



# Divisibilidad

En matemáticas, concretamente en aritmética, se dice que un número entero  $b$  es **divisible** entre otro entero  $a$  (no nulo) si al dividir  $b$  entre  $a$  el resto es cero o, dicho simbólicamente,  $b \bmod a = 0$ .

Se suele expresar de la forma  $a \mid b$ , que se lee: « $a$  divide a  $b$ », o « $a$  es un divisor de  $b$ » o también « $b$  es **múltiplo** de  $a$ ».<sup>1</sup> Por ejemplo, 6 es divisible entre 3, ya que  $3 \times 2 = 6$ ; pero 6 no es divisible entre 4, pues no existe un entero  $c$  tal que  $4 \times c = 6$ ; es decir que el resto de la división euclídea (entera) de 6 entre 4 no es cero.

Cualquier número natural<sup>2</sup> es divisible entre 1 y entre sí mismo. Los números mayores que 1 que no admiten más que estos dos divisores se llaman números primos. Los que admiten más de dos divisores se llaman números compuestos.

## Definición

El número entero  $a$  es **divisible** entre el número entero  $b \neq 0$  (o lo que es lo mismo,  $b$  divide a  $a$ ) si hay un número  $q$  entero, tal que  $a = b \cdot q$ .

Este hecho se denomina **divisibilidad** del número entero  $a$  por el número entero  $b$  y se denota por  $b \mid a$ ; que no es otra cosa que una afirmación entre los números enteros, que, en un contexto concreto, puede ser cierta o no.<sup>3</sup> Por ejemplo  $3 \mid 12$  es cierta; sin embargo,  $3 \nmid 17$  no es cierta. Si  $b$  no es divisor de  $a$  se escribe  $b \nmid a$ . Nótese que  $0 \nmid a$  para todo  $a$  distinto de cero, pues  $a \neq 0 = k \cdot 0$  para todo  $k$  entero.

## Factor o divisor propio

Se denomina **factor o divisor propio** de un número entero  $n$ , a otro número también entero que es divisor de  $n$ , pero diferente de  $n$ . El divisor  $n$  es denominado *impropio*.

Por ejemplo, los divisores propios de 28 son 1, 2, 4, 7 y 14. Cuando se toman en cuenta enteros negativos, un divisor propio es aquel cuyo valor absoluto es menor que el número dado. En este caso, los divisores propios serían -14, -7, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 7, 14.

Casos especiales: 1 y -1 son factores triviales de todos los enteros, y cada entero es divisor de 0. Los números divisibles por 2 son llamados pares y los que no lo son se llaman impares.

Si  $d$  es un divisor de  $a$  y el único divisor que admite  $d$  es 1 y él mismo, se llama divisor primo de  $a$ . De hecho es un número primo. El 1 es el único entero que tiene un solo divisor positivo.

# Propiedades

---

Sean  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , es decir  $a, b$  y  $c$  son números enteros. Se dan las propiedades básicas:

- Si  $a \neq 0$  entonces  $a \mid a$  (Propiedad reflexiva).
- si  $a \mid b$  y  $b \mid a$  entonces  $|a| = |b|$ . Son iguales o bien uno es el opuesto del otro.
- Cuando  $a \mid b$  y  $b \mid c$ , entonces  $a \mid c$  (Propiedad transitiva).
- Si  $a \mid b$  y  $b \neq 0$ , entonces  $|a| \leq |b|$ .
- $a \mid b$  y  $a \mid c$ , implica  $a \mid \beta b + \gamma c \quad \forall \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ . Divisor de la combinación lineal.
- $a \mid b$  y  $a \mid c$ , implica  $a \mid \theta b^k + \kappa c^j \quad \forall \theta, \kappa, k, j \in \mathbb{Z}$ . Divisor de la combinación lineal de potencias.<sup>4</sup>
- Si  $a \mid b$  y  $a \mid b \pm c$ , entonces  $a \mid c$ .
- De  $a \mid b$  y  $a \neq 0$ , se deduce  $\frac{b}{a} \mid b$ . Divisores conjugados.
- Para  $c \neq 0$ ,  $a \mid b$  si y solo si  $ac \mid bc$ .
- Si  $a \mid bc$  y  $\text{mcd}(a, b) = 1$ , entonces  $a \mid c$ .
- Cuando  $\text{mcd}(a, b) = 1$  y  $c$  cumple que  $a \mid c$  y  $b \mid c$ , entonces  $ab \mid c$ .
- $n \mid 0$  y  $1 \mid n$  para todo  $n$  entero ya que  $0 = 0 \cdot n$  y  $n = n \cdot 1$ .
- $1 \mid \text{mcd}(a, b) \mid a \mid \text{mcm}(a, b) \mid 0$ .
- $abcd$  es divisible entre  $n-1$  si y solo si  $a+b+c+d$  es múltiplo de  $(n-1)$ , siempre que  $abcd$  esté escrito en la base  $n$ , ( $n \geq 3$ ).<sup>5</sup>
- Si  $\text{mcd}(a, b) = 1$  no cabe  $a^k = b^h$  para cualesquiera  $h, k$  números enteros positivos; potencias de coprimos no son iguales en ningún caso.<sup>6</sup>
- En cualquier sistema de numeración, para chequear si  $n$  es múltiplo de  $h$ , divisor de la base, basta analizar la última cifra de  $n$ . Así, en la numeración decimal, para saber si  $n$  es múltiplo de 5, basta ver si la última cifra es 5 o 0. En la base 12, para saber si  $n$  es divisible entre 6, basta ver si termina en 6 o 0. En el sistema hexadecimal, para chequear si  $n$  es múltiplo de 4 basta ver que termina en uno de estos dígitos: 0, 4, 8.

## Número de divisores

Si la factorización en números primos de  $n$  viene dada por

$$n = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \cdots p_k^{\nu_k}$$

entonces el número de divisores positivos de  $n$  es

$$d(n) = (\nu_1 + 1)(\nu_2 + 1) \cdots (\nu_k + 1),$$

y cada uno de los divisores tiene la forma

$$p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \cdots p_k^{\mu_k}$$

donde  $0 \leq \mu_i \leq \nu_i$  para cada  $1 \leq i \leq k$ .<sup>7</sup>

# Criterios de divisibilidad

Los siguientes criterios permiten averiguar si un número es divisible entre otro de una forma sencilla, sin necesidad de realizar la división.<sup>[nota 1](#) [nota 2](#) [nota 3](#) [nota 4](#) [nota 5](#) [nota 6](#)</sup>

Número	Criterio	Ejemplo
<u>1</u>	Todos los números son divisibles por 1.	659.956.369, porque todos los números son divisibles por 1.
<u>2</u>	El número termina en una cifra par (0, 2, 4, 6, 8).	378: porque la última cifra (8) es par.
<u>3</u>	La suma de sus cifras es un múltiplo de 3.	480: porque $4+8+0=12$ es múltiplo de 3.
<u>4</u>	Sus últimos dos dígitos son 0 o un múltiplo de 4.	300 y 516 son divisibles entre 4 porque terminan en 00 y en 16, respectivamente, siendo este último un múltiplo de 4 ( $16=4 \cdot 4$ ).
<u>5</u>	La última cifra es 0 o 5.	485: porque termina en 5.
<u>6</u>	Es divisible entre 2 y 3.	912: porque es par y $9+1+2=12$ es múltiplo de 3
<u>7</u>	<p>Un número es divisible entre 7 cuando, al separar la última cifra de la derecha, multiplicarla por 2 y restarla de las cifras restantes la diferencia es igual a 0 o es un múltiplo de 7.</p> <p>Otro sistema: Si la suma de la multiplicación de los números por la serie 2,3,1,-2,-3,-1... da 0 o un múltiplo de 7.</p>	<p>34349: separamos el 9, y lo duplicamos (18), entonces <math>3434-18=3416</math>. Repetimos el proceso separando el 6 (<math>341 \cdot 6</math>) y duplicándolo (12), entonces <math>341-12=329</math>, y de nuevo, <math>32 \cdot 9</math>, <math>9 \cdot 2=18</math>, entonces <math>32-18=14</math>; por lo tanto, 34349 es divisible entre 7 porque 14 es múltiplo de 7.</p> <p>Ejemplo método 2: 34349:  <math>[(2 \cdot 3) + (3 \cdot 4) + (1 \cdot 3) - (2 \cdot 4) - (3 \cdot 9)] = 6 + 12 + 3 - 8 - 27 = -14.</math><sup>8</sup></p>
<u>8</u>	Para saber si un número es divisible entre 8 hay que comprobar que sus tres últimas cifras sean divisibles entre 8. Si sus tres últimas cifras son divisibles entre 8 entonces el número también es divisible entre 8.	Ejemplo: El número 571.328 es divisible por 8 ya que sus últimas tres cifras (328) son divisibles por 8 ( $32 = 8 \cdot 4$ y $8 = 8 \cdot 1$ ). Realizando la división comprobamos que $571.328 : 8 = 71.416$
<u>9</u>	Un número es divisible por 9 cuando al sumar todas sus cifras el resultado es múltiplo de 9.	<p>504: sumamos <math>5+0+4=9</math> y como 9 es múltiplo de 9 504 es divisible por 9</p> <p>5346: sumamos <math>5+3+4+6=18</math> y como 18 es múltiplo de 9, 5346 es divisible por 9.</p>
<u>10</u>	La última cifra es 0.	4680: porque termina en 0
<u>11</u>	<p>Sumando las cifras (del número) en posición impar por un lado y las de posición par por otro. Luego se resta el resultado de ambas sumas obtenidas. Si el resultado es cero o un múltiplo de 11, el número es divisible entre este.</p> <p>Si el número tiene solo dos cifras y estas son iguales será múltiplo de 11.</p>	<p>42702: <math>4+7+2=13</math> · <math>2+0=2</math> · <math>13-2=11 \rightarrow 42702</math> es múltiplo de 11.</p> <p>66: porque las dos cifras son iguales. Entonces 66 es múltiplo de 11.</p>

<b><u>12</u></b>	Es divisible entre 3 y 4	900: porque $9 = 3+3+3$ lo que lo hace divisible para 3 y 00 (sus últimas 2 cifras) son múltiplos de 4 porque $4 \times 0 = 00$
<b><u>13</u></b>	Un número es divisible entre 13 cuando, al separar la última cifra de la derecha, multiplicarla por 9 y restarla de las cifras restantes la diferencia es igual a 0 o es un múltiplo de 13	3822: separamos el último dos (382'2) y lo multiplicamos por 9, $2 \times 9 = 18$ , entonces $382 - 18 = 364$ . Repetimos el proceso separando el 4 (36'4) y multiplicándolo por 9, $4 \times 9 = 36$ , entonces $36 - 36 = 0$ ; por lo tanto, 3822 es divisible entre 13.
<b><u>14</u></b>	Un número es divisible entre 14 cuando es par y divisible entre 7	546: separamos el último seis (54'6) y lo doblamos, $6 \times 2 = 12$ , entonces $54 - 12 = 42$ . 42 es múltiplo de 7 y 546 es par; por lo tanto, 546 es divisible entre 14.
<b><u>15</u></b>	Un número es divisible entre 15 cuando es divisible entre 3 y 5	225: termina en 5 y la suma de sus cifras es múltiplo de 3; por lo tanto, 225 es divisible entre 15.
<b><u>17</u></b>	Un número es divisible entre 17 cuando, al separar la última cifra de la derecha, multiplicarla por 5 y restarla de las cifras restantes la diferencia es igual a 0 o es un múltiplo de 17	2142: porque 214'2, $2 \times 5 = 10$ , entonces $214 - 10 = 204$ , de nuevo, 20'4, $4 \times 5 = 20$ , entonces $20 - 20 = 0$ ; por lo tanto, 2142 es divisible entre 17.
<b><u>18</u></b>	Un número es divisible entre 18 si es par y divisible entre 9 (Si es par y además la suma de sus cifras es múltiplo de 9)	9702: Es par y la suma de sus cifras: $9+7+0+2=18$ que también es divisible entre 9. Y efectivamente, si hacemos la división entre 18, obtendremos que el resto es 0 y el cociente 539.
<b><u>19</u></b>	Un número es divisible entre 19 si al separar la cifra de las unidades, multiplicarla por 2 y sumar a las cifras restantes el resultado es múltiplo de 19.	3401: separamos el 1, lo doblamos (2) y sumamos $340+2=342$ , ahora separamos el 2, lo doblamos (4) y sumamos $34+4=38$ que es múltiplo de 19, luego 3401 también lo es.
<b><u>20</u></b>	Un número es divisible entre 20 si sus dos últimas cifras son ceros o múltiplos de 20. Cualquier número par que tenga uno o más ceros a la derecha, es múltiplo de 20.	57860: Sus 2 últimas cifras son 60 (Que es divisible entre 20), por lo tanto 57860 es divisible entre 20.
<b><u>23</u></b>	Un número es divisible entre 23 si al separar la cifra de las unidades, multiplicar por 7 y sumar las cifras restantes el resultado es múltiplo de 23.	253: separamos el 3, lo multiplicamos por 7 y sumamos $25+21=46$ , 46 es múltiplo de 23 así que es divisible entre 23.
<b><u>25</u></b>	Un número es divisible entre 25 si sus dos últimas cifras son 00, o en múltiplo de 25 (25,50,75,...)	650: Es múltiplo de 25 por lo cual es divisible. 400 también será divisible entre 25.
<b><u>27</u></b>	Un número es divisible entre 27, si al dividirlo entre 3 da un cociente exacto que es divisible de 9.	11745: Entre 3, cociente =3915; cuyas cifras suman 18, luego 11745 es divisible entre 27.
<b><u>29</u></b>	Un número es divisible entre 29 si al separar la cifra de las unidades, multiplicarla por 3 y	2262: separamos el último 2, lo triplicamos (6) y sumamos, $226+6=232$ , ahora separamos el

	sumar a las cifras restantes el resultado es múltiplo de 29.	último 2, lo triplicamos (6) y sumamos $23+6=29$ que es múltiplo de 29, luego 2262 también lo es.
<b><u>31</u></b>	Un número es divisible entre 31 si al separar la cifra de las unidades, multiplicarla por 3 y restar a las cifras restantes el resultado es múltiplo de 31.	8618: separamos el 8, lo triplicamos (24) y restamos $861-24=837$ , ahora separamos el 7, lo triplicamos (21) y restamos, $83-21=62$ que es múltiplo de 31, luego 8618 también lo es.
<b><u>50</u></b>	Un número es múltiplo de 50 cuando sus dos últimas cifras son 00 o 50.	123450: sería divisible entre 50 porque termina en 50.
<b><u>100</u></b>	Un número será divisible entre 100 si dicho número termina en 00.	1000: Este número será divisible entre cien ya que sus dos últimas cifras son 00, independientemente de las demás.
<b><u>125</u></b>	Un número será divisible entre 125 si termina en 000, 125, 250, 375, 500, 625, 750 o 875.	3000: Sería divisible entre 125 ya que sus tres últimas cifras son 000. 4250: Este número también sería divisible entre 125 ya que termina en 250.

## Observación

Todos los criterios señalados funcionan si el número está escrito en el sistema de numeración decimal. En otra base no siempre ocurre así. Pues  $102_7$ , escrito en base 7, termina en cifra par, pero no es divisible entre 2. En este caso se suman las cifras  $1+2=3$ ;  $3=1$  (Mód 2), luego  $102_7$  es impar (en decimal es  $7^2+2=51$ ).

## Otros contextos

---

La divisibilidad es posible tratar dentro de las propiedades aritméticas de los

- Enteros gaussianos<sup>9</sup>
- Enteros algebraicos<sup>10</sup>
- Polinomios en una indeterminada con coeficientes enteros
- Números enteros pares
- Números de Fibonacci
- Anillos cuadráticos<sup>11</sup>

## Véase también

---

- Tabla de divisores
- Máximo común divisor
- Conmensurabilidad
- Divisor unitario

## Notas

---

1. Existen muchas versiones de los criterios de divisibilidad. Así por ejemplo, para el 13 resulta equivalente el criterio: al separar la última cifra de la derecha, multiplicarla por 4 y sumarla a las cifras restantes la suma es igual a 0 o es un múltiplo de 13.
2. Resulta curioso que el criterio de divisibilidad por 7 sirva también como criterio de divisibilidad por 3, aunque evidentemente el criterio tradicional resulta más sencillo y este no se utiliza: al separar la última cifra de la derecha, multiplicarla por 2 y restarla de las cifras restantes la diferencia es igual a 0 o es un múltiplo de 3.
3. Aunque existen criterios similares para cualquier número primo, con frecuencia resulta más sencillo dividir que aplicar un criterio complicado (como el del 13). Sin embargo existe un criterio general que funciona siempre y que en muchos casos es suficientemente práctico: restar el número primo (o múltiplos de este) a las cifras de la izquierda sucesivamente hasta obtener cero o ese número primo. Así el ejemplo del 13 se podría comprobar con el proceso siguiente (usamos el  $39 = 3 \cdot 13$  para abreviar pasos): 3822 (restamos 13 dos veces a la izquierda)  $\rightarrow 2522 \rightarrow 1222$  (restamos 39 tres veces de las tres cifras de la izquierda)  $\rightarrow 832 \rightarrow 442 \rightarrow 52$  y al restar de nuevo 39 obtenemos  $52 - 39 = 13$ .
4. El método no tiene que ceñirse solo al proceso de quitar las unidades. Pueden quitarse unidades y decenas. Así por ejemplo: 201 es múltiplo de 67. Un criterio para el 67 sería: quitamos el número formado por las decenas y unidades y se lo restamos 2 veces a las cifras que quedan, si el resultado es múltiplo de 67, el número anterior también lo será. Ejemplo: 66129, hacemos  $661 - 2 \cdot 29 = 603$ , Ahora  $6 - 2 \cdot 3 = 0$ , luego 66129 es múltiplo de 67. Una prueba de esto es la siguiente:  $(N-d)/100 - 2d = (N-d-200d)/100 = (N - 201d)/100 = k$ . Si  $k$  es múltiplo de 67,  $N$  también lo será puesto que  $N = 100k + 201d$ .
5. Para saber si un número de 3 cifras es múltiplo de 8. Hay que tener en cuenta lo siguiente: Si la cifra de las centenas es par y las otras 2 es un múltiplo de 8 ( $288 \rightarrow 2$  es cifra par, y 88 múltiplo de 8) o si la cifra de las centenas es impar y las dos últimas son el resultado de la diferencia o suma de un múltiplo de 8 con 4 ( $168 \rightarrow 1$  es cifra impar y  $68 + 4 = 72$ ; 72 es múltiplo de 8).
6. Todo número de tres cifras, en el cual las tres cifras son iguales, es múltiplo de 3 y de 37; de hecho es la multiplicación de 37 por la suma de sus cifras. Ejemplo: 333 es múltiplo de 37, porque  $333 = 37 \cdot 9$  ( $3 + 3 + 3 = 9$ ).

## Referencias

---

1. G. M. Bruño: Aritmética razonada
2. Todo número entero tiene como divisores:  $\pm n, \pm 1$
3. N. N. Vorobiov. *Criterios de divisibilidad*

4. Adaptación de Aritmética elemental de Renzo Gentile
5. Colectivo de autores *Aritmética* Lumbreras Editorial Lima/ 2017
6. Goñi. *Aritmética*. Ediciones Ingeniería, Lima/ 1995
7. Pettofrezzo- Byrkit. Elements of Number Theory. Prentice Hall Internacional Inc (1970)
8. Rosanes, Oscar (2019). «Sistema descubierto por el matemático catalán Oscar Rosanes». *Nuevo sistema de divisibilidad del 7*.
9. Hefez: Álgebra I, ediciones Imca, Lima
10. Niven Zuckerman: Introducción a la teoría de números
11. Fraleigh: Álgebra abstracta

## Bibliografía

- Aritmética elemental de Enzo R. Gentile (1985) OEA.
- Teoría de los números de Burton W. Jones.
- Fundamentos de la teoría de números de Iván Vinogradov
- Introducción a la teoría de los números de Niven y Zuckermann
- Aritmética [I] de L.Galdós (2002), Cultural S.A. Madrid.

---

Obtenido de «<https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Divisibilidad&oldid=165239368>»