Propiedades matemáticas interesantes

Jaime Sebastian Chavarria Fuertes

October 7, 2025

Contents

Conversión de ángulos entre grados sexagesimales y decimales

De grados, minutos y segundos a grados decimales

Dado un ángulo expresado en grados (G), minutos (M) y segundos (S), su valor en grados decimales (D) se obtiene mediante la relación:

$$\boxed{D = G + \frac{M}{60} + \frac{S}{3600}}$$

Conversión inversa: de grados decimales a grados, minutos y segundos

Si se tiene un ángulo en grados decimales (D), los valores correspondientes en grados, minutos y segundos se calculan así:

$$\boxed{\begin{aligned} G &= \lfloor D \rfloor, \\ M &= \lfloor (D - G) \times 60 \rfloor, \\ S &= (D - G - \tfrac{M}{60}) \times 3600 \end{aligned}}$$

Relaciones fundamentales del sistema sexagesimal

$$1^\circ = 60' \quad , \quad 1' = 60'' \quad \Rightarrow \quad 1^\circ = 3600''$$

Leyes Fundamentales de la Trigonometría

Ley de Senos

En cualquier triángulo ABC, con lados a, b, c opuestos a los ángulos A, B, C respectivamente, se cumple:

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R}$$

donde R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Ley de Cosenos

En el mismo triángulo ABC, la relación entre los lados y los cosenos de los ángulos es:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C. \end{aligned}}$$

Casos particulares

- Si $A = 90°$, entonces la Ley de Cosenos se reduce al Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

- Si el triángulo es isósceles con $b = c$, entonces:

$$a = 2b\sin\frac{A}{2}$$

Ley de Tangentes

Para un triángulo ABC:

$$\boxed{\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}}$$

Identidades Trigonométricas Fundamentales

Identidades Pitagóricas

$$\boxed{\begin{aligned} \sin^2\theta + \cos^2\theta &= 1 \\ 1 + \tan^2\theta &= \sec^2\theta \\ 1 + \cot^2\theta &= \csc^2\theta \end{aligned}}$$

Identidades Recíprocas

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \sin\theta = \dfrac{1}{\csc\theta} & , & \csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta} \\ \cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta} & , & \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} \\ \tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta} & , & \cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta} \end{array}}$$

Identidades de Cociente

$$\boxed{\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$

Fórmulas de Ángulo Doble

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(2\theta) &= 2\sin\theta\cos\theta \\ \cos(2\theta) &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ &= 2\cos^2\theta - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2\theta \\ \tan(2\theta) &= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \end{aligned}}$$

Fórmulas de Ángulo Medio

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \\ \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \\ &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} \end{aligned}}$$

Fórmulas de Suma y Resta de Ángulos

Seno de suma y resta

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \end{aligned}}$$

Coseno de suma y resta

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \end{aligned}}$$

Tangente de suma y resta

$$\boxed{\begin{aligned} \tan(\alpha+\beta) &= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \\ \tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \end{aligned}}$$

Fórmulas de Producto a Suma

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] \\ \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)] \\ \sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)] \\ \cos\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)] \end{aligned}}$$

Fórmulas de Suma a Producto

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\alpha+\sin\beta &= 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \sin\alpha-\sin\beta &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \cos\alpha+\cos\beta &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \cos\alpha-\cos\beta &= -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \end{aligned}}$$

Valores Especiales de Funciones Trigonométricas

Tabla de valores comunes

θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0

Valores en radianes

$$\boxed{\begin{array}{c} 0^\circ = 0 \text{ rad} \quad , \quad 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \\ 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \quad , \quad 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \\ 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \quad , \quad 180^\circ = \pi \text{ rad} \\ 270^\circ = \frac{3\pi}{2} \text{ rad} \quad , \quad 360^\circ = 2\pi \text{ rad} \end{array}}$$

Conversión entre grados y radianes

$$\boxed{\text{Radianes} = \text{Grados} \times \frac{\pi}{180} \quad , \quad \text{Grados} = \text{Radianes} \times \frac{180}{\pi}}$$

Áreas de Triángulos

Fórmula básica

$$\boxed{\text{Área} = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura}}$$

Fórmula con dos lados y el ángulo entre ellos

$$\boxed{\text{Área} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B}$$

Fórmula de Herón

Dado un triángulo con lados a, b, c y semiperímetro $s = \frac{a+b+c}{2}$:

$$\boxed{\text{Área} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

Fórmula usando el radio circunscrito

$$\boxed{\text{Área} = \frac{abc}{4R}}$$

donde R es el radio de la circunferencia circunscrita.

Fórmula usando el radio inscrito

$$\boxed{\text{Área} = rs}$$

donde r es el radio de la circunferencia inscrita y s es el semiperímetro.

Propiedades de Triángulos

Suma de ángulos internos

$$\boxed{A + B + C = 180^\circ = \pi \text{ rad}}$$

Desigualdad triangular

Para que tres longitudes a, b, c formen un triángulo, deben cumplir:

$$\boxed{\begin{array}{c} a + b > c \\ a + c > b \\ b + c > a \end{array}}$$

Relación entre lados y ángulos

En un triángulo, al lado mayor se opone el ángulo mayor:

$$\boxed{a > b \Leftrightarrow A > B}$$

Radio circunscrito

$$\boxed{R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}}$$

Radio inscrito

$$\boxed{r = \frac{\text{Área}}{s} = (s-a)\tan\frac{A}{2} = (s-b)\tan\frac{B}{2} = (s-c)\tan\frac{C}{2}}$$

Longitud de medianas

La longitud de la mediana desde el vértice A al lado a es:

$$\boxed{m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}$$

Longitud de alturas

La altura desde el vértice A es:

$$\boxed{h_a = b\sin C = c\sin B = \frac{2\text{Área}}{a}}$$

Longitud de bisectrices

La longitud de la bisectriz desde el vértice A es:

$$\boxed{t_a = \frac{2bc\cos(A/2)}{b+c} = \frac{\sqrt{bc[(b+c)^2 - a^2]}}{b+c}}$$

Triángulos Especiales

Triángulo Equilátero (lado a)

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \\ \text{Altura} &= \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ \text{Radio circunscrito} &= \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \\ \text{Radio inscrito} &= \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \end{aligned}}$$

Triángulo Rectángulo

Sea un triángulo rectángulo con catetos a, b e hipotenusa c:

$$\boxed{\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \quad \text{(Teorema de Pitágoras)} \\ \text{Área} &= \frac{ab}{2} \\ \text{Radio inscrito} &= \frac{a+b-c}{2} \\ \text{Radio circunscrito} &= \frac{c}{2} \end{aligned}}$$

Triángulos Pitagóricos Comunes

- $(3, 4, 5)$ y sus múltiplos: $(6, 8, 10)$, $(9, 12, 15)$, etc.
- $(5, 12, 13)$ y sus múltiplos
- $(8, 15, 17)$ y sus múltiplos
- $(7, 24, 25)$ y sus múltiplos
- $(20, 21, 29)$ y sus múltiplos

Círculos y Circunferencias

Fórmulas básicas

Para un círculo de radio r:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Circunferencia} &= 2\pi r \\ \text{Área} &= \pi r^2 \\ \text{Diámetro} &= 2r \end{aligned}}$$

Longitud de arco

Un arco que subtiende un ángulo θ (en radianes) tiene longitud:

$$\boxed{L = r\theta}$$

Si θ está en grados:

$$\boxed{L = \frac{\pi r\theta}{180}}$$

Área de sector circular

$$\boxed{\text{Área del sector} = \frac{1}{2}r^2\theta \quad (\theta \text{ en radianes})}$$

$$\boxed{\text{Área del sector} = \frac{\pi r^2\theta}{360} \quad (\theta \text{ en grados})}$$

Área de segmento circular

$$\boxed{\text{Área del segmento} = \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin\theta) \quad (\theta \text{ en radianes})}$$

Cuerda y arco

Para una cuerda que subtiende un ángulo central θ:

$$\boxed{\text{Longitud de cuerda} = 2r\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Teorema de la potencia de un punto

Si dos cuerdas se intersectan en un punto interior P de un círculo, dividiendo las cuerdas en segmentos de longitudes a, b y c, d:

$$\boxed{a \cdot b = c \cdot d}$$

Ecuación de la circunferencia

Forma canónica (centro en (h, k) y radio r):

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$$

Forma general:

$$\boxed{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Donde el centro es $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y el radio es $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$.

Polígonos Regulares

Fórmulas generales para un polígono regular de n lados

Ángulo interior:

$$\boxed{\text{Ángulo interior} = \frac{(n-2) \times 180^\circ}{n} = \frac{(n-2)\pi}{n} \text{ rad}}$$

Ángulo exterior:

$$\boxed{\text{Ángulo exterior} = \frac{360^\circ}{n} = \frac{2\pi}{n} \text{ rad}}$$

Suma de ángulos interiores:

$$\boxed{\text{Suma} = (n-2) \times 180^\circ = (n-2)\pi \text{ rad}}$$

Número de diagonales:

$$\boxed{\text{Diagonales} = \frac{n(n-3)}{2}}$$

Polígono regular inscrito en un círculo

Para un polígono regular de n lados inscrito en un círculo de radio R:

Longitud del lado:

$$\boxed{a = 2R\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2R\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$$

Apotema (distancia del centro al lado):

$$\boxed{ap = R\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = R\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$$

Perímetro:

$$\boxed{P = 2nR\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Área:

$$\boxed{\text{Área} = \frac{1}{2} \times \text{Perímetro} \times \text{Apotema} = \frac{nR^2}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$$

Casos particulares de polígonos regulares

Triángulo equilátero ($n = 3$):

$$\text{Ángulo interior} = 60^\circ \quad , \quad \text{Diagonales} = 0$$

Cuadrado ($n = 4$):

$$\text{Ángulo interior} = 90^\circ \quad , \quad \text{Diagonales} = 2$$

Pentágono regular ($n = 5$):

$$\text{Ángulo interior} = 108^\circ \quad , \quad \text{Diagonales} = 5$$

Hexágono regular ($n = 6$):

$$\text{Ángulo interior} = 120^\circ \quad , \quad \text{Diagonales} = 9$$

Octágono regular ($n = 8$):

$$\text{Ángulo interior} = 135^\circ \quad , \quad \text{Diagonales} = 20$$

Cuadriláteros

Propiedades generales

Para cualquier cuadrilátero:

$$\boxed{\text{Suma de ángulos interiores} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad}}$$

Cuadrado (lado a)

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Perímetro} &= 4a \\ \text{Área} &= a^2 \\ \text{Diagonal} &= a\sqrt{2} \end{aligned}}$$

Rectángulo (lados a y b)

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Perímetro} &= 2(a+b) \\ \text{Área} &= ab \\ \text{Diagonal} &= \sqrt{a^2+b^2} \end{aligned}}$$

Rombo (lado a, diagonales d_1 y d_2)

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Perímetro} = 4a \\ \text{Área} &= \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \\ a^2 &= \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 \end{aligned}}$$

Paralelogramo (lados a, b, altura h, ángulo θ)

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Perímetro} = 2(a+b) \\ \text{Área} &= a \cdot h = ab \sin\theta \\ \text{Diagonal}_1^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \\ \text{Diagonal}_2^2 &= a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta \end{aligned}}$$

Trapecio (bases b_1, b_2, altura h)

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2} \\ \text{Línea media} &= \frac{b_1 + b_2}{2} \end{aligned}}$$

Trapecio isósceles (lados iguales c):

$$\boxed{h = \sqrt{c^2 - \left(\frac{b_1 - b_2}{2}\right)^2}}$$

Fórmula de Bretschneider (cuadrilátero general)

Para un cuadrilátero con lados a, b, c, d y ángulos opuestos α y γ:

$$\boxed{\text{Área}^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}$$

donde $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ es el semiperímetro.

Cuadrilátero cíclico (Fórmula de Brahmagupta)

Para un cuadrilátero inscrito en un círculo con lados a, b, c, d:

$$\boxed{\text{Área} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$$

donde $s = \frac{a+b+c+d}{2}$.

Geometría de Coordenadas en el Plano

Distancia entre dos puntos

Entre $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$:

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Punto medio

El punto medio M entre $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$:

$$\boxed{M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)}$$

División de un segmento en razón dada

El punto P que divide el segmento P_1P_2 en la razón $m : n$:

$$\boxed{P = \left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \frac{my_2 + ny_1}{m + n}\right)}$$

Ecuación de la recta

Forma punto-pendiente:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Forma pendiente-ordenada:

$$\boxed{y = mx + b}$$

Forma general:

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

Forma simétrica (interceptos a y b):

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

Forma de dos puntos:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$$

Pendiente de una recta

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\theta}$$

donde θ es el ángulo de inclinación de la recta.

Rectas paralelas y perpendiculares

Dadas dos rectas con pendientes m_1 y m_2:

Paralelas:

$$\boxed{m_1 = m_2}$$

Perpendiculares:

$$\boxed{m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}}$$

Distancia de un punto a una recta

Distancia del punto $P(x_0, y_0)$ a la recta $Ax + By + C = 0$:

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

Ángulo entre dos rectas

Para rectas con pendientes m_1 y m_2:

$$\boxed{\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|}$$

Área de un triángulo con coordenadas

Para un triángulo con vértices (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3):

$$\boxed{\text{Área} = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|}$$

O usando determinantes:

$$\boxed{\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|}$$

Condición de colinealidad

Tres puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ son colineales si:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0}$$

Cónicas

Parábola

Ecuación estándar (vértice en el origen, foco en $(p, 0)$):

$$\boxed{y^2 = 4px}$$

Forma general (vértice en (h, k)):

$$\boxed{(y-k)^2 = 4p(x-h)}$$

Propiedades:

- Foco: $(h+p, k)$
- Directriz: $x = h - p$
- Eje de simetría: $y = k$

Para parábola vertical: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

Elipse

Ecuación estándar (centro en el origen):

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{donde } a > b}$$

Forma general (centro en (h, k)):

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$

Propiedades:

- Focos: $(\pm c, 0)$ donde $c^2 = a^2 - b^2$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$ donde $0 < e < 1$
- Longitud eje mayor: $2a$
- Longitud eje menor: $2b$
- Suma de distancias a focos: $2a$

Área:

$$\boxed{\text{Área} = \pi ab}$$

Perímetro aproximado (fórmula de Ramanujan):

$$\boxed{P \approx \pi\left[3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)}\right]}$$

Hipérbola

Ecuación estándar (centro en el origen):

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Propiedades:

- Focos: $(\pm c, 0)$ donde $c^2 = a^2 + b^2$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$ donde $e > 1$
- Asíntotas: $y = \pm\frac{b}{a}x$
- Diferencia de distancias a focos: $2a$

Hipérbola rectangular ($a = b$):

$$\boxed{xy = k}$$

Transformaciones Geométricas

Traslación

Mover un punto (x, y) por (h, k):

$$\boxed{(x', y') = (x + h, y + k)}$$

Rotación alrededor del origen

Rotar un punto (x, y) por ángulo θ (sentido antihorario):

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned}}$$

En forma matricial:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

Reflexión

Respecto al eje x:

$$\boxed{(x', y') = (x, -y)}$$

Respecto al eje y:

$$\boxed{(x', y') = (-x, y)}$$

Respecto al origen:

$$\boxed{(x', y') = (-x, -y)}$$

Respecto a la recta $y = x$:

$$\boxed{(x', y') = (y, x)}$$

Escalamiento

Escalar por factores s_x y s_y:

$$\boxed{(x', y') = (s_x \cdot x, s_y \cdot y)}$$

Geometría del Espacio (3D)

Distancia entre dos puntos en 3D

Entre $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

Punto medio en 3D

$$\boxed{M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)}$$

Ecuación del plano

Forma general:

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

Vector normal: $\vec{n} = (A, B, C)$
Forma punto-normal:

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$$

Ecuación de la recta en 3D

Forma vectorial:

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r_0} + t\vec{v}}$$

Forma paramétrica:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}}$$

Forma simétrica:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}$$

Distancia de un punto a un plano

Distancia del punto (x_0, y_0, z_0) al plano $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

Ángulo entre dos planos

Para planos con vectores normales $\vec{n_1}$ y $\vec{n_2}$:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}}$$

Vectores

Operaciones básicas con vectores

Suma de vectores:

$$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)}$$

Multiplicación por escalar:

$$\boxed{k\vec{u} = (ku_1, ku_2, ku_3)}$$

Magnitud (norma) de un vector:

$$\boxed{|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$$

Vector unitario:

$$\boxed{\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}}$$

Producto punto (escalar)

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta}$$

Propiedades:

- Conmutativo: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- Distributivo: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

- Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, entonces $\vec{u} \perp \vec{v}$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

Ángulo entre vectores:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}}$$

Producto cruz (vectorial)

Para vectores en 3D:

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)}$$

Propiedades:

- Anticonmutativo: $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$
- $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin\theta$
- $\vec{u} \times \vec{v}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$
- Si $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$, entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos
- $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$

Área de paralelogramo:

$$\boxed{\text{Área} = |\vec{u} \times \vec{v}|}$$

Área de triángulo:

$$\boxed{\text{Área} = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

Producto triple escalar

$$\boxed{\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}}$$

Volumen de paralelepípedo:

$$\boxed{V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|}$$

Volumen de tetraedro:

$$\boxed{V = \frac{1}{6}|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|}$$

Proyección vectorial

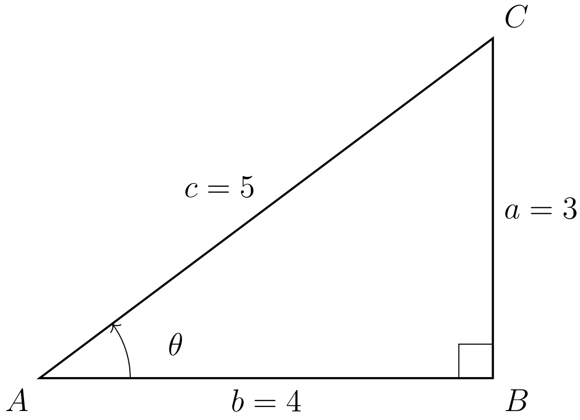
Proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$:

$$\boxed{\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v}}$$

Componente escalar:

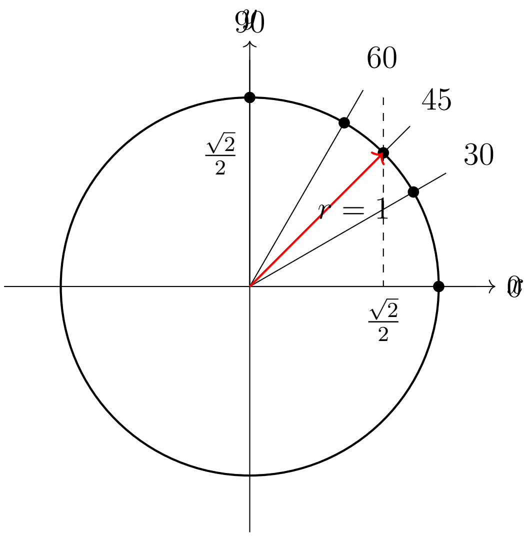
$$\boxed{\text{comp}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} = |\vec{u}|\cos\theta}$$

Ilustración: Triángulo rectángulo



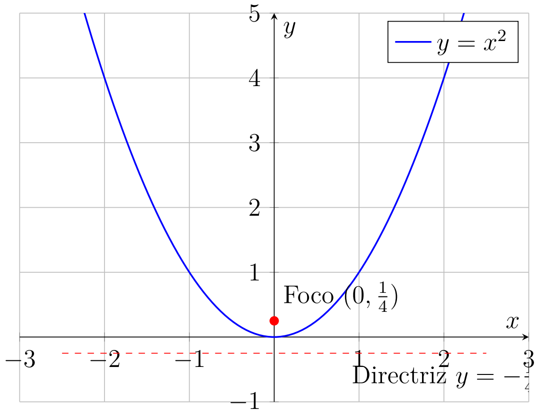
En este triángulo: $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25$, por lo tanto $c = 5$.

Ilustración: Círculo unitario con ángulos



El círculo unitario muestra que $\sin(45) = \cos(45) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ilustración: Parábola



Parábola $y = x^2$ con ecuación $x^2 = 4py$ donde $p = \frac{1}{4}$.

Sólidos Geométricos

Cubo (arista a)

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Volumen} &= a^3 \\ \text{Área superficial} &= 6a^2 \\ \text{Diagonal espacial} &= a\sqrt{3} \\ \text{Diagonal de cara} &= a\sqrt{2} \end{aligned}}$$

Paralelepípedo rectangular (dimensiones a, b, c)

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Volumen} &= abc \\ \text{Área superficial} &= 2(ab + ac + bc) \\ \text{Diagonal espacial} &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}}$$

Esfera (radio r)

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Volumen} &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ \text{Área superficial} &= 4\pi r^2 \end{aligned}}$$

Ecuación de la esfera (centro en (h, k, l)):

$$\boxed{(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2}$$

Cilindro circular (radio r, altura h)

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Volumen} &= \pi r^2 h \\ \text{Área superficial} &= 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r+h) \\ \text{Área lateral} &= 2\pi r h \end{aligned}}$$

Cono circular (radio r, altura h, generatriz l)

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Volumen} &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ \text{Área superficial} &= \pi r^2 + \pi r l = \pi r(r+l) \\ \text{Área lateral} &= \pi r l \\ l &= \sqrt{r^2+h^2} \end{aligned}}$$

Pirámide

Pirámide general (área de base A_b, altura h):

$$\boxed{\text{Volumen} = \frac{1}{3}A_b \cdot h}$$

Pirámide cuadrada (lado de base a, altura h):

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Volumen} = \frac{1}{3}a^2 h \\ &\text{Apotema} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \end{aligned}}$$

Prisma

Prisma general (área de base A_b, altura h):

$$\boxed{\text{Volumen} = A_b \cdot h}$$

Prisma triangular (base con lados a, b, c, altura h):

$$\boxed{\text{Volumen} = \frac{h}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$$

Tronco de cono (radios r_1, r_2, altura h)

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Volumen} &= \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) \\ \text{Área lateral} &= \pi(r_1+r_2)l \end{aligned}}$$

donde $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$ es la generatriz.

Toro (radio mayor R, radio menor r)

$$\boxed{\begin{aligned}\text{Volumen} &= 2\pi^2 Rr^2\\ \text{Área superficial} &= 4\pi^2 Rr\end{aligned}}$$

Casquete esférico (radio r, altura h)

$$\boxed{\begin{aligned}\text{Volumen} &= \frac{\pi h^2}{3}(3r-h)\\ \text{Área superficial} &= 2\pi rh\end{aligned}}$$

Elipsoide (semiejes a, b, c)

$$\boxed{\text{Volumen} = \frac{4}{3}\pi abc}$$

Si $a = b$ (elipsoide de revolución):

$$\boxed{\text{Volumen} = \frac{4}{3}\pi a^2 c}$$

Teoremas Importantes

Teorema de Tales

Si tres o más rectas paralelas son cortadas por dos transversales, los segmentos determinados en una transversal son proporcionales a los correspondientes segmentos en la otra.

$$\boxed{\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}}$$

Teorema de Pitágoras generalizado

En un triángulo cualquiera:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$$

Si $C = 90$, se reduce al teorema clásico: $c^2 = a^2 + b^2$.

Teorema de Stewart

En un triángulo ABC con una ceviana AD que divide el lado BC en segmentos m y n:

$$\boxed{b^2 m + c^2 n = a(d^2 + mn)}$$

donde d es la longitud de la ceviana.

Teorema de la bisectriz

La bisectriz interna de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los lados adyacentes:

$$\boxed{\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}}$$

Teorema de Menelao

Para un triángulo ABC y una recta que corta los lados (o sus extensiones) en puntos D, E, F:

$$\boxed{\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1}$$

Teorema de Ceva

Tres cevianas AD, BE, CF de un triángulo ABC son concurrentes si y solo si:

$$\boxed{\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1}$$

Teorema de Euler (para triángulos)

La distancia d entre el circuncentro O y el incentro I es:

$$\boxed{d^2 = R(R - 2r)}$$

donde R es el radio circunscrito y r el radio inscrito.

Teorema del ángulo inscrito

Un ángulo inscrito en un círculo mide la mitad del ángulo central que subtiende el mismo arco:

$$\boxed{\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB}$$

Teorema de Ptolomeo

En un cuadrilátero cíclico con lados a, b, c, d y diagonales p, q:

$$\boxed{pq = ac + bd}$$

Funciones Trigonométricas Inversas

Dominios y rangos

$$\boxed{\begin{aligned} &\arcsin(x) : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ &\arccos(x) : [-1,1] \to [0,\pi] \\ &\arctan(x) : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}}$$

Identidades de funciones inversas

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(\arcsin x) &= x \\ \cos(\arccos x) &= x \\ \tan(\arctan x) &= x \\ \arcsin(\sin x) &= x \quad \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \arccos(\cos x) &= x \quad \text{si } x \in [0,\pi] \\ \arctan(\tan x) &= x \quad \text{si } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}}$$

Relaciones entre funciones inversas

$$\boxed{\begin{aligned} \arcsin x + \arccos x &= \frac{\pi}{2} \\ \arctan x + \arctan \frac{1}{x} &= \frac{\pi}{2} \quad (x > 0) \\ \arctan x + \arctan y &= \arctan \frac{x+y}{1-xy} \quad (xy < 1) \end{aligned}}$$

Derivadas de funciones trigonométricas

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x \\ &\frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x \\ &\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x \\ &\frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x \\ &\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x \\ &\frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x \end{aligned}}$$

Derivadas de funciones trigonométricas inversas

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d}{dx}[\arcsin x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &\frac{d}{dx}[\arccos x] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &\frac{d}{dx}[\arctan x] = \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}}$$

Funciones Hiperbólicas

Definiciones

$$\boxed{\begin{aligned} \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \\ \operatorname{sech} x &= \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \\ \operatorname{csch} x &= \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \end{aligned}}$$

Identidades hiperbólicas

$$\begin{aligned}
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\
1 - \tanh^2 x &= \operatorname{sech}^2 x \\
\coth^2 x - 1 &= \operatorname{csch}^2 x \\
\sinh(2x) &= 2\sinh x \cosh x \\
\cosh(2x) &= \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x
\end{aligned}$$

Suma y resta de funciones hiperbólicas

$$\begin{aligned}
\sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \\
\cosh(x \pm y) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \\
\tanh(x \pm y) &= \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}
\end{aligned}$$

Derivadas de funciones hiperbólicas

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\sinh x] &= \cosh x \\
\frac{d}{dx}[\cosh x] &= \sinh x \\
\frac{d}{dx}[\tanh x] &= \operatorname{sech}^2 x \\
\frac{d}{dx}[\coth x] &= -\operatorname{csch}^2 x \\
\frac{d}{dx}[\operatorname{sech} x] &= -\operatorname{sech} x \tanh x \\
\frac{d}{dx}[\operatorname{csch} x] &= -\operatorname{csch} x \coth x
\end{aligned}$$

Funciones hiperbólicas inversas

$$\begin{aligned}
\operatorname{arcsinh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \\
\operatorname{arccosh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \quad (x \geq 1) \\
\operatorname{arctanh} x &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad (|x| < 1)
\end{aligned}$$

Coordenadas Polares

Conversión entre cartesianas y polares

De polares (r, θ) a cartesianas (x, y):

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}}$$

De cartesianas (x, y) a polares (r, θ):

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \arctan\frac{y}{x} \end{aligned}}$$

Área en coordenadas polares

Para una curva $r = f(\theta)$ entre $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$:

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2\, d\theta}$$

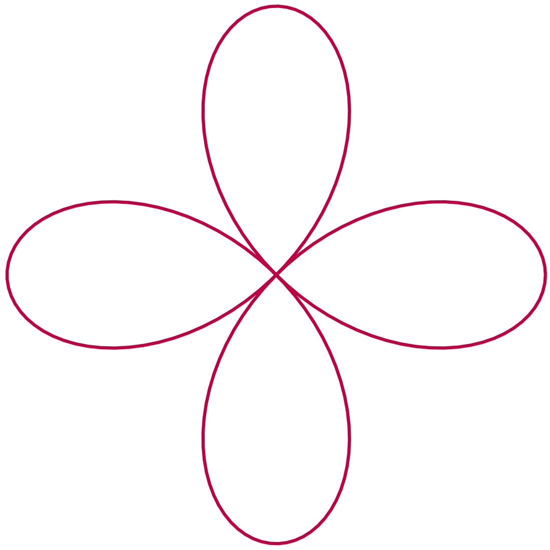
Longitud de arco en polares

$$\boxed{L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta}$$

Curvas polares comunes

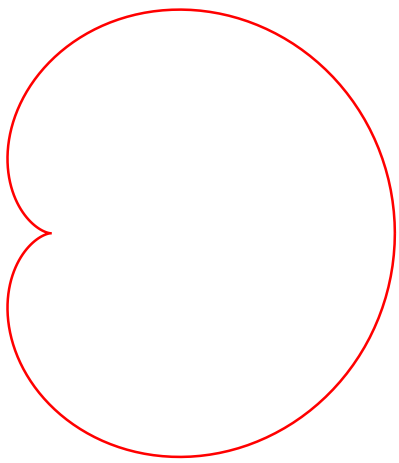
Círculo: $r = a$
Espiral de Arquímedes: $r = a\theta$
Rosa de pétalos: $r = a\sin(n\theta)$ o $r = a\cos(n\theta)$
Cardioide: $r = a(1 + \cos\theta)$
Lemniscata: $r^2 = a^2\cos(2\theta)$
Limaçon: $r = a + b\cos\theta$

Ilustración: Rosa polar de 4 pétalos



Rosa polar: $r = \cos(2\theta)$

Ilustración: Cardioide



Cardioide: $r = 1 + \cos\theta$

Coordenadas Esféricas y Cilíndricas

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

A cartesianas:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}}$$

De cartesianas:

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= \arctan\frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned}}$$

Coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ)

A cartesianas:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \rho\sin\phi\cos\theta \\ y &= \rho\sin\phi\sin\theta \\ z &= \rho\cos\phi \end{aligned}}$$

De cartesianas:

$$\boxed{\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &= \arctan\frac{y}{x} \\ \phi &= \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{aligned}}$$

Elemento de volumen

Cilíndricas: $dV = r\,dr\,d\theta\,dz$
Esféricas: $dV = \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

Series de Fourier

Serie de Fourier trigonométrica

Para una función periódica $f(x)$ con período $2L$:

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right]}$$

donde:

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \\ a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \end{aligned}}$$

Serie de Fourier compleja

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}}$$

donde:

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}\,dx}$$

Desigualdades Geométricas

Desigualdad entre medias

Para números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$\boxed{\mathrm{MH} \leq \mathrm{MG} \leq \mathrm{MA} \leq \mathrm{MC}}$$

donde:

- Media armónica: $\mathrm{MH} = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$
- Media geométrica: $\mathrm{MG} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$
- Media aritmética: $\mathrm{MA} = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$
- Media cuadrática: $\mathrm{MC} = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Para vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\boxed{|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq |\vec{u}||\vec{v}|}$$

En forma de suma:

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)}$$

Desigualdad del triángulo

Para vectores:

$$\boxed{|\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}|+|\vec{v}|}$$

Para números complejos z_1, z_2:

$$\boxed{|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|}$$

Desigualdad isoperimétrica

Para una figura plana con perímetro P y área A:

$$\boxed{P^2 \geq 4\pi A}$$

con igualdad solo para el círculo.

Desigualdad de Weitzenböck

Para un triángulo con lados a, b, c y área S:

$$\boxed{a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S}$$

con igualdad solo para triángulos equiláteros.

Números Complejos en Geometría

Forma rectangular

$$\boxed{z = x+iy = \mathrm{Re}(z)+i\mathrm{Im}(z)}$$

Forma polar

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,\mathrm{cis}\,\theta = re^{i\theta}}$$

donde:

$$\boxed{r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \quad , \quad \theta = \arg(z) = \arctan\frac{y}{x}}$$

Fórmula de Euler

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

Teorema de De Moivre

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

o equivalentemente:

$$\boxed{(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}}$$

Raíces n-ésimas de la unidad

Las n raíces de $z^n = 1$ son:

$$\boxed{z_k = e^{2\pi i k/n} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n} \quad , \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1}$$

Raíces n-ésimas de un número complejo

Las n raíces de $z^n = w$ donde $w = re^{i\theta}$ son:

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i(\theta+2\pi k)/n} \quad , \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1}$$

Geometría Fractal

Dimensión fractal (dimensión de Hausdorff)

$$\boxed{D = \frac{\log N}{\log(1/r)}}$$

donde N es el número de copias autosimilares y r es el factor de escala.

Ejemplos de dimensiones fractales

- Línea recta: $D = 1$
- Conjunto de Cantor: $D = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.631$
- Curva de Koch: $D = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.262$
- Triángulo de Sierpinski: $D = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.585$
- Esponja de Menger: $D = \frac{\log 20}{\log 3} \approx 2.727$

Transformaciones Lineales y Matrices

Matriz de rotación en 2D

Rotación por ángulo θ:

$$\boxed{R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}$$

Matriz de rotación en 3D

Alrededor del eje x:

$$\boxed{R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}$$

Alrededor del eje y:

$$\boxed{R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}}$$

Alrededor del eje z:

$$\boxed{R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Matriz de reflexión

Respecto al eje x:

$$\boxed{M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Respecto al eje y:

$$\boxed{M_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Respecto al origen:

$$\boxed{M_O = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Matriz de escalamiento

$$\boxed{S(s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}}$$

Matriz de cizallamiento (shear)

Horizontal:

$$\boxed{H_x(k) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Vertical:

$$\boxed{H_y(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}}$$

Fórmulas Adicionales

Número de oro (phi)

$$\boxed{\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033988749895}$$

Propiedades:

$$\boxed{\phi^2 = \phi + 1 \quad , \quad \frac{1}{\phi} = \phi - 1}$$

Rectángulo áureo

Un rectángulo con proporción $\phi : 1$.

$$\boxed{\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi}$$

Espiral áurea

Una espiral logarítmica que crece por un factor de ϕ por cada cuarto de vuelta.

Ángulo sólido

Para una esfera completa:

$$\boxed{\Omega = 4\pi \text{ estereoradianes}}$$

Para un casquete esférico con ángulo θ:

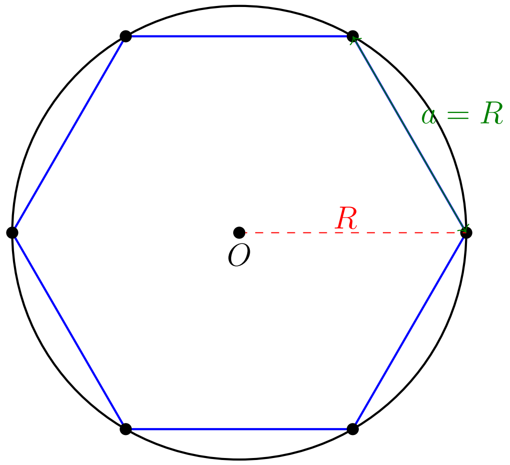
$$\boxed{\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta)}$$

Aproximaciones Útiles

Para ángulos pequeños x (en radianes):

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x &\approx x - \frac{x^3}{6} \approx x \\ \cos x &\approx 1 - \frac{x^2}{2} \\ \tan x &\approx x + \frac{x^3}{3} \approx x \end{aligned}}$$

Ilustración: Hexágono regular inscrito



En un hexágono regular inscrito en un círculo de radio R, el lado del hexágono es igual al radio: $a = R$.

Geometría Computacional

Producto cruz en 2D (determinante)

Para vectores $\vec{u} = (u_x, u_y)$ y $\vec{v} = (v_x, v_y)$:

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = u_x v_y - u_y v_x}$$

Resultado positivo: $\vec{v}$ está a la izquierda de $\vec{u}$
Resultado negativo: $\vec{v}$ está a la derecha de $\vec{u}$
Resultado cero: $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son colineales

Área de polígono por coordenadas

Para un polígono con vértices $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$:

$$\boxed{A = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^{n} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \right|}$$

donde $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_1, y_1)$.

Punto dentro de un polígono convexo

Un punto P está dentro de un polígono convexo si tiene el mismo signo del producto cruz con todos los lados consecutivos.

Punto dentro de un triángulo

Un punto $P(x, y)$ está dentro del triángulo ABC si:

$$\boxed{\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \gamma \geq 0, \text{ y } \alpha + \beta + \gamma = 1}$$

donde (α, β, γ) son las coordenadas baricéntricas:

$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C$$

Convex Hull (Envolvente Convexa)

Algoritmos comunes:

- **Graham Scan**: $O(n \log n)$
- **Jarvis March (Gift Wrapping)**: $O(nh)$ donde h es el número de puntos en el hull
- **Andrew's Algorithm**: $O(n \log n)$

Intersección de segmentos

Dos segmentos P_1P_2 y P_3P_4 se intersectan si:

- Los puntos P_3 y P_4 están en lados opuestos de la línea P_1P_2, Y
- Los puntos P_1 y P_2 están en lados opuestos de la línea P_3P_4

Punto más cercano a un segmento

Dado un punto P y un segmento AB, el punto más cercano Q en AB a P es:

$$\boxed{Q = A + t(B - A)}$$

donde:

$$\boxed{t = \max\left(0, \min\left(1, \frac{(P - A) \cdot (B - A)}{|B - A|^2}\right)\right)}$$

Distancias Especiales

Distancia de Manhattan

$$\boxed{d_{\text{Manhattan}} = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|}$$

Distancia de Chebyshev

$$\boxed{d_{\text{Chebyshev}} = \max(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|)}$$

Distancia de Minkowski

$$\boxed{d_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}}$$

Casos especiales:

- $p = 1$: Distancia de Manhattan
- $p = 2$: Distancia euclidiana
- $p = \infty$: Distancia de Chebyshev

Distancia de Hamming

Número de posiciones en las que dos cadenas difieren.

Distancia de Hausdorff

Para dos conjuntos A y B:

$$\boxed{d_H(A, B) = \max\left(\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d(a, b), \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} d(a, b)\right)}$$

Teoremas Avanzados

Teorema de Napoleon

Si se construyen triángulos equiláteros sobre los lados de cualquier triángulo, los centros de estos triángulos equiláteros forman otro triángulo equilátero.

Teorema de Morley

Los tres puntos de intersección de los trisectores de ángulos adyacentes de cualquier triángulo forman un triángulo equilátero.

Teorema del punto de Fermat

Para un triángulo ABC, el punto P que minimiza $PA+PB+PC$ es el punto de Fermat, donde:

- Si todos los ángulos son < 120, entonces $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120$
- Si un ángulo es ≥ 120, el punto de Fermat es ese vértice

Teorema de Feuerbach (Círculo de los nueve puntos)

El círculo que pasa por:

- Los puntos medios de los tres lados
- Los pies de las tres alturas
- Los puntos medios entre vértices y ortocentro

Este círculo tiene radio $R/2$ donde R es el radio circunscrito.

Teorema de Carnot

En un triángulo ABC con circuncentro O y alturas h_a, h_b, h_c:

$$\boxed{OA^2 + OB^2 + OC^2 = R^2(1 + \cos A + \cos B + \cos C)}$$

Teorema de Menelao generalizado (3D)

Para un tetraedro y un plano que lo corta, el producto de las razones de división es -1.

Identidad de Brahmagupta

$$\boxed{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2}$$

Teorema japonés

En cualquier cuadrilátero cíclico dividido en triángulos por sus diagonales, la suma de los radios de los círculos inscritos en los triángulos opuestos es constante.

Fórmulas de Área Avanzadas

Área de un cuadrilátero con diagonales

Para un cuadrilátero con diagonales p y q que se intersectan con ángulo θ:

$$\boxed{A = \frac{1}{2}pq\sin\theta}$$

Fórmula de Coolidge para cuadriláteros

$$\boxed{16A^2 = 4p^2q^2 - (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)^2}$$

donde a, b, c, d son los lados y p, q las diagonales.

Área de un polígono regular

Para un polígono regular de n lados con lado a:

$$\boxed{A = \frac{na^2}{4\tan(\pi/n)}}$$

Área de un sector elíptico

No tiene fórmula cerrada simple, pero se puede aproximar usando integrales elípticas.

Centros Notables del Triángulo

Ortocentro (H)

Intersección de las tres alturas.
Coordenadas:

$$H = \left(\frac{\tan A \cdot x_A + \tan B \cdot x_B + \tan C \cdot x_C}{\tan A + \tan B + \tan C}, \dots \right)$$

Circuncentro (O)

Intersección de las mediatrices.
Coordenadas:

$$O = \left(\frac{x_A \sin 2A + x_B \sin 2B + x_C \sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}, \dots \right)$$

Incentro (I)

Intersección de las bisectrices internas.
Coordenadas baricéntricas:

$$\boxed{I = \frac{aA + bB + cC}{a + b + c}}$$

Baricentro (G)

Intersección de las medianas. Es el centro de masa.
Coordenadas:

$$\boxed{G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)}$$

Recta de Euler

El ortocentro H, circuncentro O y baricentro G son colineales, con:

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OH}}$$

Es decir, G divide el segmento OH en razón $1:2$.

Secciones Cónicas - Propiedades Avanzadas

Ecuación general de una cónica

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Discriminante:

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

- $\Delta < 0$: Elipse (o círculo si $A = C$ y $B = 0$)
- $\Delta = 0$: Parábola
- $\Delta > 0$: Hipérbola

Propiedades focales de la parábola

Todo rayo paralelo al eje de la parábola se refleja hacia el foco.

Propiedades focales de la elipse

La suma de distancias desde cualquier punto de la elipse a los dos focos es constante e igual a $2a$.

Propiedades focales de la hipérbola

La diferencia absoluta de distancias desde cualquier punto de la hipérbola a los dos focos es constante e igual a $2a$.

Tangente a una cónica

Para la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto (x_0, y_0):

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1}$$

Para la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto (x_0, y_0):

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1}$$

Para la parábola $y^2 = 4px$ en el punto (x_0, y_0):

$$\boxed{yy_0 = 2p(x + x_0)}$$

Curvas Paramétricas

Cicloide

Curva trazada por un punto en un círculo que rueda:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r(\theta - \sin\theta) \\ y &= r(1 - \cos\theta) \end{aligned}}$$

Epicicloide

$$\boxed{\begin{aligned} x &= (R+r)\cos\theta - r\cos\left(\frac{R+r}{r}\theta\right) \\ y &= (R+r)\sin\theta - r\sin\left(\frac{R+r}{r}\theta\right) \end{aligned}}$$

Hipocicloide

$$\boxed{\begin{aligned} x &= (R-r)\cos\theta + r\cos\left(\frac{R-r}{r}\theta\right) \\ y &= (R-r)\sin\theta - r\sin\left(\frac{R-r}{r}\theta\right) \end{aligned}}$$

Astroide (Hipocicloide con $R = 4r$)

$$\boxed{x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}}$$

Forma paramétrica:

$$\boxed{x = a\cos^3 t \quad , \quad y = a\sin^3 t}$$

Lemniscata de Bernoulli

$$\boxed{(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)}$$

En polares:

$$\boxed{r^2 = a^2\cos(2\theta)}$$

Curvatura

Curvatura de una curva plana

Para una curva $y = f(x)$:

$$\boxed{\kappa = \frac{|f''(x)|}{(1 + [f'(x)]^2)^{3/2}}}$$

Para una curva paramétrica $(x(t), y(t))$:

$$\boxed{\kappa = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}}$$

Radio de curvatura

$$\boxed{\rho = \frac{1}{\kappa}}$$

Curvatura del círculo

Para un círculo de radio r:

$$\boxed{\kappa = \frac{1}{r}}$$

Superficies Cuádricas

Elipsoide

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

Hiperboloide de una hoja

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

Hiperboloide de dos hojas

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1}$$

Paraboloide elíptico

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z}$$

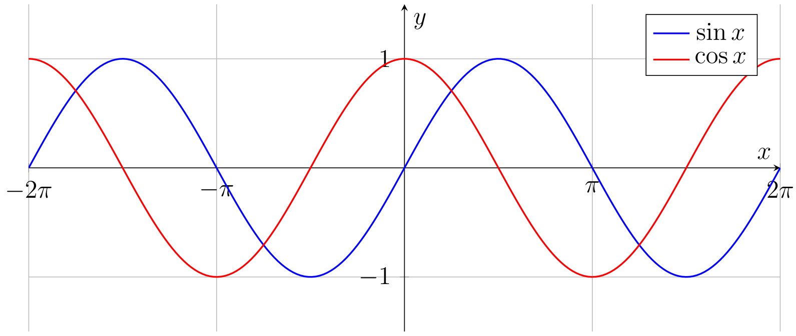
Paraboloide hiperbólico (silla de montar)

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z}$$

Cono elíptico

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}}$$

Ilustración: Funciones trigonométricas



Integrales Trigonométricas Útiles

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$$

$$\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$$

Constantes Geométricas Importantes

$$\pi \approx 3.141592653589793$$

$$e \approx 2.718281828459045$$

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033988749895$$

$$\sqrt{2} \approx 1.414213562373095$$

$$\sqrt{3} \approx 1.732050807568877$$

$$\sqrt{5} \approx 2.236067977499790$$

Relaciones entre Trigonometría y Números Complejos

Identidades de Euler

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{aligned}}$$

Fórmula más bella de las matemáticas

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

Esta fórmula conecta cinco de las constantes matemáticas más importantes: e, i, π, 1 y 0.

Notas Finales

Este documento contiene las fórmulas y teoremas más importantes de geometría y trigonometría. Es útil para:

- Resolución rápida de problemas
- Competencias de matemáticas (Olimpiadas, ACM ICPC)
- Referencia académica
- Geometría computacional
- Gráficos por computadora
- Física e ingeniería

"La geometría es el conocimiento de lo eternamente existente."
— Platón