

Propiedades geométricas interesantes

Jaime Sebastian Chavarria Fuertes

October 7, 2025

Contents

1	Conversión de ángulos entre grados sexagesimales y decimales	8
1.1	De grados, minutos y segundos a grados decimales	8
1.2	Conversión inversa: de grados decimales a grados, minutos y segundos . .	8
1.3	Relaciones fundamentales del sistema sexagesimal	8
2	Leyes Fundamentales de la Trigonometría	8
2.1	Ley de Senos	8
2.2	Ley de Cosenos	8
2.3	Casos particulares	9
2.4	Ley de Tangentes	9
3	Identidades Trigonométricas Fundamentales	9
3.1	Identidades Pitagóricas	9
3.2	Identidades Recíprocas	9
3.3	Identidades de Cociente	9
4	Fórmulas de Ángulo Doble	10
5	Fórmulas de Ángulo Medio	10
6	Fórmulas de Suma y Resta de Ángulos	10
6.1	Senos de suma y resta	10
6.2	Cosenos de suma y resta	10
6.3	Tangente de suma y resta	10
7	Fórmulas de Producto a Suma	11
8	Fórmulas de Suma a Producto	11
9	Valores Especiales de Funciones Trigonométricas	11
9.1	Tabla de valores comunes	11
9.2	Valores en radianes	11
9.3	Conversión entre grados y radianes	12
10	Áreas de Triángulos	12
10.1	Fórmula básica	12
10.2	Fórmula con dos lados y el ángulo entre ellos	12
10.3	Fórmula de Herón	12
10.4	Fórmula usando el radio circunscrito	12
10.5	Fórmula usando el radio inscrito	12
11	Propiedades de Triángulos	12
11.1	Suma de ángulos internos	12
11.2	Desigualdad triangular	12
11.3	Relación entre lados y ángulos	13
11.4	Radio circunscrito	13
11.5	Radio inscrito	13
11.6	Longitud de medianas	13

11.7	Longitud de alturas	13
11.8	Longitud de bisectrices	13
12	Triángulos Especiales	14
12.1	Triángulo Equilátero (lado a)	14
12.2	Triángulo Rectángulo	14
12.3	Triángulos Pitagóricos Comunes	14
13	Círculos y Circunferencias	14
13.1	Fórmulas básicas	14
13.2	Longitud de arco	15
13.3	Área de sector circular	15
13.4	Área de segmento circular	15
13.5	Cuerda y arco	15
13.6	Teorema de la potencia de un punto	15
13.7	Ecuación de la circunferencia	16
14	Polígonos Regulares	16
14.1	Fórmulas generales para un polígono regular de n lados	16
14.2	Polígono regular inscrito en un círculo	16
14.3	Casos particulares de polígonos regulares	17
15	Cuadriláteros	17
15.1	Propiedades generales	17
15.2	Cuadrado (lado a)	17
15.3	Rectángulo (lados a y b)	17
15.4	Rombo (lado a , diagonales d_1 y d_2)	18
15.5	Paralelogramo (lados a, b , altura h , ángulo θ)	18
15.6	Trapezio (bases b_1, b_2 , altura h)	18
15.7	Fórmula de Bretschneider (cuadrilátero general)	18
15.8	Cuadrilátero cíclico (Fórmula de Brahmagupta)	18
16	Geometría de Coordenadas en el Plano	19
16.1	Distancia entre dos puntos	19
16.2	Punto medio	19
16.3	División de un segmento en razón dada	19
16.4	Ecuación de la recta	19
16.5	Pendiente de una recta	19
16.6	Rectas paralelas y perpendiculares	20
16.7	Distancia de un punto a una recta	20
16.8	Ángulo entre dos rectas	20
16.9	Área de un triángulo con coordenadas	20
16.10	Condición de colinealidad	20
17	Cónicas	21
17.1	Parábola	21
17.2	Elipse	21
17.3	Hipérbola	22

18 Transformaciones Geométricas	22
18.1 Traslación	22
18.2 Rotación alrededor del origen	22
18.3 Reflexión	22
18.4 Escalamiento	23
19 Geometría del Espacio (3D)	23
19.1 Distancia entre dos puntos en 3D	23
19.2 Punto medio en 3D	23
19.3 Ecuación del plano	23
19.4 Ecuación de la recta en 3D	23
19.5 Distancia de un punto a un plano	24
19.6 Ángulo entre dos planos	24
20 Vectores	24
20.1 Operaciones básicas con vectores	24
20.2 Producto punto (escalar)	24
20.3 Producto cruz (vectorial)	25
20.4 Producto triple escalar	25
20.5 Proyección vectorial	26
20.6 Ilustración: Triángulo rectángulo	26
20.7 Ilustración: Círculo unitario con ángulos	26
20.8 Ilustración: Parábola	27
21 Sólidos Geométricos	27
21.1 Cubo (arista a)	27
21.2 Paralelepípedo rectangular (dimensiones a, b, c)	27
21.3 Esfera (radio r)	27
21.4 Cilindro circular (radio r , altura h)	28
21.5 Cono circular (radio r , altura h , generatriz l)	28
21.6 Pirámide	28
21.7 Prisma	28
21.8 Tronco de cono (radios r_1, r_2 , altura h)	28
21.9 Toro (radio mayor R , radio menor r)	29
21.10 Casquete esférico (radio r , altura h)	29
21.11 Elipsoide (semiejes a, b, c)	29
22 Teoremas Importantes	29
22.1 Teorema de Tales	29
22.2 Teorema de Pitágoras generalizado	29
22.3 Teorema de Stewart	29
22.4 Teorema de la bisectriz	30
22.5 Teorema de Menelao	30
22.6 Teorema de Ceva	30
22.7 Teorema de Euler (para triángulos)	30
22.8 Teorema del ángulo inscrito	30
22.9 Teorema de Ptolomeo	30

23 Funciones Trigonómicas Inversas	31
23.1 Dominios y rangos	31
23.2 Identidades de funciones inversas	31
23.3 Relaciones entre funciones inversas	31
23.4 Derivadas de funciones trigonométricas	32
23.5 Derivadas de funciones trigonométricas inversas	32
24 Funciones Hiperbólicas	32
24.1 Definiciones	32
24.2 Identidades hiperbólicas	33
24.3 Suma y resta de funciones hiperbólicas	33
24.4 Derivadas de funciones hiperbólicas	33
24.5 Funciones hiperbólicas inversas	33
25 Coordenadas Polares	34
25.1 Conversión entre cartesianas y polares	34
25.2 Área en coordenadas polares	34
25.3 Longitud de arco en polares	34
25.4 Curvas polares comunes	34
25.5 Ilustración: Rosa polar de 4 pétalos	35
25.6 Ilustración: Cardioide	35
26 Coordenadas Esféricas y Cilíndricas	36
26.1 Coordenadas cilíndricas (r, θ, z)	36
26.2 Coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ)	36
26.3 Elemento de volumen	36
27 Series de Fourier	36
27.1 Serie de Fourier trigonométrica	36
27.2 Serie de Fourier compleja	37
28 Desigualdades Geométricas	37
28.1 Desigualdad entre medias	37
28.2 Desigualdad de Cauchy-Schwarz	37
28.3 Desigualdad del triángulo	38
28.4 Desigualdad isoperimétrica	38
28.5 Desigualdad de Weitzenböck	38
29 Números Complejos en Geometría	38
29.1 Forma rectangular	38
29.2 Forma polar	38
29.3 Fórmula de Euler	38
29.4 Teorema de De Moivre	38
29.5 Raíces n -ésimas de la unidad	39
29.6 Raíces n -ésimas de un número complejo	39
30 Geometría Fractal	39
30.1 Dimensión fractal (dimensión de Hausdorff)	39
30.2 Ejemplos de dimensiones fractales	39

31 Transformaciones Lineales y Matrices	39
31.1 Matriz de rotación en 2D	39
31.2 Matriz de rotación en 3D	40
31.3 Matriz de reflexión	40
31.4 Matriz de escalamiento	40
31.5 Matriz de cizallamiento (shear)	40
32 Fórmulas Adicionales	41
32.1 Número de oro (ϕ)	41
32.2 Rectángulo áureo	41
32.3 Espiral áurea	41
32.4 Ángulo sólido	41
33 Aproximaciones Útiles	41
34 Ilustración: Hexágono regular inscrito	42
35 Geometría Computacional	42
35.1 Producto cruz en 2D (determinante)	42
35.2 Área de polígono por coordenadas	42
35.3 Punto dentro de un polígono convexo	42
35.4 Punto dentro de un triángulo	42
35.5 Convex Hull (Envolverte Convexa)	43
35.6 Intersección de segmentos	43
35.7 Punto más cercano a un segmento	43
36 Distancias Especiales	43
36.1 Distancia de Manhattan	43
36.2 Distancia de Chebyshev	43
36.3 Distancia de Minkowski	44
36.4 Distancia de Hamming	44
36.5 Distancia de Hausdorff	44
37 Teoremas Avanzados	44
37.1 Teorema de Napoleon	44
37.2 Teorema de Morley	44
37.3 Teorema del punto de Fermat	44
37.4 Teorema de Feuerbach (Círculo de los nueve puntos)	45
37.5 Teorema de Carnot	45
37.6 Teorema de Menelao generalizado (3D)	45
37.7 Identidad de Brahmagupta	45
37.8 Teorema japonés	45
38 Fórmulas de Área Avanzadas	45
38.1 Área de un cuadrilátero con diagonales	45
38.2 Fórmula de Coolidge para cuadriláteros	45
38.3 Área de un polígono regular	45
38.4 Área de un sector elíptico	46

39 Centros Notables del Triángulo	46
39.1 Ortocentro (H)	46
39.2 Circuncentro (O)	46
39.3 Incentro (I)	46
39.4 Baricentro (G)	46
39.5 Recta de Euler	46
40 Secciones Cónicas - Propiedades Avanzadas	47
40.1 Ecuación general de una cónica	47
40.2 Propiedades focales de la parábola	47
40.3 Propiedades focales de la elipse	47
40.4 Propiedades focales de la hipérbola	47
40.5 Tangente a una cónica	47
41 Curvas Paramétricas	48
41.1 Cicloide	48
41.2 Epicicloide	48
41.3 Hipocicloide	48
41.4 Astroide (Hipocicloide con $R = 4r$)	48
41.5 Lemniscata de Bernoulli	48
42 Curvatura	48
42.1 Curvatura de una curva plana	48
42.2 Radio de curvatura	49
42.3 Curvatura del círculo	49
43 Superficies Cuádricas	49
43.1 Elipsoide	49
43.2 Hiperboloide de una hoja	49
43.3 Hiperboloide de dos hojas	49
43.4 Paraboloide elíptico	49
43.5 Paraboloide hiperbólico (silla de montar)	49
43.6 Cono elíptico	49
44 Ilustración: Funciones trigonométricas	50
45 Integrales Trigonométricas Útiles	50
46 Constantes Geométricas Importantes	50
47 Relaciones entre Trigonometría y Números Complejos	51
47.1 Identidades de Euler	51
47.2 Fórmula más bella de las matemáticas	51
48 Notas Finales	51

1 Conversión de ángulos entre grados sexagesimales y decimales

1.1 De grados, minutos y segundos a grados decimales

Dado un ángulo expresado en grados (G), minutos (M) y segundos (S), su valor en grados decimales (D) se obtiene mediante la relación:

$$D = G + \frac{M}{60} + \frac{S}{3600}$$

1.2 Conversión inversa: de grados decimales a grados, minutos y segundos

Si se tiene un ángulo en grados decimales (D), los valores correspondientes en grados, minutos y segundos se calculan así:

$$\begin{aligned} G &= \lfloor D \rfloor, \\ M &= \lfloor (D - G) \times 60 \rfloor, \\ S &= (D - G - \frac{M}{60}) \times 3600 \end{aligned}$$

1.3 Relaciones fundamentales del sistema sexagesimal

$$1^\circ = 60' \quad , \quad 1' = 60'' \quad \Rightarrow \quad 1^\circ = 3600''$$

2 Leyes Fundamentales de la Trigonometría

2.1 Ley de Senos

En cualquier triángulo ABC , con lados a, b, c opuestos a los ángulos A, B, C respectivamente, se cumple:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

donde R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

2.2 Ley de Cosenos

En el mismo triángulo ABC , la relación entre los lados y los cosenos de los ángulos es:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \end{aligned}$$

2.3 Casos particulares

- Si $A = 90^\circ$, entonces la Ley de Cosenos se reduce al Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

- Si el triángulo es isósceles con $b = c$, entonces:

$$a = 2b \sin \frac{A}{2}$$

2.4 Ley de Tangentes

Para un triángulo ABC :

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

3 Identidades Trigonométricas Fundamentales

3.1 Identidades Pitagóricas

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \\ 1 + \tan^2 \theta &= \sec^2 \theta \\ 1 + \cot^2 \theta &= \csc^2 \theta \end{aligned}$$

3.2 Identidades Recíprocas

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{1}{\csc \theta} & , & & \csc \theta &= \frac{1}{\sin \theta} \\ \cos \theta &= \frac{1}{\sec \theta} & , & & \sec \theta &= \frac{1}{\cos \theta} \\ \tan \theta &= \frac{1}{\cot \theta} & , & & \cot \theta &= \frac{1}{\tan \theta} \end{aligned}$$

3.3 Identidades de Cociente

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad , \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

4 Fórmulas de Ángulo Doble

$$\begin{aligned}\sin(2\theta) &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ \cos(2\theta) &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= 2 \cos^2 \theta - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 \theta \\ \tan(2\theta) &= \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}\end{aligned}$$

5 Fórmulas de Ángulo Medio

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \\ \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}\end{aligned}$$

6 Fórmulas de Suma y Resta de Ángulos

6.1 Seno de suma y resta

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

6.2 Coseno de suma y resta

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

6.3 Tangente de suma y resta

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}\end{aligned}$$

7 Fórmulas de Producto a Suma

$$\begin{aligned}\sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \\ \cos \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]\end{aligned}$$

8 Fórmulas de Suma a Producto

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)\end{aligned}$$

9 Valores Especiales de Funciones Trigonométricas

9.1 Tabla de valores comunes

θ	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0

9.2 Valores en radianes

$$\begin{aligned}0^\circ &= 0 \text{ rad} \quad , \quad 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \\ 45^\circ &= \frac{\pi}{4} \text{ rad} \quad , \quad 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \\ 90^\circ &= \frac{\pi}{2} \text{ rad} \quad , \quad 180^\circ = \pi \text{ rad} \\ 270^\circ &= \frac{3\pi}{2} \text{ rad} \quad , \quad 360^\circ = 2\pi \text{ rad}\end{aligned}$$

9.3 Conversión entre grados y radianes

$$\text{Radianes} = \text{Grados} \times \frac{\pi}{180} \quad , \quad \text{Grados} = \text{Radianes} \times \frac{180}{\pi}$$

10 Áreas de Triángulos

10.1 Fórmula básica

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura}$$

10.2 Fórmula con dos lados y el ángulo entre ellos

$$\text{Área} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B$$

10.3 Fórmula de Herón

Dado un triángulo con lados a, b, c y semiperímetro $s = \frac{a+b+c}{2}$:

$$\text{Área} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

10.4 Fórmula usando el radio circunscrito

$$\text{Área} = \frac{abc}{4R}$$

donde R es el radio de la circunferencia circunscrita.

10.5 Fórmula usando el radio inscrito

$$\text{Área} = rs$$

donde r es el radio de la circunferencia inscrita y s es el semiperímetro.

11 Propiedades de Triángulos

11.1 Suma de ángulos internos

$$A + B + C = 180^\circ = \pi \text{ rad}$$

11.2 Desigualdad triangular

Para que tres longitudes a, b, c formen un triángulo, deben cumplir:

$$\begin{aligned} a + b &> c \\ a + c &> b \\ b + c &> a \end{aligned}$$

11.3 Relación entre lados y ángulos

En un triángulo, al lado mayor se opone el ángulo mayor:

$$a > b \Leftrightarrow A > B$$

11.4 Radio circunscrito

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C}$$

11.5 Radio inscrito

$$r = \frac{\text{Área}}{s} = (s - a) \tan \frac{A}{2} = (s - b) \tan \frac{B}{2} = (s - c) \tan \frac{C}{2}$$

11.6 Longitud de medianas

La longitud de la mediana desde el vértice A al lado a es:

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

11.7 Longitud de alturas

La altura desde el vértice A es:

$$h_a = b \sin C = c \sin B = \frac{2\text{Área}}{a}$$

11.8 Longitud de bisectrices

La longitud de la bisectriz desde el vértice A es:

$$t_a = \frac{2bc \cos(A/2)}{b + c} = \frac{\sqrt{bc[(b + c)^2 - a^2]}}{b + c}$$

12 Triángulos Especiales

12.1 Triángulo Equilátero (lado a)

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \\ \text{Altura} &= \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ \text{Radio circunscrito} &= \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \\ \text{Radio inscrito} &= \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}\end{aligned}$$

12.2 Triángulo Rectángulo

Sea un triángulo rectángulo con catetos a, b e hipotenusa c :

$$\begin{aligned}c^2 &= a^2 + b^2 \quad (\text{Teorema de Pitágoras}) \\ \text{Área} &= \frac{ab}{2} \\ \text{Radio inscrito} &= \frac{a + b - c}{2} \\ \text{Radio circunscrito} &= \frac{c}{2}\end{aligned}$$

12.3 Triángulos Pitagóricos Comunes

- (3, 4, 5) y sus múltiplos: (6, 8, 10), (9, 12, 15), etc.
- (5, 12, 13) y sus múltiplos
- (8, 15, 17) y sus múltiplos
- (7, 24, 25) y sus múltiplos
- (20, 21, 29) y sus múltiplos

13 Círculos y Circunferencias

13.1 Fórmulas básicas

Para un círculo de radio r :

$$\text{Circunferencia} = 2\pi r$$

$$\text{Área} = \pi r^2$$

$$\text{Diámetro} = 2r$$

13.2 Longitud de arco

Un arco que subtiende un ángulo θ (en radianes) tiene longitud:

$$L = r\theta$$

Si θ está en grados:

$$L = \frac{\pi r \theta}{180}$$

13.3 Área de sector circular

$$\text{Área del sector} = \frac{1}{2}r^2\theta \quad (\theta \text{ en radianes})$$

$$\text{Área del sector} = \frac{\pi r^2 \theta}{360} \quad (\theta \text{ en grados})$$

13.4 Área de segmento circular

$$\text{Área del segmento} = \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin \theta) \quad (\theta \text{ en radianes})$$

13.5 Cuerda y arco

Para una cuerda que subtiende un ángulo central θ :

$$\text{Longitud de cuerda} = 2r \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

13.6 Teorema de la potencia de un punto

Si dos cuerdas se intersectan en un punto interior P de un círculo, dividiendo las cuerdas en segmentos de longitudes a, b y c, d :

$$a \cdot b = c \cdot d$$

13.7 Ecuación de la circunferencia

Forma canónica (centro en (h, k) y radio r):

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Forma general:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Donde el centro es $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ y el radio es $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$.

14 Polígonos Regulares

14.1 Fórmulas generales para un polígono regular de n lados

Ángulo interior:

$$\text{Ángulo interior} = \frac{(n - 2) \times 180^\circ}{n} = \frac{(n - 2)\pi}{n} \text{ rad}$$

Ángulo exterior:

$$\text{Ángulo exterior} = \frac{360^\circ}{n} = \frac{2\pi}{n} \text{ rad}$$

Suma de ángulos interiores:

$$\text{Suma} = (n - 2) \times 180^\circ = (n - 2)\pi \text{ rad}$$

Número de diagonales:

$$\text{Diagonales} = \frac{n(n - 3)}{2}$$

14.2 Polígono regular inscrito en un círculo

Para un polígono regular de n lados inscrito en un círculo de radio R :

Longitud del lado:

$$a = 2R \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2R \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

Apotema (distancia del centro al lado):

$$ap = R \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = R \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

Perímetro:

$$P = 2nR \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Área:

$$\boxed{\text{Área} = \frac{1}{2} \times \text{Perímetro} \times \text{Apotema} = \frac{nR^2}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$$

14.3 Casos particulares de polígonos regulares

Triángulo equilátero ($n = 3$):

$$\text{Ángulo interior} = 60^\circ, \quad \text{Diagonales} = 0$$

Cuadrado ($n = 4$):

$$\text{Ángulo interior} = 90^\circ, \quad \text{Diagonales} = 2$$

Pentágono regular ($n = 5$):

$$\text{Ángulo interior} = 108^\circ, \quad \text{Diagonales} = 5$$

Hexágono regular ($n = 6$):

$$\text{Ángulo interior} = 120^\circ, \quad \text{Diagonales} = 9$$

Octágono regular ($n = 8$):

$$\text{Ángulo interior} = 135^\circ, \quad \text{Diagonales} = 20$$

15 Cuadriláteros

15.1 Propiedades generales

Para cualquier cuadrilátero:

$$\boxed{\text{Suma de ángulos interiores} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad}}$$

15.2 Cuadrado (lado a)

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Perímetro} = 4a \\ \text{Área} = a^2 \\ \text{Diagonal} = a\sqrt{2} \end{array}}$$

15.3 Rectángulo (lados a y b)

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Perímetro} = 2(a + b) \\ \text{Área} = ab \\ \text{Diagonal} = \sqrt{a^2 + b^2} \end{array}}$$

15.4 Rombo (lado a , diagonales d_1 y d_2)

$$\begin{aligned}\text{Perímetro} &= 4a \\ \text{Área} &= \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \\ a^2 &= \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2\end{aligned}$$

15.5 Paralelogramo (lados a, b , altura h , ángulo θ)

$$\begin{aligned}\text{Perímetro} &= 2(a + b) \\ \text{Área} &= a \cdot h = ab \sin \theta \\ \text{Diagonal}_1^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \\ \text{Diagonal}_2^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta\end{aligned}$$

15.6 Trapecio (bases b_1, b_2 , altura h)

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2} \\ \text{Línea media} &= \frac{b_1 + b_2}{2}\end{aligned}$$

Trapecio isósceles (lados iguales c):

$$h = \sqrt{c^2 - \left(\frac{b_1 - b_2}{2}\right)^2}$$

15.7 Fórmula de Bretschneider (cuadrilátero general)

Para un cuadrilátero con lados a, b, c, d y ángulos opuestos α y γ :

$$\text{Área}^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d) - abcd \cos^2 \left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right)$$

donde $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ es el semiperímetro.

15.8 Cuadrilátero cíclico (Fórmula de Brahmagupta)

Para un cuadrilátero inscrito en un círculo con lados a, b, c, d :

$$\text{Área} = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}$$

donde $s = \frac{a+b+c+d}{2}$.

16 Geometría de Coordenadas en el Plano

16.1 Distancia entre dos puntos

Entre $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

16.2 Punto medio

El punto medio M entre $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

16.3 División de un segmento en razón dada

El punto P que divide el segmento P_1P_2 en la razón $m : n$:

$$P = \left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \frac{my_2 + ny_1}{m + n} \right)$$

16.4 Ecuación de la recta

Forma punto-pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Forma pendiente-ordenada:

$$y = mx + b$$

Forma general:

$$Ax + By + C = 0$$

Forma simétrica (interceptos a y b):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Forma de dos puntos:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

16.5 Pendiente de una recta

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan \theta$$

donde θ es el ángulo de inclinación de la recta.

16.6 Rectas paralelas y perpendiculares

Dadas dos rectas con pendientes m_1 y m_2 :

Paralelas:

$$m_1 = m_2$$

Perpendiculares:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

16.7 Distancia de un punto a una recta

Distancia del punto $P(x_0, y_0)$ a la recta $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

16.8 Ángulo entre dos rectas

Para rectas con pendientes m_1 y m_2 :

$$\tan \theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|$$

16.9 Área de un triángulo con coordenadas

Para un triángulo con vértices (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) :

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

O usando determinantes:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|$$

16.10 Condición de colinealidad

Tres puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ son colineales si:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

17 Cónicas

17.1 Parábola

Ecuación estándar (vértice en el origen, foco en $(p, 0)$):

$$y^2 = 4px$$

Forma general (vértice en (h, k)):

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Propiedades:

- Foco: $(h + p, k)$
- Directriz: $x = h - p$
- Eje de simetría: $y = k$

Para parábola vertical: $(x - h)^2 = 4p(y - k)$

17.2 Elipse

Ecuación estándar (centro en el origen):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{donde } a > b$$

Forma general (centro en (h, k)):

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

Propiedades:

- Focos: $(\pm c, 0)$ donde $c^2 = a^2 - b^2$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$ donde $0 < e < 1$
- Longitud eje mayor: $2a$
- Longitud eje menor: $2b$
- Suma de distancias a focos: $2a$

Área:

$$\text{Área} = \pi ab$$

Perímetro aproximado (fórmula de Ramanujan):

$$P \approx \pi \left[3(a + b) - \sqrt{(3a + b)(a + 3b)} \right]$$

17.3 Hipérbola

Ecuación estándar (centro en el origen):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Propiedades:

- Focos: $(\pm c, 0)$ donde $c^2 = a^2 + b^2$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$ donde $e > 1$
- Asíntotas: $y = \pm \frac{b}{a}x$
- Diferencia de distancias a focos: $2a$

Hipérbola rectangular ($a = b$):

$$xy = k$$

18 Transformaciones Geométricas

18.1 Traslación

Mover un punto (x, y) por (h, k) :

$$(x', y') = (x + h, y + k)$$

18.2 Rotación alrededor del origen

Rotar un punto (x, y) por ángulo θ (sentido antihorario):

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' &= x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned}$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

18.3 Reflexión

Respecto al eje x :

$$(x', y') = (x, -y)$$

Respecto al eje y :

$$(x', y') = (-x, y)$$

Respecto al origen:

$$(x', y') = (-x, -y)$$

Respecto a la recta $y = x$:

$$(x', y') = (y, x)$$

18.4 Escalamiento

Escalar por factores s_x y s_y :

$$(x', y') = (s_x \cdot x, s_y \cdot y)$$

19 Geometría del Espacio (3D)

19.1 Distancia entre dos puntos en 3D

Entre $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

19.2 Punto medio en 3D

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

19.3 Ecuación del plano

Forma general:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Vector normal: $\vec{n} = (A, B, C)$

Forma punto-normal:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

19.4 Ecuación de la recta en 3D

Forma vectorial:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$

Forma paramétrica:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}$$

Forma simétrica:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

19.5 Distancia de un punto a un plano

Distancia del punto (x_0, y_0, z_0) al plano $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

19.6 Ángulo entre dos planos

Para planos con vectores normales \vec{n}_1 y \vec{n}_2 :

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

20 Vectores

20.1 Operaciones básicas con vectores

Suma de vectores:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

Multiplicación por escalar:

$$k\vec{u} = (ku_1, ku_2, ku_3)$$

Magnitud (norma) de un vector:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Vector unitario:

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

20.2 Producto punto (escalar)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$$

Propiedades:

- Conmutativo: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- Distributivo: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

- Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, entonces $\vec{u} \perp \vec{v}$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

Ángulo entre vectores:

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

20.3 Producto cruz (vectorial)

Para vectores en 3D:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

Propiedades:

- Anticonmutativo: $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$
- $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \theta$
- $\vec{u} \times \vec{v}$ es perpendicular a \vec{u} y \vec{v}
- Si $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$, entonces \vec{u} y \vec{v} son paralelos
- $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$

Área de paralelogramo:

$$\text{Área} = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

Área de triángulo:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}|$$

20.4 Producto triple escalar

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Volumen de paralelepípedo:

$$V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$$

Volumen de tetraedro:

$$V = \frac{1}{6} |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$$

20.5 Proyección vectorial

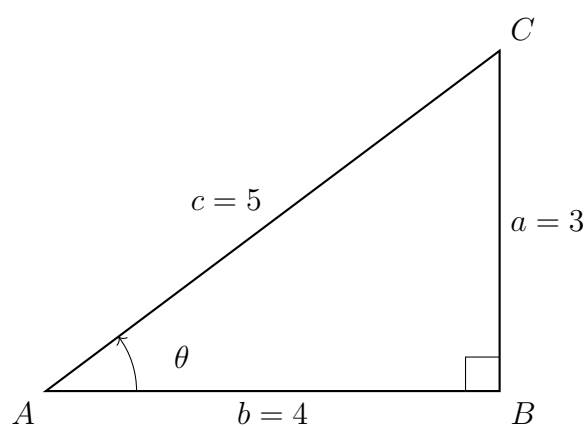
Proyección de \vec{u} sobre \vec{v} :

$$\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v}$$

Componente escalar:

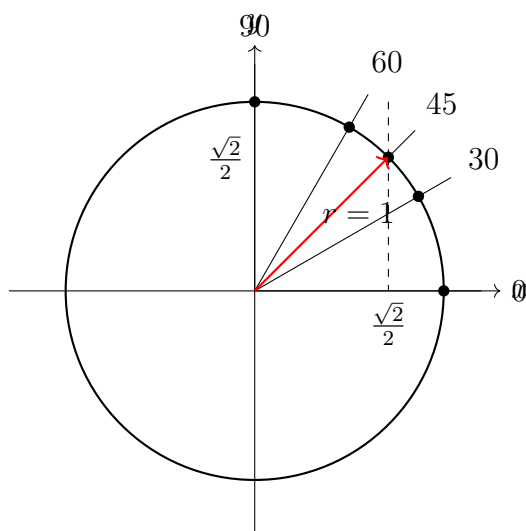
$$\text{comp}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = |\vec{u}| \cos \theta$$

20.6 Ilustración: Triángulo rectángulo



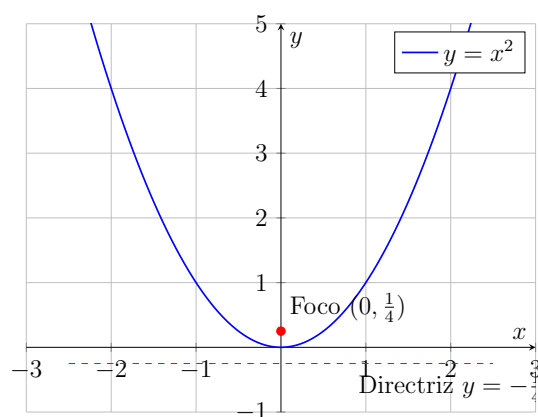
En este triángulo: $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25$, por lo tanto $c = 5$.

20.7 Ilustración: Círculo unitario con ángulos



El círculo unitario muestra que $\sin(45) = \cos(45) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

20.8 Ilustración: Parábola



Parábola $y = x^2$ con ecuación $x^2 = 4py$ donde $p = \frac{1}{4}$.

21 Sólidos Geométricos

21.1 Cubo (arista a)

$\text{Volumen} = a^3$ $\text{Área superficial} = 6a^2$ $\text{Diagonal espacial} = a\sqrt{3}$ $\text{Diagonal de cara} = a\sqrt{2}$
--

21.2 Paralelepípedo rectangular (dimensiones a, b, c)

$\text{Volumen} = abc$ $\text{Área superficial} = 2(ab + ac + bc)$ $\text{Diagonal espacial} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
--

21.3 Esfera (radio r)

$\text{Volumen} = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\text{Área superficial} = 4\pi r^2$
--

Ecuación de la esfera (centro en (h, k, l)):

$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$

21.4 Cilindro circular (radio r , altura h)

$$\text{Volumen} = \pi r^2 h$$

$$\text{Área superficial} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r + h)$$

$$\text{Área lateral} = 2\pi r h$$

21.5 Cono circular (radio r , altura h , generatriz l)

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\text{Área superficial} = \pi r^2 + \pi r l = \pi r(r + l)$$

$$\text{Área lateral} = \pi r l$$

$$l = \sqrt{r^2 + h^2}$$

21.6 Pirámide

Pirámide general (área de base A_b , altura h):

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}A_b \cdot h$$

Pirámide cuadrada (lado de base a , altura h):

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}a^2 h$$

$$\text{Apotema} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

21.7 Prisma

Prisma general (área de base A_b , altura h):

$$\text{Volumen} = A_b \cdot h$$

Prisma triangular (base con lados a, b, c , altura h):

$$\text{Volumen} = \frac{h}{4} \sqrt{(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}$$

21.8 Tronco de cono (radios r_1, r_2 , altura h)

$$\text{Volumen} = \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

$$\text{Área lateral} = \pi(r_1 + r_2)l$$

donde $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$ es la generatriz.

21.9 Toro (radio mayor R , radio menor r)

$$\begin{aligned}\text{Volumen} &= 2\pi^2 Rr^2 \\ \text{Área superficial} &= 4\pi^2 Rr\end{aligned}$$

21.10 Casquete esférico (radio r , altura h)

$$\begin{aligned}\text{Volumen} &= \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) \\ \text{Área superficial} &= 2\pi rh\end{aligned}$$

21.11 Elipsoide (semiejes a, b, c)

$$\text{Volumen} = \frac{4}{3}\pi abc$$

Si $a = b$ (elipsoide de revolución):

$$\text{Volumen} = \frac{4}{3}\pi a^2 c$$

22 Teoremas Importantes**22.1 Teorema de Tales**

Si tres o más rectas paralelas son cortadas por dos transversales, los segmentos determinados en una transversal son proporcionales a los correspondientes segmentos en la otra.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

22.2 Teorema de Pitágoras generalizado

En un triángulo cualquiera:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Si $C = 90$, se reduce al teorema clásico: $c^2 = a^2 + b^2$.

22.3 Teorema de Stewart

En un triángulo ABC con una ceviana AD que divide el lado BC en segmentos m y n :

$$b^2 m + c^2 n = a(d^2 + mn)$$

donde d es la longitud de la ceviana.

22.4 Teorema de la bisectriz

La bisectriz interna de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los lados adyacentes:

$$\boxed{\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}}$$

22.5 Teorema de Menelao

Para un triángulo ABC y una recta que corta los lados (o sus extensiones) en puntos D, E, F :

$$\boxed{\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1}$$

22.6 Teorema de Ceva

Tres cevianas AD, BE, CF de un triángulo ABC son concurrentes si y solo si:

$$\boxed{\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1}$$

22.7 Teorema de Euler (para triángulos)

La distancia d entre el circuncentro O y el incentro I es:

$$\boxed{d^2 = R(R - 2r)}$$

donde R es el radio circunscrito y r el radio inscrito.

22.8 Teorema del ángulo inscrito

Un ángulo inscrito en un círculo mide la mitad del ángulo central que subtiende el mismo arco:

$$\boxed{\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB}$$

22.9 Teorema de Ptolomeo

En un cuadrilátero cíclico con lados a, b, c, d y diagonales p, q :

$$\boxed{pq = ac + bd}$$

23 Funciones Trigonométricas Inversas

23.1 Dominios y rangos

$$\begin{aligned}\arcsin(x) &: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \arccos(x) &: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] \\ \arctan(x) &: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

23.2 Identidades de funciones inversas

$$\begin{aligned}\sin(\arcsin x) &= x \\ \cos(\arccos x) &= x \\ \tan(\arctan x) &= x \\ \arcsin(\sin x) &= x \quad \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \arccos(\cos x) &= x \quad \text{si } x \in [0, \pi] \\ \arctan(\tan x) &= x \quad \text{si } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

23.3 Relaciones entre funciones inversas

$$\begin{aligned}\arcsin x + \arccos x &= \frac{\pi}{2} \\ \arctan x + \arctan \frac{1}{x} &= \frac{\pi}{2} \quad (x > 0) \\ \arctan x + \arctan y &= \arctan \frac{x+y}{1-xy} \quad (xy < 1)\end{aligned}$$

23.4 Derivadas de funciones trigonométricas

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\sin x] &= \cos x \\ \frac{d}{dx}[\cos x] &= -\sin x \\ \frac{d}{dx}[\tan x] &= \sec^2 x \\ \frac{d}{dx}[\cot x] &= -\csc^2 x \\ \frac{d}{dx}[\sec x] &= \sec x \tan x \\ \frac{d}{dx}[\csc x] &= -\csc x \cot x\end{aligned}$$

23.5 Derivadas de funciones trigonométricas inversas

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\arcsin x] &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{d}{dx}[\arccos x] &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{d}{dx}[\arctan x] &= \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

24 Funciones Hiperbólicas

24.1 Definiciones

$$\begin{aligned}\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \\ \operatorname{sech} x &= \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \\ \operatorname{csch} x &= \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}\end{aligned}$$

24.2 Identidades hiperbólicas

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\ 1 - \tanh^2 x &= \operatorname{sech}^2 x \\ \coth^2 x - 1 &= \operatorname{csch}^2 x \\ \sinh(2x) &= 2 \sinh x \cosh x \\ \cosh(2x) &= \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2 \cosh^2 x - 1 = 1 + 2 \sinh^2 x\end{aligned}$$

24.3 Suma y resta de funciones hiperbólicas

$$\begin{aligned}\sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \pm y) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \\ \tanh(x \pm y) &= \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}\end{aligned}$$

24.4 Derivadas de funciones hiperbólicas

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\sinh x] &= \cosh x \\ \frac{d}{dx}[\cosh x] &= \sinh x \\ \frac{d}{dx}[\tanh x] &= \operatorname{sech}^2 x \\ \frac{d}{dx}[\coth x] &= -\operatorname{csch}^2 x \\ \frac{d}{dx}[\operatorname{sech} x] &= -\operatorname{sech} x \tanh x \\ \frac{d}{dx}[\operatorname{csch} x] &= -\operatorname{csch} x \coth x\end{aligned}$$

24.5 Funciones hiperbólicas inversas

$$\begin{aligned}\operatorname{arcsinh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ \operatorname{arccosh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x \geq 1) \\ \operatorname{arctanh} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (|x| < 1)\end{aligned}$$

25 Coordenadas Polares

25.1 Conversión entre cartesianas y polares

De polares (r, θ) a cartesianas (x, y) :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

De cartesianas (x, y) a polares (r, θ) :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$$

25.2 Área en coordenadas polares

Para una curva $r = f(\theta)$ entre $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta$$

25.3 Longitud de arco en polares

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

25.4 Curvas polares comunes

Círculo: $r = a$

Espiral de Arquímedes: $r = a\theta$

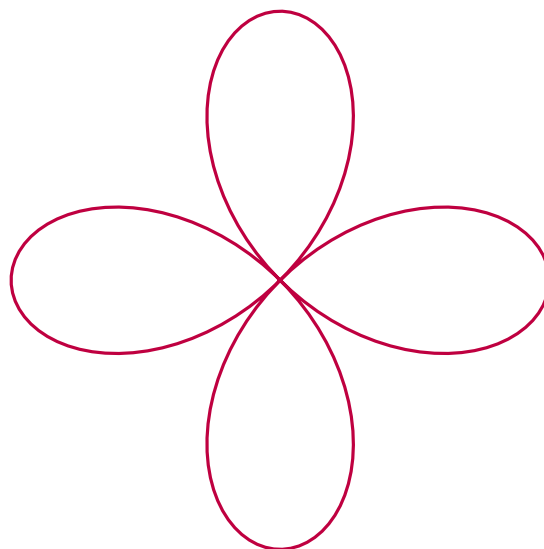
Rosa de pétalos: $r = a \sin(n\theta)$ o $r = a \cos(n\theta)$

Cardioide: $r = a(1 + \cos \theta)$

Lemniscata: $r^2 = a^2 \cos(2\theta)$

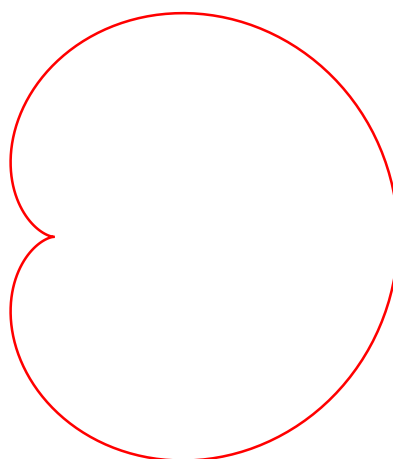
Limaçon: $r = a + b \cos \theta$

25.5 Ilustración: Rosa polar de 4 pétalos



Rosa polar: $r = \cos(2\theta)$

25.6 Ilustración: Cardioide



Cardioide: $r = 1 + \cos \theta$

26 Coordenadas Esféricas y Cilíndricas

26.1 Coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

A cartesianas:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z \end{aligned}$$

De cartesianas:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \arctan \frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned}$$

26.2 Coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ)

A cartesianas:

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \phi \cos \theta \\ y &= \rho \sin \phi \sin \theta \\ z &= \rho \cos \phi \end{aligned}$$

De cartesianas:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \arctan \frac{y}{x} \\ \phi &= \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned}$$

26.3 Elemento de volumen

Cilíndricas: $dV = r \, dr \, d\theta \, dz$

Esféricas: $dV = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$

27 Series de Fourier

27.1 Serie de Fourier trigonométrica

Para una función periódica $f(x)$ con período $2L$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right]$$

donde:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \\
 a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\
 b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx
 \end{aligned}$$

27.2 Serie de Fourier compleja

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}$$

donde:

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx$$

28 Desigualdades Geométricas

28.1 Desigualdad entre medias

Para números positivos a_1, a_2, \dots, a_n :

$$\text{MH} \leq \text{MG} \leq \text{MA} \leq \text{MC}$$

donde:

- Media armónica: $\text{MH} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$
- Media geométrica: $\text{MG} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$
- Media aritmética: $\text{MA} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$
- Media cuadrática: $\text{MC} = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$

28.2 Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Para vectores \vec{u} y \vec{v} :

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| |\vec{v}|$$

En forma de suma:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

28.3 Desigualdad del triángulo

Para vectores:

$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$$

Para números complejos z_1, z_2 :

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

28.4 Desigualdad isoperimétrica

Para una figura plana con perímetro P y área A :

$$P^2 \geq 4\pi A$$

con igualdad solo para el círculo.

28.5 Desigualdad de Weitzenböck

Para un triángulo con lados a, b, c y área S :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

con igualdad solo para triángulos equiláteros.

29 Números Complejos en Geometría

29.1 Forma rectangular

$$z = x + iy = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$$

29.2 Forma polar

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r \operatorname{cis} \theta = re^{i\theta}$$

donde:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \theta = \arg(z) = \arctan \frac{y}{x}$$

29.3 Fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

29.4 Teorema de De Moivre

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

o equivalentemente:

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

29.5 Raíces n -ésimas de la unidad

Las n raíces de $z^n = 1$ son:

$$z_k = e^{2\pi i k/n} = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

29.6 Raíces n -ésimas de un número complejo

Las n raíces de $z^n = w$ donde $w = re^{i\theta}$ son:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i(\theta+2\pi k)/n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

30 Geometría Fractal

30.1 Dimensión fractal (dimensión de Hausdorff)

$$D = \frac{\log N}{\log(1/r)}$$

donde N es el número de copias autosimilares y r es el factor de escala.

30.2 Ejemplos de dimensiones fractales

- Línea recta: $D = 1$
- Conjunto de Cantor: $D = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.631$
- Curva de Koch: $D = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.262$
- Triángulo de Sierpinski: $D = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.585$
- Esponja de Menger: $D = \frac{\log 20}{\log 3} \approx 2.727$

31 Transformaciones Lineales y Matrices

31.1 Matriz de rotación en 2D

Rotación por ángulo θ :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

31.2 Matriz de rotación en 3D

Alrededor del eje x :

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Alrededor del eje y :

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Alrededor del eje z :

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

31.3 Matriz de reflexión

Respecto al eje x :

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Respecto al eje y :

$$M_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Respecto al origen:

$$M_O = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

31.4 Matriz de escalamiento

$$S(s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$$

31.5 Matriz de cizallamiento (shear)

Horizontal:

$$H_x(k) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vertical:

$$H_y(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

32 Fórmulas Adicionales

32.1 Número de oro (phi)

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618033988749895$$

Propiedades:

$$\phi^2 = \phi + 1 \quad , \quad \frac{1}{\phi} = \phi - 1$$

32.2 Rectángulo áureo

Un rectángulo con proporción $\phi : 1$.

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi$$

32.3 Espiral áurea

Una espiral logarítmica que crece por un factor de ϕ por cada cuarto de vuelta.

32.4 Ángulo sólido

Para una esfera completa:

$$\Omega = 4\pi \text{ estereoradianes}$$

Para un casquete esférico con ángulo θ :

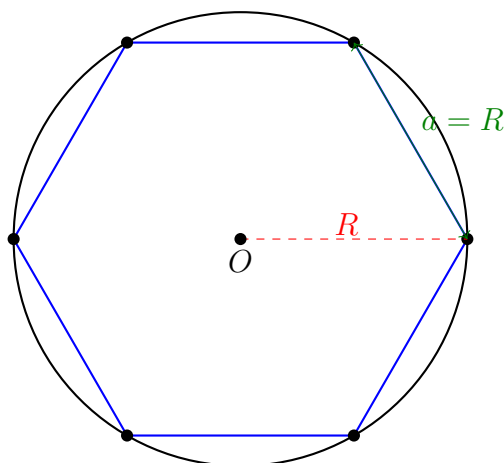
$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \theta)$$

33 Aproximaciones Útiles

Para ángulos pequeños x (en radianes):

$$\begin{aligned} \sin x &\approx x - \frac{x^3}{6} \approx x \\ \cos x &\approx 1 - \frac{x^2}{2} \\ \tan x &\approx x + \frac{x^3}{3} \approx x \end{aligned}$$

34 Ilustración: Hexágono regular inscrito



En un hexágono regular inscrito en un círculo de radio R , el lado del hexágono es igual al radio: $a = R$.

35 Geometría Computacional

35.1 Producto cruz en 2D (determinante)

Para vectores $\vec{u} = (u_x, u_y)$ y $\vec{v} = (v_x, v_y)$:

$$\vec{u} \times \vec{v} = u_x v_y - u_y v_x$$

Resultado positivo: \vec{v} está a la izquierda de \vec{u}

Resultado negativo: \vec{v} está a la derecha de \vec{u}

Resultado cero: \vec{u} y \vec{v} son colineales

35.2 Área de polígono por coordenadas

Para un polígono con vértices $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$:

$$A = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \right|$$

donde $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_1, y_1)$.

35.3 Punto dentro de un polígono convexo

Un punto P está dentro de un polígono convexo si tiene el mismo signo del producto cruz con todos los lados consecutivos.

35.4 Punto dentro de un triángulo

Un punto $P(x, y)$ está dentro del triángulo ABC si:

$$\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0, \text{ y } \alpha + \beta + \gamma = 1$$

donde (α, β, γ) son las coordenadas baricéntricas:

$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C$$

35.5 Convex Hull (Envolvente Convexa)

Algoritmos comunes:

- **Graham Scan:** $O(n \log n)$
- **Jarvis March (Gift Wrapping):** $O(nh)$ donde h es el número de puntos en el hull
- **Andrew's Algorithm:** $O(n \log n)$

35.6 Intersección de segmentos

Dos segmentos P_1P_2 y P_3P_4 se intersectan si:

- Los puntos P_3 y P_4 están en lados opuestos de la línea P_1P_2 , Y
- Los puntos P_1 y P_2 están en lados opuestos de la línea P_3P_4

35.7 Punto más cercano a un segmento

Dado un punto P y un segmento AB , el punto más cercano Q en AB a P es:

$$Q = A + t(B - A)$$

donde:

$$t = \max \left(0, \min \left(1, \frac{(P - A) \cdot (B - A)}{|B - A|^2} \right) \right)$$

36 Distancias Especiales

36.1 Distancia de Manhattan

$$d_{\text{Manhattan}} = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

36.2 Distancia de Chebyshev

$$d_{\text{Chebyshev}} = \max(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|)$$

36.3 Distancia de Minkowski

$$d_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

Casos especiales:

- $p = 1$: Distancia de Manhattan
- $p = 2$: Distancia euclidiana
- $p = \infty$: Distancia de Chebyshev

36.4 Distancia de Hamming

Número de posiciones en las que dos cadenas difieren.

36.5 Distancia de Hausdorff

Para dos conjuntos A y B :

$$d_H(A, B) = \max \left(\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b) \right)$$

37 Teoremas Avanzados

37.1 Teorema de Napoleon

Si se construyen triángulos equiláteros sobre los lados de cualquier triángulo, los centros de estos triángulos equiláteros forman otro triángulo equilátero.

37.2 Teorema de Morley

Los tres puntos de intersección de los trisectores de ángulos adyacentes de cualquier triángulo forman un triángulo equilátero.

37.3 Teorema del punto de Fermat

Para un triángulo ABC , el punto P que minimiza $PA + PB + PC$ es el punto de Fermat, donde:

- Si todos los ángulos son < 120 , entonces $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120$
- Si un ángulo es ≥ 120 , el punto de Fermat es ese vértice

37.4 Teorema de Feuerbach (Círculo de los nueve puntos)

El círculo que pasa por:

- Los puntos medios de los tres lados
- Los pies de las tres alturas
- Los puntos medios entre vértices y ortocentro

Este círculo tiene radio $R/2$ donde R es el radio circunscrito.

37.5 Teorema de Carnot

En un triángulo ABC con circuncentro O y alturas h_a, h_b, h_c :

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 = R^2(1 + \cos A + \cos B + \cos C)$$

37.6 Teorema de Menelao generalizado (3D)

Para un tetraedro y un plano que lo corta, el producto de las razones de división es -1 .

37.7 Identidad de Brahmagupta

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

37.8 Teorema japonés

En cualquier cuadrilátero cíclico dividido en triángulos por sus diagonales, la suma de los radios de los círculos inscritos en los triángulos opuestos es constante.

38 Fórmulas de Área Avanzadas

38.1 Área de un cuadrilátero con diagonales

Para un cuadrilátero con diagonales p y q que se intersectan con ángulo θ :

$$A = \frac{1}{2}pq \sin \theta$$

38.2 Fórmula de Coolidge para cuadriláteros

$$16A^2 = 4p^2q^2 - (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)^2$$

donde a, b, c, d son los lados y p, q las diagonales.

38.3 Área de un polígono regular

Para un polígono regular de n lados con lado a :

$$A = \frac{na^2}{4 \tan(\pi/n)}$$

38.4 Área de un sector elíptico

No tiene fórmula cerrada simple, pero se puede aproximar usando integrales elípticas.

39 Centros Notables del Triángulo

39.1 Ortocentro (H)

Intersección de las tres alturas.

Coordenadas:

$$H = \left(\frac{\tan A \cdot x_A + \tan B \cdot x_B + \tan C \cdot x_C}{\tan A + \tan B + \tan C}, \dots \right)$$

39.2 Circuncentro (O)

Intersección de las mediatrices.

Coordenadas:

$$O = \left(\frac{x_A \sin 2A + x_B \sin 2B + x_C \sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}, \dots \right)$$

39.3 Incentro (I)

Intersección de las bisectrices internas.

Coordenadas baricéntricas:

$$I = \frac{aA + bB + cC}{a + b + c}$$

39.4 Baricentro (G)

Intersección de las medianas. Es el centro de masa.

Coordenadas:

$$G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$$

39.5 Recta de Euler

El ortocentro H , circuncentro O y baricentro G son colineales, con:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OH}$$

Es decir, G divide el segmento OH en razón 1 : 2.

40 Secciones Cónicas - Propiedades Avanzadas

40.1 Ecuación general de una cónica

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Discriminante:

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

- $\Delta < 0$: Elipse (o círculo si $A = C$ y $B = 0$)
- $\Delta = 0$: Parábola
- $\Delta > 0$: Hipérbola

40.2 Propiedades focales de la parábola

Todo rayo paralelo al eje de la parábola se refleja hacia el foco.

40.3 Propiedades focales de la elipse

La suma de distancias desde cualquier punto de la elipse a los dos focos es constante e igual a $2a$.

40.4 Propiedades focales de la hipérbola

La diferencia absoluta de distancias desde cualquier punto de la hipérbola a los dos focos es constante e igual a $2a$.

40.5 Tangente a una cónica

Para la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto (x_0, y_0) :

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Para la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto (x_0, y_0) :

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Para la parábola $y^2 = 4px$ en el punto (x_0, y_0) :

$$yy_0 = 2p(x + x_0)$$

41 Curvas Paramétricas

41.1 Cicloide

Curva trazada por un punto en un círculo que rueda:

$$\begin{aligned} x &= r(\theta - \sin \theta) \\ y &= r(1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

41.2 Epicicloide

$$\begin{aligned} x &= (R + r) \cos \theta - r \cos \left(\frac{R + r}{r} \theta \right) \\ y &= (R + r) \sin \theta - r \sin \left(\frac{R + r}{r} \theta \right) \end{aligned}$$

41.3 Hipocicloide

$$\begin{aligned} x &= (R - r) \cos \theta + r \cos \left(\frac{R - r}{r} \theta \right) \\ y &= (R - r) \sin \theta - r \sin \left(\frac{R - r}{r} \theta \right) \end{aligned}$$

41.4 Astroide (Hipocicloide con $R = 4r$)

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

Forma paramétrica:

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t$$

41.5 Lemniscata de Bernoulli

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

En polares:

$$r^2 = a^2 \cos(2\theta)$$

42 Curvatura

42.1 Curvatura de una curva plana

Para una curva $y = f(x)$:

$$\kappa = \frac{|f''(x)|}{(1 + [f'(x)]^2)^{3/2}}$$

Para una curva paramétrica $(x(t), y(t))$:

$$\kappa = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

42.2 Radio de curvatura

$$\rho = \frac{1}{\kappa}$$

42.3 Curvatura del círculo

Para un círculo de radio r :

$$\kappa = \frac{1}{r}$$

43 Superficies Cuádricas

43.1 Elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

43.2 Hiperboloide de una hoja

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

43.3 Hiperboloide de dos hojas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

43.4 Paraboloide elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

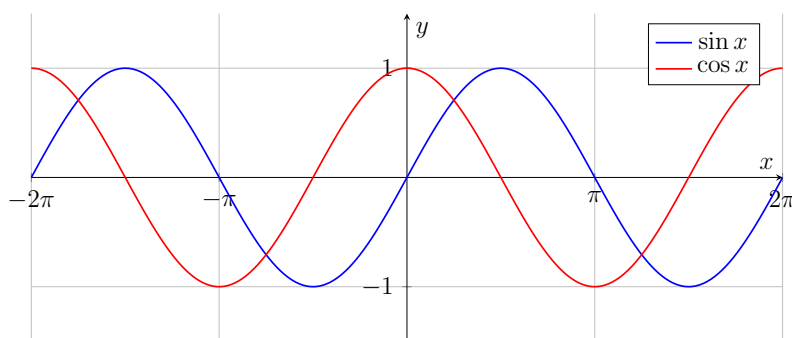
43.5 Paraboloide hiperbólico (silla de montar)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

43.6 Cono elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

44 Ilustración: Funciones trigonométricas



45 Integrales Trigonométricas Útiles

$$\begin{aligned}\int \sin x \, dx &= -\cos x + C \\ \int \cos x \, dx &= \sin x + C \\ \int \tan x \, dx &= -\ln |\cos x| + C = \ln |\sec x| + C \\ \int \sec x \, dx &= \ln |\sec x + \tan x| + C \\ \int \sec^2 x \, dx &= \tan x + C \\ \int \csc^2 x \, dx &= -\cot x + C\end{aligned}$$

46 Constantes Geométricas Importantes

$$\begin{aligned}\pi &\approx 3.141592653589793 \\ e &\approx 2.718281828459045 \\ \phi &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618033988749895 \\ \sqrt{2} &\approx 1.414213562373095 \\ \sqrt{3} &\approx 1.732050807568877 \\ \sqrt{5} &\approx 2.236067977499790\end{aligned}$$

47 Relaciones entre Trigonometría y Números Complejos

47.1 Identidades de Euler

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\end{aligned}$$

47.2 Fórmula más bella de las matemáticas

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Esta fórmula conecta cinco de las constantes matemáticas más importantes: e , i , π , 1 y 0.

48 Notas Finales

Este documento contiene las fórmulas y teoremas más importantes de geometría y trigonometría. Es útil para:

- Resolución rápida de problemas
- Competencias de matemáticas (Olimpiadas, ACM ICPC)
- Referencia académica
- Geometría computacional
- Gráficos por computadora
- Física e ingeniería

“La geometría es el conocimiento de lo eternamente existente.”

— Platón