MA952 – Introdução ao Cálculo Fracionário

1 Sobre algumas integrais

Como é sabido, várias integrais reais são de difícil resolução. Muitas vezes, sempre que possível, fazemos uso do plano complexo para calcular as integrais reais. Além disso, vários truques são sempre sugeridos, dentre eles aquele que atende pelo nome de integrais de Feynman.

Como uma breve introdução, vamos discutir duas integrais aparentemente complicadas que com um pouco de treino são reduzidas a integrais de fácil manipulação. Imediatamente após apresentamos o truque proposto por Feynman para calcular integrais reais.

1.1 Substituição trigonométrica

Através de dois exemplos, utilizando substituição trigonométrica, vamos calcular duas integrais reais, aparentemente não imediatas.

Exemplo 1. *Seja $x \in \mathbb{R}$. Calcular a integral*

$$\Lambda = \int \operatorname{sen}(2 \arctan x)\, \mathrm{d}x.$$

Solução. Começamos com a relação trigonométrica envolvendo o seno do arco dobro, assim

$$\Lambda = 2 \int \operatorname{sen}(\arctan x) \cos(\arctan x)\, \mathrm{d}x.$$

Agora, introduzimos a mudança de variável $\arctan x = u$, de onde segue, $\tan u = x$ e $\mathrm{d}x = \sec^2 u \, \mathrm{d}u$, logo

$$\Lambda = 2 \int \operatorname{sen} u \cos u \sec^2 u \, \mathrm{d}u,$$

ou ainda, na seguinte forma,

$$\Lambda = 2 \int \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} \, \mathrm{d}u.$$

Essa integral é calculada a partir da mudança de variável $\cos u = t$ cujo diferencial é exatamente o numerador, de onde podemos escrever

$$\Lambda = 2 \int \left(-\frac{\mathrm{d}t}{t} \right) = -2 \int \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

que é uma integral imediata

$$\Lambda = -2 \ln |t| + C$$

onde C é uma constante de integração. Voltando com as variáveis que foram introduzidas a partir das mudanças de variáveis, obtemos

$$\Lambda = \ln(1 + x^2) + C$$

sendo C uma constante de integração.

Vamos, agora, obter o mesmo resultado através de uma simplificação que, sempre que possível, agiliza o cálculo. Considere o triângulo retângulo, conforme Figura 1.

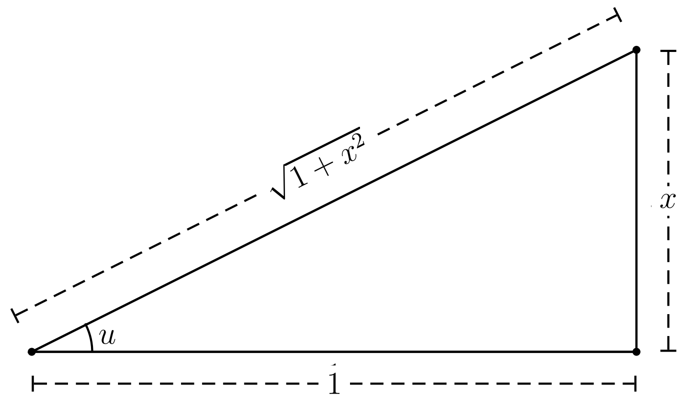

Figura 1: Triângulo retângulo: seno, cosseno e tangente.

Da Figura 1 são imediatas as relações

$$\tan u = x, \qquad \operatorname{sen} u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \cos u = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Assim, substituindo na integral de partida, temos

$$\Lambda = 2 \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, \mathrm{d}x = 2 \int \frac{x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x,$$

que é o resultado desejado. $\square$

Do lar 1. *Complete a integração e obtenha o mesmo resultado, conforme metodologia anterior.*

Exemplo 2. *Seja $x \in \mathbb{R}$. Calcular a integral*

$$\Omega = \int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}.$$

Solução. Comeccamos notando que o denominador nunca se anula, a integral não é singular. Vamos introduzir a mudança de variável envolvendo a tangente do arco

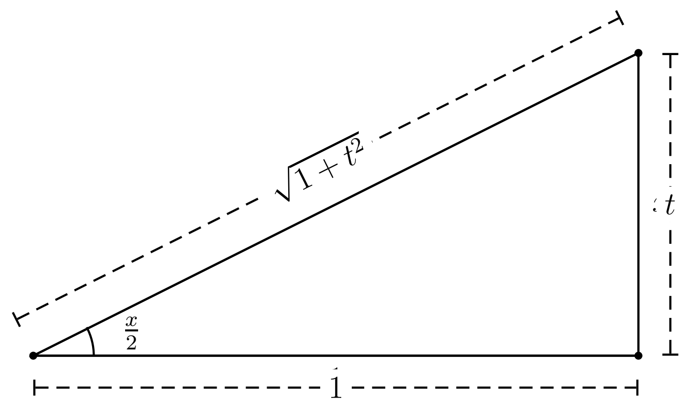

Figura 2: Seno, cosseno e tangente do arco metade.

metade. Analogamente à integral discutida no Exemplo 1, considere a Figura 2.

Da Figura 2 seguem as relações

$$\tan\frac{x}{2} = t, \qquad \operatorname{sen}\frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Utilizando a expressão para o cosseno do arco dobro, podemos escrever a expressão

$$\cos x = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 - \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Ainda mais, para o diferencial temos

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \quad \longrightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Substituindo na integral a ser calculada e simplificando, obtemos a seguinte integral

$$\Omega = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}\left(\frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\right) = 2\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+3}.$$

Esta integral é tabelada, logo

$$\Omega = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + C$$

onde C é uma constante de integração. Voltando com a mudança de variável, obtemos

$$\Omega = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C$$

sendo C a constante de integração. $\square$

1.2 Metodologia de Feynman

Este truque, popularizado por Feynman, visando o cálculo de integrais reais, está baseado na possibilidade de se poder derivar sob o sinal de integral.

1.2.1 Derivação sob o sinal de inegral

Considere $\mathsf{D} \subset \mathbb{R}^2$ e $f : \mathsf{D} \to \mathbb{R}$, uma função de classe C^1 em D e o retângulo $[a, b] \times [c, d] \subset \mathsf{D}$. Seja a função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, tal que

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)\, \mathrm{d}y \tag{1}$$

logo $F(x)$ é uma integral dependendo do parâmetro x.

Teorema 1. *A derivada em relação ao parâmetro x comuta com a integração em relação à variável y,*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Prova 1. *Ver Oswaldo Rio Branco de Oliveira, oliveira@ime.usp.br, http://www.ime.usp.br/~oliveira.*

Voltemos ao método. Vamos subdividir em quatro etapas para padronizar a metodologia.

1. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $f(a)$ uma função do parâmetro a. Introduzimos ou o parâmetro ou a função na integral.

2. Diferenciamos sob o sinal de integral a fim de calcular $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}f(a)$ e efetuamos a integração em relação a x, a fim de obter uma equação diferencial.

3. Resolvemos a equação diferencial para obter uma expressão para $f(a)$. Note que $f(a)$ não deve ser função da variável de integração.

4. Com o conveniente valor de $f(a)$, obtenha a integral de partida.

É importante notar que a dificuldade reside na primeira etapa, pois a partir da segunda, é calcular uma derivada, resolver uma equação diferencial e calcular o valor de uma função num ponto ou substituir o valor do parâmetro por um número conveniente. Ainda mais, ao introduzir o parâmetro ou a função, coisa que requer treino e mais treino além, claro, de criatividade, devemos ser capazes de integrar. Vamos apresentar o cálculo explícito para alguns exemplos.

EXEMPLO 3. *Seja $x \in \mathbb{R}$. Calcule a integral*

$$\mathcal{I} = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}x,$$

conhecida como a integral de Dirichlet.

SOLUÇÃO. Apenas para mencionar, esta integral é um clássico exemplo que faz uso plano complexo para calcular uma integral real. Vamos utilizar o truque de Feynman.

Esta é uma integral que não é absolutamente convergente, logo não está definida no sentido da integração de Lebesgue. Ainda mais, esta é uma integral clássica que é calculada através do plano complexo, como já mencionamos. Em particular, o integrando $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$ é uma função que apresenta uma singularidade removível; com um contorno evitando o zero do denominador.

Aqui, a fim de utilizar a metodologia de Feynman, introduzimos uma função $f(a)$ com $a \leq 0$, tal que

$$f(a) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,e^{ax}\,\mathrm{d}x.$$

A importância de impormos o parâmetro não positivo é devido ao extremo superior da integral de partida. Com esta função, recuperamos a integral inicial, a partir de $a = 0$, de onde obtemos $\mathcal{I} = f(0)$.

Agora derivamos a função em relação ao parâmetro, logo (derivada parcial, pois o integrando é uma função de duas variáveis)

$$\frac{\partial f(a)}{\partial a} = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, x\, e^{ax}\, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \operatorname{sen} x\, e^{ax}\, \mathrm{d}x.$$

A fim de resolver esta integral, podemos utilizar duas vezes integração por partes, porém aqui vamos usar a relação de Euler

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

de onde podemos escrever, apenas para o segundo membro, denotado por $\mathrm{II_M}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{II_M} &= \frac{1}{2i}\int_0^\infty \left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\, e^{ax}\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2i}\int_0^\infty \left[e^{x(a+i)} - e^{x(a-i)}\right]\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Note que as integrais existem, pois com a imposição no parâmetro a, convergem. Logo, integrando e simplificando, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}_{\mathrm{M}} &= \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{x(a+i)}}{a+i} - \frac{e^{x(a-i)}}{a-i}\right]_{x=0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{2i}\left(-\frac{1}{a+i} + \frac{1}{a-i)}\right) = \frac{1}{a^2+1}.
\end{aligned}$$

Assim, voltando na expressão para a derivada, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial a} f(a) = \frac{1}{a^2+1}$$

que é uma equação diferencial cuja integração é imediata, pois é a primitiva do arco tangente, logo

$$f(a) = \arctan a + C$$

onde C é uma constante de integração.

A próxima etapa requer determinar a constante de integração. Para tal, aqui, vamos considerar o limite do parâmetro $a \to -\infty$, logo

$$\lim_{a\to-\infty} f(a) = \lim_{a\to-\infty} (\arctan a + C) = -\frac{\pi}{2} + C$$

que, levando na definiccão de $f(a)$ fornece

$$-\frac{\pi}{2} + C = \lim_{a\to-\infty} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, e^{ax}\, \mathrm{d}x = 0$$

de onde segue $C = \frac{\pi}{2}$. Voltando na integral de partida, podemos escrever

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, e^{ax}\, \mathrm{d}x = f(a) = \arctan a + \frac{\pi}{2}$$

para todo $a \leq 0$. Note que esta é uma fórmula geral que, em nosso caso, requer apenas que se calcule $f(0)$, logo

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

que é o resultado desejado. $\square$

EXEMPLO 4. *Seja $x \in \mathbb{R}$. Calcule a integral*

$$\Omega = \int_0^1 \frac{x^2 - 1}{\ln x}\,\mathrm{d}x.$$

SOLUÇÃO. Este tipo de integral real também faz uso do plano complexo, pois a função

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{\ln z}$$

apresenta um ponto de ramificação em $z = 0$.
REF. E. Capelas de Oliveira e W. A. Rodrigues Jr., *Funções Analíticas com Aplicações*, Editora Livraria da Física, São Paulo, (2005).

Aqui, a fim de utilizar a metodologia de Feynman, introduzimos um parâmetro $a \geq 0$ de tal modo que tenhamos a função

$$f(a) = \int_0^1 \frac{x^a - 1}{\ln x}\,\mathrm{d}x.$$

para, ao final, calcular $f(2) = \Omega$.

Antes de continuarmos, notamos que tanto no primeiro quanto no segundo exemplos, a escolha do parâmetro é feita, já pensando na segunda etapa, de modo que ao derivar em relação ao parâmetro, o integrando deixa de apresentar a singularidade.

Assim, derivando em relação ao parâmetro a, temos

$$\frac{\partial}{\partial a} f(a) = \int_0^1 \frac{1}{\ln x}\, x^a \, \ln x \, \mathrm{d}x$$

que, simplificando, permite escrever

$$\frac{\partial}{\partial a} f(a) = \int_0^1 x^a \, \mathrm{d}x$$

que é uma integral imediata, de onde segue

$$\frac{\partial}{\partial a} f(a) = \left. \frac{x^{a+1}}{a+1} \right|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{a+1}$$

que é uma equação diferencial separável, cuja integração permite escrever a igualdade

$$f(a) = \ln(a+1) + C$$

onde C é uma constante de integração.

Para determinar a constante tomamos $a = 0$ (note que é outro extremo de integração) de onde segue

$$f(0) = \int_0^1 \frac{x^0 - 1}{\ln x} \, \mathrm{d}x = \ln 1 + C = 0$$

logo $C = 0$. Assim, a integral geral é tal que

$$\int_0^1 \frac{x^a - 1}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln(a+1)$$

com $a \geq 0$. Como já foi mencionado, devemos calcular $\Omega = f(2)$, de onde segue

$$f(2) = \int_0^1 \frac{x^2 - 1}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln(2+1) = \ln 3$$

que é o resultado desejado. $\square$

Do lar 2. *Seja $x \in \mathbb{R}$. Calcule a integral*

$$\Omega = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x.$$

Depois desses dois primeiros exemplos, convém notar que, esta maneira de calcular a integral real, não exige o plano complexo, isto é, não se faz necessário escolher uma conveniente função complexa, que recupere a função real quando a parte imaginária é zero, nem a escolha do respectivo contorno de integração.

Exemplo 5. (Fatorial). *Seja $n \in \mathbb{N}$. Calcular a integral*

$$\Omega(n) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Solução. Vamos considerar a seguinte integral

$$f(a) = \int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{d}x,$$

com $a > 0$. Neste caso, a integral é imediata, pois o integrando é uma exponencial, logo derivando em relação ao parâmetro a, aqui n vezes, obtemos

$$\frac{\partial^n}{\partial a^n} f(a) = \int_0^\infty (-x)^n e^{-ax}\,\mathrm{d}x,$$

ou ainda, na seguinte forma

$$\frac{\partial^n}{\partial a^n} f(a) = (-1)^n \Omega(n)$$

que é uma equação diferencial. Aqui, é imediato pois $f(a)$ é conhecida

$$f(a) = \frac{1}{a}$$

de onde segue, derivando n vezes,

$$\frac{\partial^n}{\partial a^n} f(a) = \frac{(-1)^n n!}{a^{n+1}}$$

que, identificando com a equação diferencial permite escrever, já simplificando

$$\Omega(n) = \frac{n!}{a^{n+1}}.$$

Voltando na integral em função do parâmetros, obtemos

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{a^{n+1}}.$$

Assim, para recuperar a integral inicial consideramos o parâmetro $a = 1$, logo

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = n!$$

que é o resultado desejado. $\square$

Exemplo 6. *Calcule a integral imprópria*

$$\Lambda = \int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Solução. Para calcular esta integral, vamos introduzir o parâmetro $a \leq 0$, tal que tenhamos

$$f(a) = \int_0^\infty \frac{\ln(1+a^2x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Derivando $f(a)$ em relação ao parâmetro, temos

$$\frac{\partial}{\partial a} f(a) = \int_0^\infty \frac{2ax^2}{(1+a^2x^2)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x.$$

A fim de calcular esta integral, utilizamos frações parciais. Devemos determinar constantes, A e B, tais que

$$\frac{2ax^2}{(1+a^2x^2)(1+x^2)} = \frac{A}{1+a^2x^2} + \frac{B}{1+x^2}$$

de onde segue

$$A = \frac{2a}{1-a^2} \qquad \text{e} \qquad B = \frac{2a}{a^2-1}.$$

Voltando na expressão para a derivada, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial a} f(a) = \frac{2a}{1-a^2} \left\{ \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+a^2x^2} - \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \right\}.$$

Estas duas integrais são imediatas, pois ambas resultam no arco tangente, logo

$$\frac{\partial}{\partial a} f(a) = -\frac{\pi}{1-a^2} - \frac{a\pi}{1-a^2}.$$

Por fim, integrando os dois membros, obtemos

$$f(a) = -\pi \int \frac{a}{1-a^2}\,\mathrm{d}a - \pi \int \frac{\mathrm{d}a}{1-a^2}.$$

Para a primeira integral, utilizamos substituição enquanto para a segunda integral, novamente, frações parciais, logo, após simplificação, podemos escrever

$$f(a) = \pi \ln|1-a| + C$$

onde C é uma constante de integra[cão. Para determinar a constante, tomamos $a = 0$, assim

$$f(0) = \pi \ln 1 + C = 0$$

de onde segue, $C = 0$. Logo, podemos escrever a integral geral, dependendo do parâmetro,

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+a^2x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi \ln|1-a|.$$

Agora, para o nosso caso, tomamos $a = -1$, assim

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi \ln 2$$

que é o resultado desejado. $\square$

Exemplo 7. *Calcule a integral*

$$\Omega = \int_\infty^0 \frac{\ln x}{(x^2+1)^4}\,\mathrm{d}x.$$

Solução. Vamos considerar a seguinte integral

$$f(a) = -\int_0^\infty \frac{x^a}{(x^2+1)^4}\,\mathrm{d}x$$

com $a \leq 0$. A fim de resolver esta integral, sem utilizar o plano complexo, vamos derivá-la em relação ao parâmetro

$$\frac{\partial}{\partial a} f(a) = -\int_0^\infty \frac{x^a \ln x}{(x^2+1)^4}\,\mathrm{d}x$$

que, calculada em $a = 0$ fornece a integral desejada.

Assim, primeiro, introduzimos a mudança de variável $x^2 = t$ na expressão para $f(a)$, de onde segue

$$f(a) = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{a-1}{2}}}{(t+1)^4}\mathrm{d}t$$

e, ainda uma outra mudança de variável $t + 1 = u$, nos leva à seguinte integral

$$f(a) = -\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{(u-1)^{\frac{a-1}{2}}}{u^4}\mathrm{d}u.$$

Por fim, a mudança de variável $\frac{u-1}{u} = \xi$ de onde obtemos a integral, já rearranjando

$$f(a) = -\frac{1}{2}\int_0^1 \xi^{\frac{a-1}{2}}(1-\xi)^{\frac{5-a}{2}}\,\mathrm{d}\xi.$$

Esta integral é calculada a partir da função beta, logo

$$f(a) = -\frac{1}{2}B\left(\frac{a+1}{2}, \frac{7-a}{2}\right)$$

que, expressa em termos da função gama permite escrever

$$f(a) = -\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7-a}{2}\right)}{\Gamma(4)}$$

ou ainda, simplificada a partir das propriedades da função gama logo

$$f(a) = \frac{\pi}{96}(a-5)(a-3)(a-1)\,\mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{a+1}{2}\pi\right).$$

REF. E. Capelas de Oliveira, *Funções Especiais com Aplicações*, Segunda Edição, Editora Livraria da Física, São Paulo, (2012).

Derivando em relação ao parâmetro a, obtemos

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{\pi}{96}(3a^2-18a+23)\,\mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{a+1}{2}\pi\right) \\ &\quad -\frac{\pi^2}{192}(a-5)(a-3)(a-1)\frac{\mathrm{sen}^{-2}\left(\frac{a+1}{2}\pi\right)}{\cos^{-1}\left(\frac{a+1}{2}\pi\right)}. \end{aligned}$$

Por fim, tomando $a = 0$ na expressão para a derivada, podemos escrever para a integral de partida

$$\Omega = \frac{\partial}{\partial a} f(a)\bigg|_{a=0}$$

de onde segue

$$\Omega = \frac{\pi}{96} \cdot 23 \cdot \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{23\pi}{96}$$

que é o resultado desejado. $\square$

Exemplo 8. *Calcular a integral real*

$$\mathsf{J} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{1+x^2}\, \mathrm{d}x.$$

Solução. Primeiro, introduzimos o parâmetro α tal que tenhamos uma função de α

$$\mathsf{J}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\alpha^2 x^2}}{1+x^2}\, \mathrm{d}x,$$

que, para $\mathsf{J}(1)$, recupera a integral desejada.

Agora calculamos a derivada em relação ao parâmetro

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\mathsf{J}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\alpha^2 x^2}}{1+x^2}\, (-2\alpha x^2)\, \mathrm{d}x.$$

Adicionando e subtraindo a unidade e rearranjando, podemos escrever a expressão

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\mathsf{J}(\alpha) = -2\alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2}\, \mathrm{d}x + 2\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\alpha^2 x^2}}{1+x^2}\, \mathrm{d}x.$$

A primeira integral do lado direito (gaussiana) é conhecida de onde segue a equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\mathsf{J}(\alpha) = -2\sqrt{\pi} + 2\alpha\mathsf{J}(\alpha).$$

Agora devemos resolver a equação diferencial ordinária, por exemplo, via fator integrante,

$$e^{-\alpha^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\mathsf{J}(\alpha) - 2\alpha e^{-\alpha^2}\mathsf{J}(\alpha) = -2\sqrt{\pi}e^{-\alpha^2},$$

de onde segue

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left[e^{-\alpha^2}\,\mathsf{J}(\alpha)\right] = -2\sqrt{\pi}e^{-\alpha^2}$$

cuja integração permite escrever

$$\int_0^\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[e^{-x^2}\,\mathsf{J}(x)\right]\mathrm{d}x = -2\sqrt{\pi}\int_0^\alpha e^{-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

ou ainda, na seguinte forma

$$e^{-\alpha^2}\mathsf{J}(\alpha) - \mathsf{J}(0) = -2\sqrt{\pi}\int_0^\alpha e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

No segundo membro, temos uma função erro

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^\alpha e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{erf}(\alpha).$$

REF. E. Capelas de Oliveira, *Funções Especiais com Aplicações*, Segunda Edição, Editora Livraria da Física, São Paulo, (2012).

Assim, voltando com esse resultado e rearranjando, podemos escrever

$$\mathsf{J}(\alpha) = \pi\, e^{\alpha^2}\, \mathrm{erfc}(\alpha)$$

onde $\mathrm{erfc}(\alpha)$ é a função erro complementar. Agora, uma vez resolvida a equação diferencial, temos

$$\mathsf{J}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\alpha^2 x^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi\, e^{\alpha^2}\, \mathrm{erfc}(\alpha)$$

Por fim, tomando $\alpha = 1$, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi\, e\, \mathrm{erfc}(1)$$

que é o resultado desejado. □

Do lar 3. *Mostre o seguinte resultado*

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln \mu x}{\nu^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\nu} \ln \mu\nu$$

sendo $\mu > 0$ *e* $\nu > 0$.

Exemplo 9. *Calcular a integral real*

$$\int_0^{\pi/4} x \tan^2 x\, \mathrm{d}x.$$

Solução. Visto que não temos uma maneira direta para utilizar a metodologia como proposta por Feymann, primeiro vamos calcular uma integral auxiliar

$$\mathsf{J}(\alpha) = \int_0^{\pi/4} \tan \alpha x \, \mathrm{d}x.$$

sendo $\alpha \in \mathbb{R}$. Essa integral é imediata, pois introduzindo a mudança de variável $\cos \alpha x = t$ de onde segue o diferencial $\operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{\alpha}$, de onde podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathsf{J}(\alpha) &= \int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{\cos \alpha x} \, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{\alpha} \int_1^{\cos \frac{\alpha\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\frac{1}{\alpha} \ln \left(\cos \frac{\alpha\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Agora, sim, vamos derivar ambos os membros da integral

$$\mathsf{J}(\alpha) = \int_0^{\pi/4} \tan \alpha x \, \mathrm{d}x,$$

em relação ao parâmetro sendo $\alpha \in \mathbb{R}$, logo

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \mathsf{J}(\alpha) = \int_0^{\pi/4} x \sec^2 \alpha x \, \mathrm{d}x.$$

Utilizando a relação trigonométrica entre a tangente e a secante e escrevendo de forma conveniente, temos

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \mathsf{J}(\alpha) = \int_0^{\pi/4} x \, \mathrm{d}x + \int_0^{\pi/4} x \tan^2 \alpha x \, \mathrm{d}x.$$

Integrando e rearranjando, obtemos
$$\int_0^{\pi/4} x\tan^2\alpha x\,\mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial\alpha}\mathsf{J}(\alpha) - \frac{\pi^2}{32}.$$
Calculando a derivada de $\mathsf{J}(\alpha)$ em relação ao parâmetro α e substituindo na anterior obtemos
$$\int_0^{\pi/4} x\tan^2\alpha x\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{32}+\frac{1}{\alpha^2}\ln\left(\cos\frac{\alpha\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4\alpha}\tan\frac{\alpha\pi}{4}$$
que é o resultado dependente do parâmetro α.

Em nosso caso, consideramos $\alpha = 1$ de onde segue
$$\int_0^{\pi/4} x\tan^2 x\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{32} - \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}$$
que é o resultado desejado. $\square$

Do lar 4. *Mostre que*
$$\int_0^{\pi/4} \frac{x^2\tan x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{16}.$$

REF. Cornel I. Vălean, (*Almost*) *Impossible Integrals, Sums, and Series*, Springer Nature Switzerland AG 2019.

Diversão. (Putnam Competition and Joint Entrance Examination Advanced) (a) Calcular a integral
$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$
b) Mostre que $\pi < \frac{22}{7}$.

Exemplo 10. *Seja $x \in \mathbb{R}$. Mostre que*

$$\Omega = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

Solução. Considere a integral

$$\Lambda(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

onde α é um parâmetro. Derivando em relação a α, temos

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\Lambda(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^\alpha \ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

e, para $\alpha \to 0$, podemos escrever

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\partial}{\partial\alpha}\Lambda(\alpha) = \Omega.$$

Vamos, então, calcular $\Lambda(\alpha)$. Introduzindo a mudança de variável $x = t^{\frac{1}{2}}$, obtemos, já simplificando,

$$\Lambda(\alpha) = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{\alpha+1}{2}-1}(1-t)^{\frac{1}{2}-1}\,\mathrm{d}t.$$

Utilizando a definição da função beta, bem como a sua relação com a função gama, obtemos

$$\Lambda(\alpha) = \frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}$$

onde utilizamos o resultado $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Derivando em relação ao parâmetro α e tomando o limite $\alpha \to 0$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[\frac{1}{2}\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\Gamma'(1)\right] \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{4}\left[\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) - \sqrt{\pi}\Gamma'(1)\right]. \end{aligned}$$

onde a $'$ denota a derivada.

Utilizando a relação $\Gamma'(z) = \Gamma(z)\psi(z)$ onde $\psi(z)$ e a chamada função digama ou função ψ, definida por

$$\psi(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln\Gamma(z+1)$$

na seguinte forma

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\sqrt{\pi}}{4}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\psi\left(\frac{1}{2}\right) - \sqrt{\pi}\psi(1)\right] \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{4}\left[\psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi(1)\right]. \end{aligned}$$

Visto que valem as relações

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\ln 2 \qquad \text{e} \qquad \psi(1) = -\gamma$$

sendo

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$$

a chamada constante de Euler (Euler-Mascheroni), podemos escrever para a integral de partida

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}[-\gamma - 2\ln 2 - (-\gamma)] = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

que é o resultado desejado. $\square$

Do lar 5. *Mostre que vale o resultado*

$$\int_0^\pi x \tan x\,\mathrm{d}x = -\pi \ln 2.$$

Do lar 6. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, mostre que*

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = -\int_0^\infty \frac{\ln x}{cx^2+bx+a}\,\mathrm{d}x.$$

Do lar 7. *Utilizando o exercício* Do lar 6*, calcule*

$$\Omega = \int_0^\infty \frac{\ln x}{ax^2+bx+a}\,\mathrm{d}x.$$

Do lar 8. *Calcule a integral*

$$\Lambda = \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+6x+25}\,\mathrm{d}x.$$

Edmundo
Campinas, 26/03/2021.