

# Propiedades geométricas interesantes

Jaime Sebastian Chavarria Fuentes

October 7, 2025

## Contents

<b>1 Conversión de ángulos entre grados sexagesimales y decimales</b>	<b>8</b>
1.1 De grados, minutos y segundos a grados decimales . . . . .	8
1.2 Conversión inversa: de grados decimales a grados, minutos y segundos . . . . .	8
1.3 Relaciones fundamentales del sistema sexagesimal . . . . .	8
<b>2 Leyes Fundamentales de la Trigonometría</b>	<b>8</b>
2.1 Ley de Senos . . . . .	8
2.2 Ley de Cosenos . . . . .	8
2.3 Casos particulares . . . . .	9
2.4 Ley de Tangentes . . . . .	9
<b>3 Identidades Trigonométricas Fundamentales</b>	<b>9</b>
3.1 Identidades Pitagóricas . . . . .	9
3.2 Identidades Recíprocas . . . . .	9
3.3 Identidades de Cociente . . . . .	9
<b>4 Fórmulas de Ángulo Doble</b>	<b>10</b>
<b>5 Fórmulas de Ángulo Medio</b>	<b>10</b>
<b>6 Fórmulas de Suma y Resta de Ángulos</b>	<b>10</b>
6.1 Seno de suma y resta . . . . .	10
6.2 Coseno de suma y resta . . . . .	10
6.3 Tangente de suma y resta . . . . .	10
<b>7 Fórmulas de Producto a Suma</b>	<b>11</b>
<b>8 Fórmulas de Suma a Producto</b>	<b>11</b>
<b>9 Valores Especiales de Funciones Trigonométricas</b>	<b>11</b>
9.1 Tabla de valores comunes . . . . .	11
9.2 Valores en radianes . . . . .	11
9.3 Conversión entre grados y radianes . . . . .	12
<b>10 Áreas de Triángulos</b>	<b>12</b>
10.1 Fórmula básica . . . . .	12
10.2 Fórmula con dos lados y el ángulo entre ellos . . . . .	12
10.3 Fórmula de Herón . . . . .	12
10.4 Fórmula usando el radio circunscrito . . . . .	12
10.5 Fórmula usando el radio inscrito . . . . .	12
<b>11 Propiedades de Triángulos</b>	<b>12</b>
11.1 Suma de ángulos internos . . . . .	12
11.2 Desigualdad triangular . . . . .	12
11.3 Relación entre lados y ángulos . . . . .	13
11.4 Radio circunscrito . . . . .	13
11.5 Radio inscrito . . . . .	13
11.6 Longitud de medianas . . . . .	13

11.7 Longitud de alturas . . . . .	13
11.8 Longitud de bisectrices . . . . .	13
<b>12 Triángulos Especiales</b>	<b>14</b>
12.1 Triángulo Equilátero (lado $a$ ) . . . . .	14
12.2 Triángulo Rectángulo . . . . .	14
12.3 Triángulos Pitagóricos Comunes . . . . .	14
<b>13 Círculos y Circunferencias</b>	<b>14</b>
13.1 Fórmulas básicas . . . . .	14
13.2 Longitud de arco . . . . .	15
13.3 Área de sector circular . . . . .	15
13.4 Área de segmento circular . . . . .	15
13.5 Cuerda y arco . . . . .	15
13.6 Teorema de la potencia de un punto . . . . .	15
13.7 Ecuación de la circunferencia . . . . .	16
<b>14 Polígonos Regulares</b>	<b>16</b>
14.1 Fórmulas generales para un polígono regular de $n$ lados . . . . .	16
14.2 Polígono regular inscrito en un círculo . . . . .	16
14.3 Casos particulares de polígonos regulares . . . . .	17
<b>15 Cuadriláteros</b>	<b>17</b>
15.1 Propiedades generales . . . . .	17
15.2 Cuadrado (lado $a$ ) . . . . .	17
15.3 Rectángulo (lados $a$ y $b$ ) . . . . .	17
15.4 Rombo (lado $a$ , diagonales $d_1$ y $d_2$ ) . . . . .	18
15.5 Paralelogramo (lados $a, b$ , altura $h$ , ángulo $\theta$ ) . . . . .	18
15.6 Trapecio (bases $b_1, b_2$ , altura $h$ ) . . . . .	18
15.7 Fórmula de Bretschneider (cuadrilátero general) . . . . .	18
15.8 Cuadrilátero cíclico (Fórmula de Brahmagupta) . . . . .	18
<b>16 Geometría de Coordenadas en el Plano</b>	<b>19</b>
16.1 Distancia entre dos puntos . . . . .	19
16.2 Punto medio . . . . .	19
16.3 División de un segmento en razón dada . . . . .	19
16.4 Ecuación de la recta . . . . .	19
16.5 Pendiente de una recta . . . . .	19
16.6 Rectas paralelas y perpendiculares . . . . .	20
16.7 Distancia de un punto a una recta . . . . .	20
16.8 Ángulo entre dos rectas . . . . .	20
16.9 Área de un triángulo con coordenadas . . . . .	20
16.10 Condición de colinealidad . . . . .	20
<b>17 Cónicas</b>	<b>21</b>
17.1 Parábola . . . . .	21
17.2 Elipse . . . . .	21
17.3 Hipérbola . . . . .	22

<b>18 Transformaciones Geométricas</b>	<b>22</b>
18.1 Traslación . . . . .	22
18.2 Rotación alrededor del origen . . . . .	22
18.3 Reflexión . . . . .	22
18.4 Escalamiento . . . . .	23
<b>19 Geometría del Espacio (3D)</b>	<b>23</b>
19.1 Distancia entre dos puntos en 3D . . . . .	23
19.2 Punto medio en 3D . . . . .	23
19.3 Ecuación del plano . . . . .	23
19.4 Ecuación de la recta en 3D . . . . .	23
19.5 Distancia de un punto a un plano . . . . .	24
19.6 Ángulo entre dos planos . . . . .	24
<b>20 Vectores</b>	<b>24</b>
20.1 Operaciones básicas con vectores . . . . .	24
20.2 Producto punto (escalar) . . . . .	24
20.3 Producto cruz (vectorial) . . . . .	25
20.4 Producto triple escalar . . . . .	25
20.5 Proyección vectorial . . . . .	26
20.6 Ilustración: Triángulo rectángulo . . . . .	26
20.7 Ilustración: Círculo unitario con ángulos . . . . .	26
20.8 Ilustración: Parábola . . . . .	27
<b>21 Sólidos Geométricos</b>	<b>27</b>
21.1 Cubo (arista $a$ ) . . . . .	27
21.2 Paralelepípedo rectangular (dimensiones $a, b, c$ ) . . . . .	27
21.3 Esfera (radio $r$ ) . . . . .	27
21.4 Cilindro circular (radio $r$ , altura $h$ ) . . . . .	28
21.5 Cono circular (radio $r$ , altura $h$ , generatriz $l$ ) . . . . .	28
21.6 Pirámide . . . . .	28
21.7 Prisma . . . . .	28
21.8 Tronco de cono (radios $r_1, r_2$ , altura $h$ ) . . . . .	28
21.9 Toro (radio mayor $R$ , radio menor $r$ ) . . . . .	29
21.10 Casquete esférico (radio $r$ , altura $h$ ) . . . . .	29
21.11 Elipsoide (semiejes $a, b, c$ ) . . . . .	29
<b>22 Teoremas Importantes</b>	<b>29</b>
22.1 Teorema de Tales . . . . .	29
22.2 Teorema de Pitágoras generalizado . . . . .	29
22.3 Teorema de Stewart . . . . .	29
22.4 Teorema de la bisectriz . . . . .	30
22.5 Teorema de Menelao . . . . .	30
22.6 Teorema de Ceva . . . . .	30
22.7 Teorema de Euler (para triángulos) . . . . .	30
22.8 Teorema del ángulo inscrito . . . . .	30
22.9 Teorema de Ptolomeo . . . . .	30

<b>23 Funciones Trigonométricas Inversas</b>	<b>31</b>
23.1 Dominios y rangos . . . . .	31
23.2 Identidades de funciones inversas . . . . .	31
23.3 Relaciones entre funciones inversas . . . . .	31
23.4 Derivadas de funciones trigonométricas . . . . .	32
23.5 Derivadas de funciones trigonométricas inversas . . . . .	32
<b>24 Funciones Hiperbólicas</b>	<b>32</b>
24.1 Definiciones . . . . .	32
24.2 Identidades hiperbólicas . . . . .	33
24.3 Suma y resta de funciones hiperbólicas . . . . .	33
24.4 Derivadas de funciones hiperbólicas . . . . .	33
24.5 Funciones hiperbólicas inversas . . . . .	33
<b>25 Coordenadas Polares</b>	<b>34</b>
25.1 Conversión entre cartesianas y polares . . . . .	34
25.2 Área en coordenadas polares . . . . .	34
25.3 Longitud de arco en polares . . . . .	34
25.4 Curvas polares comunes . . . . .	34
25.5 Ilustración: Rosa polar de 4 pétalos . . . . .	35
25.6 Ilustración: Cardioide . . . . .	35
<b>26 Coordenadas Esféricas y Cilíndricas</b>	<b>36</b>
26.1 Coordenadas cilíndricas $(r, \theta, z)$ . . . . .	36
26.2 Coordenadas esféricas $(\rho, \theta, \phi)$ . . . . .	36
26.3 Elemento de volumen . . . . .	36
<b>27 Series de Fourier</b>	<b>36</b>
27.1 Serie de Fourier trigonométrica . . . . .	36
27.2 Serie de Fourier compleja . . . . .	37
<b>28 Desigualdades Geométricas</b>	<b>37</b>
28.1 Desigualdad entre medias . . . . .	37
28.2 Desigualdad de Cauchy-Schwarz . . . . .	37
28.3 Desigualdad del triángulo . . . . .	38
28.4 Desigualdad isoperimétrica . . . . .	38
28.5 Desigualdad de Weitzenböck . . . . .	38
<b>29 Números Complejos en Geometría</b>	<b>38</b>
29.1 Forma rectangular . . . . .	38
29.2 Forma polar . . . . .	38
29.3 Fórmula de Euler . . . . .	38
29.4 Teorema de De Moivre . . . . .	38
29.5 Raíces n-ésimas de la unidad . . . . .	39
29.6 Raíces n-ésimas de un número complejo . . . . .	39
<b>30 Geometría Fractal</b>	<b>39</b>
30.1 Dimensión fractal (dimensión de Hausdorff) . . . . .	39
30.2 Ejemplos de dimensiones fractales . . . . .	39

<b>31 Transformaciones Lineales y Matrices</b>	<b>39</b>
31.1 Matriz de rotación en 2D . . . . .	39
31.2 Matriz de rotación en 3D . . . . .	40
31.3 Matriz de reflexión . . . . .	40
31.4 Matriz de escalamiento . . . . .	40
31.5 Matriz de cizallamiento (shear) . . . . .	40
<b>32 Fórmulas Adicionales</b>	<b>41</b>
32.1 Número de oro (phi) . . . . .	41
32.2 Rectángulo áureo . . . . .	41
32.3 Espiral áurea . . . . .	41
32.4 Ángulo sólido . . . . .	41
<b>33 Aproximaciones Útiles</b>	<b>41</b>
<b>34 Ilustración: Hexágono regular inscrito</b>	<b>42</b>
<b>35 Geometría Computacional</b>	<b>42</b>
35.1 Producto cruz en 2D (determinante) . . . . .	42
35.2 Área de polígono por coordenadas . . . . .	42
35.3 Punto dentro de un polígono convexo . . . . .	42
35.4 Punto dentro de un triángulo . . . . .	42
35.5 Convex Hull (Envolvente Convexa) . . . . .	43
35.6 Intersección de segmentos . . . . .	43
35.7 Punto más cercano a un segmento . . . . .	43
<b>36 Distancias Especiales</b>	<b>43</b>
36.1 Distancia de Manhattan . . . . .	43
36.2 Distancia de Chebyshev . . . . .	43
36.3 Distancia de Minkowski . . . . .	44
36.4 Distancia de Hamming . . . . .	44
36.5 Distancia de Hausdorff . . . . .	44
<b>37 Teoremas Avanzados</b>	<b>44</b>
37.1 Teorema de Napoleon . . . . .	44
37.2 Teorema de Morley . . . . .	44
37.3 Teorema del punto de Fermat . . . . .	44
37.4 Teorema de Feuerbach (Círculo de los nueve puntos) . . . . .	45
37.5 Teorema de Carnot . . . . .	45
37.6 Teorema de Menelao generalizado (3D) . . . . .	45
37.7 Identidad de Brahmagupta . . . . .	45
37.8 Teorema japonés . . . . .	45
<b>38 Fórmulas de Área Avanzadas</b>	<b>45</b>
38.1 Área de un cuadrilátero con diagonales . . . . .	45
38.2 Fórmula de Coolidge para cuadriláteros . . . . .	45
38.3 Área de un polígono regular . . . . .	45
38.4 Área de un sector elíptico . . . . .	46

<b>39 Centros Notables del Triángulo</b>	<b>46</b>
39.1 Ortocentro (H) . . . . .	46
39.2 Circuncentro (O) . . . . .	46
39.3 Incentro (I) . . . . .	46
39.4 Baricentro (G) . . . . .	46
39.5 Recta de Euler . . . . .	46
<b>40 Secciones Cónicas - Propiedades Avanzadas</b>	<b>47</b>
40.1 Ecuación general de una cónica . . . . .	47
40.2 Propiedades focales de la parábola . . . . .	47
40.3 Propiedades focales de la elipse . . . . .	47
40.4 Propiedades focales de la hipérbola . . . . .	47
40.5 Tangente a una cónica . . . . .	47
<b>41 Curvas Paramétricas</b>	<b>48</b>
41.1 Cicloide . . . . .	48
41.2 Epicicloide . . . . .	48
41.3 Hipocicloide . . . . .	48
41.4 Astroide (Hipocicloide con $R = 4r$ ) . . . . .	48
41.5 Lemniscata de Bernoulli . . . . .	48
<b>42 Curvatura</b>	<b>48</b>
42.1 Curvatura de una curva plana . . . . .	48
42.2 Radio de curvatura . . . . .	49
42.3 Curvatura del círculo . . . . .	49
<b>43 Superficies Cuádricas</b>	<b>49</b>
43.1 Elipsoide . . . . .	49
43.2 Hiperboloide de una hoja . . . . .	49
43.3 Hiperboloide de dos hojas . . . . .	49
43.4 Paraboloide elíptico . . . . .	49
43.5 Paraboloide hiperbólico (silla de montar) . . . . .	49
43.6 Cono elíptico . . . . .	49
<b>44 Ilustración: Funciones trigonométricas</b>	<b>50</b>
<b>45 Integrales Trigonométricas Útiles</b>	<b>50</b>
<b>46 Constantes Geométricas Importantes</b>	<b>50</b>
<b>47 Relaciones entre Trigonometría y Números Complejos</b>	<b>51</b>
47.1 Identidades de Euler . . . . .	51
47.2 Fórmula más bella de las matemáticas . . . . .	51
<b>48 Notas Finales</b>	<b>51</b>

# 1 Conversión de ángulos entre grados sexagesimales y decimales

## 1.1 De grados, minutos y segundos a grados decimales

Dado un ángulo expresado en grados ( $G$ ), minutos ( $M$ ) y segundos ( $S$ ), su valor en grados decimales ( $D$ ) se obtiene mediante la relación:

$$D = G + \frac{M}{60} + \frac{S}{3600}$$

## 1.2 Conversión inversa: de grados decimales a grados, minutos y segundos

Si se tiene un ángulo en grados decimales ( $D$ ), los valores correspondientes en grados, minutos y segundos se calculan así:

$$\begin{aligned} G &= \lfloor D \rfloor, \\ M &= \lfloor (D - G) \times 60 \rfloor, \\ S &= (D - G - \frac{M}{60}) \times 3600 \end{aligned}$$

## 1.3 Relaciones fundamentales del sistema sexagesimal

$$1^\circ = 60' \quad , \quad 1' = 60'' \quad \Rightarrow \quad 1^\circ = 3600''$$

# 2 Leyes Fundamentales de la Trigonometría

## 2.1 Ley de Senos

En cualquier triángulo  $ABC$ , con lados  $a, b, c$  opuestos a los ángulos  $A, B, C$  respectivamente, se cumple:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

donde  $R$  es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

## 2.2 Ley de Cosenos

En el mismo triángulo  $ABC$ , la relación entre los lados y los cosenos de los ángulos es:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \end{aligned}$$

## 2.3 Casos particulares

- Si  $A = 90^\circ$ , entonces la Ley de Cosenos se reduce al Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

- Si el triángulo es isósceles con  $b = c$ , entonces:

$$a = 2b \sin \frac{A}{2}$$

## 2.4 Ley de Tangentes

Para un triángulo  $ABC$ :

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

# 3 Identidades Trigonométricas Fundamentales

## 3.1 Identidades Pitagóricas

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \\ 1 + \tan^2 \theta &= \sec^2 \theta \\ 1 + \cot^2 \theta &= \csc^2 \theta \end{aligned}$$

## 3.2 Identidades Recíprocas

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{1}{\csc \theta} & \csc \theta &= \frac{1}{\sin \theta} \\ \cos \theta &= \frac{1}{\sec \theta} & \sec \theta &= \frac{1}{\cos \theta} \\ \tan \theta &= \frac{1}{\cot \theta} & \cot \theta &= \frac{1}{\tan \theta} \end{aligned}$$

## 3.3 Identidades de Cociente

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad , \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

## 4 Fórmulas de Ángulo Doble

$$\begin{aligned}\sin(2\theta) &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ \cos(2\theta) &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= 2 \cos^2 \theta - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 \theta \\ \tan(2\theta) &= \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}\end{aligned}$$

## 5 Fórmulas de Ángulo Medio

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \\ \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}\end{aligned}$$

## 6 Fórmulas de Suma y Resta de Ángulos

### 6.1 Seno de suma y resta

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

### 6.2 Coseno de suma y resta

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

### 6.3 Tangente de suma y resta

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}\end{aligned}$$

## 7 Fórmulas de Producto a Suma

$$\begin{aligned}\sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \\ \cos \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]\end{aligned}$$

## 8 Fórmulas de Suma a Producto

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)\end{aligned}$$

## 9 Valores Especiales de Funciones Trigonométricas

### 9.1 Tabla de valores comunes

$\theta$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\infty$	0

### 9.2 Valores en radianes

$$\begin{aligned}0^\circ &= 0 \text{ rad} & 30^\circ &= \frac{\pi}{6} \text{ rad} \\ 45^\circ &= \frac{\pi}{4} \text{ rad} & 60^\circ &= \frac{\pi}{3} \text{ rad} \\ 90^\circ &= \frac{\pi}{2} \text{ rad} & 180^\circ &= \pi \text{ rad} \\ 270^\circ &= \frac{3\pi}{2} \text{ rad} & 360^\circ &= 2\pi \text{ rad}\end{aligned}$$

### 9.3 Conversión entre grados y radianes

$$\text{Radianes} = \text{Grados} \times \frac{\pi}{180} , \quad \text{Grados} = \text{Radianes} \times \frac{180}{\pi}$$

## 10 Áreas de Triángulos

### 10.1 Fórmula básica

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura}$$

### 10.2 Fórmula con dos lados y el ángulo entre ellos

$$\text{Área} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B$$

### 10.3 Fórmula de Herón

Dado un triángulo con lados  $a, b, c$  y semiperímetro  $s = \frac{a+b+c}{2}$ :

$$\text{Área} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

### 10.4 Fórmula usando el radio circunscrito

$$\text{Área} = \frac{abc}{4R}$$

donde  $R$  es el radio de la circunferencia circunscrita.

### 10.5 Fórmula usando el radio inscrito

$$\text{Área} = rs$$

donde  $r$  es el radio de la circunferencia inscrita y  $s$  es el semiperímetro.

## 11 Propiedades de Triángulos

### 11.1 Suma de ángulos internos

$$A + B + C = 180^\circ = \pi \text{ rad}$$

### 11.2 Desigualdad triangular

Para que tres longitudes  $a, b, c$  formen un triángulo, deben cumplir:

$$\begin{aligned} a + b &> c \\ a + c &> b \\ b + c &> a \end{aligned}$$

### 11.3 Relación entre lados y ángulos

En un triángulo, al lado mayor se opone el ángulo mayor:

$$a > b \Leftrightarrow A > B$$

### 11.4 Radio circunscrito

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C}$$

### 11.5 Radio inscrito

$$r = \frac{\text{Área}}{s} = (s - a) \tan \frac{A}{2} = (s - b) \tan \frac{B}{2} = (s - c) \tan \frac{C}{2}$$

### 11.6 Longitud de medianas

La longitud de la mediana desde el vértice  $A$  al lado  $a$  es:

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

### 11.7 Longitud de alturas

La altura desde el vértice  $A$  es:

$$h_a = b \sin C = c \sin B = \frac{2\text{Área}}{a}$$

### 11.8 Longitud de bisectrices

La longitud de la bisectriz desde el vértice  $A$  es:

$$t_a = \frac{2bc \cos(A/2)}{b+c} = \frac{\sqrt{bc[(b+c)^2 - a^2]}}{b+c}$$

## 12 Triángulos Especiales

### 12.1 Triángulo Equilátero (lado $a$ )

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \\ \text{Altura} &= \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ \text{Radio circunscrito} &= \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \\ \text{Radio inscrito} &= \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}\end{aligned}$$

### 12.2 Triángulo Rectángulo

Sea un triángulo rectángulo con catetos  $a, b$  e hipotenusa  $c$ :

$$\begin{aligned}c^2 &= a^2 + b^2 \quad (\text{Teorema de Pitágoras}) \\ \text{Área} &= \frac{ab}{2} \\ \text{Radio inscrito} &= \frac{a+b-c}{2} \\ \text{Radio circunscrito} &= \frac{c}{2}\end{aligned}$$

### 12.3 Triángulos Pitagóricos Comunes

- (3, 4, 5) y sus múltiplos: (6, 8, 10), (9, 12, 15), etc.
- (5, 12, 13) y sus múltiplos
- (8, 15, 17) y sus múltiplos
- (7, 24, 25) y sus múltiplos
- (20, 21, 29) y sus múltiplos

## 13 Círculos y Circunferencias

### 13.1 Fórmulas básicas

Para un círculo de radio  $r$ :

$$\begin{aligned} \text{Circunferencia} &= 2\pi r \\ \text{Área} &= \pi r^2 \\ \text{Diámetro} &= 2r \end{aligned}$$

### 13.2 Longitud de arco

Un arco que subtiende un ángulo  $\theta$  (en radianes) tiene longitud:

$$L = r\theta$$

Si  $\theta$  está en grados:

$$L = \frac{\pi r\theta}{180}$$

### 13.3 Área de sector circular

$$\text{Área del sector} = \frac{1}{2}r^2\theta \quad (\theta \text{ en radianes})$$

$$\text{Área del sector} = \frac{\pi r^2\theta}{360} \quad (\theta \text{ en grados})$$

### 13.4 Área de segmento circular

$$\text{Área del segmento} = \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin \theta) \quad (\theta \text{ en radianes})$$

### 13.5 Cuerda y arco

Para una cuerda que subtiende un ángulo central  $\theta$ :

$$\text{Longitud de cuerda} = 2r \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

### 13.6 Teorema de la potencia de un punto

Si dos cuerdas se intersectan en un punto interior  $P$  de un círculo, dividiendo las cuerdas en segmentos de longitudes  $a, b$  y  $c, d$ :

$$a \cdot b = c \cdot d$$

### 13.7 Ecuación de la circunferencia

**Forma canónica** (centro en  $(h, k)$  y radio  $r$ ):

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

**Forma general:**

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Donde el centro es  $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$  y el radio es  $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$ .

## 14 Polígonos Regulares

### 14.1 Fórmulas generales para un polígono regular de $n$ lados

**Ángulo interior:**

$$\text{Ángulo interior} = \frac{(n - 2) \times 180^\circ}{n} = \frac{(n - 2)\pi}{n} \text{ rad}$$

**Ángulo exterior:**

$$\text{Ángulo exterior} = \frac{360^\circ}{n} = \frac{2\pi}{n} \text{ rad}$$

**Suma de ángulos interiores:**

$$\text{Suma} = (n - 2) \times 180^\circ = (n - 2)\pi \text{ rad}$$

**Número de diagonales:**

$$\text{Diagonales} = \frac{n(n - 3)}{2}$$

### 14.2 Polígono regular inscrito en un círculo

Para un polígono regular de  $n$  lados inscrito en un círculo de radio  $R$ :

**Longitud del lado:**

$$a = 2R \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2R \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

**Apotema** (distancia del centro al lado):

$$ap = R \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = R \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

**Perímetro:**

$$P = 2nR \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

**Área:**

$$\boxed{\text{Área} = \frac{1}{2} \times \text{Perímetro} \times \text{Apotema} = \frac{nR^2}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$$

### 14.3 Casos particulares de polígonos regulares

**Triángulo equilátero** ( $n = 3$ ):

$$\text{Ángulo interior} = 60^\circ , \quad \text{Diagonales} = 0$$

**Cuadrado** ( $n = 4$ ):

$$\text{Ángulo interior} = 90^\circ , \quad \text{Diagonales} = 2$$

**Pentágono regular** ( $n = 5$ ):

$$\text{Ángulo interior} = 108^\circ , \quad \text{Diagonales} = 5$$

**Hexágono regular** ( $n = 6$ ):

$$\text{Ángulo interior} = 120^\circ , \quad \text{Diagonales} = 9$$

**Octágono regular** ( $n = 8$ ):

$$\text{Ángulo interior} = 135^\circ , \quad \text{Diagonales} = 20$$

## 15 Cuadriláteros

### 15.1 Propiedades generales

Para cualquier cuadrilátero:

$$\boxed{\text{Suma de ángulos interiores} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad}}$$

### 15.2 Cuadrado (lado $a$ )

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Perímetro} &= 4a \\ \text{Área} &= a^2 \\ \text{Diagonal} &= a\sqrt{2} \end{aligned}}$$

### 15.3 Rectángulo (lados $a$ y $b$ )

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Perímetro} &= 2(a + b) \\ \text{Área} &= ab \\ \text{Diagonal} &= \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}}$$

### 15.4 Rombo (lado $a$ , diagonales $d_1$ y $d_2$ )

$$\begin{aligned} \text{Perímetro} &= 4a \\ \text{Área} &= \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \\ a^2 &= \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

### 15.5 Paralelogramo (lados $a, b$ , altura $h$ , ángulo $\theta$ )

$$\begin{aligned} \text{Perímetro} &= 2(a + b) \\ \text{Área} &= a \cdot h = ab \sin \theta \\ \text{Diagonal}_1^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \\ \text{Diagonal}_2^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta \end{aligned}$$

### 15.6 Trapecio (bases $b_1, b_2$ , altura $h$ )

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2} \\ \text{Línea media} &= \frac{b_1 + b_2}{2} \end{aligned}$$

Trapecio isósceles (lados iguales  $c$ ):

$$h = \sqrt{c^2 - \left(\frac{b_1 - b_2}{2}\right)^2}$$

### 15.7 Fórmula de Bretschneider (cuadrilátero general)

Para un cuadrilátero con lados  $a, b, c, d$  y ángulos opuestos  $\alpha$  y  $\gamma$ :

$$\text{Área}^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d) - abcd \cos^2\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right)$$

donde  $s = \frac{a+b+c+d}{2}$  es el semiperímetro.

### 15.8 Cuadrilátero cíclico (Fórmula de Brahmagupta)

Para un cuadrilátero inscrito en un círculo con lados  $a, b, c, d$ :

$$\text{Área} = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}$$

donde  $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ .

## 16 Geometría de Coordenadas en el Plano

### 16.1 Distancia entre dos puntos

Entre  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$ :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

### 16.2 Punto medio

El punto medio  $M$  entre  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$ :

$$M = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

### 16.3 División de un segmento en razón dada

El punto  $P$  que divide el segmento  $P_1P_2$  en la razón  $m : n$ :

$$P = \left( \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n} \right)$$

### 16.4 Ecuación de la recta

**Forma punto-pendiente:**

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

**Forma pendiente-ordenada:**

$$y = mx + b$$

**Forma general:**

$$Ax + By + C = 0$$

**Forma simétrica** (interceptos  $a$  y  $b$ ):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

**Forma de dos puntos:**

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

### 16.5 Pendiente de una recta

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan \theta$$

donde  $\theta$  es el ángulo de inclinación de la recta.

## 16.6 Rectas paralelas y perpendiculares

Dadas dos rectas con pendientes  $m_1$  y  $m_2$ :

**Paralelas:**

$$m_1 = m_2$$

**Perpendiculares:**

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Leftrightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

## 16.7 Distancia de un punto a una recta

Distancia del punto  $P(x_0, y_0)$  a la recta  $Ax + By + C = 0$ :

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

## 16.8 Ángulo entre dos rectas

Para rectas con pendientes  $m_1$  y  $m_2$ :

$$\tan \theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|$$

## 16.9 Área de un triángulo con coordenadas

Para un triángulo con vértices  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ :

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

O usando determinantes:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|$$

## 16.10 Condición de colinealidad

Tres puntos  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$  son colineales si:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

## 17 Cónicas

### 17.1 Parábola

**Ecuación estándar** (vértice en el origen, foco en  $(p, 0)$ ):

$$y^2 = 4px$$

**Forma general** (vértice en  $(h, k)$ ):

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

**Propiedades:**

- Foco:  $(h + p, k)$
- Directriz:  $x = h - p$
- Eje de simetría:  $y = k$

Para parábola vertical:  $(x - h)^2 = 4p(y - k)$

### 17.2 Elipse

**Ecuación estándar** (centro en el origen):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{donde } a > b$$

**Forma general** (centro en  $(h, k)$ ):

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

**Propiedades:**

- Focos:  $(\pm c, 0)$  donde  $c^2 = a^2 - b^2$
- Excentricidad:  $e = \frac{c}{a}$  donde  $0 < e < 1$
- Longitud eje mayor:  $2a$
- Longitud eje menor:  $2b$
- Suma de distancias a focos:  $2a$

**Área:**

$$\boxed{\text{Área} = \pi ab}$$

**Perímetro aproximado** (fórmula de Ramanujan):

$$\boxed{P \approx \pi \left[ 3(a + b) - \sqrt{(3a + b)(a + 3b)} \right]}$$

### 17.3 Hipérbola

**Ecuación estándar** (centro en el origen):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

**Propiedades:**

- Focos:  $(\pm c, 0)$  donde  $c^2 = a^2 + b^2$
- Excentricidad:  $e = \frac{c}{a}$  donde  $e > 1$
- Asíntotas:  $y = \pm \frac{b}{a}x$
- Diferencia de distancias a focos:  $2a$

**Hipérbola rectangular** ( $a = b$ ):

$$xy = k$$

## 18 Transformaciones Geométricas

### 18.1 Traslación

Mover un punto  $(x, y)$  por  $(h, k)$ :

$$(x', y') = (x + h, y + k)$$

### 18.2 Rotación alrededor del origen

Rotar un punto  $(x, y)$  por ángulo  $\theta$  (sentido antihorario):

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' &= x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned}$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

### 18.3 Reflexión

**Respecto al eje  $x$ :**

$$(x', y') = (x, -y)$$

**Respecto al eje  $y$ :**

$$(x', y') = (-x, y)$$

**Respecto al origen:**

$$(x', y') = (-x, -y)$$

**Respecto a la recta  $y = x$ :**

$$(x', y') = (y, x)$$

## 18.4 Escalamiento

Escalar por factores  $s_x$  y  $s_y$ :

$$(x', y') = (s_x \cdot x, s_y \cdot y)$$

## 19 Geometría del Espacio (3D)

### 19.1 Distancia entre dos puntos en 3D

Entre  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  y  $P_2(x_2, y_2, z_2)$ :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

### 19.2 Punto medio en 3D

$$M = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

### 19.3 Ecuación del plano

Forma general:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Vector normal:  $\vec{n} = (A, B, C)$

Forma punto-normal:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

### 19.4 Ecuación de la recta en 3D

Forma vectorial:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$

Forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

**Forma simétrica:**

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

## 19.5 Distancia de un punto a un plano

Distancia del punto  $(x_0, y_0, z_0)$  al plano  $Ax + By + Cz + D = 0$ :

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

## 19.6 Ángulo entre dos planos

Para planos con vectores normales  $\vec{n}_1$  y  $\vec{n}_2$ :

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$$

# 20 Vectores

## 20.1 Operaciones básicas con vectores

Suma de vectores:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

Multiplicación por escalar:

$$k\vec{u} = (ku_1, ku_2, ku_3)$$

Magnitud (norma) de un vector:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Vector unitario:

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

## 20.2 Producto punto (escalar)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta$$

Propiedades:

- Comutativo:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- Distributivo:  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

- Si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ , entonces  $\vec{u} \perp \vec{v}$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

**Ángulo entre vectores:**

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

### 20.3 Producto cruz (vectorial)

Para vectores en 3D:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

**Propiedades:**

- Anticomutativo:  $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$
- $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta$
- $\vec{u} \times \vec{v}$  es perpendicular a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$
- Si  $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ , entonces  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son paralelos
- $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$

**Área de paralelogramo:**

$$\text{Área} = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

**Área de triángulo:**

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}|$$

### 20.4 Producto triple escalar

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

**Volumen de paralelepípedo:**

$$V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$$

**Volumen de tetraedro:**

$$V = \frac{1}{6} |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$$

## 20.5 Proyección vectorial

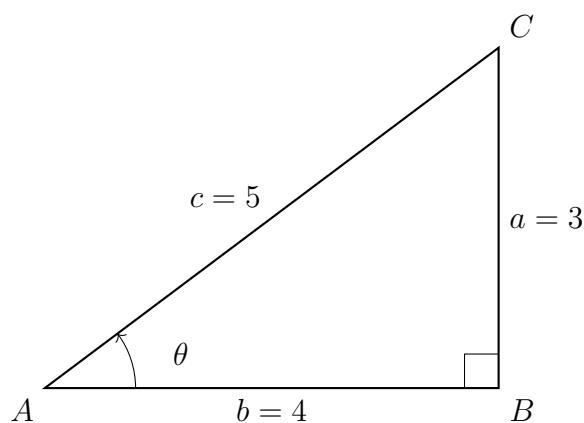
Proyección de  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v}$ :

$$\text{proy}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v}$$

Componente escalar:

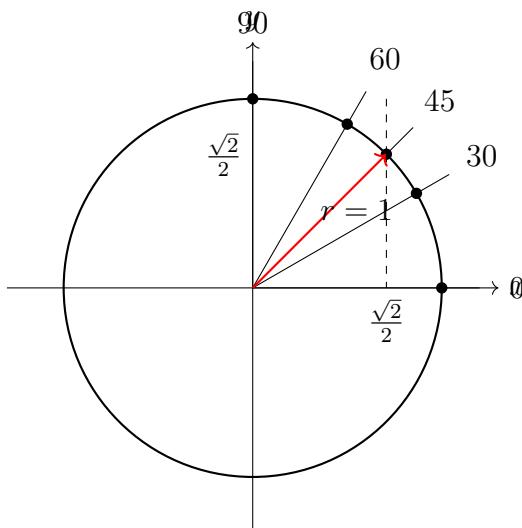
$$\text{comp}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = |\vec{u}| \cos \theta$$

## 20.6 Ilustración: Triángulo rectángulo



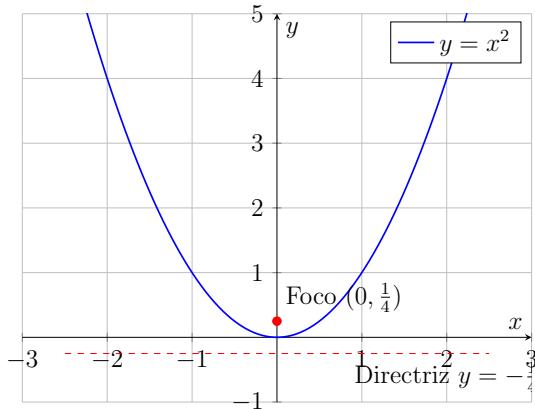
En este triángulo:  $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25$ , por lo tanto  $c = 5$ .

## 20.7 Ilustración: Círculo unitario con ángulos



El círculo unitario muestra que  $\sin(45) = \cos(45) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

## 20.8 Ilustración: Parábola



Parábola  $y = x^2$  con ecuación  $x^2 = 4py$  donde  $p = \frac{1}{4}$ .

## 21 Sólidos Geométricos

### 21.1 Cubo (arista $a$ )

Volumen = $a^3$
Área superficial = $6a^2$
Diagonal espacial = $a\sqrt{3}$
Diagonal de cara = $a\sqrt{2}$

### 21.2 Paralelepípedo rectangular (dimensiones $a, b, c$ )

Volumen = $abc$
Área superficial = $2(ab + ac + bc)$
Diagonal espacial = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

### 21.3 Esfera (radio $r$ )

Volumen = $\frac{4}{3}\pi r^3$
Área superficial = $4\pi r^2$

**Ecuación de la esfera** (centro en  $(h, k, l)$ ):

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$

## 21.4 Cilindro circular (radio $r$ , altura $h$ )

$$\text{Volumen} = \pi r^2 h$$

$$\text{Área superficial} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r + h)$$

$$\text{Área lateral} = 2\pi r h$$

## 21.5 Cono circular (radio $r$ , altura $h$ , generatriz $l$ )

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\text{Área superficial} = \pi r^2 + \pi r l = \pi r(r + l)$$

$$\text{Área lateral} = \pi r l$$

$$l = \sqrt{r^2 + h^2}$$

## 21.6 Pirámide

**Pirámide general** (área de base  $A_b$ , altura  $h$ ):

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}A_b \cdot h$$

**Pirámide cuadrada** (lado de base  $a$ , altura  $h$ ):

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}a^2 h$$

$$\text{Apotema} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

## 21.7 Prisma

**Prisma general** (área de base  $A_b$ , altura  $h$ ):

$$\text{Volumen} = A_b \cdot h$$

**Prisma triangular** (base con lados  $a, b, c$ , altura  $h$ ):

$$\text{Volumen} = \frac{h}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

## 21.8 Tronco de cono (radios $r_1, r_2$ , altura $h$ )

$$\text{Volumen} = \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

$$\text{Área lateral} = \pi(r_1 + r_2)l$$

donde  $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$  es la generatriz.

### 21.9 Toro (radio mayor $R$ , radio menor $r$ )

Volumen = $2\pi^2 Rr^2$
Área superficial = $4\pi^2 Rr$

### 21.10 Casquete esférico (radio $r$ , altura $h$ )

Volumen = $\frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$
Área superficial = $2\pi r h$

### 21.11 Elipsoide (semiejes $a, b, c$ )

Volumen = $\frac{4}{3}\pi abc$
--------------------------------

Si  $a = b$  (elipsoide de revolución):

Volumen = $\frac{4}{3}\pi a^2 c$
----------------------------------

## 22 Teoremas Importantes

### 22.1 Teorema de Tales

Si tres o más rectas paralelas son cortadas por dos transversales, los segmentos determinados en una transversal son proporcionales a los correspondientes segmentos en la otra.

$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$
-------------------------------------

### 22.2 Teorema de Pitágoras generalizado

En un triángulo cualquiera:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
--------------------------------

Si  $C = 90^\circ$ , se reduce al teorema clásico:  $c^2 = a^2 + b^2$ .

### 22.3 Teorema de Stewart

En un triángulo  $ABC$  con una ceviana  $AD$  que divide el lado  $BC$  en segmentos  $m$  y  $n$ :

$b^2m + c^2n = a(d^2 + mn)$
-----------------------------

donde  $d$  es la longitud de la ceviana.

## 22.4 Teorema de la bisectriz

La bisectriz interna de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los lados adyacentes:

$$\boxed{\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}}$$

## 22.5 Teorema de Menelao

Para un triángulo  $ABC$  y una recta que corta los lados (o sus extensiones) en puntos  $D, E, F$ :

$$\boxed{\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1}$$

## 22.6 Teorema de Ceva

Tres cevianas  $AD, BE, CF$  de un triángulo  $ABC$  son concurrentes si y solo si:

$$\boxed{\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1}$$

## 22.7 Teorema de Euler (para triángulos)

La distancia  $d$  entre el circuncentro  $O$  y el incentro  $I$  es:

$$\boxed{d^2 = R(R - 2r)}$$

donde  $R$  es el radio circunscrito y  $r$  el radio inscrito.

## 22.8 Teorema del ángulo inscrito

Un ángulo inscrito en un círculo mide la mitad del ángulo central que subtienede el mismo arco:

$$\boxed{\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB}$$

## 22.9 Teorema de Ptolomeo

En un cuadrilátero cíclico con lados  $a, b, c, d$  y diagonales  $p, q$ :

$$\boxed{pq = ac + bd}$$

## 23 Funciones Trigonométricas Inversas

### 23.1 Dominios y rangos

$$\begin{aligned}\arcsin(x) : [-1, 1] &\rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \arccos(x) : [-1, 1] &\rightarrow [0, \pi] \\ \arctan(x) : \mathbb{R} &\rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

### 23.2 Identidades de funciones inversas

$$\begin{aligned}\sin(\arcsin x) &= x \\ \cos(\arccos x) &= x \\ \tan(\arctan x) &= x \\ \arcsin(\sin x) &= x \quad \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \arccos(\cos x) &= x \quad \text{si } x \in [0, \pi] \\ \arctan(\tan x) &= x \quad \text{si } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

### 23.3 Relaciones entre funciones inversas

$$\begin{aligned}\arcsin x + \arccos x &= \frac{\pi}{2} \\ \arctan x + \arctan \frac{1}{x} &= \frac{\pi}{2} \quad (x > 0) \\ \arctan x + \arctan y &= \arctan \frac{x+y}{1-xy} \quad (xy < 1)\end{aligned}$$

## 23.4 Derivadas de funciones trigonométricas

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\sin x] &= \cos x \\ \frac{d}{dx}[\cos x] &= -\sin x \\ \frac{d}{dx}[\tan x] &= \sec^2 x \\ \frac{d}{dx}[\cot x] &= -\csc^2 x \\ \frac{d}{dx}[\sec x] &= \sec x \tan x \\ \frac{d}{dx}[\csc x] &= -\csc x \cot x\end{aligned}$$

## 23.5 Derivadas de funciones trigonométricas inversas

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\arcsin x] &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{d}{dx}[\arccos x] &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{d}{dx}[\arctan x] &= \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

# 24 Funciones Hiperbólicas

## 24.1 Definiciones

$$\begin{aligned}\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \\ \operatorname{sech} x &= \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \\ \operatorname{csch} x &= \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}\end{aligned}$$

## 24.2 Identidades hiperbólicas

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\ 1 - \tanh^2 x &= \operatorname{sech}^2 x \\ \coth^2 x - 1 &= \operatorname{csch}^2 x \\ \sinh(2x) &= 2 \sinh x \cosh x \\ \cosh(2x) &= \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2 \cosh^2 x - 1 = 1 + 2 \sinh^2 x\end{aligned}$$

## 24.3 Suma y resta de funciones hiperbólicas

$$\begin{aligned}\sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \pm y) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \\ \tanh(x \pm y) &= \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}\end{aligned}$$

## 24.4 Derivadas de funciones hiperbólicas

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\sinh x] &= \cosh x \\ \frac{d}{dx}[\cosh x] &= \sinh x \\ \frac{d}{dx}[\tanh x] &= \operatorname{sech}^2 x \\ \frac{d}{dx}[\coth x] &= -\operatorname{csch}^2 x \\ \frac{d}{dx}[\operatorname{sech} x] &= -\operatorname{sech} x \tanh x \\ \frac{d}{dx}[\operatorname{csch} x] &= -\operatorname{csch} x \coth x\end{aligned}$$

## 24.5 Funciones hiperbólicas inversas

$$\begin{aligned}\operatorname{arcsinh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ \operatorname{arccosh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x \geq 1) \\ \operatorname{arctanh} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (|x| < 1)\end{aligned}$$

## 25 Coordenadas Polares

### 25.1 Conversión entre cartesianas y polares

De polares  $(r, \theta)$  a cartesianas  $(x, y)$ :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}}$$

De cartesianas  $(x, y)$  a polares  $(r, \theta)$ :

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned}}$$

### 25.2 Área en coordenadas polares

Para una curva  $r = f(\theta)$  entre  $\theta = \alpha$  y  $\theta = \beta$ :

$$\boxed{A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta}$$

### 25.3 Longitud de arco en polares

$$\boxed{L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta}$$

### 25.4 Curvas polares comunes

Círculo:  $r = a$

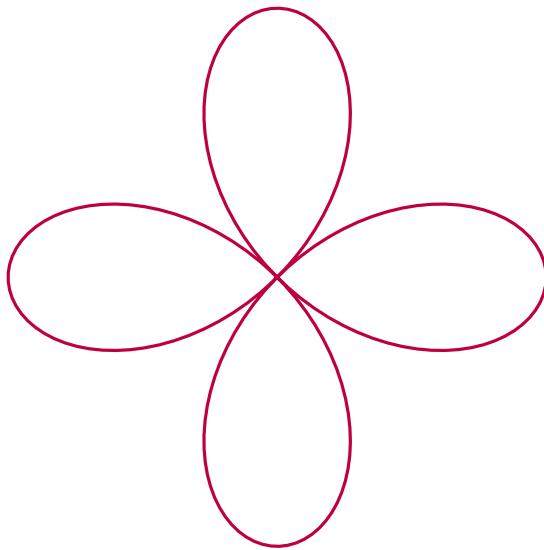
Espiral de Arquimedes:  $r = a\theta$

Rosa de pétalos:  $r = a \sin(n\theta)$  o  $r = a \cos(n\theta)$

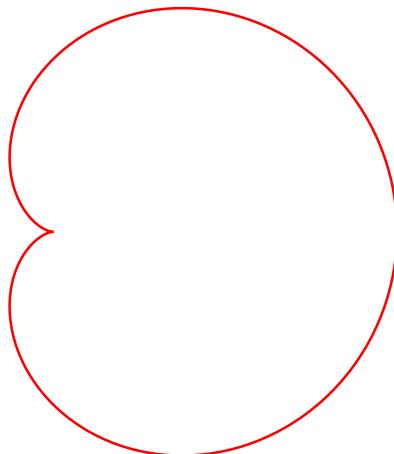
Cardioide:  $r = a(1 + \cos \theta)$

Lemniscata:  $r^2 = a^2 \cos(2\theta)$

Limaçon:  $r = a + b \cos \theta$

**25.5 Ilustración: Rosa polar de 4 pétalos**

Rosa polar:  $r = \cos(2\theta)$

**25.6 Ilustración: Cardioide**

Cardioide:  $r = 1 + \cos \theta$

## 26 Coordenadas Esféricas y Cilíndricas

### 26.1 Coordenadas cilíndricas $(r, \theta, z)$

A cartesianas:

$$\boxed{\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\y &= r \sin \theta \\z &= z\end{aligned}}$$

De cartesianas:

$$\boxed{\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \arctan \frac{y}{x} \\ z &= z\end{aligned}}$$

### 26.2 Coordenadas esféricas $(\rho, \theta, \phi)$

A cartesianas:

$$\boxed{\begin{aligned}x &= \rho \sin \phi \cos \theta \\y &= \rho \sin \phi \sin \theta \\z &= \rho \cos \phi\end{aligned}}$$

De cartesianas:

$$\boxed{\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \arctan \frac{y}{x} \\ \phi &= \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\end{aligned}}$$

### 26.3 Elemento de volumen

Cilíndricas:  $dV = r dr d\theta dz$

Esféricas:  $dV = \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$

## 27 Series de Fourier

### 27.1 Serie de Fourier trigonométrica

Para una función periódica  $f(x)$  con período  $2L$ :

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right]}$$

donde:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \end{aligned}$$

## 27.2 Serie de Fourier compleja

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx/L}$$

donde:

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-inx/L} dx$$

## 28 Desigualdades Geométricas

### 28.1 Desigualdad entre medias

Para números positivos  $a_1, a_2, \dots, a_n$ :

$$\text{MH} \leq \text{MG} \leq \text{MA} \leq \text{MC}$$

donde:

- Media armónica:  $\text{MH} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$
- Media geométrica:  $\text{MG} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$
- Media aritmética:  $\text{MA} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$
- Media cuadrática:  $\text{MC} = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$

### 28.2 Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Para vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ :

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| |\vec{v}|$$

En forma de suma:

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

### 28.3 Desigualdad del triángulo

Para vectores:

$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$$

Para números complejos  $z_1, z_2$ :

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

### 28.4 Desigualdad isoperimétrica

Para una figura plana con perímetro  $P$  y área  $A$ :

$$P^2 \geq 4\pi A$$

con igualdad solo para el círculo.

### 28.5 Desigualdad de Weitzenböck

Para un triángulo con lados  $a, b, c$  y área  $S$ :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

con igualdad solo para triángulos equiláteros.

## 29 Números Complejos en Geometría

### 29.1 Forma rectangular

$$z = x + iy = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$$

### 29.2 Forma polar

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r \operatorname{cis} \theta = re^{i\theta}$$

donde:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \theta = \arg(z) = \arctan \frac{y}{x}$$

### 29.3 Fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

### 29.4 Teorema de De Moivre

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

o equivalentemente:

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

## 29.5 Raíces n-ésimas de la unidad

Las  $n$  raíces de  $z^n = 1$  son:

$$z_k = e^{2\pi ik/n} = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} , \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

## 29.6 Raíces n-ésimas de un número complejo

Las  $n$  raíces de  $z^n = w$  donde  $w = re^{i\theta}$  son:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i(\theta+2\pi k)/n} , \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

# 30 Geometría Fractal

## 30.1 Dimensión fractal (dimensión de Hausdorff)

$$D = \frac{\log N}{\log(1/r)}$$

donde  $N$  es el número de copias autosimilares y  $r$  es el factor de escala.

## 30.2 Ejemplos de dimensiones fractales

- Línea recta:  $D = 1$
- Conjunto de Cantor:  $D = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.631$
- Curva de Koch:  $D = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.262$
- Triángulo de Sierpinski:  $D = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.585$
- Esponja de Menger:  $D = \frac{\log 20}{\log 3} \approx 2.727$

# 31 Transformaciones Lineales y Matrices

## 31.1 Matriz de rotación en 2D

Rotación por ángulo  $\theta$ :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

### 31.2 Matriz de rotación en 3D

Alrededor del eje  $x$ :

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Alrededor del eje  $y$ :

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Alrededor del eje  $z$ :

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 31.3 Matriz de reflexión

Respecto al eje  $x$ :

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Respecto al eje  $y$ :

$$M_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Respecto al origen:

$$M_O = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

### 31.4 Matriz de escalamiento

$$S(s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$$

### 31.5 Matriz de cizallamiento (shear)

Horizontal:

$$H_x(k) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vertical:

$$H_y(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

## 32 Fórmulas Adicionales

### 32.1 Número de oro (phi)

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618033988749895$$

Propiedades:

$$\phi^2 = \phi + 1 \quad , \quad \frac{1}{\phi} = \phi - 1$$

### 32.2 Rectángulo áureo

Un rectángulo con proporción  $\phi : 1$ .

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi$$

### 32.3 Espiral áurea

Una espiral logarítmica que crece por un factor de  $\phi$  por cada cuarto de vuelta.

### 32.4 Ángulo sólido

Para una esfera completa:

$$\Omega = 4\pi \text{ estereoradianes}$$

Para un casquete esférico con ángulo  $\theta$ :

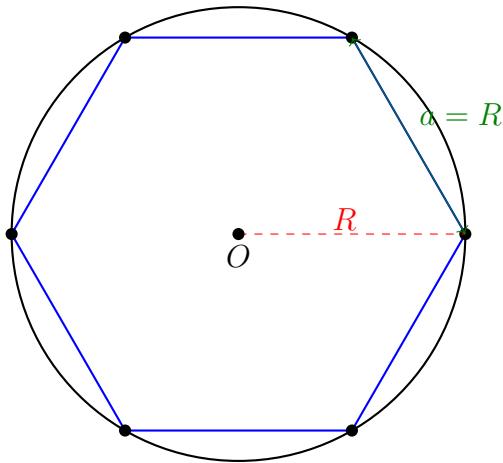
$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \theta)$$

## 33 Aproximaciones Útiles

Para ángulos pequeños  $x$  (en radianes):

$$\begin{aligned} \sin x &\approx x - \frac{x^3}{6} \approx x \\ \cos x &\approx 1 - \frac{x^2}{2} \\ \tan x &\approx x + \frac{x^3}{3} \approx x \end{aligned}$$

## 34 Ilustración: Hexágono regular inscrito



En un hexágono regular inscrito en un círculo de radio  $R$ , el lado del hexágono es igual al radio:  $a = R$ .

## 35 Geometría Computacional

### 35.1 Producto cruz en 2D (determinante)

Para vectores  $\vec{u} = (u_x, u_y)$  y  $\vec{v} = (v_x, v_y)$ :

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = u_x v_y - u_y v_x}$$

Resultado positivo:  $\vec{v}$  está a la izquierda de  $\vec{u}$

Resultado negativo:  $\vec{v}$  está a la derecha de  $\vec{u}$

Resultado cero:  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son colineales

### 35.2 Área de polígono por coordenadas

Para un polígono con vértices  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ :

$$\boxed{A = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \right|}$$

donde  $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_1, y_1)$ .

### 35.3 Punto dentro de un polígono convexo

Un punto  $P$  está dentro de un polígono convexo si tiene el mismo signo del producto cruz con todos los lados consecutivos.

### 35.4 Punto dentro de un triángulo

Un punto  $P(x, y)$  está dentro del triángulo  $ABC$  si:

$$\boxed{\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0, \text{ y } \alpha + \beta + \gamma = 1}$$

donde  $(\alpha, \beta, \gamma)$  son las coordenadas baricéntricas:

$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C$$

### 35.5 Convex Hull (Envolvente Convexa)

Algoritmos comunes:

- **Graham Scan:**  $O(n \log n)$
- **Jarvis March (Gift Wrapping):**  $O(nh)$  donde  $h$  es el número de puntos en el hull
- **Andrew's Algorithm:**  $O(n \log n)$

### 35.6 Intersección de segmentos

Dos segmentos  $P_1P_2$  y  $P_3P_4$  se intersectan si:

- Los puntos  $P_3$  y  $P_4$  están en lados opuestos de la línea  $P_1P_2$ , Y
- Los puntos  $P_1$  y  $P_2$  están en lados opuestos de la línea  $P_3P_4$

### 35.7 Punto más cercano a un segmento

Dado un punto  $P$  y un segmento  $AB$ , el punto más cercano  $Q$  en  $AB$  a  $P$  es:

$$Q = A + t(B - A)$$

donde:

$$t = \max \left( 0, \min \left( 1, \frac{(P - A) \cdot (B - A)}{|B - A|^2} \right) \right)$$

## 36 Distancias Especiales

### 36.1 Distancia de Manhattan

$$d_{\text{Manhattan}} = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

### 36.2 Distancia de Chebyshev

$$d_{\text{Chebyshev}} = \max(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|)$$

### 36.3 Distancia de Minkowski

$$d_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

Casos especiales:

- $p = 1$ : Distancia de Manhattan
- $p = 2$ : Distancia euclidiana
- $p = \infty$ : Distancia de Chebyshev

### 36.4 Distancia de Hamming

Número de posiciones en las que dos cadenas difieren.

### 36.5 Distancia de Hausdorff

Para dos conjuntos  $A$  y  $B$ :

$$d_H(A, B) = \max \left( \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b) \right)$$

## 37 Teoremas Avanzados

### 37.1 Teorema de Napoleon

Si se construyen triángulos equiláteros sobre los lados de cualquier triángulo, los centros de estos triángulos equiláteros forman otro triángulo equilátero.

### 37.2 Teorema de Morley

Los tres puntos de intersección de los trisectores de ángulos adyacentes de cualquier triángulo forman un triángulo equilátero.

### 37.3 Teorema del punto de Fermat

Para un triángulo  $ABC$ , el punto  $P$  que minimiza  $PA + PB + PC$  es el punto de Fermat, donde:

- Si todos los ángulos son  $< 120^\circ$ , entonces  $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$
- Si un ángulo es  $\geq 120^\circ$ , el punto de Fermat es ese vértice

### 37.4 Teorema de Feuerbach (Círculo de los nueve puntos)

El círculo que pasa por:

- Los puntos medios de los tres lados
- Los pies de las tres alturas
- Los puntos medios entre vértices y ortocentro

Este círculo tiene radio  $R/2$  donde  $R$  es el radio circunscrito.

### 37.5 Teorema de Carnot

En un triángulo  $ABC$  con circuncentro  $O$  y alturas  $h_a, h_b, h_c$ :

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 = R^2(1 + \cos A + \cos B + \cos C)$$

### 37.6 Teorema de Menelao generalizado (3D)

Para un tetraedro y un plano que lo corta, el producto de las razones de división es  $-1$ .

### 37.7 Identidad de Brahmagupta

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

### 37.8 Teorema japonés

En cualquier cuadrilátero cíclico dividido en triángulos por sus diagonales, la suma de los radios de los círculos inscritos en los triángulos opuestos es constante.

## 38 Fórmulas de Área Avanzadas

### 38.1 Área de un cuadrilátero con diagonales

Para un cuadrilátero con diagonales  $p$  y  $q$  que se intersectan con ángulo  $\theta$ :

$$A = \frac{1}{2}pq \sin \theta$$

### 38.2 Fórmula de Coolidge para cuadriláteros

$$16A^2 = 4p^2q^2 - (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)^2$$

donde  $a, b, c, d$  son los lados y  $p, q$  las diagonales.

### 38.3 Área de un polígono regular

Para un polígono regular de  $n$  lados con lado  $a$ :

$$A = \frac{na^2}{4 \tan(\pi/n)}$$

### 38.4 Área de un sector elíptico

No tiene fórmula cerrada simple, pero se puede aproximar usando integrales elípticas.

## 39 Centros Notables del Triángulo

### 39.1 Ortocentro (H)

Intersección de las tres alturas.

**Coordenadas:**

$$H = \left( \frac{\tan A \cdot x_A + \tan B \cdot x_B + \tan C \cdot x_C}{\tan A + \tan B + \tan C}, \dots \right)$$

### 39.2 Circuncentro (O)

Intersección de las mediatrices.

**Coordenadas:**

$$O = \left( \frac{x_A \sin 2A + x_B \sin 2B + x_C \sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}, \dots \right)$$

### 39.3 Incentro (I)

Intersección de las bisectrices internas.

**Coordenadas baricéntricas:**

$$I = \boxed{\frac{aA + bB + cC}{a + b + c}}$$

### 39.4 Baricentro (G)

Intersección de las medianas. Es el centro de masa.

**Coordenadas:**

$$G = \boxed{\left( \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)}$$

### 39.5 Recta de Euler

El ortocentro  $H$ , circuncentro  $O$  y baricentro  $G$  son colineales, con:

$$\overrightarrow{OG} = \boxed{\frac{1}{3} \overrightarrow{OH}}$$

Es decir,  $G$  divide el segmento  $OH$  en razón  $1 : 2$ .

## 40 Secciones Cónicas - Propiedades Avanzadas

### 40.1 Ecuación general de una cónica

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Discriminante:

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

- $\Delta < 0$ : Elipse (o círculo si  $A = C$  y  $B = 0$ )
- $\Delta = 0$ : Parábola
- $\Delta > 0$ : Hipérbola

### 40.2 Propiedades focales de la parábola

Todo rayo paralelo al eje de la parábola se refleja hacia el foco.

### 40.3 Propiedades focales de la elipse

La suma de distancias desde cualquier punto de la elipse a los dos focos es constante e igual a  $2a$ .

### 40.4 Propiedades focales de la hipérbola

La diferencia absoluta de distancias desde cualquier punto de la hipérbola a los dos focos es constante e igual a  $2a$ .

### 40.5 Tangente a una cónica

Para la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  en el punto  $(x_0, y_0)$ :

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Para la hipérbola  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  en el punto  $(x_0, y_0)$ :

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Para la parábola  $y^2 = 4px$  en el punto  $(x_0, y_0)$ :

$$yy_0 = 2p(x + x_0)$$

## 41 Curvas Paramétricas

### 41.1 Cicloide

Curva trazada por un punto en un círculo que rueda:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r(\theta - \sin \theta) \\ y &= r(1 - \cos \theta) \end{aligned}}$$

### 41.2 Epicicloide

$$\boxed{\begin{aligned} x &= (R + r) \cos \theta - r \cos \left( \frac{R+r}{r} \theta \right) \\ y &= (R + r) \sin \theta - r \sin \left( \frac{R+r}{r} \theta \right) \end{aligned}}$$

### 41.3 Hipocicloide

$$\boxed{\begin{aligned} x &= (R - r) \cos \theta + r \cos \left( \frac{R-r}{r} \theta \right) \\ y &= (R - r) \sin \theta - r \sin \left( \frac{R-r}{r} \theta \right) \end{aligned}}$$

### 41.4 Astroide (Hipocicloide con $R = 4r$ )

$$\boxed{x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}}$$

Forma paramétrica:

$$\boxed{x = a \cos^3 t \quad , \quad y = a \sin^3 t}$$

### 41.5 Lemniscata de Bernoulli

$$\boxed{(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)}$$

En polares:

$$\boxed{r^2 = a^2 \cos(2\theta)}$$

## 42 Curvatura

### 42.1 Curvatura de una curva plana

Para una curva  $y = f(x)$ :

$$\boxed{\kappa = \frac{|f''(x)|}{(1 + [f'(x)]^2)^{3/2}}}$$

Para una curva paramétrica  $(x(t), y(t))$ :

$$\kappa = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

## 42.2 Radio de curvatura

$$\rho = \frac{1}{\kappa}$$

## 42.3 Curvatura del círculo

Para un círculo de radio  $r$ :

$$\kappa = \frac{1}{r}$$

# 43 Superficies Cuádricas

## 43.1 Elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

## 43.2 Hiperboloide de una hoja

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

## 43.3 Hiperboloide de dos hojas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

## 43.4 Paraboloide elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

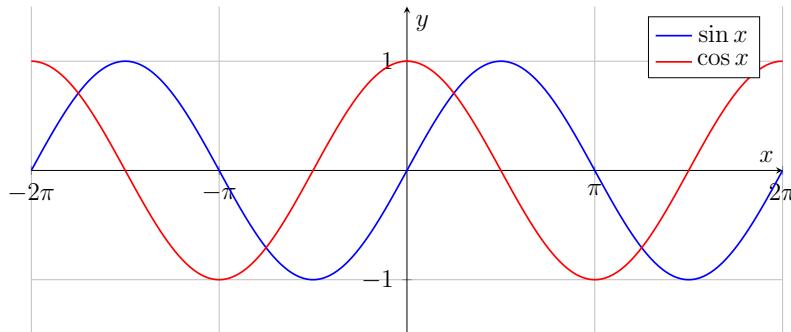
## 43.5 Paraboloide hiperbólico (silla de montar)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

## 43.6 Cono elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

## 44 Ilustración: Funciones trigonométricas



## 45 Integrales Trigonométricas Útiles

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + C = \ln |\sec x| + C$$

$$\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$$

## 46 Constantes Geométricas Importantes

$$\pi \approx 3.141592653589793$$

$$e \approx 2.718281828459045$$

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618033988749895$$

$$\sqrt{2} \approx 1.414213562373095$$

$$\sqrt{3} \approx 1.732050807568877$$

$$\sqrt{5} \approx 2.236067977499790$$

## 47 Relaciones entre Trigonometría y Números Complejos

### 47.1 Identidades de Euler

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\end{aligned}$$

### 47.2 Fórmula más bella de las matemáticas

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Esta fórmula conecta cinco de las constantes matemáticas más importantes:  $e$ ,  $i$ ,  $\pi$ , 1 y 0.

## 48 Notas Finales

Este documento contiene las fórmulas y teoremas más importantes de geometría y trigonometría. Es útil para:

- Resolución rápida de problemas
- Competencias de matemáticas (Olimpiadas, ACM ICPC)
- Referencia académica
- Geometría computacional
- Gráficos por computadora
- Física e ingeniería

*“La geometría es el conocimiento de lo eternamente existente.”*

— Platón