$ est transformé en $p(n) = 1^2 + 4^2 + 9^2 + 2^2 = 102$.

Nous allons nous intéresser aux suites récurrentes basées sur p.

Question 11 Montrer que si $n < 1000$, alors $p(n) < 1000$. Autrement si, l'intervalle d'entiers $[\![1, 999]\!]$ est stable par p.

Cela implique que toute suite récurrente de valeur initiale $u_0 \in [\![1, 999]\!]$ est cyclique.

Question 12 Écrire une fonction `prabekhar : int -> int` qui implémente la fonction p. On notera que le reste de la division entière se note `mod` en OCaml.

Question 13

1. À l'aide des fonctions programmées précédemment, montrer que la suite de Prabekhar de valeur initiale 1 est périodique et indiquer sa période.
2. Faire de même pour la suite de valeur initiale 4.
3. **(Plus difficile)** Expliquer comment vérifier que toute suite de Prabekhar de valeur initiale prise dans $[\![1, 999]\!]$ aboutit nécessairement à l'un des deux cycles précédents.
4. **(Encore plus difficile)** Montrer que cela reste vrai **quelque soit** la valeur initiale $u_0 \in \mathbf{N}$.

2. L'écriture décimale de rationnels

Il est bien connu que l'écriture décimal des rationnels est ultimement périodique, c'est même une caractérisation des rationnels parmi les réels.

Par exemple, en notant entre parenthèses la partie périodique, on a

$$\frac{1}{6} = 0,16666 = 0,1(6)$$

$$\frac{19}{28} = 0,678571428571428571\dots = 0,67(857142)$$

La détection de cyclique va permet de déterminer efficacement cette écriture rationnelle.

On fixe deux entiers naturels $0 \leq a < b$ et on s'intéresse à l'écriture décimale du quotient $\frac{a}{b}$.

Pour cela, on définit la suite récurrente (u_n) par :

$$u_0 = a \qquad \forall\, n \in \mathbf{N},\, u_{n+1} = 10u_n \mod b$$

où $x \mod y$ désigne le reste de la division euclidienne de x par y.

Dans ce cas, en notant $v_n = \left\lfloor \frac{10u_n}{b} \right\rfloor$, alors on admettra que

$$\frac{a}{b} = 0, v_0 v_1 v_2 v_3 \dots$$

Question 14 Écrire une fonction `decomp` qui, étant donné les entiers a et b, renvoie la liste des décimales du prélude et de la boucle. On doit avoir, par exemple :

```
# decomp2 19 28 ;;
- : int list * int list = ([6; 7], [8; 5; 7; 1; 4; 2])
```

Question 15 Quelle est la longueur de la partie cyclique de l'écriture décimale de $\frac{123}{321}$?

Question 16 Déterminer la valeur $b \in [\![1, 10000]\!]$ pour laquelle la période de l'écriture décimale de $\frac{1}{b}$ est maximale.