

Chapitre 5 : Sommes de fractions

1. Simplifier une fraction

Définition : Égalité de deux fractions

Deux fractions sont égales si leurs numérateurs et leurs dénominateurs sont proportionnels. Autrement dit, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ s'il existe un même nombre k tel que $k \times a = b$ et $k \times c = d$

Exemple

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{8} \text{ car } 2 \times 3 = 6 \text{ et } 2 \times 4 = 8$$

Propriété

Pour toute fraction $\frac{a}{b}$ et pour tout nombre c non nul, on a $\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$

Exemple

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{15}{20}$$

Définition : Simplification de fractions

Simplifier une fraction, c'est chercher une fraction qui lui est égale mais avec un dénominateur plus petit.

Exemples

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{4}{8} = \frac{2 \times 2}{2 \times 4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Remarque

Pour simplifier une fraction, on utilise la propriété précédente, et on peut s'aider des critères de divisibilité

Définition : Critères de divisibilité

- Un nombre est divisible par 2 s'il finit par 0, 2, 4, 6 ou 8
- Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3
- Un nombre est divisible par 5 s'il finit par 0 ou 5
- Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9
- Un nombre est divisible par 10 s'il finit par 0

Exemples de divisibilité

- 15 678 est divisible par 2 car son nombre des unités est un 8
- 15 789 est divisible par 3 car $1 + 5 + 7 + 8 + 9 = 30$ or, 30 est un multiple de 3
- 89 115 est divisible par 5 car son nombre des unités est 5
- 63 945 est divisible par 9 car $6 + 3 + 9 + 4 + 5 = 27$, or 27 est un multiple de 9
- 12 450 est divisible par 10 car son nombre des unités est un 0

Exemples de simplification

$\frac{25}{15}$ peut être simplifié par 5 car son numérateur et son dénominateur sont des multiples de 5

$$\frac{25}{15} = \frac{5 \times 5}{3 \times 5} = \frac{5}{3}$$

$\frac{33}{12}$ est simplifiable par 3 :

$$\frac{33}{12} = \frac{3 \times 11}{3 \times 4} = \frac{11}{4}$$

Définition : réduction à un dénominateur commun

Réduire deux fractions au même dénominateur, c'est déterminer des fractions égales à chacune de ces fractions ayant le même dénominateur

Exemple 1

Réduire au même dénominateur $\frac{9}{5}$ et $\frac{2}{15}$

Les dénominateurs 5 et 15 sont multiples l'un de l'autre donc le plus petit multiple commun à 5 et 15 est 15

On a donc $\frac{9}{5} = \frac{9 \times 3}{5 \times 3} = \frac{27}{15}$ et $\frac{2}{15}$

Exemple 2

Réduire au même dénominateur $\frac{2}{7}$ et $\frac{3}{8}$

$$\frac{2}{7} = \frac{2 \times 8}{7 \times 8} = \frac{16}{56} \text{ et } \frac{3}{8} = \frac{3 \times 7}{8 \times 7} = \frac{21}{56}$$

Le plus petit multiple commun à 7 et 8 est 56

Exemple 3

Réduire au même dénominateur $\frac{2}{9}$ et $\frac{5}{12}$

On cherche le plus petit multiple commun à 9 et 12

Multiples de 9 : 9, 18, 27, **36**, 45...

Multiples de 12 : 12, 24, **36**, 48...

$$\frac{2}{9} = \frac{2 \times 4}{9 \times 4} = \frac{8}{36} \text{ et } \frac{5}{12} = \frac{5 \times 3}{12 \times 3} = \frac{15}{36}$$

2. Comparaisons de fractions

Définition

Si deux fractions ont le même dénominateur, la plus petite est celle dont le numérateur est le plus petit.

Exemples

$$\frac{3}{4} < \frac{6}{4} \text{ et } \frac{5}{7} > \frac{3}{7}$$

Méthode

Pour comparer deux fractions qui n'ont pas le même dénominateur, il faut d'abord les réduire au même dénominateur.

Exemple

Comparer les fractions $\frac{3}{7}$ et $\frac{16}{21}$

$$\text{On a } \frac{3}{7} = \frac{3 \times 3}{7 \times 3} = \frac{9}{21}$$

$$\text{Or } \frac{9}{21} < \frac{16}{21} \text{ donc } \frac{3}{7} < \frac{16}{21}$$

3. Somme de fractions

Propriété

Pour additionner deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{b}$, il suffit d'ajouter leurs numérateurs. On a donc :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$$

Exemple

$$\frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4 + 3}{5} = \frac{7}{5}$$

Remarques

- On ne peut donc ajouter que des fractions qui ont le même dénominateur. Dans le cas contraire, on réduit d'abord les fractions au même dénominateur.
- Soustraire, c'est ajouter l'opposé. Pour soustraire deux fractions, on utilise donc la même formule.

Exemples

- $\frac{10}{15} - \frac{4}{15} = \frac{10-4}{15} = \frac{6}{15} = \frac{3 \times 2}{3 \times 5} = \frac{2}{5}$
- $\frac{4}{6} + \frac{3}{30} = \frac{4 \times 5}{6 \times 5} + \frac{3}{30} = \frac{20}{30} + \frac{3}{30} = \frac{23}{30}$
- $\frac{19}{64} - \frac{2}{8} = \frac{19}{64} - \frac{2 \times 8}{8 \times 8} = \frac{19}{64} - \frac{16}{64} = \frac{3}{64}$