Geometría Vectorial

Cheatsheet Completo y Extenso

Jaime Sebastian Chavarria Fuertes

October 7, 2025

Contents

1 Fundamentos de Vectores

1.1 Definiciones Básicas

Definición 1.1. *Un **vector** es un objeto matemático que tiene magnitud (longitud) y dirección. Se representa como $\vec{v}$ o $\mathbf{v}$.*

Notación:

- Vector en 2D: $\vec{v} = (v_x, v_y)$ o $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$
- Vector en 3D: $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ o $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$
- Vector en n-D: $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$

1.2 Operaciones Vectoriales Básicas

1.2.1 Suma de vectores

$$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)}$$

Propiedades:

- Conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- Asociativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- Elemento neutro: $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$
- Elemento inverso: $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

1.2.2 Resta de vectores

$$\boxed{\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)}$$

1.2.3 Multiplicación por escalar

$$\boxed{k\vec{v} = (kv_1, kv_2, kv_3)}$$

Propiedades:

- Asociativa: $(kl)\vec{v} = k(l\vec{v})$
- Distributiva respecto a suma de vectores: $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- Distributiva respecto a suma de escalares: $(k + l)\vec{v} = k\vec{v} + l\vec{v}$
- Elemento neutro: $1\vec{v} = \vec{v}$

1.3 Magnitud (Norma) de un Vector

1.3.1 En 2D

$$\boxed{|\vec{v}| = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

1.3.2 En 3D

$$\boxed{|\vec{v}| = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

1.3.3 En n-D

$$\boxed{|\vec{v}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}}$$

1.4 Vector Unitario

Un vector unitario tiene magnitud 1.

$$\boxed{\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}}$$

Vectores unitarios estándar:

- En 2D: $\vec{i} = (1, 0)$, $\vec{j} = (0, 1)$
- En 3D: $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$

1.5 Dirección de un Vector

En 2D, el ángulo que forma con el eje x positivo:

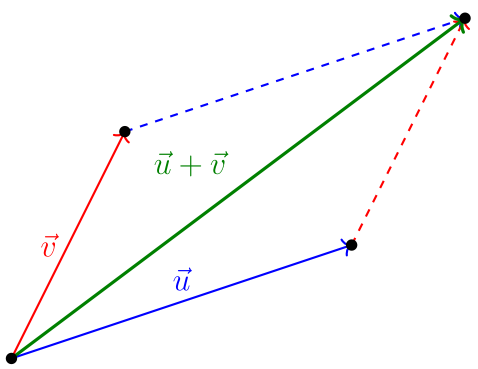
$$\boxed{\theta = \arctan \frac{v_y}{v_x}}$$

En 3D, los ángulos directores α, β, γ con los ejes x, y, z:

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{v_x}{|\vec{v}|} \quad , \quad \cos \beta = \frac{v_y}{|\vec{v}|} \quad , \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{|\vec{v}|}}$$

Y se cumple: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

1.6 Ilustración: Suma de vectores



2 Producto Punto (Escalar)

2.1 Definición

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta}$$

donde θ es el ángulo entre los vectores.

2.2 Propiedades del Producto Punto

1. **Conmutativa**: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. **Distributiva**: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
3. **Asociativa con escalares**: $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$
4. **Producto consigo mismo**: $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$
5. **Con el vector cero**: $\vec{v} \cdot \vec{0} = 0$

2.3 Ángulo entre Vectores

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}}$$

$$\boxed{\theta = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}}$$

2.4 Vectores Perpendiculares (Ortogonales)

Dos vectores son perpendiculares si y solo si:

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$$

2.5 Vectores Paralelos

Dos vectores son paralelos si:

$$\boxed{\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} = k\vec{v} \text{ para algún escalar } k}$$

O equivalentemente: $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|$

2.6 Proyección Vectorial

2.6.1 Proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$

$$\boxed{\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}\vec{v}}$$

2.6.2 Componente escalar (longitud de la proyección)

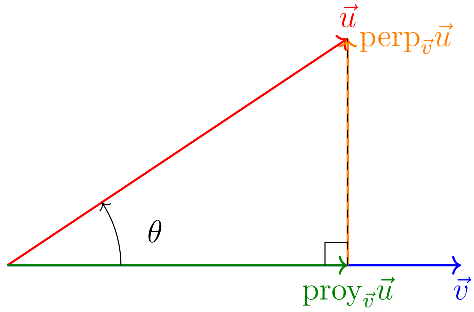
$$\boxed{\text{comp}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} = |\vec{u}|\cos\theta}$$

2.6.3 Vector de rechazo (componente perpendicular)

$$\boxed{\text{perp}_{\vec{v}}\vec{u} = \vec{u} - \text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}}$$

Cumple: $\text{perp}_{\vec{v}}\vec{u} \perp \vec{v}$

2.7 Ilustración: Proyección vectorial



2.8 Trabajo Mecánico

El trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ sobre un desplazamiento $\vec{d}$:

$$\boxed{W = \vec{F}\cdot\vec{d} = |\vec{F}||\vec{d}|\cos\theta}$$

3 Producto Cruz (Vectorial)

3.1 Definición (solo en 3D)

$$\boxed{\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}}$$

$$\boxed{\vec{u}\times\vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}}$$

3.2 Propiedades del Producto Cruz

1. **Anticonmutativa**: $\vec{u}\times\vec{v} = -(\vec{v}\times\vec{u})$
2. **Distributiva**: $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{w}$
3. **Asociativa con escalares**: $(k\vec{u})\times\vec{v} = k(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{u}\times(k\vec{v})$
4. **Producto consigo mismo**: $\vec{v}\times\vec{v} = \vec{0}$
5. **Con el vector cero**: $\vec{v}\times\vec{0} = \vec{0}$

6. **Vectores paralelos**: $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$

3.3 Magnitud del Producto Cruz

$$\boxed{|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin\theta}$$

donde θ es el ángulo entre los vectores.

3.4 Dirección del Producto Cruz

El vector $\vec{u} \times \vec{v}$ es perpendicular tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$, y su dirección sigue la **regla de la mano derecha**.

$$\boxed{(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u} \quad \text{y} \quad (\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v}}$$

3.5 Productos Cruz de Vectores Unitarios

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} & , & \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} & , & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} & , & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \end{array}}$$

3.6 Aplicaciones del Producto Cruz

3.6.1 Área de paralelogramo

El área del paralelogramo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\boxed{A_{\text{paralelogramo}} = |\vec{u} \times \vec{v}|}$$

3.6.2 Área de triángulo

El área del triángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\boxed{A_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

3.6.3 Momento de torsión (torque)

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

donde $\vec{r}$ es el vector posición y $\vec{F}$ es la fuerza.

3.6.4 Velocidad angular

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

donde $\vec{\omega}$ es la velocidad angular.

3.7 Producto Cruz en 2D (Determinante)

En 2D, el producto cruz se reduce a un escalar:

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = u_x v_y - u_y v_x}$$

Interpretación geométrica:

- Si es positivo: $\vec{v}$ está a la izquierda de $\vec{u}$ (giro antihorario)
- Si es negativo: $\vec{v}$ está a la derecha de $\vec{u}$ (giro horario)
- Si es cero: $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son colineales

4 Producto Triple

4.1 Producto Triple Escalar

$$\boxed{\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}}$$

Propiedades:

- Invariante bajo permutaciones cíclicas: $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$
- Cambia de signo con permutación no cíclica: $\vec{u} \cdot (\vec{w} \times \vec{v}) = -\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

4.1.1 Volumen de paralelepípedo

$$\boxed{V_{\text{paralelepípedo}} = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|}$$

4.1.2 Volumen de tetraedro

$$\boxed{V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6}|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|}$$

4.1.3 Coplanaridad

Tres vectores son coplanares si y solo si:

$$\boxed{\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0}$$

4.2 Producto Triple Vectorial

$$\boxed{\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}}$$

Identidad BAC-CAB:

$$\boxed{\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v}(\vec{u} \cdot \vec{w}) - \vec{w}(\vec{u} \cdot \vec{v})}$$

Nota: $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ (no es asociativo)

4.3 Identidad de Jacobi

$$\boxed{\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{0}}$$

4.4 Identidad de Lagrange

$$\boxed{(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{w} \times \vec{z}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})(\vec{v} \cdot \vec{z}) - (\vec{u} \cdot \vec{z})(\vec{v} \cdot \vec{w})}$$

Caso especial ($\vec{w} = \vec{u}$, $\vec{z} = \vec{v}$):

$$\boxed{|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}$$

5 Rectas en el Espacio

5.1 Ecuación Vectorial de la Recta

Una recta que pasa por el punto P_0 con vector dirección $\vec{v}$:

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r_0} + t\vec{v}}$$

o en componentes:

$$\boxed{\vec{r}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)}$$

5.2 Ecuación Paramétrica de la Recta

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}}$$

donde (a, b, c) es el vector dirección y $t \in \mathbb{R}$ es el parámetro.

5.3 Ecuación Simétrica de la Recta

Si $a, b, c \neq 0$:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}$$

5.4 Ecuación de la Recta por Dos Puntos

Recta que pasa por $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\boxed{\vec{r}(t) = (1 - t)P_1 + tP_2 = P_1 + t(P_2 - P_1)}$$

Vector dirección: $\vec{v} = P_2 - P_1$

5.5 Punto en una Recta

Un punto P está en la recta si existe un valor de t tal que:

$$P = P_0 + t\vec{v}$$

5.6 Rectas en 2D

5.6.1 Forma punto-pendiente

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

5.6.2 Forma general

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

Vector dirección: $\vec{v} = (-B, A)$ o $(B, -A)$
Vector normal: $\vec{n} = (A, B)$

5.6.3 Forma vectorial en 2D

$$\boxed{\vec{r}(t) = (x_0, y_0) + t(a, b)}$$

5.7 Distancia de un Punto a una Recta

5.7.1 En 3D (usando producto cruz)

Distancia del punto P a la recta que pasa por P_0 con dirección $\vec{v}$:

$$\boxed{d = \frac{|\overrightarrow{P_0P} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}}$$

5.7.2 En 2D (usando forma general)

Distancia del punto (x_0, y_0) a la recta $Ax + By + C = 0$:

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

5.8 Distancia entre Dos Rectas

5.8.1 Rectas paralelas

Si $\vec{v_1} \parallel \vec{v_2}$ (misma dirección):

$$\boxed{d = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{v_1}|}{|\vec{v_1}|}}$$

5.8.2 Rectas que se cruzan (skew lines)

$$\boxed{d = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{v_1} \times \vec{v_2})|}{|\vec{v_1} \times \vec{v_2}|}}$$

5.9 Ángulo entre Dos Rectas

$$\boxed{\cos\theta = \frac{|\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}|}{|\vec{v_1}||\vec{v_2}|}}$$

5.10 Condiciones Especiales

5.10.1 Rectas paralelas

$$\boxed{\vec{v_1} \parallel \vec{v_2} \Leftrightarrow \vec{v_1} = k\vec{v_2}}$$

5.10.2 Rectas perpendiculares

$$\boxed{\vec{v_1} \perp \vec{v_2} \Leftrightarrow \vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0}$$

5.10.3 Rectas coplanares

Dos rectas son coplanares si:

$$\boxed{\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{v_1} \times \vec{v_2}) = 0}$$

6 Planos en el Espacio

6.1 Ecuación Vectorial del Plano

Un plano que pasa por el punto P_0 con vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\boxed{\vec{r}(s,t) = \vec{r_0} + s\vec{u} + t\vec{v}}$$

6.2 Ecuación Normal del Plano

Un plano con vector normal $\vec{n} = (A, B, C)$ que pasa por $P_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\boxed{\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0}$$

o:

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$$

6.3 Ecuación General del Plano

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

donde $\vec{n} = (A, B, C)$ es el vector normal al plano.

6.4 Vector Normal al Plano

Si el plano está definido por dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\boxed{\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}}$$

6.5 Plano por Tres Puntos

Dado tres puntos P_1, P_2, P_3, el vector normal es:

$$\boxed{\vec{n} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}}$$

6.6 Intersección de Planos

6.6.1 Planos paralelos

$$\boxed{\vec{n_1} \parallel \vec{n_2} \Leftrightarrow \vec{n_1} = k\vec{n_2}}$$

6.6.2 Planos perpendiculares

$$\boxed{\vec{n_1} \perp \vec{n_2} \Leftrightarrow \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0}$$

6.6.3 Línea de intersección

Si dos planos se intersectan, forman una recta con vector dirección:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}}$$

6.7 Ángulo entre Dos Planos

$$\boxed{\cos\theta = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}}$$

6.8 Distancia de un Punto a un Plano

Distancia del punto $P(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

6.9 Distancia entre Dos Planos Paralelos

Para planos $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ y $Ax + By + Cz + D_2 = 0$:

$$\boxed{d = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

6.10 Proyección de un Punto sobre un Plano

La proyección del punto P sobre el plano con normal $\vec{n}$ que pasa por P_0:

$$\boxed{P' = P - \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0 P}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}}$$

6.11 Reflexión de un Punto sobre un Plano

$$\boxed{P'' = P - 2\frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0 P}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}}$$

6.12 Intersección de Recta y Plano

Recta: $\vec{r}(t) = \vec{r_0} + t\vec{v}$
Plano: $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{p}) = 0$
Punto de intersección en:

$$\boxed{t = \frac{\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{r_0})}{\vec{n} \cdot \vec{v}}}$$

Casos especiales:

- Si $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ y $\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{r_0}) = 0$: la recta está contenida en el plano
- Si $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ y $\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{r_0}) \neq 0$: la recta es paralela al plano

7 Sistemas de Coordenadas

7.1 Coordenadas Cartesianas (Rectangulares)

$$\boxed{P = (x, y, z)}$$

7.2 Coordenadas Cilíndricas

$$\boxed{P = (r, \theta, z)}$$

Conversión a cartesianas:

$$\boxed{\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}}$$

Conversión de cartesianas:

$$\boxed{\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \\ z = z \end{cases}}$$

7.3 Coordenadas Esféricas

$$\boxed{P = (\rho, \theta, \phi)}$$

donde:

- ρ: distancia desde el origen
- θ: ángulo azimutal (en el plano xy)
- ϕ: ángulo polar (desde el eje z)

Conversión a cartesianas:

$$\boxed{\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}}$$

Conversión de cartesianas:

$$\boxed{\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \\ \phi = \arccos(z/\rho) \end{cases}}$$

7.4 Elementos de Volumen

Cartesianas: $dV = dx\, dy\, dz$
Cilíndricas: $dV = r\, dr\, d\theta\, dz$
Esféricas: $dV = \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$

8 Bases Vectoriales

8.1 Base Ortonormal

Una base $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ es ortonormal si:

$$\boxed{\vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}}$$

8.2 Cambio de Base

Si $\vec{v} = v_1\vec{e_1} + v_2\vec{e_2} + v_3\vec{e_3}$ en una base ortonormal:

$$\boxed{v_i = \vec{v} \cdot \vec{e_i}}$$

8.3 Matriz de Rotación

Para rotar un vector alrededor del origen:

Rotación en 2D por ángulo θ:

$$\boxed{R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}$$

Rotación en 3D alrededor del eje z:

$$\boxed{R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

8.4 Proceso de Gram-Schmidt

Para ortogonalizar un conjunto de vectores $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$:

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{u_1} = \vec{v_1} \\ &\vec{u_2} = \vec{v_2} - \text{proy}_{\vec{u_1}}\vec{v_2} \\ &\vec{u_3} = \vec{v_3} - \text{proy}_{\vec{u_1}}\vec{v_3} - \text{proy}_{\vec{u_2}}\vec{v_3} \end{aligned}}$$

Luego normalizar: $\vec{e_i} = \frac{\vec{u_i}}{|\vec{u_i}|}$

9 Operaciones Avanzadas

9.1 Gradiente (campo escalar a vectorial)

$$\boxed{\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}}$$

9.2 Divergencia (campo vectorial a escalar)

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}}$$

9.3 Rotacional (campo vectorial a vectorial)

$$\boxed{\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}}$$

9.4 Laplaciano

$$\boxed{\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$$

9.5 Identidades Vectoriales Importantes

$$\boxed{\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla f) &= \vec{0} \\
\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) &= 0 \\
\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F} \\
\nabla(fg) &= f\nabla g + g\nabla f \\
\nabla \cdot (f\vec{F}) &= f(\nabla \cdot \vec{F}) + \vec{F} \cdot \nabla f \\
\nabla \times (f\vec{F}) &= f(\nabla \times \vec{F}) + (\nabla f) \times \vec{F}
\end{aligned}}$$