Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada

Prova 3 da disciplina Biomatemática I (MT 624)
Prof. Dr. Wilson Castro Ferreira Júnior

Estudante: Fábio H. Carvalho (RA 232926)

Questão 1 - Método de Fourier e Linearização Logaritmica Assintótica
Considere um Modelo Matemático descrito por funções $x :\to \mathbb{C}^n,\ \ x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^t$ definidas Newtoniamente como soluções de uma equação diferencial vetorial "Malthusiana" da forma abaixo em que $S \in M_n(\mathbb{R})$ é uma matriz $n \times n$ simétrica:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = Sx.$$

a-Mostre que se v for um autovetor de S referente ao autovalor λ, $Sv = \lambda v$, então a função, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ da forma $h(t) = e^{\lambda t}v$ é solução da equação. (Chamada Solução básica de Fourier).

b-Verifique a veracidade do Principio de Superposição: "Se $h_k(t) = e^{\lambda_k t}v^k$ são soluções básicas de Fourier, então, qualquer combinação linear $h = \sum_k c_k e^{\lambda_k t} v^k$ (para conjuntos de coeficientes $\{c_k\} \in \mathbb{C}$) é solução do mesmo sistema com condição inicial $h(0) = \sum_k c_k v^k$.

c-Citando o enunciado completo do Teorema Espectral para matrizes simétricas, verifique que o Problema de valor inicial $\dfrac{dX}{dt} = SX,\ X(0) = \in \mathbb{C}^n$ sempre tem solução obtida pelo Principio de Superposição, e determine os valores dos respectivos coeficientes c_k como projeções. (Observação: É relativamente fácil demonstrar que, existindo, a solução do Problema de Valor Inicial é único.(V.Bassanezi-Ferreira). Portanto a solução espectral de Fourier é "A solução".)

d-Se a matriz S tem seus autovalores (reais) ordenados segundo $\lambda_{k+1} < \lambda_k < \ldots < \lambda_1$, mostre que, em geral, uma solução $x(t)$ da Equação $\frac{dx}{dt} = Sx$, admite a seguinte linearização assintotica: $\frac{\log|x(t)|}{\lambda_1 t} \to 1$. (Obs: O Teorema espectral garante a ortogonalidade dos autovalores $\{v_k\}$.)

e-Portanto, se $x(t_n)$ são dados de um fenômeno dinâmico com t_n muito grandes, qual o teste gráfico natural (e porque) deve ser seguido para determinar se é razoável descrever $x(t_n)$ por um Modelo $\frac{dx}{dt} = Sx$ e qual o maior valor de seu autovalor.

EXTRA: Considere a Equação Diferencial Matricial (Operacional) $\frac{dX}{dt} = AX$, onde $A \in M_n(\mathbb{C})$, e $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$="Matrizes quadradas complexas de ordem n".

f-Mostre que cada coluna da matriz X é solução da Equação Vetorial $\frac{dX}{dt} = AX$, e, vice-versa, se cada coluna for solução da Equação Diferencial Vetorial então a respectiva matriz será solução da Equação Operacional (Matricial).

Definição: A solução $U(t)$ da Equação Diferencial Matricial $\frac{dX}{dt} = AX$ com condição inicial $U(0) = I$ ="Matriz Identidade de ordem n" , é denotada pela notação exponencial: $U(t) = e^{At}$.

g-Utilizando os argumentos do Método Operacional mostre que a solução de uma equação com influencia externa $f(t)(f : \mathbb{R} \to \mathbb{C})$ $\frac{dx}{dt} = Sx + f(t)$ é da forma
$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)\ d\tau$..

Resolução:

a- Se $Sv = \lambda v$ então, para $h(t) = e^{\lambda t} v$, temos

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= e^{\lambda t}\lambda v \\ &= e^{\lambda t} S v \\ &= S\left(e^{\lambda t} v\right) \\ &= Sh. \end{aligned}$$

Portanto, $h = h(t)$ é solução da equação $\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = Sx.$

b- Sejam $h_k(t) = e^{\lambda_k t} v^k$ soluções básicas de Fourier, então da linearidade do operador $\frac{d}{dt}$ e do produto de matrizes, segue que se $h = \sum_k c_k e^{\lambda_k t} v^k$

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{d}{dt}\sum_k c_k e^{\lambda_k t} v^k \\ &= \sum_k c_k \frac{d}{dt} e^{\lambda_k t} v^k \\ &= \sum_k c_k e^{\lambda_k t} \lambda_k v^k \\ &= \sum_k c_k e^{\lambda_k t} S v^k \\ &= S\left(\sum_k c_k e^{\lambda_k t} v^k\right) \\ &= Sh. \end{aligned}$$

Portanto, h é a solução da equação com condição inicial $h(0) = \sum_k c_k e^{\lambda_k \cdot (0)} v^k = \sum_k c_k v^k$.

c- Seja uma matriz $A_{n\times n}$ simétrica, então o Teorema Espectral nos garante que A tem n autovalores reais (não necessariamente distintos), que se a multiplicidade de um dado autovalor é m então o autosubespaço correspondente a esse autovalor é m, que os autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais e ainda que A é diagonalizável admitindo fatoração da forma

$$A = PDP^t = \begin{pmatrix} v^1 & \dots & v^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 & \dots & v^n \end{pmatrix}^t.$$

em que v^j é o autovetor (com suas coordenadas dispostas em coluna) de A associado ao autovalor λ_j.

Observemos ainda que se h e y são duas soluções distintas de $\frac{dx}{dt} = Sx$ então, a função $z = h - y$ é tal que $Sz = S(h-y) = \frac{d(h-y)}{dt} = 0$ e, portanto, z é uma matriz constante. Se, além disso, $h(0) = y(0)$, então z é nula e, portanto, a solução do Problema de Valor Inicial (descrita no item b-) é única.

Agora, como para $\lambda_i \neq \lambda_j$ temos que o produto escalar $v^i \cdot v^j = 0$ então fazendo os produtos escalares $\displaystyle\sum_k c_k e^{\lambda_k t} v^k \cdot v^j$ para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, após reordenamos os autovalores convenientemente e supondo que λ_j é autovalor de multiplicidade m, obtemos $h(t) \cdot v^j = e^{\lambda_j t} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} (c_j |v^j|^2$. No caso particular em que $m = 1$ é evidente que c_j é $e^{-\lambda_j t}$ multiplicado pela projeção da função $h = h(t)$ sobre v^j.

d- Supondo $\lambda_{k+1} < \lambda_k < \ldots < \lambda_1$ tomando uma solução $x(t) = \displaystyle\sum_k c_k e^{\lambda_k t} v^k$ temos da desigualdade triangular que $|x(t)| \leq \displaystyle\sum_k |c_k e^{\lambda_k t} v^k| \leq e^{\lambda_1 t} \sum_k |c_k||v^k|$ e, portanto,

$$\frac{\log |x(t)|}{\lambda_1 t} = \frac{\lambda_1 t + \log \displaystyle\sum_k |c_k||v^k|}{\lambda_1 t} \to 1.$$

e- Como $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{\log |x(t)|}{\lambda_1 t} = 1$ o gráfico de $x = x(t)$, em escala logarítmica, deve se aproximar assintoticamente do gráfico de $x = \lambda_1 t$, reta cujo coeficiente angular é o maior autovalor de S. Caso isso não ocorra, um modelo satisfazendo $\dfrac{dX}{dt} = SX$ não deve ser utilizado.

f- Considere as matrizes complexas $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \ldots & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \ldots & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix}$

e $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$. A Equação Diferencial Matricial $\frac{dX}{dt} = AX$, é satisfeita se, e somente se, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$
\begin{pmatrix}
\frac{d}{dt} x_{1j} \\
\\
\frac{d}{dt} x_{2j} \\
\\
\frac{d}{dt} x_{3j} \\
\vdots \\
\frac{d}{dt} x_{nj}
\end{pmatrix}
= \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn}
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
x_{1j} \\ x_{2j} \\ x_{3j} \\ \vdots \\ x_{nj}
\end{pmatrix}
$$

$$
= \left\{
\begin{array}{lllll}
a_{11}x_{1j} & +a_{12}x_{2j} & +a_{13}x_{3j} & +\ldots & +a_{1n}x_{nj} \\
a_{21}x_{1j} & +a_{22}x_{2j} & +a_{23}x_{3j} & +\ldots & +a_{2n}x_{nj} \\
a_{31}x_{1j} & +a_{32}x_{2j} & +a_{33}x_{3j} & +\ldots & +a_{3n}x_{nj} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1}x_{1j} & +a_{n2}x_{2j} & +a_{n3}x_{3j} & +\ldots & +a_{nn}x_{nj}
\end{array}
\right. \tag{0.2}
$$

de maneira que $\frac{d}{dt}x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_{ij}$. Portanto,para que a matriz X seja solução da equação diferencial $\frac{dX}{dt} = AX$ é necessário e suficiente que cada vetor coluna de X seja solução da equação.

g- De $\frac{dx}{dt} = Dx = Ax + f(t)$ segue $(D-a)x = f(t)$ de onde $D(xe^{-At}) = (D-A)xe^{-At} = f(t)e^{-At}$. Portanto, $xe^{-At} = \int_0^t f(\tau)e^{-A\tau}d\tau$ e, então,

$$x(t) = e^{At}\int_0^t f(\tau)e^{-A\tau}d\tau.$$

Questão 02: Médias e Homogeneidade

Uma Média M_φ para uma sequência de dados numéricos $a_k > 0$, $M_\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ segundo Kolmogorov-Nagumo (KN) é definida da forma
$M_\varphi(a_1, \ldots, a_n) = \varphi^{-1}(\frac{1}{N}\{\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_N)\})$ onde φ é uma função real contínua estritamente monotônica e convexa/côncava.

a- Obtenha as respectivas funções φ para que as Médias usuais, Aritmética, Harmônica, Geométrica e Quadrática sejam da forma prevista acima.

b- Analisando **o gráfico** de suas respectivas funções representativas, dados dois números positivos, $0 < a < b$, discuta a ordem para os valores obtidos de suas Médias $M_\varphi(a, b)$, com funções $\varphi(x) = x^{2n}$, e $\varphi(x) = x^{\frac{1}{2n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

c- Argumente, com base na questão anterior,que escolhendo capciosamente a função $\varphi(x) = x^\lambda$, $\lambda > 0$, respectiva média KN M_φ de filhos de um casal brasileiro pode ser qualquer número real entre $m = \min\{a_k\}$ e $M = \max\{a_k\}$ onde $a_k =$"Número de casais com k filhos".

d- Considere uma população de N indivíduos submetidos à medida de um aspecto biológico (digamos, a idade) cujos valores são representados (no respectivo espaço de aspecto etário) pelos seguintes números positivos $\{a_k\}_{1\leq k\leq n}$. Discuta, com argumentos, a definição de uma medida de Heterogeneidade desta população quanto a este aspecto em termos de Médias gerais de KN.

e- Considere a dinâmica de uma população descrita pelo Modelo Malthusiano de mortalidade $\dfrac{dN}{dt} = -\mu N$, $N(0) = N_0$. Defina, com justificativa, a expressão para a Média de Sobrevivência KN M_φ, com $\varphi(x) = x^\lambda$, $\lambda > -1$, e calcule-a em termos elementares para $\lambda = n \in \mathbb{N}$. (Sugestão de Calculo Elementar: Derivada paramétrica $\frac{d}{d\mu}$ de integral conhecida. Observação: As Médias Harmônica e Geométrica para a sobrevivência são infinitas e, portanto, não trazem informação útil sobre a distribuição de sobrevivência da população, o mesmo acontecendo para $\lambda \leq -1$.)

Resolução:

a- Primeiramente, para o caso da Média Aritmética Ponderada $M_A(a_1, \ldots, a_N) = s_1a_1 + \ldots + s_Na_N$, com $s_1 + \ldots + s_N = 1$, podemos tomar $\phi(x) = \phi^{-1}(x) = x$, a função identidade e, neste caso,

$$\begin{aligned}
M_A(a_1, \ldots, a_N) &= \sum_{j=1}^{N} s_j a_j \\
&= \phi^{-1}\left(\sum_{j=1}^{N} s_j a_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{N} s_j \phi(a_j) \\
&= M_\phi(a_1, \cdots, a_N).
\end{aligned}$$

Para o caso da Média Geométrica de $a_1, \ldots, a_N$ dada por $M_G = \sqrt[N]{a_1 \cdots a_n}$ basta considerarmos as funções $\phi(x) = \ln(x)$ e $\phi^{-1}(x) = e^x$. Neste caso,

$$
\begin{aligned}
M_G &= \sqrt[N]{a_1 \cdots a_n} \\
&= e^{\frac{1}{N}\ln\left(\Pi_{j=1}^{N} a_j\right)} \\
&= e^{\left(\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{j=1}^{N} ln(a_j)\right)} \\
&= e^{M_A(\ln(a_1),\cdots,\ln(a_N))} \\
&= M_\phi(a_1, \cdots, a_N).
\end{aligned}
$$

Agora para a Média Harmônica, $M_H(a_1, \ldots, a_N) = \dfrac{N}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{a_i}}$ podemos tomar $\phi(x) = \phi^{-1}(x) = \dfrac{1}{x}$, obtendo,

$$
\begin{aligned}
M_H(a_1, \ldots, a_N) &= \frac{N}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{a_i}} \\
&= \frac{1}{\left(\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{a_i}\right)} \\
&= \phi^{-1}\left(M_A(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_N))\right).
\end{aligned}
$$

Finalmente, para a média quadrática $M_Q = \sqrt{\dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} (a_i)^2}{N}}$ tomamos $\phi(x) = x^2$, e $\phi^{-1}(x) = \sqrt{x}$, e, daí,

$$
\begin{aligned}
M_Q &= \sqrt{\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} (a_i)^2}{N}} \\
&= \phi^{-1}\left(\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \phi(a_i)}{N}\right).
\end{aligned}
$$

b- Seja $n \in \mathbb{N}$. A figura a seguir representa os gráficos de $\varphi(x) = x^{2n}$, (em azul) e $\phi(x) = x^{\frac{1}{2n}}$ (em vermelho).

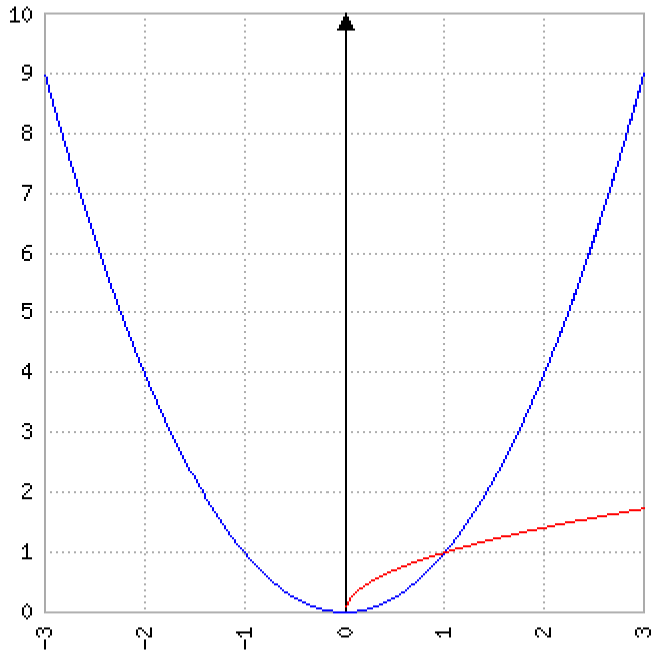

Figure 0.1: $\varphi(x) = x^{2n} > \phi(x) = x^{\frac{1}{2n}},\ n \in \mathbb{N}, \forall x > 1$

.

Para números reais positivos a e b temos

$$\begin{aligned} M_\varphi(a,b) &= \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right) \\ &= \phi\left(\frac{a^{2n}+b^{2n}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{a^{2n}+b^{2n}}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} M_\phi(a,b) &= \phi^{-1}\left(\frac{\phi(a)+\phi(b)}{2}\right) \\ &= \varphi\left(\frac{a^{\frac{1}{2n}}+b^{\frac{1}{2n}}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{a^{\frac{1}{2n}}+b^{\frac{1}{2n}}}{2}\right)^{2n}. \end{aligned}$$

Assim, se supomos que $a, b \geq 1$, segue que $\dfrac{a^{\frac{1}{2n}}+b^{\frac{1}{2n}}}{2} \leq \dfrac{a^{2n}+b^{2n}}{2}$.

c-Para $\varphi(x) = x^\lambda$,

$$\begin{aligned} M_\varphi(a_0, a_1, \ldots, a_N) &= \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a_0) + \varphi(a_1) + \ldots + \varphi(a_N)}{N}\right) \\ &= \left(\frac{a_1^\lambda + a_2^\lambda + \ldots + a_N^\lambda}{N}\right)^{\lambda^{-1}} \end{aligned}$$

considerando os $N+1$ números inteiros positivos $a_0, a_1, \ldots a_N$, em que a_k representa a quantidade de casais com k filhos, dado qualquer número $y \in \mathbb{R}^+$, tal que $min\{a_0, a_1, \cdots, a_N\} \leq y \leq max\{a_0, a_1, \cdots, a_{N-1}\}$ podemos escolher λ conveniente de modo que $\dfrac{a_1^\lambda + a_2^\lambda + \ldots + a_N^\lambda}{N} = y^\lambda$ e o resultado está garantido.

d- Uma medida de Heterogeneidade (a variância, como medida de dispersão, por exemplo) de uma população aliado a um parâmetro único que represente a população, em especial uma Média, pode trazer elementos que um único valor intermediário, entre o mínimo e o máximo do conjunto, não carregam.

e- Considerando $\dfrac{dN}{dt} = -\mu N$, $N(0) = N_0$. temos, imediatamente $N(t) = N_0 e^{-\mu t}$ e, portanto,

$$\ln N(t) = [\ln N_0 - \mu t] \,.$$

Questão 03:Predação e Sobrevivência -Considere uma grande população distribuída uniformemente no espaço em regiões esféricas cujo tamanho é descrito por $N(t)$ e cuja mortalidade é causada unicamente por uma predação "periférica" com taxa proporcional (e coeficiente λ) ao número de indivíduos localizados na superfície exterior da esfera.

a-Descreva, com argumentos, um Modelo Diferencial para a dinâmica de mortalidade desta população.

b-Mostre que o tempo médio aritmético de sobrevivencia dos individuos, $T_*(N_0, \lambda)$, aumenta com o tamanho inicial do grupo, o que caracteriza um Efeito de Rebanho Egoista, e determine este valor.

c-Determine também o tempo médio quadrático de sobrevivencia desta população.

d-Segundo o Principio de Weber-Fechner, quão bem recebido é um novo membro de um grupo? Ou seja, como interpretar neste contexto, a antológica frase de Woody Allen: "Eu não gostaria de fazer parte de um clube que me recebesse (bem) como um de seus membros".

Resolução:

a- Suponhamos que uma grande população $N = N(t)$ esteja distribuída uniformemente em uma região de formato esférico de raio R cuja mortalidade $p = p(N)$ é causada unicamente por uma predação "periférica" com taxa proporcional (e coeficiente λ) ao número de indivíduos localizados na superfície exterior da esfera. Neste caso, $N \propto R^3$ e $p \propto R^2$ então $N^{\frac{1}{3}} \propto p^{\frac{1}{2}}$ e podemos escrever $\dfrac{dN}{dt} = -\lambda N^{\frac{2}{3}}$ e, portanto, $N(t) = (k - \lambda t)^3/27$, onde $k = 3\sqrt[3]{N(0)} = 3{N_0}^{1/3}$.

b- Observemos inicialmente que $N(t) = 0 \iff t = \frac{3N_0^{1/3}}{\lambda}$ que por sua vez é o tempo necessário para a extinção total da população. Consequentemente,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{N_0}\int_0^{\infty} -t\frac{dN}{dt}dt &= \frac{1}{N_0}\int_0^{\frac{3N_0^{1/3}}{\lambda}} -t(-\lambda)\frac{\left(3N_0^{1/3} - \lambda t\right)^2}{9}\, dt \\
&= \frac{1}{9N_0}\left[\frac{-t}{3}\left(3N_0^{1/3} - \lambda t\right)^3 - \frac{1}{12\lambda}\left(3N_0^{1/3} - \lambda t\right)^4\right]_0^{\frac{3N_0^{1/3}}{\lambda}} \\
&= \frac{1}{9N_0}\left[\frac{-\frac{3N_0^{1/3}}{\lambda}}{3}\left(3N_0^{1/3} - \lambda\frac{3N_0^{1/3}}{\lambda}\right)^3 - \frac{1}{12\lambda}\left(3N_0^{1/3} - \lambda\frac{3N_0^{1/3}}{\lambda}\right)^4 + \frac{1}{12\lambda}\left(3N_0^{1/3}\right)^4\right] \\
&= \frac{3N_0^{1/3}}{4\lambda}
\end{aligned}
$$

Portanto, tanto o tempo de sobrevivência total quanto o tempo médio aritmético da população crescem relativamente em relação ao tamanho inicial N_0 da população, o que caracteriza um comportamento de rebanho egoísta.

c- Já no cálculo do tempo médio quadrático de sobrevivência,

$$
\frac{1}{N_0}\int_0^{\infty} -t^2\frac{dN}{dt}dt = \frac{1}{9N_0}\int_0^{\frac{3N_0^{1/3}}{\lambda}} -t^2(-\lambda)(3N_0^{1/3} - \lambda t)^2 dt,
$$

nos valemos da integração por partes fazendo analogia com o caso anterior (em que a maior parte das parcelas se anulam), obtendo:

$$\frac{1}{N_0}\int_0^\infty -t^2\frac{dN}{dt}dt = \frac{9{N_0}^{2/3}}{10\lambda}.$$

d-Adotando o Princípio de que a sensação recebida a partir de um estímulo é proporcional ao logaritmo da intensidade do estímulo, podemos inferir que a chegada de um novo membro ao grupo, embora aumente sua "superfície de proteção", é um evento quase desprezível quando comparado à grande população do grupo. O novo membro, por outro lado, só pode ocupar inicialmente um "seu" espaço na região marginal, no bordo do grupo, e tendo em vista que os ataques dos predadores ocorrem exatamente na superfície, a tendência é que os novos membros sejam exatamente os mais vulneráveis ao extermínio. Segundo essa percepção, deveria valer a máxima (que pode ter sido utilizada por Woody Allen no filme "Annie Hall" como citação ao humorista Groucho Marx) *"Eu não gostaria de fazer parte de um clube que me recebesse como um de seus membros"*.

Questão 04-

Considere um líquido em repouso (por exemplo, um lago) onde está suspensa uma ”população” de partículas esféricas de variados raios r que se dissolvem (ou se evaporam) a uma taxa proporcional à área de sua superficie exterior.

a-Descreva, justificando, a população destas particulas em um dado instante segundo o conceito de densidade de Euler.

b-Obtenha o tempo de ”existência” de uma partícula de raio R.

c-Descreva um Modelo Conservativo de Euler Integral e Diferencial para a distribuição destas partículas ao longo do tempo.

d-Faça uma analogia deste modelo com o modelo demográfico continuo de Euler.

Resolução:

a- Considerando que o conjunto $\{p^k\}, k = 1, \ldots, N$, de partículas está associado em cada instante t ao conjunto $\{R_k\}$ de seus respectivos raios.

Podemos assumir que $R_1 = \min\{R_k\}, R_N = \max\{R_k\}$ e
$r = r(N) \in [R_1, R_2]$ Média (de Kolmogorov) dos $N = N(t)$ raios em cada instante t. Neste caso, como as partículas se dissolvem (ou se evaporam) a uma taxa proporcional à área de sua superficie exterior, podemos considerar a densidade $\rho(x,t)$ proporcional a r^3 e a taxa de ”mortalidade” $\frac{dN}{dt}$ proporcional a r^2. Portanto, $\frac{dN}{dt} = -\lambda\rho(x,t)^{2/3}$ e $N(t) = \displaystyle\int_{R_1}^{R_2} -\lambda\rho(x,t)^{2/3}dt$.

b- O tempo médio de existência de uma partícula de raio R será dado por

$$\frac{1}{R - R_1}\int_{R_1}^{R} t\lambda\rho(x,t)^{2/3}dt.$$

c-A exemplo do que foi descrito no item a-, um Modelo Conservativo Integral e Diferencial de Euler para a análise da população $N = N(t)$ pode ser descrito pelas equações $\frac{dN}{dt} = -\lambda t^{2/3}$ e $N(t) = \displaystyle\int_{R_1}^{R_2} -\lambda t^{2/3}dt$.

d- No modelo demográfico temos o Princípio de Conservação $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} = 0$, em que $v = v(r)$ é a velocidade em que a população decresce de acordo com o raio $r = r(N)$ ou, em outras palavras, $\frac{dN}{dt}$.

Questão 05: Principio de Conservação

Considere uma população distribuída continuamente segundo Euler em um espaço de aspecto unidimensional representado por $\mathbb{R}^+$ onde é definido um "Campo de velocidades" $v(x)$ que determina a taxa de modificação do aspecto x em termos dele mesmo.

a-Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são dois pontos móveis no espaço de aspecto que "seguem" o movimento determinado por $v(x)$, isto é, $\dfrac{dx_k}{dt} = v(x_k)$, com $x_1(0) < x_2(0)$, analise o sentido (no modelo) para a expressão $\dfrac{d}{dt}\left(\displaystyle\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho(x,t)\ dx\right)$.

b-Desenvolva a expressão acima e utilize seu resultado para definir **justificadamente** o conceito de Fluxo de Transporte $J(x,t)$.

Resolução:

a- A integral $\left(\displaystyle\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho(x,t)\ dx\right)$ representa a quantidade total de indivíduos "contidos" no intervalo $[x_1(t), x_2(t)]$ e sua derivada é a taxa de variação instantânea dessa quantidade.

b- Consideremos, a partir do texto adotado como referência, que a função densidade ρ satisfaz o Princípio de Conservação, $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0$ e que a função Fonte $f(x,t)$ é tal que $\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} f(x,t)dxdt = \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} f(x,t)dtdx$ representa o saldo líquido da população que foi originada no interior do intervalo $[x_1, x_2]$ no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$. temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho(x,t)\ dx\right) &= \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t)\ dx \\
&= \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \left\{-\frac{\partial}{\partial x}[\rho(x,t)v(x)]\right\} dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x,t)dx \\
&= -[\rho(x,t)v(x)]_{x_1}^{x_2} - \textstyle\int_{x_1}^{x_2} f(x,t)dx \\
&= \rho(x_1,t)v(x_1) - \rho(x_2,t)v(x_2) - \textstyle\int_{x_1}^{x_2} f(x,t)dx.
\end{aligned}$$

A última igualdade motiva a indicação da função $J(x,t) = \rho(x,t)v(x)$ como Fluxo de Transporte.

Questão 06: Sedimentação

Seja $0 \leq x$ a coordenada da posição longitudinal em um rio "infinito" com escoamento unidimensional a uma velocidade de arrasto $v > 0$ constante. Suponha que neste rio exista uma população de partículas suspensas descrita pela densidade $\rho(x,t)$ que se depositam no seu leito (deixando, assim, de serem suspensas) a uma taxa proporcional à densidade delas. Suponha ainda que exista uma injeção de partículas em $x = 0$ descrita por um fluxo de entrada $J(0,t) = a > 0$ constante e que a densidade seja nula a longas distancias, isto é, $\rho(\infty, 0) = 0$.

a-Interprete e determine a expressão $N(t) = \displaystyle\int_0^\infty \rho(x,t)\ dx$ mostrando que ela se aproxima de um valor constante.(Sugestão: Obtenha uma equação para $\frac{dN}{dt}$)

b-Argumente que a distribuição espacial de partículas suspensas se aproxima de uma densidade constante com o tempo $\rho_\infty(x) = \lim\limits_{t\to\infty} \rho(x,t)$ e calcule esta distribuição.(Sugestão: Considere a equação estacionária, sem variação no tempo).

c-Determine a quantidade total de material depositado no leito do rio durante um intervalo de tempo $[t_1, t_2]$.

Resolução:

a- Consideremos a função densidade ρ satisfazendo o Princípio de Conservação, $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0$ e a Fonte $f(\rho) = -\mu\rho$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}N(t) &= \frac{d}{dt}\left(\int_0^\infty \rho(x,t)\ dx\right) \\
&= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t)\ dx \\
&= \int_0^\infty \left\{-\frac{\partial}{\partial x}[\rho(x,t)v(x)]\right\} dx + \int_0^\infty -\mu\rho(x,t)dx \\
&= -[\rho(x,t)v(x)]_0^\infty - \textstyle\int_0^\infty \mu\rho(x,t)dx \\
&= J(0,t) - J(\infty,t) - \textstyle\int_0^\infty \mu\rho(x,t)dx \\
&= a - \mu \textstyle\int_0^\infty \rho(x,t)dx.
\end{aligned}$$

Isto é, $\dfrac{d}{dt}N(t) = a - \mu N(t)$ o que acarreta $\dfrac{d}{dt}[e^{\mu t}N(t)] = ae^{\mu t}$ e, portanto,

$$N(t) = \frac{a}{\mu} + Ke^{-\mu t},\ \ onde\ K = N(0) - \frac{a}{\mu},$$

que é a quantidade de partículas que se depositam no leito do rio durante o intervalo de tempo arbitrariamente "grande", se aproxima da constante $\dfrac{a}{\mu}$ à medida que t vai para ∞.

b- Se consideramos,como sugerido, que não há variação no tempo, então, de $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0$ segue-se $v\frac{\partial(\rho)}{\partial x} + \rho\frac{\partial(v)}{\partial x} = 0$ de onde segue imediatamente (considerando densidade e velocidade positivas) que $\rho(x,t) = \frac{k}{v(x)}$, onde $\frac{k}{v(0)} = \rho(0,t) = \frac{J(0,t)}{v(0)}$ o que implica $k = a > 0$. Como, à medida que x cresce a velocidade no rio tende se tornar constante (não nula,já que o rio tem comprimento infinito e não deságua em lagunas) temos que $\rho_\infty(x)$ tende a uma constante.

c- De $v(x) = \frac{dx}{dt}$ e $\rho_(x,t) = \frac{a}{v(x)} = a\frac{dt}{dx}$ conclui-se que

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)dx = \int_{x_1}^{x_2} a\frac{dt}{dx}dx = a(x_2 - x_1),$$

isto é, a quantidade de material depositado no fundo do rio, no intervalo $[t_1, t_2]$ é igual ao produto onde um dos fatores é o fluxo de entrada $a = J(0,t)$ e o outro fator é a diferença entre as coordenadas $x(t_2) = x_2 - x_1 = x(t_1)$.

Observe ainda que $N(t_2) - N(t_1) = \left(N(0) - \frac{a}{\mu}\right)\left(e^{\mu t_2} - e^{\mu t_1}\right)$ também representa a quantidade desejada.