Teoría de Números

Jaime Sebastian Chavarria Fuertes

December 29, 2024

1 Aritmética Modular

1.1 Teoría de Congruencias

Una congruencia es una relación de equivalencia entre enteros que se basa en sus restos al dividirse por un número dado.

Definición 1.1 (Congruencia). *Decimos que dos números enteros a y b son congruentes módulo n, y escribimos $a \equiv b \pmod{n}$, que significa que:*

$$a\%n == b\%n$$

Tambien podemos decir que si $a \equiv b \pmod{n}$ entonces se puede decir que:

$$n|(a-b)$$

Es decir que n divide a: $(a-b)$

Ejemplo 1.2. $17 \equiv 2 \pmod{5}$, *ya que* $17 - 2 = 15$ *es divisible por 5.*

Propiedades:

– Si $a \equiv b \pmod{n}$, entonces $a + x \equiv b + x \pmod{n}$.

– Si $a \equiv b \pmod{n}$, entonces $a \cdot x \equiv b \cdot x \pmod{n}$.

– Si $a \equiv b \pmod{n}$ y $x \equiv y \pmod{n}$, entonces $a + x \equiv b + y \pmod{n}$.

– $a^n \equiv b^n \pmod{m}\ \forall n \in \mathbb{N}$

– Dispuesto a completar y/o agregar cosas

2 Numeros Primos

Definición 2.1 (Numero Primo). *Un numero es primos si y solo si tiene unicamente dos divisores*

3 Funciones Aritméticas

Las funciones aritméticas son aquellas que se definen en los números enteros y tienen aplicaciones importantes en teoría de números.

Definición 3.1 (Función ϕ de Euler)**.** *La función $\phi(n)$ cuenta el número de enteros positivos menores o iguales que n que son coprimos con n.*

Teorema 3.2 (Propiedad de la función ϕ)**.** *Si $p_1, p_2, \ldots, p_k$ son los factores primos distintos de n, entonces:*

$$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

Ejemplo 3.3. *Para $n = 12$, los factores primos son 2 y 3, por lo que:*

$$\phi(12) = 12\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 12 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 4$$

4 Conclusiones

La teoría de números es una de las ramas más antiguas de las matemáticas y sigue siendo un área activa de investigación. Desde su aplicación en criptografía hasta su influencia en otras ramas matemáticas, los resultados de esta teoría continúan jugando un papel crucial.