Manuel Nathan Chap.11

Extrait du programme

Partie : Mouvement et interactions.
Chapitre : Décrire un mouvement.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Vecteurs position, vitesse et accélération d'un point. Coordonnées des vecteurs vitesse et accélération dans le repère de Frenet pour un mouvement circulaire. Mouvement rectiligne uniformément accéléré. Mouvement circulaire uniforme.	Définir le vecteur vitesse comme la dérivée du vecteur position par rapport au temps et le vecteur accélération comme la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps. Établir les coordonnées cartésiennes des vecteurs vitesse et accélération à partir des coordonnées du vecteur position et/ou du vecteur vitesse. Citer et exploiter les expressions des coordonnées des vecteurs vitesse et accélération dans le repère de Frenet, dans le cas d'un mouvement circulaire. Caractériser le vecteur accélération pour les mouvements suivants : rectiligne, rectiligne uniforme, rectiligne uniformément accéléré, circulaire, circulaire uniforme. *Réaliser et/ou exploiter une vidéo ou une chronophotographie pour déterminer les coordonnées du vecteur position en fonction du temps et en déduire les coordonnées approchées ou les représentations des vecteurs vitesse et accélération.* **Capacité numérique** : Représenter, à l'aide d'un langage de programmation, des vecteurs accélération d'un point lors d'un mouvement. **Capacité mathématique** : Dériver une fonction.

1 Mouvement rectiligne (mouvement à 1 dimension)

Pour un mouvement rectiligne (la direction est connue, 2 sens sont possibles), la position d'un point M est simplement repérée par une coordonnée $x(t)$, définie dans un repère attaché à la droite du mouvement, avec un sens positif choisi arbitrairement à partir d'une origine O.
Remarque : x peut donc être positif ou négatif.

La vitesse moyenne $\overline{v}$ est le rapport de changement de positions sur la durée entre les 2 positions : $\overline{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$.

Remarque : le signe de $\overline{v}$ renseigne sur le sens de la trajectoire.

La vitesse instantanée $v(t)$ correspond à la vitesse moyenne sur une durée infiniment courte. C'est donc la dérivée de la position par rapport au temps :

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}$$

Remarque : la dérivée est bien la grandeur qui qualifie les variations d'une fonction.

De la même manière, **l'accélération qualifie les variations temporelles de la vitesse**. On a donc :

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

2 Vecteurs position, vitesse et accélération d'un point (mouvement à 2 ou 3 dimensions)

2.1 Vecteur position

La position est définie par un **vecteur position** $\overrightarrow{OM}$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, avec deux composantes $x(t)$ et $y(t)$.

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

Les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ sont les projections du vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ sur les axes du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Ce sont des valeurs algébriques qui peuvent être négatives.

2.2 Vecteur vitesse

Le **vecteur vitesse** $\vec{v}(t)$ est la dérivée du vecteur position :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j} \quad \text{et donc} \quad v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad \text{et} \quad v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

Ce vecteur est tangent à la trajectoire dirigé dans le sens du mouvement.

Les coordonnées $v_x(t)$ et $v_y(t)$ sont les projections du vecteur $\vec{v}(t)$ sur les axes du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Ce sont des valeurs algébriques qui peuvent être négatives.

Dans le langage commun, la vitesse représente la norme du vecteur vitesse (toujours positive) :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

2.3 Vecteur accélération

Le **vecteur accélération** $\vec{a}(t)$ est la dérivée du vecteur vitesse :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} \quad \text{et donc} \quad a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} \quad \text{et} \quad a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt}$$

Les coordonnées $a_x(t)$ et $a_y(t)$ sont les projections du vecteur $\vec{a}(t)$ sur les axes du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Ce sont des valeurs algébriques qui peuvent être négatives.

Ce vecteur est dirigé vers la concavité de la trajectoire.

L'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{v}$ est inférieur à 90° si la norme de la vitesse augmente, supérieur à 90° si v diminue, et $\vec{a} \perp \vec{v}$ si v est constante (mouvement uniforme).

3 Quelques mouvements particuliers

3.1 Mouvement rectiligne

Définition : un mouvement **rectiligne** est un mouvement dont la **trajectoire est une droite**.

Les vecteurs position, vitesse et accélération sont tous colinéaires, mais pas forcément de même sens.

Le vecteur vitesse est dans le sens du mouvement.

Si la norme de la vitesse est en train d'augmenter (le système accélère en langage commun), alors les vecteurs vitesse et accélération sont de même sens.
Si au contraire la norme de la vitesse est en train de diminuer (le système freine en langage commun), alors les vecteurs vitesse et accélération sont de sens opposés.

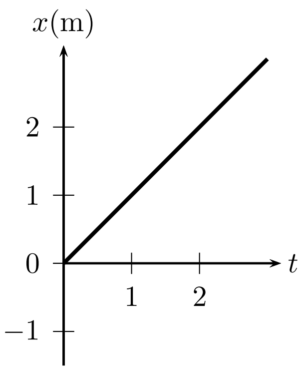
Exemple : une voiture roule sur un route en ligne droite et freine.
On choisit un repère $(O, \vec{i})$ attaché à la direction de la route orienté dans le sens du mouvement, avec l'origine au début du mouvement ($x(t=0)=0$).
On peut alors dire :
- $x(t)$ est une fonction positive croissante.
- $v(t)$ est une fonction positive décroissante.
- $a(t)$ est une fonction négative.

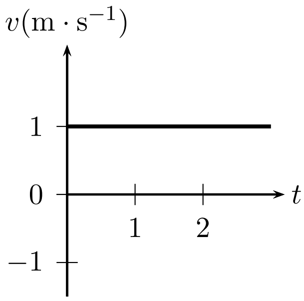
3.2 Mouvement rectiligne uniforme

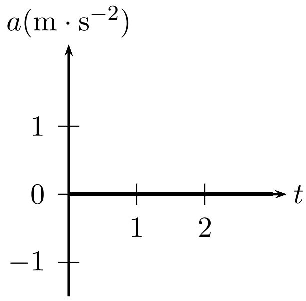
Définition : un mouvement **uniforme** est un mouvement dont la **norme de la vitesse est constante**.

Pour un mouvement rectiligne uniforme, le **vecteur vitesse** est donc un **vecteur constant**.
Le **vecteur accélération** est donc le **vecteur nul** (puisque c'est la dérivée d'un vecteur constant).

Exemple : une voiture roule sur un route en ligne droite à vitesse constante.
On choisit un repère $(O, \vec{i})$ attaché à la direction de la route orienté dans le sens du mouvement, avec l'origine au début du mouvement.
On peut alors dire :
- $x(t)$ est une fonction linéaire croissante.
- $v(t)$ est une fonction constante.
- $a(t)$ est une fonction nulle.
- $x(t)$ est une fonction affine (linéaire si $x_{(t=0)}=0$).
- $v(t)$ est une fonction constante (>0 ou <0 si x est croissant ou décroissant).
- $a(t)$ est toujours nulle.







Cela correspond aux situations étudiées dans « les petites classes » où on peut écrire $d = v \times t$.
ATTENTION : c'est un cas bien particulier ! Qu'on ne peut pas écrire de façon générale.

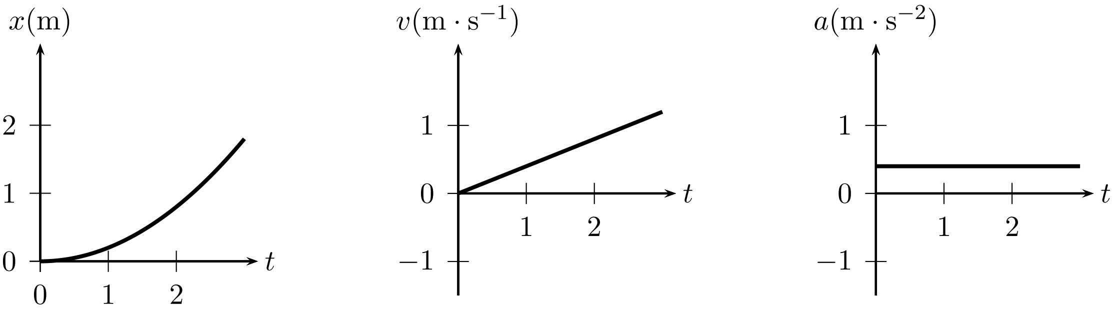
3.3 Mouvement rectiligne uniformément varié

Définition : un mouvement **uniformément varié** est un mouvement dont la **vecteur accélération est un vecteur constant**.

Pour un mouvement rectiligne uniformément varié, la **coordonnée du vecteur vitesse varie régulièrement** (croissante ou décroissante), et la **coordonnée du vecteur position varie de façon parabolique** .

Exemple 1 : une voiture initialement à l'arrêt démarre en accélérant de façon constante sur un route en ligne droite.
On choisit un repère $(O, \vec{i})$ attaché à la direction de la route orienté dans le sens du mouvement, avec l'origine au début du mouvement.
On peut alors dire :

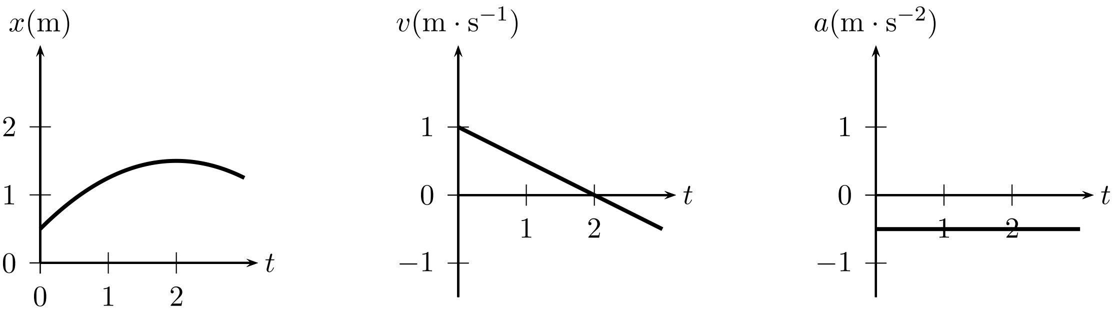
- $x(t)$ est une fonction parabolique.
- $v(t)$ est une fonction linéaire croissante.
- $a(t)$ est une fonction constante positive.



Remarque : on note qu'ici on ne peut pas écrire de relation du genre $d = v \times t$!!!

Exemple 2 : une voiture avec une vitesse initiale freine de façon constante sur un route en ligne droite.
On choisit un repère $(O, \vec{i})$ attaché à la direction de la route orienté dans le sens du mouvement, avec l'origine telle que $x(t = 0) > 0$.
On peut alors dire :

- $x(t)$ est une fonction parabolique.
- $v(t)$ est une fonction affine décroissante.
- $a(t)$ est une fonction constante négative.



3.4 Mouvement circulaire

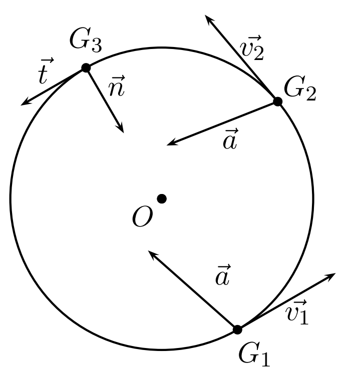
Pour simplifier l'étude des mouvements circulaires, on définit un **repère mobile attaché au système**, appelé le **repère de Frenet** $(G, (\vec{t}, \vec{n}))$. L'origine G de ce repère est le point d'étude et les 2 vecteurs unitaires $\vec{t}$ et $\vec{n}$ sont respectivement tangent à la trajectoire et normal à la trajectoire (vers le centre du cercle).

Dans le repère de Frenet, le vecteur vitesse (tangent à la trajectoire) a une composante nulle suivant le vecteur $\vec{n}$, et sa composante suivant le vecteur $\vec{t}$ est la norme de la vitesse :

$$\boldsymbol{\vec{v}(t) = v\ \vec{t}}$$

Dans le repère de Frenet, le vecteur accélération (dans la concavité du cercle), a des composantes $\boldsymbol{a_t}$ et $\boldsymbol{a_n}$ qui satisfont la relation suivante :

$$\boldsymbol{\vec{a} = a_t\ \vec{t} + a_n\ \vec{n} = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n}} \qquad (\boldsymbol{R} \text{ est le rayon du cercle})$$



En G_1 la vitesse diminue.
En G_2, la vitesse augmente.

Le repère de Frenet est représenté en G_3 pour ne pas « gêner »

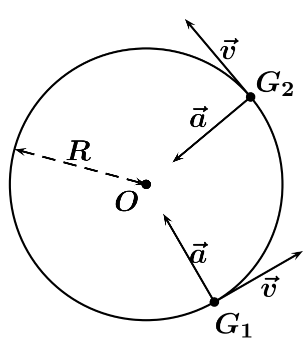
3.5 Mouvement circulaire uniforme

Le vecteur vitesse reste tangent au cercle et sa norme $v(t)$ est constante.

La dérivée de la norme v est donc nulle et on obtient $\boldsymbol{a_t = 0}$.

Le vecteur accélération est donc radial, centripète.

$$\boldsymbol{\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{n}}$$



4 Calculs des coordonnées des vecteurs vitesse ou accélération à partir des coordonnées du vecteur position

4.1 Cas d'un mouvement rectiligne

Exo : on donne la coordonnée du vecteur position : $x(t) = 5t^2$.

1. Calculer $v(t)$ et $a(t)$ (à partir de $v(t)$ ou de $x(t)$) .
2. Imaginer une situation physique correspondant à ce mouvement.

1. $v(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = \dfrac{d(5t^2)}{dt} = 10t$.
   $a(t) = \dfrac{dv(t)}{dt} = \dfrac{d(10t)}{dt} = 10$.
   Remarque : On a aussi $a(t) = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$, dérivée seconde.
2. Ce mouvement peut être celui d'un mobile lancé à vitesse constante sur un rail, avec l'origine de l'axe au départ du mouvement, orienté dans le sens du mouvement.

4.2 Cas d'un mouvement plan

Exo : on donne les coordonnées du vecteur position :
— $x(t) = 3t$,
— $y(t) = -5t^2 + 8t + 3$

1. Calculer les coordonnées du vecteurs vitesse.
2. Calculer la valeur de la vitesse au cours du temps.
3. Calculer les coordonnées du vecteur accélération.
4. Calculer la valeur de l'accélération au cours du temps.
5. Le mouvement est-il uniforme ? uniformément varié ?

1. $v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = \dfrac{d(3t)}{dt} = 3$.
   $v_y(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} = \dfrac{d(-5t^2 + 8t + 3)}{dt} = -10t + 8$.
2. $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{9 + (-10t + 8)^2} = \sqrt{100t^2 - 160t + 73}$.
3. $a_x(t) = \dfrac{dv_x(t)}{dt} = \dfrac{d(3)}{dt} = 0$.
   $a_y(t) = \dfrac{dv_y(t)}{dt} = \dfrac{d(-10t + 8)}{dt} = -10$.
4. $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0 + (-10)^2} = 10$.
5. La vitesse varie, mais le vecteur accélération est constant donc le mouvement est uniformément accéléré.