

矩阵 $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ，那么 $d(x^T A x) dx$ 是什么？

回答：

$d(x^T A x)/dx$ 即为对 x 二偏导（梯度向量）

$$x^T A x = \sum_k^n \sum_l^n A_{kl} x_k x_l$$

$\frac{\partial(x^T A x)}{\partial x}$ 的第 i 个分量为：

$$\left[\frac{\partial(x^T A x)}{\partial x} \right]_i = \frac{\partial \sum_k^n \sum_l^n A_{kl} x_k x_l}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n A_{ki} x_k + \sum_{l=1}^n A_{li} x_l$$

依上式所见，结果为标量，直接排成一行，故：

$$\frac{\partial(x^T A x)}{\partial x} = A x + A^T x = (A + A^T) x$$