验证向量叉乘的李代数性质

回答：

1.封闭性： $\forall X, Y \in \mathrm{R}^3$，$[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] \in \mathrm{R}^3$

因为 X,Y 均为三维向量，两者叉积得到 P，P 既垂直 X 又垂直 Y，同样也是一个三维向量，满足封闭性。

2.双线性：$\forall \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z} \in \mathrm{R}^3, \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{R}$，$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z], [Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y]$

$(aX + bY) \times Z = aX \times Z + bY \times Z$

$Z \times (aX + bY) = \mathrm{a}Z \times X + bZ \times Y$

展开后满足叉积结合律，因此满足双线性。

3.自反性：$\forall \mathrm{X} \in \mathrm{R}^3, [\mathrm{X}, \mathrm{X}] = 0$

$[X, X] = X \times X = \sin\theta \cdot X^2$

$\theta = 0, [X, X] = 0$

即满足自反性

4. 雅可比等价: $\forall \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z} \in \mathrm{R}^3, [\mathrm{X}, [\mathrm{Y}, \mathrm{Z}]] + [\mathrm{Y}, [\mathrm{Z}, \mathrm{X}]] + [\mathrm{Z}, [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]] = 0$

$\left[\mathrm{X}, [\mathrm{Y}, \mathrm{Z}]\right] = \mathrm{X} \times [\mathrm{Y}, \mathrm{Z}] = \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \times \mathrm{Z}$

$\left[\mathrm{Y}, [\mathrm{Z}, \mathrm{X}]\right] = \mathrm{Y} \times [\mathrm{Z}, \mathrm{X}] = \mathrm{Y} \times \mathrm{Z} \times \mathrm{X}$

$\left[\mathrm{Z}, [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]\right] = \mathrm{Z} \times [\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = \mathrm{Z} \times \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$

上述三式满足叉积的雅可比恒等式：$\mathrm{X} \times \mathrm{Y} \times \mathrm{Z} + \mathrm{Y} \times \mathrm{Z} \times \mathrm{X} + \mathrm{Z} \times \mathrm{X} \times$

$Y = 0$

则满足雅可比等价性质。

所以$g = (R^3, R, \times)$满足李代数所有条件，构成李代数。