Universidade Estadual de Campinas

MT-624: Biomatemática I

Prova 02

Professor:
Wilson Castro Ferreira Jr
IMECC-UNICAMP

Estudante:
Paulo Henrique Ribeiro do Nascimento
CETEC-UFRB

4 de janeiro de 2021

Sumário

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

PROVA 02: MS680-MT624- II Sem 2020

POSTADA: 22 de Dezembro de 2020 (Terça-feira)

RECEBIMENTO: 03 de Janeiro de 2021 (Domingo)

ATENÇÃO: ESCOLHA (apenas) 06 DENTRE AS 12 1 QUESTÕES DA LISTA ABAIXO.

1 - As Questões devem ser encaradas como oportunidades para demonstrar conhecimento não como perguntas.

Precisão e Concisão serão qualidades avaliadas.

2 - A Redação de cada Prova deve apresentar a forma de um depoimento pessoal distinto. Caso ocorram, todas as cópias envolvidas serão invalidadas.

3 - Cada Questão resolvida deve ser precedida de seu respectivo Enunciado Original completo.

4 - A Resolução deve ser digitalizada em um único documento pdf (Manuscritos NÃO serão aceitos!)

5 - O documento pdf da Resolução deve ser enviado no Anexo de uma mensagem com título "PROVA 02" para o endereço eletrônico: wilson@unicamp.br

6 - Antes das 24h do dia 03 de janeiro. (Sugestão: Não deixe para a última hora e evite ser responsabilizado por acidentes)

Questão 01

A Psicologia da Matematização: Ockham (séc. 13) & Kanizsa (séc. 20), Galileo (séc. 17) & Newton (séc. 17-18)

1a - Descreva o "Efeito de Completamento (Interpolação) Visual" ("Efeito Kanizsa") em poucas linhas e exemplifique-o com o famoso triângulo de Kanizsa e especialmente com a visualização de formas sugeridas por uma sequência de pontos.

1b - Argumente com base no "Efeito Kanizsa" sobre a motivação cognitiva da representação contínua para dinâmicas de grandes populações. Como se explica evolutivamente a preferência cognitiva da espécie humana por registrar informações discretas em termos (reduzidos) como “formas geométricas”?

1c - Descreva a Metodologia funcional de Galileo e justifique-a em termos do que foi discutido em 1a-b.

1d - Descreva o grande aperfeiçoamento da Metodologia de Galileo realizada por Newton. (Sugestão: Biblioteca de funções)

1e - Descreva o “Princípio de Parcimônia de Ockham” e discuta a sua conexão com a cognição humana, especialmente com o item 1b.

1f - Exemplifique os itens 1b-c com dados de mortalidade da COVID19 em 2020 para uma grande comunidade durante aproximadamente 1 ano.

Questão 02

Escala Logarítmica na Aproximação Assintótica: Princípio Sensorial (“Lei”) de Weber-Fechner (séc. 19)

2a - Descreva o “Princípio Sensorial (“Lei”) de Weber-Fechner” para a percepção visual, auditiva, táctil, olfativa e de cardinalidade.

2b - Argumente com base no “Princípio de Weber-Fechner” sobre a conveniência cognitiva da escala logarítmica para variáveis com “grandes” valores.

2c - Aplique a escala logarítmica para o registro numérico da população do exemplo citado no item 1f acima e caracterize os períodos de tempo em que o comportamento é linear (Malthusiano).

2c - Mostre que, para duas sequencias de números positivos, $\{a_k \to \infty\}$ e $\{b_k \to \infty\}$, então valem as seguintes implicações para a aproximação assintótica em escala logarítmica

$$\log a_k - \log b_k \to 0 \Leftrightarrow \log \frac{a_k}{b_k} \to 0 \Leftrightarrow \frac{a_k}{b_k} \to 1$$

2d - Mostre que a aproximação assintótica na escala logarítmica não implica necessariamente na aproximação assintótica em escala normal (isto é, $a_k - b_k \to 0$, mas vale a implicação inversa. (Sugestão: Analise a igualdade $a_k - b_k a_k \left(1 - \frac{a_k}{b_k}\right)$ e observe que $a_k - b_k \to 0 \Leftrightarrow \frac{a_k}{b_k}$ se aproxima de 1 com um erro de $o\left(\frac{1}{a_k}\right)$, isto é, de “ordem menor do que $\frac{1}{a_k}$”. Assim, para sequencias que convergem para

∞ é mais interessante analisar a aproximação assintótica logarítmica , pois ela é mais abrangente e tem um fundo cognitivo. Além disso, para dois "trens em alta velocidade uma aproximação na escala simples é extremamente perigosa"!)

Questão 03

Linearização logarítmica Assintótica

Definições:

1 - Diz-se que um Modelo Populacional, $P : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, é Malthusiano se para algum A e γ, se tem $\dfrac{P(k)}{Ae^{\gamma k}} = 1$, para todo k, ou, equivalentemente, se $P(k) = Ae^{\gamma k}$.

2 - Diz-se que um Modelo Populacional é Assintoticamente Malthusiano se para algum A e γ, se tem $\dfrac{P(k)}{Ae^{\gamma k}} \to 1$, para $k \to \infty$, ou, equivalentemente, $P(k) = Ae^{\gamma k}(1 + \epsilon(k)) \to 1$, para $\epsilon(k) \to 0$.

3 - Diz-se que uma função $P : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, é Assintoticamente Linearizada na escala logarítmica se $\lim\limits_{k\to\infty} \{\log |P(k)| - (\alpha + \gamma k)\} = 0$, para algum α, γ.

4 - Diz-se que uma Relação funcional $V = f(X)$ pode ser Linearizada (exatamente) se existirem funções inversíveis $v = \psi(V)$ e $x = \varphi(X)$ de tal forma que $v = ax + b$, em algum domínio.

5 – Diz-se que uma Relação funcional $v = f(x)$ pode ser Linearizada assintótica e localmente nas vizinhanças de $x = 0$ se $v = a + bx + o(x)$ para algum a, b. (Obs: Segundo Leibniz, uma função $h(x)$ é dita um infinitésimo de ordem menor do que x, e escreve-se, $o(x)$ se for possível representá-la na forma $h(x) = x\epsilon(x)$, onde $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

3a - Considere uma Tabela de dados demográficos representada pela função $P : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, cuja população quando medida na escala logarítmica na forma $p(k) = \log(P(k))$, exibe um gráfico aproximadamente linear (isto é, $p(k) = (\alpha+\beta k)+\epsilon$, com $\epsilon \approx 0$, para alguma faixa de valores de k). Mostre como esta Dinâmica Populacional pode ser considerada aproximadamente Malthusiana nesta faixa de valores de k.

3b - Descreva o Método Numérico de Gauss ("mínimos quadrados") comumente utilizado para determinar a reta que "melhor aproxima" uma Tabela de dados e descreva como este Método pode ser utilizado para a formulação de um Modelo Malthusiano.

3c - Considere uma População medida na escala logarítmica $\log P(k) = p(k)$. Mostre que uma aproximação linear assintótica na escala logarítmica de uma população (isto é, $\log P(k) - (\gamma k + \beta) \to 0$, para $k \to \infty$) não implica em um Modelo Malthusiano, mas apenas um Modelo Assintoticamente Malthusiano. (Sugestão: veja o próximo exercício).

3d - Mostre quando uma população $P(k)$ descrita pelo Modelo de Fibonacci é Malthusiana e quando ela é apenas assintoticamente Malthusiana. (Sugestão: Analise as possíveis soluções a depender das condições iniciais).

3e - Considere uma função "racional bilinear" $V = \dfrac{AX}{CX + D}$. Mostre que é possível "linearizar exatamente" a relação entre as variáveis V e X tomando transformações $v = \dfrac{1}{V}$ e $x = \dfrac{1}{X}$, de tal forma que entre as "novas variáveis" resulte uma relação funcional de primeiro grau ($v = a + bx$ ("linear").

3f - Mostre que qualquer função diferenciável nas vizinhanças da origem pode ser localmente linearizada e vice-versa.

Solução:

3a

Considere a função $p(k) = \log(P(k))$, onde $P(k)$ é, também, uma função que associa dados de uma tabela demográfica $k \mapsto P(k)$.

Como $p(k) = \log(P(k)) \Rightarrow P(k) = e^{p(k)}$.

Tomando $p(k) = \alpha + \gamma k + \epsilon$, uma função cujo gráfico é aproximadamente uma reta, temos:

$$P(k) = e^{p(k)} = e^{\alpha + \gamma k + \epsilon}$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, temos:

$$P(k) \approx e^{\alpha + \gamma k} = e^{\alpha} \cdot e^{\gamma k} = A \cdot e^{\gamma k}$$

3b

Seja $d_k = f(x_k) - g(x_k)$ o desvio existente entre as imagens de f e g em x_k.

O método dos mínimos quadrados consiste em escolher os coeficientes α_j, $j = 1, \ldots, m$ de tal forma que a soma dos quadrados dos desvios seja mínima, isto é:

$$\sum_{k=1}^{n} d_k^2 = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - g(x_k)]^2 \text{ é mínimo.}$$

Assim, os coeficientes α_j, que fazem com que $g(x)$ se aproxime ao máximo de $f(x)$, são os que minimizam a função:

$$F(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - g(x_k)]^2 = \sum_{k=1}^{n} \left[f(x_k) - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j g_j(x_k) \right]^2 .$$

Para isto, é necessário que as m derivadas parciais de F de primeira ordem se anulem, ou seja:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = 0, j = 1, \ldots, m,$$

ou seja,

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\alpha_1, \ldots, \alpha_j) = 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \left[f(x_k) - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j g_j(x_k) \right] \cdot [-g_j(x_k)] = 0, \ j = 1, 2, \ldots, m.$$

Considere, agora,

$$N^t = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & \ldots & n_N \end{bmatrix}^t \text{ (Pontos de entrada) e}$$
$$T^t = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \ldots & t_N \end{bmatrix}^t \text{ (Pontos de saída)}$$

Queremos obter um $Z \sim T$ e, se Z é linear, temos:

$$Z = \theta_1 N + \theta_2 = \begin{bmatrix} n_1\theta_1 + \theta_2 \\ n_2\theta_1 + \theta_2 \\ \vdots \\ n_N\theta_1 + \theta_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} n_1 & 1 \\ n_2 & 1 \\ \vdots & \\ n_N & 1 \end{bmatrix}}_{\overline{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}}_{\Theta}$$

Vamos minimizar a função

$$E(\Theta) = (T - Z)^2 = (T - \overline{N}\Theta)^2$$

e, para tal, determinemos:

$$\frac{\partial E}{\partial \Theta} = \frac{\partial E}{\partial Z}\,\frac{\partial Z}{\partial \Theta}.$$

Mas

$$\frac{\partial E}{\partial Z} = \frac{\partial}{\partial Z}(T-Z)^2 = -2\underbrace{(T-Z)}_{N\times 1}$$

e

$$\frac{\partial E}{\partial \Theta} = \frac{\partial}{\partial \Theta}(\overline{N}\Theta) = \underbrace{\overline{N}^t}_{2\times N}.$$

Segue que

$$0 = \frac{\partial E}{\partial \Theta} = -2\overline{N}^t(T-Z) = -2\overline{N}^t(T-\overline{N}\Theta),$$

ou seja,

$$\overline{N}^t T = \overline{N}^t\overline{N}\Theta$$

implicando em

$$\Theta = (\overline{N}^t\ \overline{N})^{-1}\overline{N}^t T.$$

Os valores de θ_1 e θ_2, após algumas contas, são dados por:

$$\theta_1 = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{N} n_k \sum_{k=1}^{N} t_k - N\sum_{k=1}^{N} n_k\ t_k}{\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{N} n_k\right)^2 - N\sum_{k=1}^{N} n_k^2}$$

$$\theta_2 = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{N} t_k - \theta_1\sum_{k=1}^{N} n_k}{N}$$

Assim, ao tomarmos $\log(Z) = \theta_1 N + \theta_2 \Rightarrow Z = A\exp(\theta_1 N)$

3c

3d

3e

Seja

$$V = \frac{AX}{CX+D}.$$

Efetuando as mudanças de variáveis $V = \dfrac{1}{v}$ e $X = \dfrac{1}{x}$, obtemos:

$$\frac{1}{v} = \frac{A\dfrac{1}{x}}{C\dfrac{1}{x} + D} \Rightarrow v = \frac{D}{A}x + \frac{C}{A}, A \neq 0 \Rightarrow v = ax + b.$$

3f

Se f é diferenciável, pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in V_0 = (-\delta, \delta)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x}, x \in V_0.$$

Logo,

$$f(x) = f'(c)x + f(0).$$

Por outro lado, se g é uma reta secante ao gráfico de f, com pontos de interseção $A(-\delta, f(-\delta))$ e $B(\delta, f(\delta))$, então:

$$g(x) = m(x + \delta) + f(-\delta).$$

Como f é diferenciável, portanto, contínua, e $0 \in (-\delta, \delta)$, temos:

$$\lim_{\delta \to 0} |(0, f(0)) - (0, g(0))| = \lim_{\delta \to 0} f(0) - g(0) = \lim_{\delta \to 0} f(0) - (-m\delta - f(-\delta)) = 0.$$

Como queríamos demonstrar.

Questão 04

Tempo Médio (Aritmético) de Sobrevivência

4a - Defina Média Aritmética Ponderada $M_A(a_1, \ldots, a_N)$ para uma sequência de dados numéricos $a_k > 0$. Discuta a razão de se dizer que uma Média Aritmética A é uma única informação numérica populacional que substitui (reduzindo) um conjunto (Tabela) de várias informações numéricas individuais, a_k. Argumente com base nesta distinção sobre a (usual) insensatez de se afirmar que um casal brasileiro tem em média, por exemplo, $1,44$ filhos.

4b - Segundo um Teorema de Kolmogorov-Nagumo (1933) todas as “Médias” sobre uma sequência de dados numéricos $a_k > 0$ (conceito que pode ser facilmente definido por algumas poucas propriedades bem características) são da forma $M_\phi(a_1, \ldots, a_N) = \phi^{-1}(M_A(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_N)))$, onde ϕ é uma função real estritamente convexa inversível e M_A é uma Média Aritmética. Mostre a veracidade desta afirmação com respeito às médias, Aritmética, Harmônica, Geométrica e Quadrática.

4c - Interprete o Método de Quadrados Mínimos de Gauss em termos de uma Média Quadrática.

4d - Dada uma sequência de números positivos $a = \{a_k\}$ obtenha, argumentando geometricamente, uma relação de ordem entre suas Médias Aritmética, $M_A(a)$, Harmônica, $M_h(a)$, Geométrica, $M_g(a)$ e Quadrática, $M_2(a)$. (Utilize uma sequência de apenas dois números para seus argumentos).

4e - Mostre que, a depender da escolha da média de Kolmogorov-Nagumo, pode-se dizer que a média de filhos de um casal brasileiro pode ser qualquer número real entre $m = \min\{a_k\}$ e $M = \max\{a_k\}$, onde $a_k =$ "Número de casais com k filhos".

Solução:

4a -

Considere um conjunto de dados numéricos

$$A = \{a_i; i = 1, 2, \ldots, n\},$$

em que cada $a_i \in A$ possui frequência f_i.

Se a característica a ser mantida quando substituímos cada valor $a_i \in A$ por M_A é a soma dos elementos de A, obtemos a média aritmética.

A média aritmética M_A é um valor tal que

$$\begin{aligned} a_1 + \ldots + a_1 + a_2 + \ldots + a_2 + \ldots + a_n + \ldots + a_n &= M_A + \ldots + M_A \\ \underbrace{a_1 + \ldots + a_1}_{\times f_1} + \underbrace{a_2 + \ldots + a_2}_{\times f_2} + \ldots + \underbrace{a_n + \ldots + a_n}_{\times f_n} &= \underbrace{M_A + \ldots + M_A}_{\times (f_1 + f_2 + \ldots + f_n)}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$f_1 \cdot a_1 + f_2 \cdot a_2 + \ldots + f_n \cdot a_n = (f_1 + f_2 + \ldots + f_n) \cdot M_A.$$

Segue que

$$M_A = \frac{f_1 \cdot a_1 + f_2 \cdot a_2 + \ldots + f_n \cdot a_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\{a_i \cdot f_i\}}{\sum_{i=1}^{n} f_i}. \tag{1}$$

Pode-se entender a frequência f_i como um “peso” (ou ponderação) ao valor do elemento a_i, ou seja, quando os dados aparecem na forma de uma distribuição de frequências, os ponderadores são as frequências absolutas.

Observação: Esta média aritmética é também chamada aritmética ponderada. As frequências com que aparecem determinados elementos de um conjunto (pesos ou ponderações) assumem um grau de “importância” para cada valor.

Caso $f_1 = \ldots = f_n = 1$, temos que a média aritmética para o conjunto A é:

$$M_A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \tag{2}$$

Se o produto dos elementos de A é a característica a ser mantida, obtemos a média geométrica.

Seja f_i a frequência atribuída ao respectivo valor que a variável $a_i \in A$ assume, $a_i \in \mathbb{R}_+^*$. A média geométrica dos n números positivos do conjunto A é um valor positivo M_g tal que

$$a_1^{f_1} \cdot a_2^{f_2} \cdot \ldots \cdot a_k^{f_k} = M_g \cdot M_g \cdot \ldots \cdot M_g = M_g^n, \text{ em que } n = \sum_{i}^{k} f_i.$$

Logo,

$$M_g = \sqrt[n]{a_1^{f_1} \cdot a_2^{f_2} \cdot \ldots \cdot a_k^{f_k}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{k} a_i^{f_i}} \tag{3}$$

Podemos entender a frequência com que cada elemento aparece, como sendo um grau de importância para a variável.

Caso $f_1 = \ldots = f_n = 1$, a média geométrica dos n números positivos e não nulos do conjunto A é um valor positivo M_g tal que

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = M_g \cdot M_g \cdot \ldots \cdot M_g = M_g^n.$$

Logo,

$$M_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \tag{4}$$

Se a soma dos inversos dos elementos de A é a característica a ser conservada, obteremos a média harmônica.

Seja f_i o peso atribuído ao respectivo valor que a variável positiva e não nula $a_i \in A$ assume. A média harmônica dos n números positivos do conjunto A é um valor positivo M_h tal que

$$\frac{f_1}{a_1} + \frac{f_2}{a_2} + \ldots + \frac{f_n}{a_n} = \frac{1}{M_h} + \frac{1}{M_h} + \ldots + \frac{1}{M_h} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{M_h}.$$

Logo,

$$M_h = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{\frac{f_1}{a_1} + \frac{f_2}{a_2} + \ldots + \frac{f_n}{a_n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{a_i}}. \tag{5}$$

Observação: A possibilidade de não existirem as médias geométrica e harmônica é evitada, uma vez que estas só foram definidas para números positivos.

A média quadrática é um valor M_2 tal que

$$a_1^2 \cdot f_1 + a_2^2 \cdot f_2 + \ldots + a_n^2 \cdot f_n = \underbrace{M_2^2 + M_2^2 + \ldots + M_2^2}_{\times(f_1+f_2+\ldots+f_n)} = M_2^2 \cdot (f_1 + f_2 + \ldots + f_n).$$

Logo,

$$M_2^2 = \frac{a_1^2 \cdot f_1 + a_2^2 \cdot f_2 + \ldots + a_n^2 \cdot f_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}.$$

Portanto,

$$M_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}. \tag{6}$$

4b -

Seja $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$, com $a_k > 0, \forall\ k = 1, \ldots, N$. O que devemos mostrar é que existe uma função estritamente convexa inversível ϕ tal que

$$M_\phi(\mathcal{A}) = \phi^{-1}\left(M_A(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_N))\right)$$

é válida para as médias aritmética M_A, harmônica M_H, Geométrica M_G e quadrática M_2.

Para a média aritmética M_A de $\mathcal{A}$, temos:

$$M_A(\mathcal{A}) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} a_k = \sum_{k=1}^{N}\frac{a_k}{N}$$

Se fizermos $\phi(a_k) = a_k$, temos $\phi^{-1}(a_k) = a_k$. O que nos leva a:

$$\begin{aligned} M_A(\mathcal{A}) &= \sum_{k=1}^{N}\frac{a_k}{N} \\ &= \sum_{k=1}^{N}\frac{\phi(a_k)}{N} \\ &= M_A(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_N)) \\ &= \phi^{-1}(M_A(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_N)) \end{aligned}$$

Observação: A função identidade é inversível, estritamente monótona e convexa.

No caso da média harmônica M_H de $\mathcal{A}$, temos:

$$M_H(\mathcal{A}) = \left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{a_k}\right)^{-1}.$$

Se fizermos $\phi(a_k) = \dfrac{1}{a_k}$, temos $\phi^{-1}(a_k) = \dfrac{1}{a_k}$. O que nos leva a:

$$\begin{aligned} M_H(\mathcal{A}) &= \left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\phi(a_k)\right)^{-1} \\ &= M_A\left(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_k)\right)^{-1} \\ &= \phi^{-1}\left(M_A(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_k))\right) \end{aligned}$$

Observação: A função ϕ é inversível, estritamente monótona e estritamente convexa.

No caso da média geométrica M_G de $\mathcal{A}$, temos:

$$M_G(\mathcal{A}) = \sqrt[N]{\prod_{k=1}^{N} a_k}.$$

Se fizermos $\phi(a_k) = \ln(a_k)$, temos $\phi^{-1}(a_k) = \exp(a_k)$. O que nos leva a:

$$\begin{aligned} M_G(\mathcal{A}) &= \sqrt[N]{\prod_{k=1}^{N} \exp(\phi(a_k))} \\ &= \exp\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\phi(a_k)\right) \\ &= \phi^{-1}(M_A(\phi(a_1),\ldots,\phi(a_N))) \end{aligned}$$

Observação: A função ϕ é inversível, estritamente monótona, mas não é convexa.

No caso da média quadrática M_2 de $\mathcal{A}$, temos:

$$M_2(\mathcal{A}) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} a_k^2}.$$

Se fizermos $\phi(a_k) = a_k^2$, temos $\phi^{-1}(a_k) = \sqrt{a_k}$. O que nos leva a:

$$\begin{aligned} M_2(\mathcal{A}) &= \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\phi(a_k)} \\ &= \sqrt{M_A(\phi(a_1),\ldots,\phi(a_N))} \\ &= \phi^{-1}(M_A(\phi(a_1),\ldots,\phi(a_N))) \end{aligned}$$

Observação: A função ϕ é inversível, estritamente monótona e estritamente convexa.

4c -

Seja $d_i = f(a_i) - g(a_i)$ o desvio existente entre as imagens de f e g em a_i.

O método dos mínimos quadrados consiste em escolher os coeficientes α_j, $j = 1,\ldots,m$, de tal forma que a soma dos quadrados dos desvios seja mínima, isto é:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n}[f(a_i) - g(a_i)]^2 \text{ é mínimo.} \tag{7}$$

Assim, os coeficientes α_j, que fazem com que $g(a)$ se aproxime ao máximo de $f(a)$, são os que minimizam a função:

$$F(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \sum_{i=1}^{n} [f(a_i) - g(a_i)]^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[f(a_i) - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j g_j(a_i) \right]^2.$$

Para isto, é necessário que as m derivadas parciais de F de primeira ordem se anulem, ou seja:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = 0, j = 1, \ldots, m, \tag{8}$$

ou seja,

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\alpha_1, \ldots, \alpha_j) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[f(a_i) - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j g_j(a_i) \right] \cdot [-g_j(a_i)] = 0,\ j = 1, 2, \ldots, m.$$

Observa-se que ao multiplicarmos o primeiro membro da equação (7) por $\left(\sum_{i=1}^{N} f_i \right)^{-1}$, em que f_i é a frequência com que a_i aparece no conjunto A, obtendo-se:

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} d_i^2}{\sum_{i=1}^{N} f_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d_i^2}{\sum_{i=1}^{N} f_i}, \tag{9}$$

a média dos desvios quadráticos, em nada se altera a condição em (8).

4d - Relação entre as Médias

Se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são n números positivos e M_h, M_g, M_A e M_2 são suas médias harmônica, geométrica, aritmética e quadrática, respectivamente, então

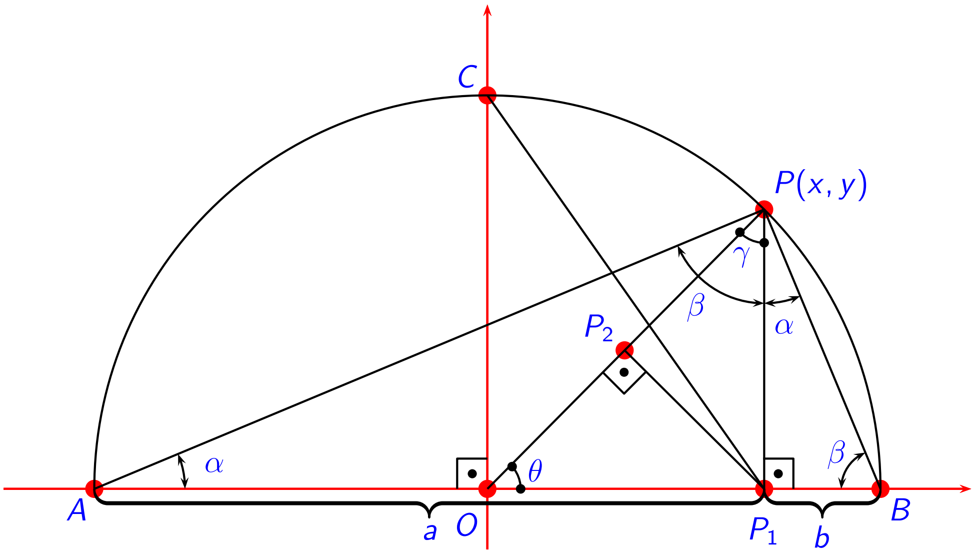
$$M_h \leq M_g \leq M_h \leq M_2.$$

Além disso, duas quaisquer dessas médias serão iguais se, e somente se, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Análise 1: Geométrica

Considere o triângulo $\triangle ABP$, inscrito numa semicircunferência de um círculo de centro na origem do sistema cartesiano e de raio r. Considere, ainda, que (sem perda da generalidade) a semicircunferência seja a que possui pontos nos I e II quadrantes, as coordenadas dos vértices sejam: $A(-r,0)$, $B(r,0)$ e $P(x,y)$ um ponto arbitrário (Ver figura).

Figura 1 – Interpretação geométrica das médias



Fonte – Figura elaborada pelo autor

Os triângulos $\triangle AP_1P$ e $\triangle PP_1B$ são semelhantes (Caso LAA_0). Dessa forma,

$$B\hat{P}P_1 = P\hat{A}B = \alpha \text{ e } P_1\hat{P}A = P\hat{B}A = \beta.$$

Além disso, $\alpha + \beta = 90°$ (Pela soma dos ângulos internos de um triângulo), implicando que o triângulo $\triangle APB$ é retângulo em P.

Verifica-se, facilmente, que

$$2r = a + b \Rightarrow r = \frac{a+b}{2},$$

a média arimética entre as medidas a e b dos respectivos comprimentos das projeções dos catetos PA e PB sobre a hipotenusa do triângulo $\triangle APB$.

Da semelhança entre os triângulos $\triangle AP_1P$ e $\triangle PP_1B$, podemos também extrair:

$$\frac{\overline{AP_1}}{\overline{PP_1}} = \frac{\overline{PP_1}}{\overline{P_1B}} \Rightarrow \frac{a}{y} = \frac{y}{b} \Rightarrow y = \sqrt{a \cdot b}$$

a média geométrica entre as medidas a e b.

Considere, agora, o ponto $P_2 \in OP$ de modo que $P_2P_1 \perp OP$. Da semelhança entre os triângulos $\triangle PP_2P_1$ e $\triangle PP_1O$ (caso LAA_O), temos:

$$\frac{\overline{AP_2}}{\overline{PP_1}} = \frac{\overline{PP_1}}{\overline{OP}} \Rightarrow \frac{\overline{AP_2}}{y} = \frac{y}{r} \Rightarrow \overline{AP_2} = \frac{a \cdot b}{\frac{a+b}{2}} = \frac{1+1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

a média harmônica entre as medidas a e b.

Já, pelo triângulo $\triangle P_1OC$, retângulo em O, as medidas dos seus catetos em função de a e b são obtidas a seguir:

$$\overline{OC} = r = \frac{a+b}{2} \text{ e } \overline{P_1O} = r - b = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}$$

Aplicando em $\triangle P_1OC$ o Teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{aligned} \overline{P_1C}^2 &= \overline{P_1O}^2 + \overline{OC}^2 \\ &= \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{a^2+b^2}{2}, \end{aligned}$$

implicando em

$$\overline{P_1C} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

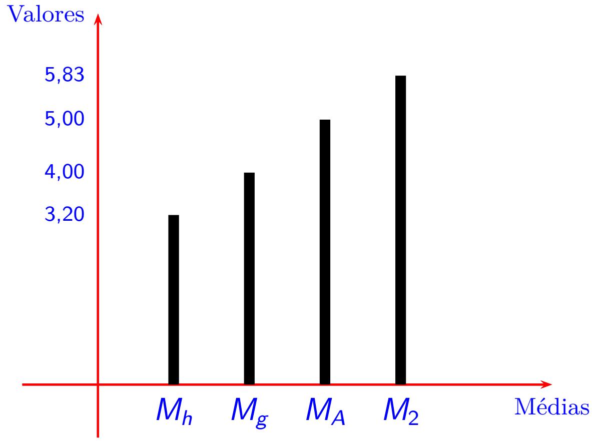
a média quadrática entre as medidas a e b.

Análise 2: Gráfica

Considere o conjunto $A = \{2, 8\}$. Suas médias harmônica, geométrica, aritmética e quadrática, respectivamente, são:

$$\begin{aligned} M_h &= \frac{1+1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}} = 3.2 \\ M_g &= \sqrt{2 \cdot 8} = 4 \\ M_A &= \frac{10}{2} = 5 \\ M_2 &= \sqrt{\frac{2^2+8^2}{1+1}} \approx 5.830951894845300381 \end{aligned}$$

Graficamente, temos:



4e

Seja $\mathcal{A} = \{a_k\},\ k = 1, 2, \ldots, N$, onde $a_k =$ "Número de casais com k filhos". Considere, ainda, M_ϕ uma média de Kolmogorov-Nagumo dos elementos de $\mathcal{A}$ onde ϕ é uma função invertível, estritamente crescente.

Suponha que, para todo k, temos $a_k < M_\phi$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\phi(a_k) < \phi(M_\phi) \quad &\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{N} \phi(a_k) < \sum_{k=1}^{N} \phi(M_\phi) = N\phi(M_\phi) \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \phi(a_k) < \phi(M_\phi) \\
&\Rightarrow \quad \phi^{-1}\left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \phi(a_k) \right) < M_\phi \\
&\Rightarrow \quad \phi^{-1}\left(M_A(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_N)) \right) < M_\phi \\
&\Rightarrow \quad M_\phi < M_\phi \text{ (absurdo!)}
\end{aligned}$$

Logo, $\exists a_{\max} = \max\{a_k\} = M$ tal que $M_\phi < M$.

De maneira análoga, mostramos que $\exists a_{\min} = \min\{a_k\} = m$ tal que $m < M_\phi$.

Portanto, para M_ϕ podemos ter que a média de filhos de um casal brasileiro pode ser qualquer número real entre m e M.

Questão 05

Tempo Médio (Aritmético) de Sobrevivência de uma População

Definição: Dado um Modelo populacional especificamente de mortalidade $N(t)$ tal que $\frac{dN}{dt} < 0$ e $\lim_{t\to\infty} N(t) = 0$, diz-se que o valor (finito ou infinito) da integral $\frac{1}{N_0}\int_0^{\infty} -t\frac{dN}{dt}\ dt$ é denominado Tempo Médio (Aritmético) de Sobrevivência da População.

5a - Argumente sobre a motivação para que a expressão $\frac{1}{N_0}\int_0^{\infty} -t\frac{dN}{dt}\ dt = \frac{1}{N_0}\int_0^{N_0} t\ dN$, que se refere a uma dinâmica $N(t)$ decrescente de uma (Grande) população (sem natalidade e migração) inicialmente com $N(0) = N_0$ indivíduos, possa ser interpretada como o tempo médio (aritmético) de sobrevivência desta população.

5b - Calcule o Tempo Médio (Aritmético) de sobrevivência de uma população Malthusiana (isto é, descrita segundo o Modelo Newtoniano $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = -\mu,\ N(0) = N_0$) e mostre que este valor independe de N_0. Discuta o significado biológico deste resultado.

5c - Calcule o tempo médio (aritmético) de sobrevivência de uma população cuja dinâmica de Mortalidade é descrita por uma função quase-polinomial $N(t) = q(t)e^{-\mu t}$, onde $q(t) = N_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k t^k$ é um polinômio e $\mu > 0$. (Sugestão: Calcule explicitamente as integrais $I(n) = \int_0^{\infty} t^n e^{-\mu t}\ dt$ recursivamente em n e utilizando integrações por partes)

5d - O mesmo para $N(t) = \frac{N_0}{t+1}$.

Solução:

5a

5b

Considere o modelo Malthusiano de Mortalidade

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = -\mu, \tag{10}$$

com condição inicial $N(0) = N_0$.

A solução de (10) é obtida ao separar as variáveis, integrar indefinidamente o resultado e utilizar a sua condição inicial. A seguir, as passagens como citadas.

Separando as variáveis:

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = -\mu \Rightarrow \frac{dN}{N} = -\mu dt.$$

Integrando indefinidamente:

$$\int \frac{dN}{N} = -\int \mu dt \Rightarrow \log(N) = -\mu t + C \Rightarrow N(t) = e^{-\mu t}\ e^{Ç}.$$

Utilizando a condição inicial:

$$N(0) = N_0 \Rightarrow e^{C} = N_0.$$

Portanto, temos:

$$N(t) = N_0\ e^{-\mu t}. \tag{11}$$

O tempo médio de sobrevivência da população T_M é dado por:

$$T_M = \frac{1}{N_0}\int_0^{\infty} -t\frac{dN}{dt}\ dt$$

Para determinar T_M, substituímos em sequência, as equações (10) e (11), na fórmula de T_M, cancelamos a constante N_0 e resolvemos uma integral imprópria, ou seja:

$$\begin{aligned}
T_M &= \frac{1}{N_0}\int_0^{\infty} -t(-\mu N)\ dt\\
&= \frac{\mu}{N_0}\int_0^{\infty} t\ N_0\ e^{-\mu t}\ dt\\
&= \mu\int_0^{\infty} t\ e^{-\mu t}\ dt\\
&= \mu \lim_{a\to\infty}\int_0^{a} t\ e^{-\mu t}\ dt\\
&= \mu \lim_{a\to\infty}\left(t\ \frac{e^{-\mu t}}{-\mu} - \frac{1}{\mu}\left(\frac{e^{-\mu t}}{-\mu}\right)\right|_0^a\\
&= \mu \lim_{a\to\infty}\left(t+\frac{1}{\mu}\right)\frac{e^{-\mu t}}{-\mu}\bigg|_0^a\\
&= \mu \lim_{a\to\infty}\left[\left(a+\frac{1}{\mu}\right)\frac{e^{-\mu a}}{-\mu}+\frac{1}{\mu^2}\right]\\
&= \mu\left(\frac{1}{\mu^2}\right) = \frac{1}{\mu}
\end{aligned}$$

onde a integral na quarta igualdade foi obtida utilizando o método de integração por partes.

5c

O tempo médio T_M de sobrevivência de uma população cuja dinâmica de mortalidade é dada por:

$$N(t) = \left(N_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k t^k\right)\ e^{-\mu t},\ \ \mu > 0 \tag{12}$$

é dada por:

$$T_M = \frac{1}{N_0}\int_0^{\infty} -t\ \frac{dN}{dt}\ dt \tag{13}$$

A seguir, mostraremos o processo do cálculo da derivada de (12) com respeito à variável t.

$$
\begin{aligned}
\frac{dN}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[\left(N_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k t^k\right)\ e^{-\mu t}\right] \\
&= \frac{d}{dt}\left(N_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k t^k\right) \cdot e^{-\mu t} + \left(N_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k t^k\right) \cdot \frac{d}{dt}\left(e^{-\mu t}\right) \\
&= \left(\sum_{k=2}^{m} k a_k t^{k-1}\right) \cdot e^{-\mu t} + \left(N_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k t^k\right) \cdot (-\mu) e^{-\mu t} \\
&= e^{-\mu t} \cdot \left[a_1 - \mu\ N_0 + \left(\sum_{k=2}^{m} (k a_k - \mu a_{k-1}) t^{k-1}\right) - \mu a_m t^m,\right]
\end{aligned}
$$

implicando em

$$
-t\frac{dN}{dt} = e^{-\mu t} \cdot \left[(\mu\ N_0 - a_1)t + \left(\sum_{k=2}^{m} (\mu a_{k-1} - k a_k) t^k\right) + \mu a_m t^{m+1}\right]
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
T_M &= \frac{1}{N_0}\int_0^\infty e^{-\mu t} \cdot \left[(\mu\ N_0 - a_1)t + \left(\sum_{k=2}^{m} (\mu a_{k-1} - k a_k) t^k\right) + \mu a_m t^{m+1}\right]\ dt \\
&= \left(\mu - \frac{a_1}{N_0}\right)\int_0^\infty t e^{-\mu t}\ dt + \frac{1}{N_0}\sum_{k=2}^{m} (\mu a_{k-1} - k a_k)\int_0^\infty t^k e^{-\mu t}\ dt \\
&\quad + \mu a_m \frac{1}{N_0}\int_0^\infty t^{m+1}\ e^{-\mu t}\ dt
\end{aligned} \tag{14}
$$

Constatamos em (14) que para determinar T_m é necessário encontrar integrais do tipo:

$$
\mathcal{I}(n) = \int_0^\infty t^n\ e^{-\mu t}\ dt. \tag{15}
$$

Vamos provar que o valor de $\mathcal{I}(n) = \dfrac{n!}{\mu^{n+1}}$ utilizando a indução sobre n.

Para $n = 0$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(0) &= \int_0^{\infty} e^{-\mu t}\ dt \\
&= \lim_{b_0 \to \infty} \int_0^{b_0} e^{-\mu t}\ dt \\
&= \lim_{b_0 \to \infty} \left. \frac{-1}{\mu} e^{-\mu t} \right|_0^{b_0} \\
&= \lim_{b_0 \to \infty} \frac{-1}{\mu} \left(e^{-\mu b_0} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{\mu} = \frac{0!}{\mu^{0+1}}. \qquad (16)
\end{aligned}$$

Suponhamos que $\mathcal{I}(n) = \dfrac{n!}{\mu^{n+1}}$. Vamos provar que $\mathcal{I}(n+1) = \dfrac{(n+1)!}{\mu^{n+2}}$. De fato,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(n+1) &= \int_0^{\infty} t^{n+1}\ e^{-\mu t}\ dt \qquad (17) \\
&= \lim_{b_{n+1} \to \infty} \int_0^{b_{n+1}} t^{n+1}\ e^{-\mu t}\ dt \qquad (18) \\
&= \lim_{b_{n+1} \to \infty} \left(\left. t^{n+1} \frac{e^{-\mu t}}{-\mu} \right|_0^{b_{n+1}} - \int_0^{b_{n+1}} (n+1) t^n \frac{e^{-\mu t}}{-\mu}\ dt \right) \qquad (19) \\
&= \underbrace{\lim_{b_{n+1} \to \infty} \frac{(b_{n+1})^{n+1}}{-\mu e^{\mu b_{n+1}}}}_{\text{tende a } 0} + \frac{n+1}{\mu} \cdot \underbrace{\lim_{b_{n+1} \to \infty} \int_0^{b_{n+1}} t^n e^{-\mu t}\ dt}_{\mathcal{I}(n)} \qquad (20) \\
&= \frac{n+1}{\mu} \cdot \frac{n!}{\mu^{n+1}} \qquad (21) \\
&= \frac{(n+1)!}{\mu^{n+2}}, \qquad (22)
\end{aligned}$$

onde, na passagem de (17) para (18) utilizamos a definição de integração imprópria. Na de (18) para (19), integração por partes. Na de (19) para (20), propriedade de limites onde foi verificada a existência do limite. Na (20), constatamos que o primeiro limite tende a zero utilizando $n+1$ vezes a regra de L'Hospital.

Retornando ao cálculo do tempo médio de sobrevivência, temos:

$$\begin{aligned} T_M &= \left(\mu - \frac{a_1}{N_0}\right)\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{N_0}\sum_{k=2}^{m}(\mu a_{k-1} - k a_k)\frac{k!}{\mu^{k+1}} + \mu a_m \frac{1}{N_0}\frac{(m+1)!}{\mu^{m+2}} \\ &= \left(\frac{1}{\mu} - \frac{a_1}{N_0\mu^2}\right) + \frac{1}{N_0}\sum_{k=2}^{m}(\mu a_{k-1} - k a_k)\frac{k!}{\mu^{k+1}} + \frac{a_m}{N_0}\frac{(m+1)!}{\mu^{m+1}} \end{aligned} \tag{23}$$

5d

A dinâmica de mortalidade da população é dada por:

$$N(t) = \frac{N_0}{t+1}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}N(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{N_0}{t+1}\right) = \frac{-N_0}{(t+1)^2}$$

O tempo médio T_M de sobrevivência é dado por:

$$\begin{aligned} T_M &= \frac{1}{N_0}\int_0^{\infty} -t\,\frac{dN}{dt}\,dt \\ &= \frac{1}{N_0}\int_0^{\infty} -t\,\frac{-N_0}{(t+1)^2}\,dt \\ &= \int_0^{\infty}\frac{t}{(t+1)^2}\,dt \end{aligned}$$

Essa integral imprópria é resolvida a seguir:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty}\frac{t}{(t+1)^2}\,dt &= \lim_{b\to\infty}\int_0^{b}\frac{t}{(t+1)^2}\,dt \\ &= \lim_{b\to\infty}\int_{-1}^{b-1}\frac{t-1}{t^2}\,dt \\ &= \lim_{b\to\infty}\ln|t| + \frac{1}{t}\Big|_{-1}^{b-1} \\ &= \lim_{b\to\infty}\ln|b-1| + \frac{1}{b-1} - \ln(1) + 1 \\ &= \infty \end{aligned}$$

Questão 06

Mortalidade por Predação Periférica e Efeito de Rebanho Egoísta:

> (Dois “amigos” em um campo de cerrado e uma onça esfomeada. Um deles, para e toma seu tempo para amarrar bem o calçado. O outro, apressado, lhe repreende:”Vamos correr logo que a onça é mais rápida do que nós!”. O Amigo (da onça): “Eu não preciso correr mais do que a onça, eu preciso correr mais do que você!”. Ditado caboclo: “Mingau quente, se come pelas beiradas”.

Considere uma população distribuída uniformemente em uma região delimitada no plano descrita por uma função diferenciável $N(t)$ cuja mortalidade é causada unicamente por uma predação “periférica” da forma $p(N) = -\mu\sqrt{N}$, caracterizada matematicamente segundo a Metodologia Newtoniana pela equação diferencial: $\frac{dN}{dt} = -\mu\sqrt{N}$. (A justificativa da função de mortalidade na forma $p(N) = -\mu\sqrt{N}$ para predação “periférica” se deve ao fato de que um grupo uniformemente distribuído em uma região delimitada do plano é predado apenas na fronteira, cuja extensão tem medida da ordem da dimensão linear da região, enquanto que a área, que é proporcional à população, é da ordem do quadrado da medida linear e, portanto, a fronteira é da ordem de $N^{\frac{1}{2}}$. O formato da região pode ser considerado aproximadamente um disco (2D) ou uma esfera (3D) porque estas são as formas que apresentam menor extensão de fronteira para um mesmo conteúdo populacional.(Por exemplo, sapos na beira da lagoa diante da ameaça de cobras, ou rebanho de ovelhas diante de lobos).

Definição: Diz-se que uma Dinâmica de mortalidade apresenta o “Efeito de Rebanho Egoísta”(*)quando a mortalidade especifica (“per capita” $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = f(N)$) diminui com o aumento do tamanho do grupo, em outros termos, um individuo se sente particularmente mais ”protegido” em um grupo maior; por isso ele se junta aos vencedores.. (*) Termo introduzido por W. Hamilton no antológico artigo: - The Selfish Herd, J. Theor.Biol, 1970).

6a - Argumente como o conceito de “Efeito Rebanho Egoísta” pode ser interpretado em termos do Tempo Médio de Sobrevivência.

6b - Mostre que não há “Efeito Rebanho Egoista” em uma população cuja mortalidade é unicamente Malthusiana.

6c - Descreva uma Dinâmica Adimensional de mortalidade por predação periférica para um grupo populacional que ocupa uma região delimitada do espaço físico tridimensional. (Por exemplo, um cardume de Sardinhas e Baleias) e verifique se esta dinâmica apresenta um "Efeito Rebanho Egoista" e é dizimada em tempo finito.

6d - Considere uma população com predação per capita tipo Holling II: $p(N) = \frac{A}{B+N}$. Adimensionalize a equação e verifique se ocorre um "Efeito Rebanho" nesta dinâmica.

6e - Discuta o comportamento individual das presas em termos de uma proteção por agrupamento com base na percepção de cardinalidade segundo a "Lei de Weber-Fechner".

Questão 07

7a – Utilizando o Método Operacional explicado no texto, obtenha uma expressão explícita (em termos de integrais) da solução da Equação de (Euler-Malthus) Verhulst $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r(t) - \lambda(t)N$, onde $r(t)$ e $\lambda(t)$ são funções reais positivas. (Sugestão: Utilize a transformação linearizadora $m = \frac{1}{N}$ seguida pelo Método Operacional).

7b - Apresente um cenário biológico que indique a utilização desta equação como Modelo Matemático para uma Dinâmica Populacional.

7c - Considere uma população cujo tamanho $N(t)$ é regulado pelo chamado Modelo de Euler-Verhulst, $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r - \lambda N$ (isto é, com taxa de natalidade Malthusiana (per capita) r e mortalidade (per capita) λN, $r, \lambda > 0$ constantes) que se inicia com uma população "colonizadora" de $N_0 = N(0)$ indivíduos. Considere a decrescente população $n(t)$ dos indivíduos colonizadores ($n(0) = N_0$) submetidos à taxa de mortalidade ambiente. (Os descendentes de colonizadores não são colonizadores mas fazem parte da população ambiente!). Obtenha uma expressão para a dinâmica desta população $n(t)$ de colonizadores e mostre que o tempo médio de sobrevivência neste caso, apresenta uma dependência do tamanho da população inicial N_0, indicando um fenômeno interativo no processo de mortalidade.

Questão 08

Sistemas Malthusianos com Acoplamento Sequencial

$$\ldots A_1 \xrightarrow{\mu_1} A_2 \xrightarrow{\mu_2} A_3 \xrightarrow{\mu_3} \ldots A_n \xrightarrow{\mu_n} A_{n+1} \ldots$$

Considere um sistema de compartimentos sequencialmente acoplados com dinâmicas Malthusianas.

8a - Supondo uma sequencia com N compartimentos, $1 \leq k \leq N$, com $\mu_N = 0$, escreva o Modelo deste sistema na forma de Equações Diferenciais Ordinárias (acopladas) $\frac{dA}{dt} = DA = MA$, e Operacional $(D - M)A = 0$ identificando a matriz numérica M, e a matriz operacional $m(D) = D - A$. $\left(\frac{d}{dt} \equiv D\right)$

8b - Se $N = 3$ e $\mu_k = \mu > 0$ obtenha as expressões analíticas elementares para as soluções $A(t) = (A_1\ A_2\ A_3)^t = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$, resolvendo antes as equações desacopladas $\det m(D)x = 0$. (Refer. Bassanezi-Ferreira).

8c - Mostre que, em geral, $A_k(t) \to 0$ exponencialmente, como $t^2 e^{-\mu t}$, isto é, $\lim_{t\to\infty} \frac{A_k(t)}{t^2 e^{-\mu t}} = c \neq 0$.

8d - Determine o tempo médio (aritmético) que estas partículas/organismos permanecem no sistema de compartimentos se inicialmente todas elas estão no primeiro no primeiro compartimento $A_1(0) = 1, A_k(0) = 0,\ k > 1$.

8e - Determine a relação entre o tempo médio (aritmético) de permanência destas partículas/organismos no sistema em termos da sua distribuição inicial, $A_k(0) = A_{k0}$.

Solução:

8a-

Temos que a população total A é formada por N subpopulações sequencialmente acopladas. Então, esse modelo é regido por:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= -\mu_1 A_1 \\ \frac{dA_k}{dt} &= \mu_{k-1}A_{k-1} - \mu_k A_k,\ \ k = 2, \ldots, N \end{aligned}$$

Se fizermos $\mathcal{A} = [A_1 \ A_2 \ \dots \ A_N]^t$ e

$$M = \begin{bmatrix} -\mu_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mu_1 & -\mu_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -\mu_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\mu_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_{N-1} & \mu_N \end{bmatrix}$$

teremos

$$\frac{dA}{dt} = MA \Rightarrow DA = MA \Rightarrow DA - MA = 0,$$

sendo 0 matriz nula de ordem $N \times 1$. Segue que

$$(D - M)A = 0,$$

com a matriz operacional

$$m(D) = D - A = \left[\left(\frac{d}{dt} - A_1 \right) \ \left(\frac{d}{dt} - A_2 \right) \ \left(\frac{d}{dt} - A_3 \right) \right]^t$$

8b-

Considere o sistema

$$A_1 \xrightarrow{\mu_1} A_2 \xrightarrow{\mu_2} A_3$$

de compartimentos sequencialmente acoplados, de três subpopulações com dinâmicas malthusianas. Então, esse modelo é regido por:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= -\mu A_1 \Rightarrow A_1(t) = K_1 e^{-\mu t} \\ \frac{dA_2}{dt} &= \mu(A_1 - A_2) \\ \frac{dA_3}{dt} &= \mu(A_2 - A_3). \end{aligned}$$

8c-

8d-

O tempo médio T_M de sobrevivência da população total A é dado por:

$$T_M = \frac{1}{A_0} \int_0^{\infty} -t \frac{dA}{dt} \, dt$$

Uma vez que ela está concentrada na subpopulação A_1 malthusiana, com $A_1(0) = 1$, temos:

$$T_M = \frac{1}{A_1(0)} \int_0^{\infty} -t \frac{dA_1}{dt}\, dt = \int_0^{\infty} -t \frac{dA_1}{dt}\, dt = \int_0^{\infty} -te^{-\mu t}\, dt = \frac{1}{\mu}$$

Questão 09

Modelos Efetivos

9a - Considere uma população de indivíduos não interativos formada por uma mistura de subpopulações Malthusianas (homogêneas e não interativas) A_k, sendo T_k seu respectivo tempo médio (aritmético) de sobrevivência. Considere agora a população total $A(t) = \sum A_k(t)$ que obviamente decresce. Mostre que o tempo médio (aritmético) de sobrevivência da população misturada A é dado pela Média (aritmética) ponderada de T_k.

9b - Considere agora uma descrição da dinâmica de uma população "Malthusianamente heterogênea" por um "Modelo Malthusiano Efetivo", isto é, da forma $\frac{dA}{dt} = -\mu A$. Argumente sobre o fato de que neste caso a "melhor escolha" para o coeficiente μ do Modelo diferencial seria a média harmônica dos coeficientes μ_k.

9c - Analise a mesma questão supondo que a população total é formada por N subpopulações sequencialmente acopladas na forma

$$A_1 \xrightarrow{\mu_1} A_2 \xrightarrow{\mu_2} A_3 \quad \ldots \quad A_{N-1} \xrightarrow{\mu_{N-1}} A_N, \;\; \mu_N = 0.$$

Solução:

9a-

Temos uma população A de indivíduos não interativos formada por uma mistura de subpopulações Malthusianas A_k (homogêneas e não interativas). Logo, para cada $1 \leq k \leq N$, temos:

$$\frac{1}{A_k}\frac{A_k}{dt} = -\mu_k, \;\; A_k(0) = A_{0_k} \Rightarrow A_k(t) = A_{0_k} e^{-\mu_k t}.$$

Segue que

$$A = \sum_{k=1}^{N} A_k(t) = \sum_{k=1}^{N} A_{0_k} e^{-\mu_k t} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \sum_{k=1}^{N} -\mu_k A_{0_k} e^{-\mu_k t}.$$

Claramente, como visto nesta última equação, é bem provável que A seja não malthusiana, uma vez que isso só ocorrerá caso $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_N$. Entretanto, o tempo médio de sobrevivência T_M pode ser calculado como a seguir:

$$\begin{aligned}
T_M &= \frac{1}{A_0} \int_0^{\infty} -t \, \frac{dA}{dt} \, dt \\
&= \frac{1}{A_0} \int_0^{\infty} -t \, \left(\sum_{k=1}^{N} -\mu_k A_{0_k} e^{-\mu_k t} \right) dt \\
&= \frac{1}{A_0} \left[\sum_{k=1}^{N} \mu_k A_{0_k} \underbrace{\left(\int_0^{\infty} t e^{-\mu_k t} \, dt \right)}_{\mathcal{I}(1)} \right] \\
&= \frac{1}{A_0} \left[\sum_{k=1}^{N} \mu_k A_{0_k} \left(\frac{1}{\mu_k^2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{A_0} \sum_{k=1}^{N} \frac{A_{0_k}}{\mu_k},
\end{aligned}$$

onde o resultado da integral $\mathcal{I}(1)$ foi o obtido na Questão 05.

Considerando que $\sum_{k=1}^{N} A_{0_k} = A_0$, temos:

$$T_M = \frac{1}{\sum_{k=1}^{N} \mu_k}.$$

Por outro lado, a média aritmética (ponderada) de T_{M_k} é:

$$M\left(T_{M_k}\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} T_{M_k} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\mu_k} = \frac{1}{N} \frac{\sum_{k=1}^{N} 1}{\sum_{k=1}^{N} \mu_k} = \frac{1}{N} \frac{N}{\sum_{k=1}^{N} \mu_k} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{N} \mu_k} = T_M.$$

Como queríamos mostrar.

9b-

Seja $\bar{A}(t) = \sum_{k=1}^{N} A_{0_k} e^{-\mu_k t}$ e $A(t) = A_0 e^{-\mu t}$, com $\mu = \dfrac{N}{\sum_{k=1}^{N} \dfrac{1}{\mu_k}}$.

Considerando a norma euclidiana, analisemos a proximidade entre esses modelos de população.

$$\begin{aligned} \left|A(t) - \bar{A}(t)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{N} A_{0_k} e^{-\mu_k t} - A_0 e^{-\mu t}\right| \\ &= \left|\sum_{k=1}^{N} A_{0_k} e^{-\mu_k t} - e^{-\mu t} \sum_{k=1}^{N} A_{0_k}\right| \\ &= \left|\sum_{k=1}^{N} A_{0_k} (e^{-\mu_k t} - e^{-\mu t})\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{N} A_{0_k} \left|e^{-\mu_k t} - e^{-\mu t}\right|. \end{aligned}$$

Considere, agora, $\min\{\mu_k\} = \mu_{\min}$ e $\max\{\mu_k\} = \mu_{\max}$. Pelo Teorema do Valor Médio, temos que: $|e^{-\mu_k t} - e^{-\mu t}| \leq t e^{-\mu_{\min} t} |\mu - \mu_k|$.

Como μ é a média harmônica dos μ_k, temos:

$$|\mu - \mu_k| \leq \mu_{\max} - \mu_{\min}, \ \forall \ k.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left|A(t) - \bar{A}(t)\right| &\leq \sum_{k=1}^{N} A_{0_k} t \ e^{-\mu_{\min} t} (\mu_{\max} - \mu_{\min}) \\ &= A_0 t \ e^{-\mu_{\min} t} (\mu_{\max} - \mu_{\min}). \end{aligned}$$

Sendo assim

$$\lim_{t \to \tau} \left|A(t) - \bar{A}(t)\right| \ \leq \ A_0 (\mu_{\max} - \mu_{\min}) \lim_{t \to \tau} \frac{t}{e^{\mu_{\min} t}},$$

e, portanto, teremos uma boa aproximação entre os modelos se:

(a) τ crescem indefinidamente; (b) os valores de τ são pequenos e a amplitude entre os tempos médios de sobrevivência máximo e mínimo for pequeno e; (c) o tempo médio de sobrevivência mínimo for grande.

9c-

Temos que a população total A é formada por N subpopulações sequencialmente acopladas. Então, esse modelo é regido por:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= -\mu_1 A_1 \\ \frac{dA_k}{dt} &= \mu_{k-1}A_{k-1} - \mu_k A_k, \;\; k = 2, \ldots, N \end{aligned}$$

Se fizermos $\mathcal{A} = [A_1 \; A_2 \; \ldots \; A_N]^t$, $1 = (1 \;\; 1 \;\; \ldots \;\; 1)_{1\times N}$ e

$$\Phi = \begin{bmatrix} -\mu_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mu_1 & -\mu_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -\mu_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\mu_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_{N-1} & \mu_N \end{bmatrix}$$

teremos

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{dA_k}{dt} = 1 \cdot \Phi \cdot \mathcal{A} = -\mu_N \frac{dA_N}{dt}.$$

O tempo médio de sobrevivência da população total é então dado por:

$$T_M = \frac{1}{A_0} \int_0^{\infty} -t \sum_{k=1}^{N} \frac{dA_k}{dt} \; dt = \frac{1}{A_0} \int_0^{\infty} t \; \mu_N \; \frac{dA_N}{dt} \; dt = 0,$$

uma vez que $\mu_N = 0$.

Dessa forma, se cada subpopulação $A_k, k = 1, \ldots, N$ de uma população A segue um modelo malthusiano com tempo médio de sobrevivência muito pequeno, o modelo da população total formada por N subpopulações sequencialmente acopladas possui o tempo médio de sobrevivência muito próximos.

Questão 10

Sistemas Malthusianos com Acoplamentos Multilaterais (Difusivos)

Considere um sistema de N compartimentos $\{A_k\}_{1\leq k\leq N}$ conectados sequencialmente e simetricamente por dinâmicas Malthusianas bilaterais como no seguinte esquema

$$A_0 \overset{\mu}{\underset{\mu_0}{\leftrightarrows}} A_1 \overset{\mu}{\longleftrightarrow} A_2 \overset{\mu}{\longleftrightarrow} A_3 \overset{\mu}{\longleftrightarrow} \dots A_{N-1} \overset{\mu}{\longleftrightarrow} A_N \overset{\mu_N}{\longleftrightarrow} A_{N+1}$$

10a - Mostre que um compartimento interior $A_k, 2 \leq k \leq N-1$, é regido pela seguinte equação: $\dfrac{dA_k}{dt} = -2\mu A_k + \mu A_{k-1} + \mu A_{k+1}$.

10b - Obtenha a dinâmica do compartimento A_N que está obstruído à direita (isto é, não perde nem ganha população de A_{N+1}). Diz-se também que é reflexivo, ou que $\mu_N = 0$.

10c - Obtenha a dinâmica do compartimento A_1 que somente perde indivíduos para o compartimento A_0 e não recebe nada do mesmo, isto é, $\mu_0 = 0$, Interprete este fato como a existência de um "deserto" em A_0.

10d - Escreva a dinâmica de todo o sistema acoplado na forma matricial $\dfrac{dA}{dt} = S\ A$, $A = A_1, \dots, A_N)^t$ e mostre que a matriz S é simétrica e tridiagonal.

10d - Mostre que $n(t) = \sum_{k=1} NA_k$ é monotonicamente decrescente, isto é, $\dfrac{dn}{dt} < 0$.

Sugestão: $\dfrac{dn}{dt} = \dfrac{d}{dt}\langle A, 1\rangle = \langle \dfrac{dA}{dt}, 1\rangle = \langle S\ A, 1\rangle < 0$.

10f - Na verdade, mostre que $n(t)$ é exponencialmente decrescente, isto é, existe $\lambda > 0$ tal que $\lim_{t\to\infty} \dfrac{n(t)}{e^{-\lambda t}} = c > 0$.

10g - Utilize o Método de Fourier para mostrar que a solução geral do sistema acima pode ser escrito na forma: $A(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{\lambda_k t}$, verificando como determinar algebricamente os coeficientes c_k e os parâmetros λ_k e mostrando que $\lambda_k < 0, 1 \leq k \leq N$.

10h - Argumente sobre a propriedade "homogeneizadora" desta dinâmica no sentido de que todos $A_k(t)$ convergem para uma média.

Obs: O Método de Fourier resolve completamente o Sistema de EDOs utilizando combinações lineares de soluções básicas $e^{\lambda t}v$ para o Sistema, onde λ é autovalor da matriz simétrica S e v o seu autovetor correspondente, $Sv = \lambda v$. Lembre-se do Teorema Espectral para matrizes simétricas que garante a expansão de qualquer vetor u na forma, $u = \sum a_k v^{(k)}$ onde $v^{(k)}$ é base ortonormal de autovetores de S.

Questão 11

Acoplamento Difusivo de Dinâmicas Malthusianas

Considere um Grafo com 4 vértices, 3 localizados nas quinas de um triângulo e 1 deles, A_0, no seu centro. Cada vértice A_k das quinas é conectado bilateralmente aos seus dois adjacentes, A_{k-1} e A_{k+1} e todos, da mesma forma, ao centro A_0 por uma dinâmica Malthusiana com o mesmo parâmetro μ em todas as direções.

11a - Escreva a dinâmica do sistema $A = (A_1, A_2, A_3, A_0)^t$ na forma matricial, $\frac{dA}{dt} = S\ A$

11b - Mostre que S é simétrica e tem autovalor nulo com autovetor $1 = (1, \ldots, 1)$.

11c - Mostre que $n(t) = \sum_{k=0}^{4} A_k(t)$ é constante e que $\lim_{t\to\infty} A(t) = n(0)(1, \ldots, 1)$.

Questão 12

12a - Mostre que em uma dinâmica Malthusiana com parâmetros μ, ν constantes a operação funcional "Multiplicação de $N(t)$ por $e^{-\mu T}$" produz um resultado (função) que representa "O número de sobreviventes dos indivíduos $N(t)$ após um intervalo de tempo T". Interprete analogamente as operações funcionais "Multiplicação por $1 - e^{-\mu T}$" e "Multiplicação por $e^{\nu T}$".

12b - Interprete probabilisticamente a operação sobre uma dinâmica Malthusiana $N(t)$ definida pela operação funcional resultante da multiplicação por $\frac{(1 - e^{-\mu T})}{N(t)}$

12c - Considere uma população estruturada em duas faixas etárias, como no problema de Fibonacci, uma delas imatura, $A_1(t)$ com dinâmica contínua de mortalidade Malthusiana e outra reprodutiva, $A_2(t)$, com dinâmica contínua de mortalidade e reprodutividade também Malthusiana.

Argumente convincentemente sobre o significado da expressão de cada termo e parâmetro do Modelo Matemático para a Dinâmica desta população expresso segundo o sistema de Equações Diferenciais Ordinárias com retardamento:

$$\begin{aligned}
\frac{dA_1(t)}{dt} &= \nu A_2(t) - \mu_1 A_1(t) - e^{-\mu_1 T_0}\nu A_2(t - T_0) \\
\frac{dA_2(t)}{dt} &= e^{-\mu_1 T_0}\nu A_2(t - T_0) - \mu_2 A_2(t)
\end{aligned}$$

12d - Suponha que T_0 seja "muito pequeno" comparado com as outras unidades intrínsecas de tempo $\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\mu_k}\right)$ do Modelo Malthusiano com retardamento e substitua a expressão $A_2(t - T_0)$ por sua aproximação de Taylor: $A_2(t - T_0) = A_2(t) - T_0 A_2'(t) + \frac{T_0^2}{2} A_2''(t)$ obtendo um sistema de equações diferenciais ordinárias (não retardadas).

12e - Utilize o Método Operacional e reescreva o Sistema de EDO obtido anteriormente na forma matricial operacional $P(D)\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$ e obtenha expressões elementares gerais para as funções $A_j(t)$ soluções do Sistema.

Questão EXTRA

Hipótese (Gauss - Legendre 1796) - Teorema (Hadamard - de la Vallé-Poussin 1896) sobre a densidade dos Números Primos.

A - Considere o Teorema de Distribuição Assintótica (da densidade da População) de Números Primos em $\mathbb{N}$, descrita pela função $\rho(n) = \frac{\pi(n)}{n}$, onde $\pi(n) = \#\{\text{Números primos } p \leq n\}$ em termos de uma linearização logarítmica assintótica utilizando uma Tabela de Números Primos (encontrada, por exemplo, no valioso M. Abramowitz & I. Stegun - Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables - online). (Sugestão: Como é fácil ver pela tabela que $\frac{1}{\rho(n)} = \frac{n}{\pi(n)} \to \infty$ mais "lentamente" do que $n \to \infty$ re-escale a variável "independente" n "logaritmizando-a" e analise o gráfico de $\frac{1}{\rho(n)}$ em função de $\log n$).

B - Interprete a questão em termos do Princípio Sensorial ("Lei") de Weber-Fechner.

Solução:

13A

A análise tem como ponto de partida a Tabela 1:

Tabela 1 – Sequência crescente dos primeiros 1000 números primos

n	$\pi(n)$	$\log(n)$	$\pi(n)/n$
1	0	0	0
2	0	0,301029996	0
3	1	0,477121255	0,333333333
4	2	0,602059991	0,5
5	2	0,698970004	0,4
6	3	0,77815125	0,5
7	3	0,84509804	0,428571429
8	4	0,903089987	0,5
9	4	0,954242509	0,444444444
10	4	1	0,4
11	4	1,041392685	0,363636364
12	5	1,079181246	0,416666667
13	5	1,113943352	0,384615385
14	6	1,146128036	0,428571429
15	6	1,176091259	0,4
16	6	1,204119983	0,375
17	6	1,230448921	0,352941176
18	7	1,255272505	0,388888889
19	7	1,278753601	0,368421053
20	8	1,301029996	0,4
21	8	1,322219295	0,380952381
22	8	1,342422681	0,363636364
23	8	1,361727836	0,347826087
24	9	1,380211242	0,375
25	9	1,397940009	0,36
26	9	1,414973348	0,346153846
27	9	1,431363764	0,333333333
28	9	1,447158031	0,321428571
29	9	1,462397998	0,310344828
30	10	1,477121255	0,333333333
31	10	1,491361694	0,322580645
32	11	1,505149978	0,34375
33	11	1,51851394	0,333333333
34	11	1,531478917	0,323529412
35	11	1,544068044	0,314285714
36	11	1,556302501	0,305555556
37	11	1,568201724	0,297297297
38	12	1,579783597	0,315789474
39	12	1,591064607	0,307692308
40	12	1,602059991	0,3
41	12	1,612783857	0,292682927
42	13	1,62324929	0,30952381
43	13	1,633468456	0,302325581
44	14	1,643452676	0,318181818
45	14	1,653212514	0,311111111
46	14	1,662757832	0,304347826
47	14	1,672097858	0,29787234
48	15	1,681241237	0,3125
49	15	1,69019608	0,306122449
50	15	1,698970004	0,3

n	$\pi(n)$	$\log(n)$	$\pi(n)/n$
51	15	1,707570176	0,294117647
52	15	1,716003344	0,288461538
53	15	1,72427587	0,283018868
54	16	1,73239376	0,296296296
55	16	1,740362689	0,290909091
56	16	1,748188027	0,285714286
57	16	1,755874856	0,280701754
58	16	1,763427994	0,275862069
59	16	1,770852012	0,271186441
60	17	1,77815125	0,283333333
61	17	1,785329835	0,278688525
62	18	1,792391689	0,290322581
63	18	1,799340549	0,285714286
64	18	1,806179974	0,28125
65	18	1,812913357	0,276923077
66	18	1,819543936	0,272727273
67	18	1,826074803	0,268656716
68	19	1,832508913	0,279411765
69	19	1,838849091	0,275362319
70	19	1,84509804	0,271428571
71	19	1,851258349	0,267605634
72	20	1,857332496	0,277777778
73	20	1,86332286	0,273972603
74	21	1,86923172	0,283783784
75	21	1,875061263	0,28
76	21	1,880813592	0,276315789
77	21	1,886490725	0,272727273
78	21	1,892094603	0,269230769
79	21	1,897627091	0,265822785
80	22	1,903089987	0,275
81	22	1,908485019	0,271604938
82	22	1,913813852	0,268292683
83	22	1,919078092	0,265060241
84	23	1,924279286	0,273809524
85	23	1,929418926	0,270588235
86	23	1,934498451	0,26744186
87	23	1,939519253	0,264367816
88	23	1,944482672	0,261363636
89	23	1,949390007	0,258426966
90	24	1,954242509	0,266666667
91	24	1,959041392	0,263736264
92	24	1,963787827	0,260869565
93	24	1,968482949	0,258064516
94	24	1,973127854	0,255319149
95	24	1,977723605	0,252631579
96	24	1,982271233	0,25
97	24	1,986771734	0,24742268
98	25	1,991226076	0,255102041
99	25	1,995635195	0,252525253
100	25	2	0,25

n	$\pi(n)$	$\log(n)$	$\pi(n)/n$
101	25	2,004321374	0,247524752
102	26	2,008600172	0,254901961
103	26	2,012837225	0,252427184
104	27	2,017033339	0,259615385
105	27	2,021189299	0,257142857
106	27	2,025305865	0,254716981
107	27	2,029383778	0,252336449
108	28	2,033423755	0,259259259
109	28	2,037426498	0,256880734
110	29	2,041392685	0,263636364
111	29	2,045322979	0,261261261
112	29	2,049218023	0,258928571
113	29	2,053078443	0,256637168
114	30	2,056904851	0,263157895
115	30	2,06069784	0,260869565
116	30	2,064457989	0,25862069
117	30	2,068185862	0,256410256
118	30	2,071882007	0,254237288
119	30	2,075546961	0,25210084
120	30	2,079181246	0,25
121	30	2,08278537	0,247933884
122	30	2,086359831	0,245901639
123	30	2,089905111	0,243902439
124	30	2,093421685	0,241935484
125	30	2,096910013	0,24
126	30	2,100370545	0,238095238
127	30	2,103803721	0,236220472
128	31	2,10720997	0,2421875
129	31	2,11058971	0,240310078
130	31	2,113943352	0,238461538
131	31	2,117271296	0,236641221
132	32	2,120573931	0,242424242
133	32	2,123851641	0,240601504
134	32	2,127104798	0,23880597
135	32	2,130333768	0,237037037
136	32	2,133538908	0,235294118
137	32	2,136720567	0,233576642
138	33	2,139879086	0,239130435
139	33	2,1430148	0,237410072
140	34	2,146128036	0,242857143
141	34	2,149219113	0,241134752
142	34	2,152288344	0,23943662
143	34	2,155336037	0,237762238
144	34	2,158362492	0,236111111
145	34	2,161368002	0,234482759
146	34	2,164352856	0,232876712
147	34	2,167317335	0,231292517
148	34	2,170261715	0,22972973
149	34	2,173186268	0,228187919
150	35	2,176091259	0,233333333

n	$\pi(n)$	$\log(n)$	$\pi(n)/n$
151	35	2,178976947	0,231788079
152	36	2,181843588	0,236842105
153	36	2,184691431	0,235294118
154	36	2,187520721	0,233766234
155	36	2,190331698	0,232258065
156	36	2,193124598	0,230769231
157	36	2,195899652	0,229299363
158	37	2,198657087	0,234177215
159	37	2,201397124	0,232704403
160	37	2,204119983	0,23125
161	37	2,206825876	0,229813665
162	37	2,209515015	0,228395062
163	37	2,212187604	0,226993865
164	38	2,214843848	0,231707317
165	38	2,217483944	0,23030303
166	38	2,220108088	0,228915663
167	38	2,222716471	0,22754491
168	39	2,225309282	0,232142857
169	39	2,227886705	0,230769231
170	39	2,230448921	0,229411765
171	39	2,23299611	0,228070175
172	39	2,235528447	0,226744186
173	39	2,238046103	0,225433526
174	40	2,240549248	0,229885057
175	40	2,243038049	0,228571429
176	40	2,245512668	0,227272727
177	40	2,247973266	0,225988701
178	40	2,250420002	0,224719101
179	40	2,252853031	0,223463687
180	41	2,255272505	0,227777778
181	41	2,257678575	0,226519337
182	42	2,260071388	0,230769231
183	42	2,26245109	0,229508197
184	42	2,264817823	0,22826087
185	42	2,267171728	0,227027027
186	42	2,269512944	0,225806452
187	42	2,271841607	0,22459893
188	42	2,274157849	0,223404255
189	42	2,276461804	0,222222222
190	42	2,278753601	0,221052632
191	42	2,281033367	0,219895288
192	43	2,283301229	0,223958333
193	43	2,285557309	0,222797927
194	44	2,28780173	0,226804124
195	44	2,290034611	0,225641026
196	44	2,292256071	0,224489796
197	44	2,294466226	0,223350254
198	45	2,29666519	0,227272727
199	45	2,298853076	0,226130653
200	46	2,301029996	0,23

n	$\pi(n)$	$\log(n)$	$\pi(n)/n$
201	46	2,303196057	0,228855721
202	46	2,305351369	0,227722772
203	46	2,307496038	0,226600985
204	46	2,309630167	0,225490196
205	46	2,311753861	0,224390244
206	46	2,31386722	0,223300971
207	46	2,315970345	0,222222222
208	46	2,318063335	0,221153846
209	46	2,320146286	0,220095694
210	46	2,322219295	0,219047619
211	46	2,324282455	0,218009479
212	47	2,326335861	0,221698113
213	47	2,328379603	0,220657277
214	47	2,330413773	0,219626168
215	47	2,33243846	0,218604651
216	47	2,334453751	0,217592593
217	47	2,336459734	0,216589862
218	47	2,338456494	0,21559633
219	47	2,340444115	0,214611872
220	47	2,342422681	0,213636364
221	47	2,344392274	0,212669683
222	47	2,346352974	0,211711712
223	47	2,348304863	0,210762332
224	48	2,350248018	0,214285714
225	48	2,352182518	0,213333333
226	48	2,354108439	0,212389381
227	48	2,356025857	0,211453744
228	49	2,357934847	0,214912281
229	49	2,359835482	0,213973799
230	50	2,361727836	0,217391304
231	50	2,36361198	0,216450216
232	50	2,365487985	0,215517241
233	50	2,367355921	0,214592275
234	51	2,369215857	0,217948718
235	51	2,371067862	0,217021277
236	51	2,372912003	0,216101695
237	51	2,374748346	0,215189873
238	51	2,376576957	0,214285714
239	51	2,378397901	0,213389121
240	52	2,380211242	0,216666667
241	52	2,382017043	0,215767635
242	53	2,383815366	0,219008264
243	53	2,385606274	0,218106996
244	53	2,387389826	0,217213115
245	53	2,389166084	0,216326531
246	53	2,390935107	0,215447154
247	53	2,392696953	0,214574899
248	53	2,394451681	0,213709677
249	53	2,396199347	0,212851406
250	53	2,397940009	0,212

n	$\pi(n)$	$\log(n)$	$\pi(n)/n$
251	53	2,399673721	0,211155378
252	54	2,401400541	0,214285714
253	54	2,403120521	0,213438735
254	54	2,404833717	0,212598425
255	54	2,40654018	0,211764706
256	54	2,408239965	0,2109375
257	54	2,409933123	0,210116732
258	55	2,411619706	0,213178295
259	55	2,413299764	0,212355212
260	55	2,414973348	0,211538462
261	55	2,416640507	0,210727969
262	55	2,418301291	0,209923664
263	55	2,419955748	0,209125475
264	56	2,421603927	0,212121212
265	56	2,423245874	0,211320755
266	56	2,424881637	0,210526316
267	56	2,426511261	0,209737828
268	56	2,428134794	0,208955224
269	56	2,42975228	0,208178439
270	57	2,431363764	0,211111111
271	57	2,432969291	0,210332103
272	58	2,434568904	0,213235294
273	58	2,436162647	0,212454212
274	58	2,437750563	0,211678832
275	58	2,439332694	0,210909091
276	58	2,440909082	0,210144928
277	58	2,442479769	0,209386282
278	59	2,444044796	0,212230216
279	59	2,445604203	0,211469534
280	59	2,447158031	0,210714286
281	59	2,44870632	0,209964413
282	60	2,450249108	0,212765957
283	60	2,451786436	0,212014134
284	61	2,45331834	0,214788732
285	61	2,45484486	0,214035088
286	61	2,456366033	0,213286713
287	61	2,457881897	0,212543554
288	61	2,459392488	0,211805556
289	61	2,460897843	0,211072664
290	61	2,462397998	0,210344828
291	61	2,463892989	0,209621993
292	61	2,465382851	0,20890411
293	61	2,46686762	0,208191126
294	62	2,46834733	0,210884354
295	62	2,469822016	0,210169492
296	62	2,471291711	0,209459459
297	62	2,472756449	0,208754209
298	62	2,474216264	0,208053691
299	62	2,475671188	0,20735786
300	62	2,477121255	0,206666667

n	$\pi(n)$	$\log(n)$	$\pi(n)/n$
301	62	2,478566496	0,205980066
302	62	2,480006943	0,205298013
303	62	2,481442629	0,204620462
304	62	2,482873584	0,203947368
305	62	2,484299839	0,203278689
306	62	2,485721426	0,202614379
307	62	2,487138375	0,201954397
308	63	2,488550717	0,204545455
309	63	2,489958479	0,203883495
310	63	2,491361694	0,203225806
311	63	2,492760389	0,202572347
312	64	2,494154594	0,205128205
313	64	2,495544338	0,204472843
314	65	2,496929648	0,207006369
315	65	2,498310554	0,206349206
316	65	2,499687083	0,205696203
317	65	2,501059262	0,205047319
318	66	2,50242712	0,20754717
319	66	2,503790683	0,206896552
320	66	2,505149978	0,20625
321	66	2,506505032	0,205607477
322	66	2,507855872	0,204968944
323	66	2,509202522	0,204334365
324	66	2,51054501	0,203703704
325	66	2,511883361	0,203076923
326	66	2,5132176	0,202453988
327	66	2,514547753	0,201834862
328	66	2,515873844	0,201219512
329	66	2,517195898	0,200607903
330	66	2,51851394	0,2
331	66	2,519827994	0,19939577
332	67	2,521138084	0,201807229
333	67	2,522444234	0,201201201
334	67	2,523746467	0,200598802
335	67	2,525044807	0,2
336	67	2,526339277	0,199404762
337	67	2,527629901	0,198813056
338	68	2,5289167	0,201183432
339	68	2,530199698	0,200589971
340	68	2,531478917	0,2
341	68	2,532754379	0,19941349
342	68	2,534026106	0,198830409
343	68	2,53529412	0,198250729
344	68	2,536558443	0,197674419
345	68	2,537819095	0,197101449
346	68	2,539076099	0,196531792
347	68	2,540329475	0,195965418
348	69	2,541579244	0,198275862
349	69	2,542825427	0,197707736
350	70	2,544068044	0,2

n	$\pi(n)$	$\log(n)$	$\pi(n)/n$
351	70	2,545307116	0,199430199
352	70	2,546542663	0,198863636
353	70	2,547774705	0,198300283
354	71	2,549003262	0,200564972
355	71	2,550228353	0,2
356	71	2,551449998	0,199438202
357	71	2,552668216	0,198879552
358	71	2,553883027	0,198324022
359	71	2,555094449	0,197771588
360	72	2,556302501	0,2
361	72	2,557507202	0,199445983
362	72	2,558708571	0,198895028
363	72	2,559906625	0,198347107
364	72	2,561101384	0,197802198
365	72	2,562292864	0,197260274
366	72	2,563481085	0,196721311
367	72	2,564666064	0,196185286
368	73	2,565847819	0,198369565
369	73	2,567026366	0,197831978
370	73	2,568201724	0,197297297
371	73	2,56937391	0,196765499
372	73	2,57054294	0,196236559
373	73	2,571708832	0,195710456
374	74	2,572871602	0,197860963
375	74	2,574031268	0,197333333
376	74	2,575187845	0,196808511
377	74	2,57634135	0,196286472
378	74	2,5774918	0,195767196
379	74	2,57863921	0,19525066
380	75	2,579783597	0,197368421
381	75	2,580924976	0,196850394
382	75	2,582063363	0,196335079
383	75	2,583198774	0,195822454
384	76	2,584331224	0,197916667
385	76	2,58546073	0,197402597
386	76	2,586587305	0,196891192
387	76	2,587710965	0,196382429
388	76	2,588831726	0,195876289
389	76	2,589949601	0,195372751
390	77	2,591064607	0,197435897
391	77	2,592176757	0,196930946
392	77	2,593286067	0,196428571
393	77	2,59439255	0,195928753
394	77	2,595496222	0,195431472
395	77	2,596597096	0,194936709
396	77	2,597695186	0,194444444
397	77	2,598790507	0,19395466
398	78	2,599883072	0,195979899
399	78	2,600972896	0,195488722
400	78	2,602059991	0,195

n	$\pi(n)$	$\log(n)$	$\pi(n)/n$
401	78	2,603144373	0,194513716
402	79	2,604226053	0,196517413
403	79	2,605305046	0,196029777
404	79	2,606381365	0,195544554
405	79	2,607455023	0,195061728
406	79	2,608526034	0,194581281
407	79	2,609594409	0,194103194
408	79	2,610660163	0,193627451
409	79	2,611723308	0,193154034
410	80	2,612783857	0,195121951
411	80	2,613841822	0,194647202
412	80	2,614897216	0,194174757
413	80	2,615950052	0,1937046
414	80	2,617000341	0,193236715
415	80	2,618048097	0,192771084
416	80	2,619093331	0,192307692
417	80	2,620136055	0,191846523
418	80	2,621176282	0,19138756
419	80	2,622214023	0,190930788
420	81	2,62324929	0,192857143
421	81	2,624282096	0,19239905
422	82	2,625312451	0,194312796
423	82	2,626340367	0,193853428
424	82	2,627365857	0,193396226
425	82	2,62838893	0,192941176
426	82	2,629409599	0,192488263
427	82	2,630427875	0,192037471
428	82	2,631443769	0,191588785
429	82	2,632457292	0,191142191
430	82	2,633468456	0,190697674
431	82	2,63447727	0,19025522
432	83	2,635483747	0,19212963
433	83	2,636487896	0,191685912
434	84	2,63748973	0,193548387
435	84	2,638489257	0,193103448
436	84	2,639486489	0,19266055
437	84	2,640481437	0,19221968
438	84	2,641474111	0,191780822
439	84	2,64246452	0,191343964
440	85	2,643452676	0,193181818
441	85	2,644438589	0,192743764
442	85	2,645422269	0,192307692
443	85	2,646403726	0,191873589
444	86	2,64738297	0,193693694
445	86	2,648360011	0,193258427
446	86	2,649334859	0,192825112
447	86	2,650307523	0,192393736
448	86	2,651278014	0,191964286
449	86	2,652246341	0,191536748
450	87	2,653212514	0,193333333
451	87	2,654176542	0,192904656
452	87	2,655138435	0,192477876
453	87	2,656098202	0,19205298
454	87	2,657055853	0,191629956
455	87	2,658011397	0,191208791
456	87	2,658964843	0,190789474
457	87	2,6599162	0,190371991
458	88	2,660865478	0,192139738
459	88	2,661812686	0,191721133
460	88	2,662757832	0,191304348
461	88	2,663700925	0,190889371
462	89	2,664641976	0,192640693
463	89	2,665580991	0,192224622
464	90	2,666517981	0,193965517
465	90	2,667452953	0,193548387
466	90	2,668385917	0,193133047
467	90	2,669316881	0,192719486
468	91	2,670245853	0,194444444
469	91	2,671172843	0,194029851
470	91	2,672097858	0,193617021
471	91	2,673020907	0,193205945
472	91	2,673941999	0,19279661
473	91	2,674861141	0,192389006
474	91	2,675778342	0,191983122
475	91	2,67669361	0,191578947
476	91	2,677606953	0,191176471
477	91	2,678518379	0,190775681
478	91	2,679427897	0,190376569
479	91	2,680335513	0,189979123
480	92	2,681241237	0,191666667
481	92	2,682145076	0,191268191
482	92	2,683047038	0,190871369
483	92	2,683947131	0,19047619
484	92	2,684845362	0,190082645
485	92	2,685741739	0,189690722
486	92	2,686636269	0,189300412
487	92	2,687528961	0,188911704
488	93	2,688419822	0,19057377
489	93	2,689308859	0,190184049
490	93	2,69019608	0,189795918
491	93	2,691081492	0,189409369
492	94	2,691965103	0,191056911
493	94	2,692846919	0,190669371
494	94	2,693726949	0,190283401
495	94	2,694605199	0,18989899
496	94	2,695481676	0,189516129
497	94	2,696356389	0,189134809
498	94	2,697229343	0,18875502
499	94	2,698100546	0,188376754
500	95	2,698970004	0,19

n	$\pi(n)$	$\log(n)$	$\pi(n)/n$
501	95	2,699837726	0,189620758
502	95	2,700703717	0,189243028
503	95	2,701567985	0,188866799
504	96	2,702430536	0,19047619
505	96	2,703291378	0,19009901
506	96	2,704150517	0,18972332
507	96	2,705007959	0,189349112
508	96	2,705863712	0,188976378
509	96	2,706717782	0,188605108
510	97	2,707570176	0,190196078
511	97	2,7084209	0,189823875
512	97	2,709269961	0,189453125
513	97	2,710117365	0,189083821
514	97	2,710963119	0,188715953
515	97	2,711807229	0,188349515
516	97	2,712649702	0,187984496
517	97	2,713490543	0,18762089
518	97	2,71432976	0,187258687
519	97	2,715167358	0,186897881
520	97	2,716003344	0,186538462
521	97	2,716837723	0,186180422
522	98	2,717670503	0,187739464
523	98	2,718501689	0,187380497
524	99	2,719331287	0,188931298
525	99	2,720159303	0,188571429
526	99	2,720985744	0,188212928
527	99	2,721810615	0,187855787
528	99	2,722633923	0,1875
529	99	2,723455672	0,187145558
530	99	2,72427587	0,186792453
531	99	2,725094521	0,186440678
532	99	2,725911632	0,186090226
533	99	2,726727209	0,185741088
534	99	2,727541257	0,185393258
535	99	2,728353782	0,185046729
536	99	2,72916479	0,184701493
537	99	2,729974286	0,184357542
538	99	2,730782276	0,18401487
539	99	2,731588765	0,183673469
540	99	2,73239376	0,183333333
541	99	2,733197265	0,182994455
542	100	2,733999287	0,184501845
543	100	2,73479983	0,184162063
544	100	2,7355989	0,183823529
545	100	2,736396502	0,183486239
546	100	2,737192643	0,183150183
547	100	2,737987326	0,182815356
548	101	2,738780558	0,184306569
549	101	2,739572344	0,183970856
550	101	2,740362689	0,183636364

n	$\pi(n)$	$\log(n)$	$\pi(n)/n$
551	101	2,741151599	0,183303085
552	101	2,741939078	0,182971014
553	101	2,742725131	0,182640145
554	101	2,743509765	0,182310469
555	101	2,744292983	0,181981982
556	101	2,745074792	0,181654676
557	101	2,745855195	0,181328546
558	102	2,746634199	0,182795699
559	102	2,747411808	0,182468694
560	102	2,748188027	0,182142857
561	102	2,748962861	0,181818182
562	102	2,749736316	0,181494662
563	102	2,750508395	0,181172291
564	103	2,751279104	0,182624113
565	103	2,752048448	0,182300885
566	103	2,752816431	0,181978799
567	103	2,753583059	0,181657848
568	103	2,754348336	0,181338028
569	103	2,755112266	0,181019332
570	104	2,755874856	0,18245614
571	104	2,756636108	0,182136602
572	105	2,757396029	0,183566434
573	105	2,758154622	0,183246073
574	105	2,758911892	0,182926829
575	105	2,759667845	0,182608696
576	105	2,760422483	0,182291667
577	105	2,761175813	0,181975737
578	106	2,761927838	0,183391003
579	106	2,762678564	0,183074266
580	106	2,763427994	0,182758621
581	106	2,764176132	0,182444062
582	106	2,764922985	0,182130584
583	106	2,765668555	0,181818182
584	106	2,766412847	0,181506849
585	106	2,767155866	0,181196581
586	106	2,767897616	0,180887372
587	106	2,768638101	0,180579216
588	107	2,769377326	0,181972789
589	107	2,770115295	0,181663837
590	107	2,770852012	0,181355932
591	107	2,771587481	0,181049069
592	107	2,772321707	0,180743243
593	107	2,773054693	0,180438449
594	108	2,773786445	0,181818182
595	108	2,774516966	0,181512605
596	108	2,77524626	0,181208054
597	108	2,775974331	0,180904523
598	108	2,776701184	0,180602007
599	108	2,777426822	0,180300501
600	109	2,77815125	0,181666667

n	$\pi(n)$	$\log(n)$	$\pi(n)/n$
601	109	2,778874472	0,181364393
602	110	2,779596491	0,182724252
603	110	2,780317312	0,182421227
604	110	2,781036939	0,182119205
605	110	2,781755375	0,181818182
606	110	2,782472624	0,181518152
607	110	2,783188691	0,18121911
608	111	2,783903579	0,182565789
609	111	2,784617293	0,18226601
610	111	2,785329835	0,181967213
611	111	2,78604121	0,181669394
612	111	2,786751422	0,181372549
613	111	2,787460475	0,181076672
614	112	2,788168371	0,182410423
615	112	2,788875116	0,182113821
616	112	2,789580712	0,181818182
617	112	2,790285164	0,181523501
618	113	2,790988475	0,182847896
619	113	2,791690649	0,182552504
620	114	2,792391689	0,183870968
621	114	2,7930916	0,183574879
622	114	2,793790385	0,183279743
623	114	2,794488047	0,182985554
624	114	2,79518459	0,182692308
625	114	2,795880017	0,1824
626	114	2,796574333	0,182108626
627	114	2,797267541	0,181818182
628	114	2,797959644	0,181528662
629	114	2,798650645	0,181240064
630	114	2,799340549	0,180952381
631	114	2,800029359	0,18066561
632	115	2,800717078	0,181962025
633	115	2,80140371	0,181674566
634	115	2,802089258	0,181388013
635	115	2,802773725	0,181102362
636	115	2,803457116	0,18081761
637	115	2,804139432	0,180533752
638	115	2,804820679	0,180250784
639	115	2,805500858	0,179968701
640	115	2,806179974	0,1796875
641	115	2,80685803	0,179407176
642	116	2,807535028	0,180685358
643	116	2,808210973	0,180404355
644	117	2,808885867	0,181677019
645	117	2,809559715	0,181395349
646	117	2,810232518	0,181114551
647	117	2,810904281	0,180834621
648	118	2,811575006	0,182098765
649	118	2,812244697	0,181818182
650	118	2,812913357	0,181538462

n	$\pi(n)$	$\log(n)$	$\pi(n)/n$
651	118	2,813580989	0,181259601
652	118	2,814247596	0,180981595
653	118	2,814913181	0,180704441
654	119	2,815577748	0,181957187
655	119	2,8162413	0,181679389
656	119	2,816903839	0,181402439
657	119	2,81756537	0,181126332
658	119	2,818225894	0,180851064
659	119	2,818885415	0,180576631
660	120	2,819543936	0,181818182
661	120	2,820201459	0,181543116
662	121	2,820857989	0,182779456
663	121	2,821513528	0,182503771
664	121	2,822168079	0,182228916
665	121	2,822821645	0,181954887
666	121	2,823474229	0,181681682
667	121	2,824125834	0,181409295
668	121	2,824776462	0,181137725
669	121	2,825426118	0,180866966
670	121	2,826074803	0,180597015
671	121	2,82672252	0,180327869
672	121	2,827369273	0,180059524
673	121	2,828015064	0,179791976
674	122	2,828659897	0,181008902
675	122	2,829303773	0,180740741
676	122	2,829946696	0,180473373
677	122	2,830588669	0,180206795
678	123	2,831229694	0,181415929
679	123	2,831869774	0,181148748
680	123	2,832508913	0,180882353
681	123	2,833147112	0,18061674
682	123	2,833784375	0,180351906
683	123	2,834420704	0,180087848
684	124	2,835056102	0,18128655
685	124	2,835690571	0,181021898
686	124	2,836324116	0,180758017
687	124	2,836956737	0,180494905
688	124	2,837588438	0,180232558
689	124	2,838219222	0,179970972
690	124	2,838849091	0,179710145
691	124	2,839478047	0,179450072
692	125	2,840106094	0,180635838
693	125	2,840733235	0,18037518
694	125	2,84135947	0,180115274
695	125	2,841984805	0,179856115
696	125	2,84260924	0,179597701
697	125	2,843232778	0,179340029
698	125	2,843855423	0,179083095
699	125	2,844477176	0,178826896
700	125	2,84509804	0,178571429

n	$\pi(n)$	$\log(n)$	$\pi(n)/n$
701	125	2,845718018	0,17831669
702	126	2,846337112	0,179487179
703	126	2,846955325	0,179231863
704	126	2,847572659	0,178977273
705	126	2,848189117	0,178723404
706	126	2,848804701	0,178470255
707	126	2,849419414	0,178217822
708	126	2,850033258	0,177966102
709	126	2,850646235	0,177715092
710	127	2,851258349	0,178873239
711	127	2,851869601	0,17862166
712	127	2,852479994	0,178370787
713	127	2,85308953	0,178120617
714	127	2,853698212	0,177871148
715	127	2,854306042	0,177622378
716	127	2,854913022	0,177374302
717	127	2,855519156	0,177126918
718	127	2,856124444	0,176880223
719	127	2,85672889	0,176634214
720	128	2,857332496	0,177777778
721	128	2,857935265	0,177531207
722	128	2,858537198	0,177285319
723	128	2,859138297	0,177040111
724	128	2,859738566	0,17679558
725	128	2,860338007	0,176551724
726	128	2,860936621	0,17630854
727	128	2,861534411	0,176066025
728	129	2,862131379	0,177197802
729	129	2,862727528	0,176954733
730	129	2,86332286	0,176712329
731	129	2,863917377	0,176470588
732	129	2,864511081	0,176229508
733	129	2,865103975	0,175989086
734	130	2,86569606	0,177111717
735	130	2,866287339	0,176870748
736	130	2,866877814	0,176630435
737	130	2,867467488	0,176390773
738	130	2,868056362	0,176151762
739	130	2,868644438	0,175913396
740	131	2,86923172	0,177027027
741	131	2,869818208	0,176788124
742	131	2,870403905	0,176549865
743	131	2,870988814	0,176312248
744	132	2,871572936	0,177419355
745	132	2,872156273	0,177181208
746	132	2,872738827	0,1769437
747	132	2,873320602	0,176706827
748	132	2,873901598	0,176470588
749	132	2,874481818	0,17623498
750	132	2,875061263	0,176

n	$\pi(n)$	$\log(n)$	$\pi(n)/n$
751	132	2,875639937	0,175765646
752	133	2,876217841	0,176861702
753	133	2,876794976	0,176626826
754	133	2,877371346	0,176392573
755	133	2,877946952	0,17615894
756	133	2,878521796	0,175925926
757	133	2,87909588	0,175693527
758	134	2,879669206	0,176781003
759	134	2,880241776	0,17654809
760	134	2,880813592	0,176315789
761	134	2,881384657	0,1760841
762	135	2,881954971	0,177165354
763	135	2,882524538	0,176933159
764	135	2,883093359	0,176701571
765	135	2,883661435	0,176470588
766	135	2,88422877	0,176240209
767	135	2,884795364	0,17601043
768	135	2,88536122	0,17578125
769	135	2,88592634	0,175552666
770	136	2,886490725	0,176623377
771	136	2,887054378	0,176394293
772	136	2,8876173	0,176165803
773	136	2,888179494	0,175937904
774	137	2,888740961	0,177002584
775	137	2,889301703	0,176774194
776	137	2,889861721	0,176546392
777	137	2,890421019	0,176319176
778	137	2,890979597	0,176092545
779	137	2,891537458	0,175866496
780	137	2,892094603	0,175641026
781	137	2,892651034	0,175416133
782	137	2,893206753	0,175191816
783	137	2,893761762	0,174968072
784	137	2,894316063	0,174744898
785	137	2,894869657	0,174522293
786	137	2,895422546	0,174300254
787	137	2,895974732	0,17407878
788	138	2,896526217	0,175126904
789	138	2,897077003	0,174904943
790	138	2,897627091	0,174683544
791	138	2,898176483	0,174462705
792	138	2,898725182	0,174242424
793	138	2,899273187	0,174022699
794	138	2,899820502	0,173803526
795	138	2,900367129	0,173584906
796	138	2,900913068	0,173366834
797	138	2,901458321	0,17314931
798	139	2,902002891	0,174185464
799	139	2,902546779	0,173967459
800	139	2,903089987	0,17375

n	$\pi(n)$	$\log(n)$	$\pi(n)/n$
801	139	2,903632516	0,173533084
802	139	2,904174368	0,173316708
803	139	2,904715545	0,173100872
804	139	2,905256049	0,172885572
805	139	2,90579588	0,172670807
806	139	2,906335042	0,172456576
807	139	2,906873535	0,172242875
808	139	2,907411361	0,172029703
809	139	2,907948522	0,171817058
810	140	2,908485019	0,172839506
811	140	2,909020854	0,172626387
812	141	2,909556029	0,17364532
813	141	2,910090546	0,173431734
814	141	2,910624405	0,173218673
815	141	2,911157609	0,173006135
816	141	2,911690159	0,172794118
817	141	2,912222057	0,172582619
818	141	2,912753304	0,172371638
819	141	2,913283902	0,172161172
820	141	2,913813852	0,17195122
821	141	2,914343157	0,171741778
822	142	2,914871818	0,172749392
823	142	2,915399835	0,17253949
824	143	2,915927212	0,173543689
825	143	2,916453949	0,173333333
826	143	2,916980047	0,173123487
827	143	2,91750551	0,172914148
828	144	2,918030337	0,173913043
829	144	2,918554531	0,173703257
830	145	2,919078092	0,174698795
831	145	2,919601024	0,174488568
832	145	2,920123326	0,174278846
833	145	2,920645001	0,174069628
834	145	2,921166051	0,173860911
835	145	2,921686475	0,173652695
836	145	2,922206277	0,173444976
837	145	2,922725458	0,173237754
838	145	2,923244019	0,173031026
839	145	2,923761961	0,172824791
840	146	2,924279286	0,173809524
841	146	2,924795996	0,173602854
842	146	2,925312091	0,173396675
843	146	2,925827575	0,173190985
844	146	2,926342447	0,172985782
845	146	2,926856709	0,172781065
846	146	2,927370363	0,172576832
847	146	2,92788341	0,172373081
848	146	2,928395852	0,172169811
849	146	2,92890769	0,17196702
850	146	2,929418926	0,171764706

n	$\pi(n)$	$\log(n)$	$\pi(n)/n$
851	146	2,92992956	0,171562867
852	146	2,930439595	0,171361502
853	146	2,930949031	0,17116061
854	147	2,931457871	0,172131148
855	147	2,931966115	0,171929825
856	147	2,932473765	0,171728972
857	147	2,932980822	0,171528588
858	148	2,933487288	0,172494172
859	148	2,933993164	0,172293364
860	149	2,934498451	0,173255814
861	149	2,935003151	0,173054588
862	149	2,935507266	0,172853828
863	149	2,936010796	0,172653534
864	150	2,936513742	0,173611111
865	150	2,937016107	0,173410405
866	150	2,937517892	0,173210162
867	150	2,938019097	0,173010381
868	150	2,938519725	0,17281106
869	150	2,939019776	0,172612198
870	150	2,939519253	0,172413793
871	150	2,940018155	0,172215844
872	150	2,940516485	0,172018349
873	150	2,941014244	0,171821306
874	150	2,941511433	0,171624714
875	150	2,942008053	0,171428571
876	150	2,942504106	0,171232877
877	150	2,942999593	0,171037628
878	151	2,943494516	0,171981777
879	151	2,943988875	0,171786121
880	151	2,944482672	0,171590909
881	151	2,944975908	0,171396141
882	152	2,945468585	0,172335601
883	152	2,945960704	0,17214043
884	153	2,946452265	0,173076923
885	153	2,946943271	0,172881356
886	153	2,947433722	0,17268623
887	153	2,94792362	0,172491545
888	154	2,948412966	0,173423423
889	154	2,948901761	0,173228346
890	154	2,949390007	0,173033708
891	154	2,949877704	0,172839506
892	154	2,950364854	0,17264574
893	154	2,950851459	0,172452408
894	154	2,951337519	0,172259508
895	154	2,951823035	0,172067039
896	154	2,95230801	0,171875
897	154	2,952792443	0,171683389
898	154	2,953276337	0,171492205
899	154	2,953759692	0,171301446
900	154	2,954242509	0,171111111

n	$\pi(n)$	$\log(n)$	$\pi(n)/n$
901	154	2,954724791	0,170921199
902	154	2,955206538	0,170731707
903	154	2,95568775	0,170542636
904	154	2,95616843	0,170353982
905	154	2,956648579	0,170165746
906	154	2,957128198	0,169977925
907	154	2,957607287	0,169790518
908	155	2,958085849	0,170704846
909	155	2,958563883	0,170517052
910	155	2,959041392	0,17032967
911	155	2,959518377	0,1701427
912	156	2,959994838	0,171052632
913	156	2,960470778	0,170865279
914	156	2,960946196	0,170678337
915	156	2,961421094	0,170491803
916	156	2,961895474	0,170305677
917	156	2,962369336	0,170119956
918	156	2,962842681	0,169934641
919	156	2,963315511	0,169749728
920	157	2,963787827	0,170652174
921	157	2,96425963	0,170466884
922	157	2,964730921	0,170281996
923	157	2,965201701	0,170097508
924	157	2,965671971	0,16991342
925	157	2,966141733	0,16972973
926	157	2,966610987	0,169546436
927	157	2,967079734	0,169363538
928	157	2,967547976	0,169181034
929	157	2,968015714	0,168998924
930	158	2,968482949	0,169892473
931	158	2,968949681	0,169709989
932	158	2,969415912	0,169527897
933	158	2,969881644	0,169346195
934	158	2,970346876	0,169164882
935	158	2,970811611	0,168983957
936	158	2,971275849	0,168803419
937	158	2,971739591	0,168623266
938	159	2,972202838	0,169509595
939	159	2,972665592	0,169329073
940	159	2,973127854	0,169148936
941	159	2,973589623	0,168969182
942	160	2,974050903	0,16985138
943	160	2,974511693	0,169671262
944	160	2,974971994	0,169491525
945	160	2,975431809	0,169312169
946	160	2,975891136	0,169133192
947	160	2,976349979	0,168954593
948	161	2,976808337	0,169831224
949	161	2,977266212	0,169652266
950	161	2,977723605	0,169473684

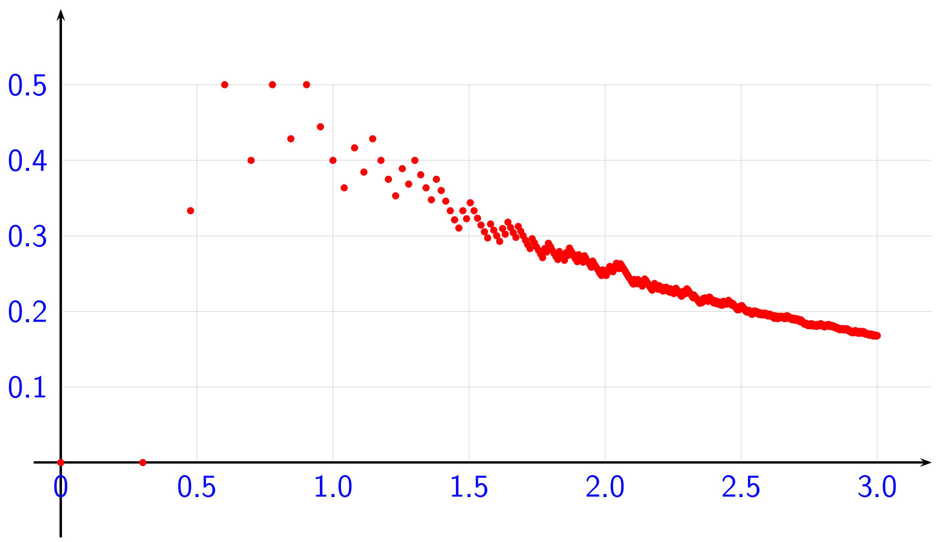
n	$\pi(n)$	$\log(n)$	$\pi(n)/n$
951	161	2,978180517	0,169295478
952	161	2,978636948	0,169117647
953	161	2,979092901	0,168940189
954	162	2,979548375	0,169811321
955	162	2,980003372	0,169633508
956	162	2,980457892	0,169456067
957	162	2,980911938	0,169278997
958	162	2,981365509	0,169102296
959	162	2,981818607	0,168925965
960	162	2,982271233	0,16875
961	162	2,982723388	0,168574402
962	162	2,983175072	0,168399168
963	162	2,983626287	0,168224299
964	162	2,984077034	0,168049793
965	162	2,984527313	0,167875648
966	162	2,984977126	0,167701863
967	162	2,985426474	0,167528438
968	163	2,985875357	0,16838843
969	163	2,986323777	0,168214654
970	163	2,986771734	0,168041237
971	163	2,98721923	0,167868177
972	164	2,987666265	0,16872428
973	164	2,98811284	0,168550874
974	164	2,988558957	0,168377823
975	164	2,989004616	0,168205128
976	164	2,989449818	0,168032787
977	164	2,989894564	0,167860798
978	165	2,990338855	0,168711656
979	165	2,990782692	0,168539326
980	165	2,991226076	0,168367347
981	165	2,991669007	0,168195719
982	165	2,992111488	0,16802444
983	165	2,992553518	0,16785351
984	166	2,992995098	0,168699187
985	166	2,99343623	0,168527919
986	166	2,993876915	0,168356998
987	166	2,994317153	0,168186424
988	166	2,994756945	0,168016194
989	166	2,995196292	0,167846309
990	166	2,995635195	0,167676768
991	166	2,996073654	0,167507568
992	167	2,996511672	0,168346774
993	167	2,996949248	0,168177241
994	167	2,997386384	0,168008048
995	167	2,997823081	0,167839196
996	167	2,998259338	0,167670683
997	167	2,998695158	0,167502508
998	168	2,999130541	0,168336673
999	168	2,999565488	0,168168168
1000	168	3	0,168

Fonte – https://pt.wikipedia.org/

Observação: (a) Os valores na segunda coluna (valores da função $\pi(n)$) foram obtidos mediante ao uso de uma fórmula do Excel (a saber CONT.SES()). (b) À medida que os valores de n crescem, os valores de $\rho(n)$ tendem a zero (deforma lenta)

Gráfico de dispersão da função $\rho(n) = \dfrac{\pi(n)}{n}$ com valores de n logaritmizados

Figura 2 – Gráfico de dispersão de $\rho(n)$



Fonte – Elaborado pelo autor

13B

A lei de Weber-Fechner tenta descrever a relação existente entre a magnitude física de um estímulo e a intensidade do estímulo que é percebida. Pode ser enunciada como: "a resposta a qualquer estímulo é proporcional ao logaritmo da intensidade do estímulo". Esta lei aplica-se aos 5 sentidos, mas as suas implicações são mais bem entendidas quando se refere aos estímulos provocados pela luz e pelo som. É decorrente do fenômeno assim descrito, que as medidas de percepção da intensidade sonora pelo ouvido humano, e luminosa pelos órgãos de visão, são feitas por gran-

dezas logarítmicas. É o caso do Decibel (dB) definido como 10 vezes o logaritmo decimal da intensidade sonora. A mesma grandeza logarítmica descreve também a intensidade luminosa percepcionada, sendo genericamente usada em óptica e engenharia. (WIKIPEDIA)
Ernst Heinrich Weber (1795–1878) foi um dos primeiros a fazer uma aproximação ao estudo da resposta do ser humano a um estímulo físico de uma maneira quantitativa. Gustav Theodor Fechner (1801–1887) mais tarde elaborou uma interpretação teórica elaborada sobre as descobertas de Weber. (Encyclopædia Britannica Online)
Com base nas afirmações anteriores, no que Gauss já havia constatado em suas observações feitas na tabela por ele construída (onde relacionava os valores de $n =$ "posição de um número na sequência crescente de primos" e a densidade média $\rho(n) = \dfrac{\pi(n)}{n}$, onde:

$$\pi(n) = \text{“quantidade de números primos existentes no intervalo } [0, n]''$$

e, posteriormente, substituindo os valores de n por $\log(n)$), e verificando-se, tabuladamente (tabela construída no Excel), constatamos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho(n)}{\dfrac{1}{\log(n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n} \log(n) = 1.$$