1 Equações diferenciais ordinárias

Em analogia à seção anterior, onde revisamos as variáveis complexas através de exemplos, aqui vamos proceder de maneira análoga. Um pouco das equações diferenciais ordinárias com o intuito de, após o método de Frobenius, apresentar as funções especiais, em especial a classe das funções hipergeométricas e seus casos particulares.

EXEMPLO 1. *Seja $x \in \mathbb{R}_+^*$. Considere a equação diferencial ordinária não homogênea do tipo Euler*

$$x^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} y(x) - x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(x) + y(x) = x \ln x \cdot$$

Obtenha a solução dessa equação diferencial ordinária satisfazendo as condições $y(1) = 1$ e $y(e) = e$.

▼ **Solução.** Começamos com a respectiva equação diferencial homogênea. Vamos propor uma solução na forma $y_H(x) = x^r$ onde r é uma constante. Calculando as derivadas, substituindo na equação diferencial homogênea e simplificando, temos

$$r(r-1) - r + 1 = 0$$

a chamada equação auxiliar, uma equação algébrica, com soluções dadas por $r_1 = 1 = r_2$, isto é, raiz dupla, de onde segue que temos apenas uma solução da equação diferencial homogênea, a saber

$$y_1(x) = x \cdot$$

Para obter uma outra solução linearmente independente, procuramos por uma função $u(x)$ impondo que a solução $y_2(x) = xu(x)$ satisfaça a equação diferencial homogênea. Calculando as derivadas, substituindo na equação diferencial homogênea e simplificando, podemos escrever

$$x\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x) = 0\,\cdot$$

Para resolver esta equação diferencial (redutível) efetuamos a mudança de variável dependente $u'(x) = v(x)$, logo obtemos uma equação diferencial ordinária homogênea de primeira ordem

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}v(x) + v(x) = 0$$

cuja solução é dada por $v(x) = C/x$ onde C é uma constante arbitrária. Voltando na variável dependente $u(x)$ obtemos uma outra equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x) = \frac{C}{x}$$

com solução dada por $u(x) = C\ln x + D$ onde C e D são constantes arbitrárias. Logo, uma solução linearmente independente da equação diferencial ordinária, homogênea e de segunda ordem, é dada por

$$y_2(x) = x\ln x\,\cdot$$

Segue, então, que a solução geral da respectiva equação diferencial homogênea é dada por

$$\begin{aligned} y_H(x) &= Ay_1(x) + By_2(x) \\ &= Ax + Bx\ln x \end{aligned}$$

com A e B constantes arbitrárias. Enfim, devemos, agora, obter uma solução particular da equação diferencial não homogênea o que será feito através do método de variação das constantes (variação dos parâmetros).

Consideremos a solução dada na forma

$$y_P(x) = A(x)x + B(x)x\ln x$$

calculando as derivadas primeira e segunda, e impondo a condição (arbitrária, conveniente)

$$A'(x) + B'(x)\ln x = 0$$

e substituindo na equação diferencial não homogênea, podemos escrever

$$A'(x) + (1 + \ln x)B'(x) = \frac{\ln x}{x}\cdot$$

Resolvendo o sistema nas variáveis $A'(x)$ e $B'(x)$ temos

$$A'(x) = -\frac{(\ln x)^2}{x} \qquad \text{e} \qquad B'(x) = \frac{\ln x}{x}\cdot$$

Integrando (não levando em consideração a constante de integração, pois queremos uma solução) obtemos

$$A(x) = -\frac{1}{3}(\ln x)^3 \qquad \text{e} \qquad B(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2\cdot$$

Voltando com tais valores na expressão que fornece uma solução particular e rearranjando podemos escrever

$$y_P(x) = \frac{x}{6}(\ln x)^3 \cdot$$

A fim de obter a solução geral da equação diferencial ordinária não homogênea, basta adicionar a solução geral da respectiva equação homogênea com a solução particular da equação não homogênea, logo

$$y(x) = Ax + B\,x\ \ln x + \frac{x}{6}(\ln x)^3$$

sendo A e B constantes arbitrárias.

Devemos, agora, impor as condições a fim de determinar as constantes. Impondo a condição $y(1) = 1$ determinamos $A = 1$, enquanto a condição $y(e) = e$ fornece $B = -1/6$. Então, a solução da equação diferencial ordinária não homogênea, satisfazendo as condições de contorno (fronteira) é dada por

$$y(x) = \frac{x}{6}[6 - \ln x + (\ln x)^3]$$

que é o resultado desejado. ▲

Como pode ser notado, os coeficientes no exemplo anterior não são constantes. Por exemplo, o que acontece em $x = 0$ que é um ponto singular, pois está multiplicando a derivada segunda? Em princípio deve ser excluído do domínio.

Para responder a essa pergunta, vamos introduzir o método de Frobenius que nos conduz a uma análise relativa às raízes da chamada equação indicial/auxiliar.

EXEMPLO 2. *Seja $x \in \mathbb{R}$. Utilize o método de Frobenius para discutir a equação hipergeométrica confluente, também conhecida como equação de Kummer,*

$$x\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y(x) + (c-x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) - ay(x) = 0$$

com $a, c \in \mathbb{R}$ e $c \neq -n$ sendo $n = 0, 1, 2, \ldots$

▼ **Solução.** O método de Frobenius faz uso da metodologia das séries de potências. Vamos procurar soluções na forma

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s}$$

com $a_0 \neq 0$ e s um parâmetro a ser determinado. Calculando as derivadas primeira e segunda, substituindo-as na equação diferencial e rearranjando, podemos escrever

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+s)(k+s-1+c)a_k x^{k+s-1} - \sum_{k=0}^{\infty}(k+s+a)a_k x^{k+s} = 0$$

que, a partir da mudança de índice, $k \to k-1$, no segundo somatório, nos conduz a

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+s)(k+s-1+c)a_k x^{k+s-1}$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}(k+s-1+a)a_{k-1}x^{k+s-1}=0\,.$$

Separando o termo $k=0$ no primeiro somatório e rearranjando, temos

$$s(s-1+c)a_0x^{s-1}+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}[(k+s)(k+s-1+c)a_k-(k+s-1+a)a_{k-1}]x^{k+s-1}=0.$$

Dessa expressão e sabendo que $a_0\neq 0$ obtemos

$$s(s-1+c)=0$$

a chamada equação indicial (auxiliar). Esta é uma equação algébrica de segundo grau, admite duas raízes que, eventualmente, podem ser complexas. Aqui, as soluções são dadas por $s_1=0$ e $s_2=1-c$.

Por outro lado, temos a chamada fórmula (relação) de recorrência, obtida levando em conta que a única maneira de termos um zero no primeiro membro é considerando os coeficientes nulos. Então, neste caso, temos

$$(k+s)(k+s-1+c)a_k-(k+s-1+a)a_{k-1}=0\,.$$

Antes de continuarmos, façamos uma observação. Aqui temos duas raízes reais da equação auxiliar, distintas ou iguais, dependendo dos valores do parâmetro c e a fórmula de recorrência envolvendo dois termos, a_k e a_{k-1}.

A partir de agora devemos considerar separadamente as raízes da equação indicial. Começamos com a raiz $s_1 = 0$, que nos leva à fórmula de recorrência

$$a_k = \frac{k-1+a}{k(k-1+c)} a_{k-1}$$

com $k = 1, 2, \ldots$ e $c \neq -n$ sendo $n = 0, 1, 2, \ldots$

Da relação anterior devemos explicitar o coeficiente que depende de k em termos de uma constante, pois a única certeza é que $a_0 \neq 0$. Para tal, vamos explicitar alguns poucos coeficientes

$$\begin{array}{ll}
k = 1 \qquad & a_1 = \dfrac{a}{c} a_0 \\
k = 2 \qquad & a_2 = \dfrac{1+a}{2(1+c)} \dfrac{a}{c} a_0 = \dfrac{a(a+1)}{2c(c+1)} a_0 \\
k = 3 \qquad & a_3 = \dfrac{2+a}{3(2+c)} a_2 = \dfrac{a(a+1)(a+2)}{3! c(c+1)(c+2)} a_0 \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

de onde escrevemos para o termo a_k em função de a_0

$$a_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} \frac{1}{\frac{\Gamma(c+k)}{\Gamma(c)}} \frac{a_0}{k!} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(c+k)} \frac{a_0}{k!}.$$

Note que introduzimos o conceito de função gama que generaliza o fatorial, definido para inteiros positivos. Por enquanto, imagine que estamos trabalhando com inteiros positivos, pois a única diferença é a defasagem de uma unidade. Essa afirmação se deve à relação $\Gamma(n+1) = n!$

Voltando com esses coeficientes na expressão para a solução e rearranjando, temos uma solução para a equação hipergeométrica confluente, relativa ao índice $s = 0$ da equação indicial, dada por

$$y_1(x) = a_0 \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(c+k)} \frac{x^k}{k!} = a_0\, {}_1F_1(a; c; x)$$

a chamada função hipergeométrica confluente. Desta expressão, fica claro que a constante a_0 deve ser diferente de zero, pois se $a_0 = 0$ temos apenas a solução trivial.

Devemos, agora, considerar a outra raiz da equação indicial, $s_2 = 1 - c$. Procedendo exatamente como na primeira raiz, obtemos a segunda solução

$$\begin{aligned} y_2(x) &= a_0 \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a-c+1+k)}{\Gamma(2-c+k)} \frac{x^{k+1-c}}{k!} \\ &= a_0\, x^{1-c}\, {}_1F_1(a+1-c; 2-c; x). \end{aligned}$$

Do lar 1. *Explicite os cálculo a fim de obter a segunda solução da equação hipergeométrica confluente.*

A pergunta natural agora é: são estas duas soluções linearmente independentes, a fim de que tenhamos uma solução geral? Para responder a esta pergunta, devemos calcular o determinante Wronskiano

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

Basta que consideremos apenas o primeiro termo (o chamado termo líder, relativo a $k = 0$) das séries, a saber

$$y_1 = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)}$$

e

$$y_2 = \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)}\frac{\Gamma(a-c+1)}{\Gamma(2-c)}x^{1-c} = x^{1-c}$$

que, substituídos na expressão para o Wronskiano e já calculando o determinante, fornece

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} 1 & x^{1-c} \\ 0 & (1-c)x^{-c} \end{vmatrix} = (1-c)x^{-c}.$$

Desta expressão aparece naturalmente uma imposição a ser feita, pois somente para $c \neq 1$ temos duas soluções linearmente independentes e a solução geral da equação hipergeométrica confluente é dada por

$$y(x) = C_1\, {}_1F_1(a; c; x) + C_2\, x^{1-c}\, {}_1F_1(a+1-c; 2-c; x)$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Podemos concluir que o método de Frobenius forneceu duas soluções linearmente independentes impondo $c \neq 1$.

No caso em que $c = 1$ devemos procurar uma segunda solução linearmente independente utilizando diretamente a expressão de Frobenius generalizada ou o método de redução de ordem. Este é o caso sempre que as raízes da equação indicial são iguais. ▲

Do lar 2. *Utilize o método de Frobenius para discutir e obter uma solução da equação*

$$x\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) + xy(x) = 0\,,$$

a chamada equação de Bessel de ordem zero.

Do lar 3. *Mostre que a solução da equação diferencial ordinária com coeficientes não constantes*

$$2x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y(x) + (3x - 2x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) - (x+1)y(x) = 0$$

é dada por

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$$

com A e B constantes reais e as duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dadas por, respectivamente,

$$y_1(x) = \sqrt{x}\left[1 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2x)^k}{5\cdot 7\cdot 9\cdots(2k+3)}\right]$$

e

$$y_2(x) = \frac{e^x}{x}\,.$$

REF. A. Kiseliov, M. Krasnov e G. Makarenko, *Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Editorial Mir, Moscú, (1979).

Após a introdução do método de Frobenius através de uma particular equação de Bessel, vamos considerar o caso geral, pois ela apresenta as possibilidades que o método de Frobenius proporciona para obter uma ou ambas as raízes de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes não constantes.

Exemplo 3. Equação de Bessel de ordem μ.

Seja $\mu \in \mathbb{R}$ um parâmetro. Utilize o método de Frobenius para discutir a equação de Bessel de ordem μ,

$$x^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} y(x) + x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(x) + (x^2 - \mu^2) y(x) = 0$$

onde o parâmetro é, em princípio, arbitrário.

▼ Solução.

Uma vez que a equação de Bessel contém um parâmetro arbitrário, justificamos a conveniência desta escolha por, a partir deste parâmetro, termos a possibilidade de englobar, numa só equação diferencial, as possibilidades, advindas do método de Frobenius, de encontrar uma ou duas soluções linearmente independentes.

Ainda que seja um caso específico, considerar uma vizinhança da origem, não perdemos generalidade, pois com uma simples mudança de variável sempre podemos conduzir a análise à origem. Assim, consideramos uma série de potências da seguinte forma,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}$$

com $a_0 \neq 0$ e $s \in \mathbb{C}$ um parâmetro.

Calculando a primeira derivada (admitindo que a derivação sob o somatório seja possível) temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s) a_n x^{n+s-1}$$

enquanto, a derivada segunda é dada por

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1) a_n x^{n+s-2} \, .$$

Introduzindo essas duas últimas expressões na equação diferencial obtemos, já simplificando, a igualdade

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+s)^2 - \mu^2] a_n x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s+2} = 0 \, .$$

É imediato notar que existem duas diferenças básicas relativas ao desenvolvimento em série de Taylor, a saber: (a) os índices no somatório da primeira e da segunda derivadas não são alterados e (b) somente se $s = 0$ obtemos exatamente a série de Maclaurin.

Começamos nossa análise a partir dos índices. Com uma mudança de índice no segundo somatório, considerando $n \to n-2$ (note que estamos mantendo a mesma letra para o índice, pois é um índice de soma, também chamado índice mudo) podemos escrever

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+s)^2-\mu^2]a_n x^{n+s} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n+s} = 0\,.$$

A fim de que tenhamos os índices inferiores iguais devemos separar os dois primeiros termos no primeiro somatório de modo que possamos rearranjar os demais num único somatório,

$$\begin{aligned}&(s^2-\mu^2)a_0x^s + [(s+1)^2-\mu^2]a_1x^{s+1}\\ &+\sum_{n=2}^{\infty}\{[(n+s)^2-\mu^2]a_n + a_{n-2}\}x^{n+s} = 0\,.\end{aligned}$$

Visto que $a_0 \neq 0$, podemos escrever, utilizando identidade de polinômios, as seguintes igualdades

$$\begin{array}{llcll} \text{(a)} & s^2-\mu^2 & = & 0 & \\ \text{(b)} & [(s+1)^2-\mu^2]a_1 & = & 0 & \\ \text{(c)} & [(n+s)^2-\mu^2]a_n + a_{n-2} & = & 0, & \quad n \geq 2. \end{array}$$

Uma breve análise dessas três igualdades. A equação em (a) é a equação indicial/auxiliar, pois só envolve o parâmetro e não envolve os coeficientes, enquanto a terceira (c), para um particular valor de s, é a chamada fórmula/relação de recorrência que, neste caso, relaciona o termo de ordem n com o termo de ordem $n-2$. A segunda equação, (b), aquela envolvendo o coeficiente a_1 não é conhecida com nome específico.

Parece natural começar com a análise a partir da primeira das três equações, pois não envolve os coeficientes e nos fornece as raízes diretamente, ou ainda os possíveis valores do parâmetro s, até então arbitrário.

Começamos por estudar os possíveis casos, ou seja, a partir da equação indicial obtemos,

$$s = \pm\mu,$$

suas raízes, também chamados expoentes. Substituindo s, já determinado, na segunda equação, (b), temos

$$[(\pm\mu+1)^2-\mu^2]a_1 = 0$$

ou ainda, resolvendo a equação algébrica resultante, uma equação envolvendo um produto, temos

$$(1\pm 2\mu)a_1 = 0\,\cdot$$

Desta igualdade temos duas possibilidades, a saber

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \mu = \mp\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \forall a_1 \\ \text{(ii)} & \mu \neq \pm\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; a_1 = 0\,. \end{array}$$

Por fim, substituindo estes resultados na terceira equação, (c), fórmula de recorrência, obtemos

$$[(n\pm\mu)^2-\mu^2]a_n + a_{n-2} = 0$$

ou ainda, expressando a_n em função de a_{n-2}, na forma

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n \pm 2\mu)}$$

com $n \geq 2$. Da fórmula de recorrência, é evidente que, se o parâmetro μ é um número inteiro ou semi-inteiro, vamos ter problemas, pois o denominador pode se anular.

Daqui para a frente se faz necessário uma escolha relativa ao parâmetro μ, até então arbitrário. Vamos escolhê-lo, além de uma maneira conveniente, de forma didática, no sentido de considerar as possibilidades, advindas do método de Frobenius. Aqui, vamos estudar, em separado, quatro casos distintos envolvendo o parâmetro μ.

(i) Seja $\mu = \frac{1}{4}$. As raízes da equação auxiliar são distintas, $s_1 = \frac{1}{4}$ e $s_2 = -\frac{1}{4}$. E, visto que $\mu \neq \pm\frac{1}{2}$ temos, da segunda equação, $a_1 = 0$ e da relação de recorrência obtemos $a_n = 0$ para todo n ímpar. Diante disso, podemos escrever, a partir da relação de recorrência

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n \pm \frac{1}{2})}, \qquad n = 2, 4, 6, \ldots$$

e, ainda mais, como n é par, na seguinte forma

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{n(4n \pm 1)}$$

com $n = 1, 2, \ldots$ Então, como temos duas possibilidades (dois sinais distintos) obtemos duas soluções linearmente independentes da equação diferencial, uma associada à raiz $s_1 = 1/4$ e a outra associada à raiz $s_2 = -1/4$. Não vamos nos preocupar em expressar o coeficiente a_{2n} em função de $a_0 \neq 0$, o que será feito mais adiante.

(ii) Consideramos $\mu = 0$. A equação indicial admite somente uma raiz (dupla), $s = 0$. Da segunda equação $\mu \neq \pm\frac{1}{2}$ e então $a_1 = 0$ bem como os demais ímpares. A relação de recorrência fornece

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{4n^2}$$

com $n = 1, 2, \ldots$ de onde obtemos uma só solução da equação diferencial ordinária. Uma outra solução linearmente independente pode ser procurada através do método de redução de ordem.

(iii) Seja $\mu = \frac{1}{2}$. As raízes da equação indicial são $s_1 = \frac{1}{2}$ e $s_2 = -\frac{1}{2}$. No particular caso em que $s = \frac{1}{2}$ temos $a_1 = 0$, de onde todos os termos de índices ímpares serem nulos, e da relação de recorrência podemos escrever

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+1)}$$

com $n = 2, 3, \ldots$ e obtemos uma solução da equação diferencial. Por outro lado, no caso em que $s = -\frac{1}{2}$ temos a_1 arbitrário e a fórmula de recorrência é dada por

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n-1)}$$

com $n = 2, 3, \ldots$ Visto que temos duas constantes arbitrárias a_0 e a_1, diferentes de zero, esta raiz, a menor raiz, fornece uma solução geral da equação diferencial ordinária, ou ainda duas soluções linearmente independentes, Wronskiano diferente de zero, obtidas com o desenvolvimento em série de potências.

Do lar 4. *Mostrar que a solução obtida com a outra raiz, a maior raiz, é um caso particular daquela obtida com a outra raiz, a menor.*

(iv) Consideramos $\mu = 1$. As raízes da equação indicial são $s_1 = 1$ e $s_2 = -1$. No caso em que $s = 1$ concluímos que $a_1 = a_3 = \cdots = 0$ logo, da relação de recorrência obtemos

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2)}$$

com $n = 2, 3, \ldots$ Então, temos somente uma solução. Por outro lado, relativamente ao caso em que $s = -1$ temos, ainda, $a_1 = a_3 = \cdots = 0$ e da relação de recorrência, a seguinte expressão

$$n(n-2)a_n = -a_{n-2}$$

que, para $n = 2$ implica $a_0 = 0$, contrariando a hipótese $a_0 \neq 0$. Tal expoente não fornece uma solução. ▲

Diante dessas possiblidades, façamos um breve resumo do método de Frobenius. O método fornece pelo menos uma solução da equação diferencial ordinária, escrita por meio de uma série de potências. A outra solução, em princípio, pode ser obtida através do método de redução de ordem. Existem casos em que o método fornece duas soluções linearmente independentes e em outros casos a relação de recorrência nem mesmo é válida. Nos casos em que o método de Frobenius não fornece duas soluções linearmente independentes emerge naturalmente um termo logarítmico, uma vez que a função $\ln x$ não pode ser expressa em termos de uma série de Frobenius.

Como já mencionamos, para a análise em torno de um ponto singular regular no infinito, basta introduzir, no procedimento descrito, uma mudança de variável independente do tipo $z = 1/\xi$ e estudar a equação diferencial resultante em torno do ponto $\xi = 0$, a origem.

23 abril 21

Exemplo 4. *Determine, se existir, uma solução da equação diferencial ordinária*

$$x\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y(x) - x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) - y(x) = 0$$

nas vizinhanças do infinito.

▼ **Solução.** Primeiro, consideremos a mudança de variável independente

$$x = \frac{1}{t}$$

e, utilizando a regra da cadeia, podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = -t^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\\[2ex] \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} &= t^4\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + 2t^3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}.\end{aligned}$$

Substituindo essas duas expressões na equação diferencial e simplificando, obtemos

$$t^3\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}z(t) + (2t^2+t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z(t) - z(t) = 0.$$

Vamos, agora, utilizar o método de Frobenius, sendo a análise nas vizinhanças de $t = 0$. Assim, escrevemos

$$z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+s}$$

com $a_0 \neq 0$ e s um parâmetro. Calculando as derivadas primeira e segunda, substituindo na equação diferencial ordinária e simplificando, podemos escrever

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+s)(k+s+1)a_k t^{k+s+1} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+s-1)a_k t^{k+s} = 0.$$

Introduzindo a mudança de índice $k \to k-1$ no primeiro somatório, obtemos

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k+s-1)(k+s)a_{k-1}t^{k+s} + \sum_{k=1}^{\infty}(k+s-1)a_k t^{k+s} + (s-1)a_0 t^s = 0$$

onde já separamos o termo $k = 0$. Assim, temos a equação indicial $s - 1 = 0$ cuja única raiz é $s = 1$, bem como a fórmula de recorrência

$$(k + s - 1)[(k + s)a_{k-1} + a_k] = 0$$

com $k \geq 1$. Como só temos uma raiz, substituindo-a na fórmula de recorrência, temos

$$k[(k + 1)a_{k-1} + a_k = 0$$

ou ainda, visto que $k \neq 0$, na forma

$$a_k = -(k + 1)a_{k-1}.$$

Escrevendo explicitamente os três primeiros termos

$$\begin{array}{ll} k = 1 & a_1 = -2a_0 \\ k = 2 & a_2 = -3a_1 = 3!a_0 \\ k = 3 & a_3 = -4a_2 = -4!a_0 \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ k = k & a_k = (-1)^k(k + 1)a_0 \end{array}$$

de onde segue para a expansão, obtida através do método de Frobenius, nas vizinhanças de $t = 0$

$$z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k + 1)! t^k$$

enquanto a expansão nas vizinhanças do infinito

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k + 1)!}{x^k}$$

que é o resultado desejado. ▲

Do lar 5. *Utilize o método de Frobenius para procurar uma solução, nas vizinhanças da origem, da equação diferencial, discutida no* Exemplo 4.

2 Problema de valor no contorno

Chama-se problema de valor no contorno (PVC) ao problema composto por uma equação diferencial ordinária, linear, de segunda ordem e homogêna (ou não) e pelas condições de contorno dadas na função e/ou na derivada primeira da função, a variável dependente.

A forma mais geral de uma equação diferencial ordinária, linear, de segunda ordem e homogênea é

$$A_0(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y(x)+A_1(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x)+[A_2(x)+\lambda A_3(x)]y(x)=0, \tag{1}$$

onde vamos considerar os coeficientes funções analíticas da variável independentes e λ um parâmetro independente de x. Por outro lado, as condições de contorno homogêneas na sua forma mais geral são tais que

$$a_0y(a)+a_1y'(a)+a_2y(b)+a_3y'(b)=0$$

$$b_0y(a)+b_1y'(a)+b_2y(b)+b_3y'(b)=0$$

com $a_0, \ldots, a_3$ e $b_0, \ldots, b_3$, são constantes não todas nulas e $a < b$, sendo $a < x < b$ o intervalo considerado a fim de determinarmos a solução.

É importante notar que as soluções não nulas da equação diferencial devem satisfazer as condições de contorno, exceto para valores particulares do parâmetro.

Vamos considerar apenas o caso em que os coeficientes $A_0(x)$ e $A_3(x)$ sejam positivos, os coeficientes $A_0(x)$, $A_1(x)$ e $A_3(x)$ sejam funções duas vezes diferenciáveis, bem como definir as funções

$$p(x) = \exp\left(\int^x \frac{A_1(t)}{A_0(t)}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$q(x) = \frac{A_2(x)}{A_0(x)}p(x) \qquad \text{e} \qquad r(x) = \frac{A_3(x)}{A_0(x)}p(x).$$

Assim, introduzindo essas funções na Eq.(1) e rearranjando, podemos escrever

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x)\right] + \left[q(x) + \lambda r(x)\right] y(x) = 0$$

chamada forma normal da equação diferencial, também conhecida como forma autoadjunta.

Vamos reescrever essa forma normal numa forma mais simples, através de convenientes mudanças de variáveis. Consideramos a variável independente

$$\eta = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{p(t)}$$

e utilizando a regra da cadeia para a derivada, podemos escrever a seguinte equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\eta^2}y(x) + [p(x)q(x) + \lambda p(x)r(x)]y(x) = 0.$$

Por fim, introduzimos as funções

$$y(x) = v(\eta)u(\xi) \qquad \text{e} \qquad \xi = \int^{\eta} \frac{\mathrm{d}t}{v^2(t)},$$

utilizamos novamente a regra da cadeia, podemos escrever a equação diferencial na seguinte forma

$$\frac{1}{v^3}\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2} + \left[p(x)q(x) + \frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\eta^2} + \lambda p(x)r(x)\right] v\, u = 0.$$

Devido à liberdade das funções introduzidas, vamos fazer uma conveniente escolha, envolvendo a relação

$$v^4(\eta)p(x)r(x) = 1$$

que, rearranjando e simplificando, permite escrever

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}u(\xi) + [\lambda - s(\xi)]u(\xi) = 0 \tag{2}$$

chamada forma normal da equação diferencial, onde introduzimos a notação

$$-s(\xi) = v^4(\eta)\left[p(x)q(x) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\eta^2}v(\eta)\right]$$

desde que o lado direito esteja expresso em função de ξ.

Diante dessas transformações, variáveis independente e dependente, a partir de agora vamos nos concentrar na Eq.(2) e nas condições de contorno adequadas, relativamente às eventuais transformações efetuadas.

Do lar 6. *Sejam* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. (i) *Escreva a equação de Bessel de ordem* μ

$$x^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} y(x) + x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(x) + \left(\lambda^2 x^2 - \mu^2\right) y(x) = 0\,,$$

na forma normal. (ii) *Existe* μ *que conduza a equação de Bessel a uma equação com coeficientes constantes?*

Do lar 7. *Seja* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Resolva o* PVC

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} y(x) + \lambda^2 y(x) = 0$$
$$y(0) = 0 = y(\pi).$$

3 Complementos

Nesta seção coletamos alguns exercícios, que serão discutidos e resolvidos, a fim de complementar o texto de revisão das equações diferenciais ordinárias.

Exercício 1. *Determine a solução do* PVI, *problema de valor inicial,*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) + x(t) = f(t)$$

onde a função $f(t)$ é dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & se \quad t < 0 \\ t & se \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & se \quad t > 1. \end{cases}$$

Solução. Visto que o segundo membro da equação diferencial (termo de não homogeneidade) é uma função descontínua, vamos resolver este problema (equação + condição) dividindo-o em três casos, cada um deles num dimínio diferente. (a) Para $t < 0$, temos $f(t) = 0$. Neste caso, procuramos a solução da equação diferencial ordinária homogênea

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) + x(t) = 0$$

que é uma equação separável cuja solução é dada por $x(t) = A\, e^{-t}$ com A uma constante a ser determinada.
(b) No intervalo $0 \leq t \leq 1$, temos $f(t) = t$. Devemos resolver a respectiva equação não homogênea

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) + x(t) = t.$$

Visto que conhecemos a solução geral da equação homogênea, contendo uma constante arbitrária, basta obter uma solução particular da equação não homogênea (outra maneira é o fator integrante) que, por inspeção é dada por $x(t) = t - 1$, como pode ser verificado por substituição direta. Então, a solução da equação diferencial ordinária não homogênea é dada por

$$x(t) = t - 1 + B\,e^{-t}$$

onde B é uma constante a ser determinada.
(c) Por fim, no terceiro intervalo, análogo ao primeiro podemos escrever

$$x(t) = C\,e^{-t}$$

onde C é outra constante a ser determinada.

Reunindo os três casos, a solução do PVI é tal que

$$x(t) = \begin{cases} A\,e^{-t} & se \;\; t < 0 \\ t - 1 + B\,e^{-t} & se \;\; 0 \le t \le 1 \\ C\,e^{-t} & se \;\; t > 1. \end{cases}$$

Utilizando a condição inicial $x(0) = 0$ obtemos $A = 0$. A fim de determinar as outras duas constantes, vamos impor a condição de continuidade de $x(t)$. Assim, os valores de $x(t)$ coincidem nas fronteiras de cada domínio, $t = 0$ e $t = 1$, de onde segue

$$\begin{aligned} x(0) &= A = -1 + B \\ x(1) &= B\,e^{-1} = C\,e^{-1} \end{aligned}$$

com solução dada por $B = 1 = C$. A solução do PVI é,

$$x(t) = \begin{cases} 0 & se \;\; t < 0 \\ t - 1 + e^{-t} & se \;\; 0 \leq t \leq 1 \\ e^{-t} & se \;\; t > 1 \end{cases}$$

que é o resultado desejado. $\square$

TEOREMA **1.** *Dada uma solução, $y_P(x)$ da equação diferencial linear não homogênea*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

qualquer solução $y(x) = \phi(x)$ desta equação pode então ser expressa como a soma

$$\phi(x) = y_P(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias e $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções linearmente independentes da respectiva equação homogênea.

DO LAR 8. *Prove o* TEOREMA 1*. Mostre que a função $\phi(x) - y_P(x)$ é solução da respectiva equação diferencial linear homogênea.*

EXERCÍCIO 2. *Utilize o método de variação de parâmetros para mostrar que a solução geral da equação diferencial ordinária*

$$y'' = -f(x)$$

pode ser escrita na seguinte forma

$$y(x) = C_1 + C_2 x - \int_0^x (x-\xi) f(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

com C_1 e C_2 duas constantes arbitrárias.

Solução. A respectiva equação diferencial homogênea é $y''(x) = 0$ com solução geral dada por

$$y(x) = C_1 + C_2 x$$

com C_1 e C_2 duas constantes arbitrárias.

Vamos, agora, procurar uma solução particular da equação não homogênea. Para tal, utilizamos o método de variação de parâmetros, ou seja, determinar $C_1(x)$ e $C_2(x)$ de modo que a solução

$$y_P(x) = C_1(x) + C_2(x)\, x$$

satisfaça a equação diferencial não homogênea.

Cálculo das derivadas. Derivada primeira

$$y_P'(x) = C_1'(x) + C_2(x) + x\, C_2'(x)$$

com a condição livre $C_1'(x) + x\, C_2'(x) = 0$. Calculando a derivada segunda, temos $y''(x) = C_2'(x)$. Assim, substituindo essa derivada na equação não homogênea, obtemos

$$C_2'(x) = -f(x).$$

Devemos, agora, resolver o sistema de equações

$$\begin{cases} C_1'(x) + x\, C_2'(x) &= 0 \\ C_2'(x) &= -f(x) \end{cases}$$

Da segunda equação, integrando, segue

$$C_2(x) = -\int_0^x f(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

e, voltando com esse valor na primeira equação, temos

$$C_1'(x) = x\, f(x)$$

com solução dada por

$$C_1(x) = \int_0^x \xi f(\xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

Substituindo $C_1(x)$ e $C_2(x)$ na expressão para a solução particular, obtemos

$$\begin{aligned} y_P(x) &= C_1(x) + C_2(x)\, x \\ &= \int_0^x \xi f(\xi)\, \mathrm{d}\xi + x \left(-\int_0^x f(\xi)\, \mathrm{d}\xi \right) \\ &= -\int_0^x (x-\xi) f(\xi)\, \mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

Uma vez conhecida uma solução particular da equação não homogênea, pelo TEOREMA 1, podemos escrever para a solução da equação não homogênea

$$y(x) = C_1 + C_2\, x - \int_0^x (x-\xi) f(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

com C_1 e C_2 duas constantes arbitrárias. □

Exercício 3. *Considere o* Exercício 2, *admitindo as condições de contorno* $y(0) = 0 = y(1)$, *determime as constantes* C_1 *e* C_2 *e obtenha a expressão para* $y(x)$.

Solução. Substituindo $x = 0$ na expressão para a solução da equação diferencial não homogênea, temos $y(0) = C_1 = 0$, enquanto, para $x = 1$, obtemos

$$y(1) = C_2 - \int_0^1 (1-\xi) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0$$

de onde, segue

$$C_2 = \int_0^1 (1-\xi) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Voltando com esses valores em $y(x)$, obtemos

$$y(x) = x \int_0^1 (1-\xi) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \int_0^x (x-\xi) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

que, separando a primeira integral em dois intervalos e rearranjando, permite escrever

$$y(x) = \int_0^x \xi(1-x) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_x^1 x(1-\xi) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

que é o resultado desejado. $\square$

Exercício 4. *Ainda em relação ao* Exercício 2, *introduza a notação*

$$G(x|\xi) = \begin{cases} \xi(1-x), & 0 \le \xi \le x \\ x(1-\xi), & x \le \xi \le 1 \end{cases}$$

para mostrar que podemos escrever

$$y(x) = \int_0^1 G(x|\xi) f(\xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

Solução. Como já expressmos a solução em dois intervalos distintos, basta substituir $G(x|\xi)$ de onde segue

$$y(x) = \int_0^x G(x|\xi) f(\xi)\, \mathrm{d}\xi + \int_x^1 G(x|\xi) f(\xi)\, \mathrm{d}\xi,$$

ou ainda na forma

$$y(x) = \int_0^1 G(x|\xi) f(\xi)\, \mathrm{d}\xi,$$

que é o resultado desejado. □

A função $G(x|\xi)$ como assim introduzida é uma função de dois pontos x e ξ e é conhecida com o nome de função de Green. Note que essa função não depende do termo de não homogeneidade e carrega consigo as condições de contorno. Diante disso, uma vez conhecida a função de Green, o problema não homogêneo fica completamente resolvido a partir de uma integração.

Do lar 9. *Determine a função de Green para o problema de valor no contorno, composto pela equação diferencial não homogênea*

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = -f(x)$$

com ω^2 uma constante positiva, satisfazendo as condições de contorno homogêneas $y(0) = 0 = y(1)$.

Vamos voltar ao tema função de Green, logo após a introdução do conceito de 'função' delta de Dirac.

Exercício 5. Função degrau unitário

Vamos definir o que se entende por função degrau unitário, também conhecida como função de Heaviside ou ainda função escada.

A função de Heaviside é uma função descontínua que é útil, por exemplo, em processos do tipo liga/desliga. Existem algumas maneiras distintas de introduzir essa função, aqui optamos, utilizando a notação $H(\cdot)$ (ou $\Theta(\cdot)$, ou $U(\cdot)$), defini-la na forma mais usual, visando a conexão com a função delta de Dirac.

Definição **1.** Função de Heaviside.

Seja $a \in \mathbb{R}$. Definimos a função de Heaviside como

$$H(x-a) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x > a, \\ \frac{1}{2} & \text{se} \quad x = a, \\ 0 & \text{se} \quad x < a \cdot \end{cases}$$

Uma outra maneira de introduzir a função de Heaviside, é admitindo o sinal de igualdade ou para zero (desligado) ou para um (ligado). Ver Figura 1.

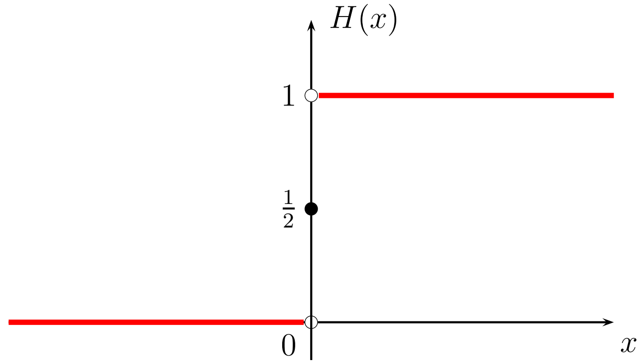

Figura 1: Função de Heaviside com $a = 0$.

Visto que a definição de $H(\cdot)$ envolve uma função descontínua, e em aplicações é útil utilizar funções contínuas é costume definir $H(\cdot)$ como um apropriado limite.

Não vamos nos ocupar deste fato porém, apenas para mencionar,

$$H(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right].$$

Exercício 6. Função delta de Dirac

A função delta de Dirac, denotada por $\delta(x)$, não é uma função no sentido clássico, mas sim um funcional linear, também chamado de distribuição. Recordemos que uma função pode ser entendida como uma lei que associa a um elemento do domínio, um único elemento do contradomínio. Por outro lado, uma distribuição, ou funcional linear, é uma função cujo domínio é um particular espaço vetorial, enquanto o contradomínio é um conjunto numérico que, neste texto será $\mathbb{R}$.

Começamos com um exemplo a fim de motivar a definição do que atende pelo nome de função delta de Dirac.

Vamos introduzir o conceito de função delta de Dirac através de um problema corriqueiro, uma raquetada numa bolinha de pinguepongue. A raquete imprime uma força com módulo grande num intervalo de tempo muito pequeno. Imagine um gráfico, enquanto uma grandeza cresce muito a outra é muito pequena, são inversamente proporcionais, tipo hipérbole equilátera.

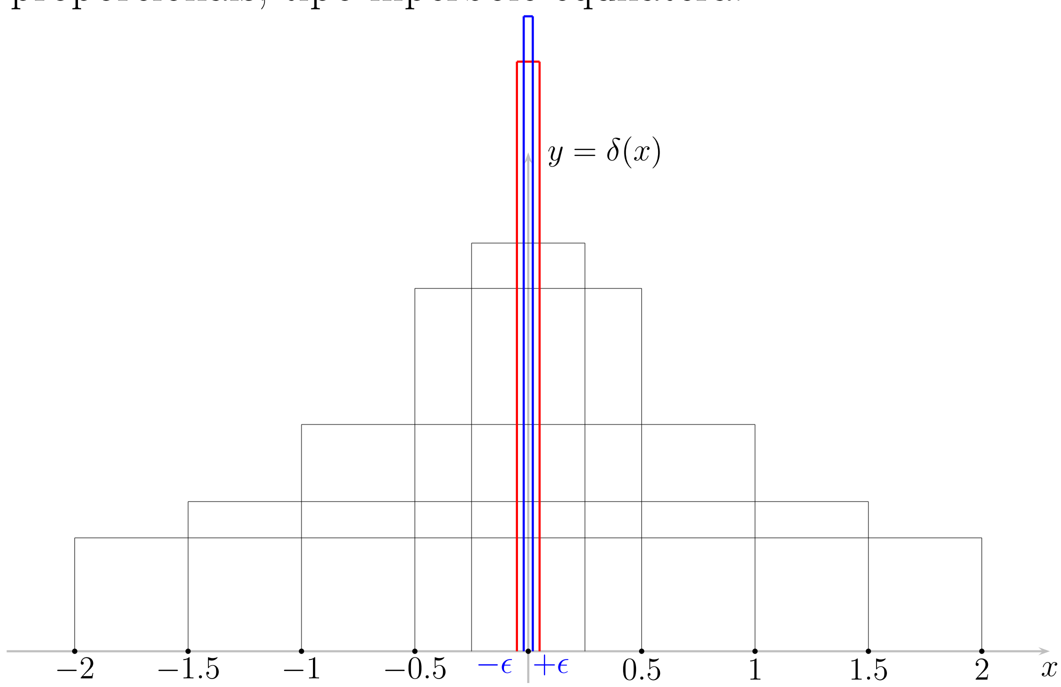

Figura 2: A 'função' delta de Dirac.

Sejam $\epsilon \in \mathbb{R}$ e a função $\delta_\epsilon(x)$ dada por

$$\delta_\epsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\epsilon} & \text{se} \;\; |x| < \epsilon, \\ \\ 0 & \text{se} \;\; |x| > \epsilon, \end{cases}$$

de onde segue, imediatamente, a igualdade

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{1}{2\epsilon}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\epsilon}(\epsilon + \epsilon) = 1$$

uma função integrada num intervalo simétrico e normalizada à unidade.

Admitamos, agora, uma função $f(x)$ integrável no intervalo simétrico $(-\epsilon, \epsilon)$. Usando o teorema do valor médio, podemos escrever

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta_\epsilon(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(x)\, \mathrm{d}x \simeq f(a\epsilon)$$

com $|a| < 1$. Desta expressão, introduzimos a função delta de Dirac a partir do limite

$$\lim_{\epsilon \to 0} \delta_\epsilon := \delta(x)$$

que, aplicada à função δ_ϵ permite escrever $\delta(x) = 0$ para $x \neq 0$, bem como a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, \mathrm{d}x = 1\,,$$

normalizada à unidade.

Definição **2.** Função delta de Dirac.

Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$. Definimos a função delta de Dirac (função delta), $\delta(x)$, satisfazendo

$$\begin{aligned} \delta(x-a) &= 0, \quad x \neq a \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\,\mathrm{d}x &= 1. \end{aligned}$$

Com esta definição para a função delta de Dirac, fica claro que ela não pode ser considerada uma função no estrito sentido da palavra. Comparando com o exemplo da raquetada, imaginemos um intervalo de tempo tão pequemo quanto queiramos, digamos 2ϵ (o fator dois é exclusivo devido à normalização imposta à unidade) de onde segue a força (raquetada imprimida) igual à $1/(2\epsilon)$. Ao efetuar a integração, temos uma grandeza chamada impulso e que, devido à normalização, é unitário.

Concluímos, a partir da Figura 2, um gráfico cartesiano de $x \times \delta(x)$, que a área delimitada pela curva é unitária, conforme normalização.

Note que as propriedades associadas à função delta de Dirac, dentre elas algumas que vamos ver a seguir, podem ser estudadas através de limites convenientes da função $\delta_\epsilon(x)$ esta sim, uma função no sentido usual do cálculo.

Proposição 1. Representação da função delta

Uma importante representação da função delta de Dirac é dada em termos de um quociente envolvendo uma função trigonométrica

$$\delta(x) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2\pi x i} \right) = \lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{sen} kx}{\pi x}$$

que, como pode ser verificado, satisfaz a condição de que a integral de $-\infty$ até ∞ é unitária.

DO LAR 10. *Mostre que a representação da função delta em termos do seno trigonométrico satisfaz a condição de normalização.*

Proposição 2. PROPRIEDADE DE FILTRAGEM.

Seja $a \in \mathbb{R}$. Tomando o limite $\epsilon \to 0$, na expressão que fornece o delta, verificamos, a partir do teorema do valor médio, que a função delta de Dirac goza da propriedade

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x = f(a)$$

que pode ser interpretada como uma propriedade de filtragem. De todos os valores possíveis da função $f(x)$, só um contribui, a função calculada em $x = a$.

Proposição 3. OUTRAS PROPRIEDADES.

Seja $a \in \mathbb{R}$. Valem as seguinte propriedades

$$\begin{array}{llcl} \text{(a)} & x\delta(x) & = & 0, \\ \text{(b)} & \delta(-x) & = & \delta(x), \text{ (uma função par)}, \\ \text{(c)} & \delta(ax) & = & \frac{1}{a}\delta(x), \text{ com } a > 0. \end{array}$$

DO LAR 11. *Mostre os resultados da* **Proposição 3**.

Proposição 4. FUNÇÃO DELTA COMO UM LIMITE.

Seja $n = 1, 2, 3, \ldots$. Podemos introduzir a função delta de Dirac a partir de um conveniente limite de uma sequência de funções ordinárias.

Dentre elas, mencionamos

$$\begin{array}{llcl} \text{(a)} & \delta_n(x) & = & \sqrt{n/\pi}\, e^{-nx^2}, \\ \text{(b)} & \delta_n(x) & = & \dfrac{n/\pi}{1+n^2x^2}, \\ \text{(c)} & \delta_n(x) & = & \dfrac{1}{n\pi}\dfrac{\operatorname{sen}^2 nx}{x^2}. \end{array}$$

DO LAR 12. *Considere as expressões dadas na* **Proposição 4**. *Verifique a normalização*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,\mathrm{d}x = 1\,.$$

Na sequência do item (a) temos que a função delta de Dirac pode ser encarada como sendo o limite de uma sequência de Gaussianas com larguras que vão diminuindo.

Proposição 5. Função delta $\times$ Fourier.

Sejam $t, x \in \mathbb{R}$. Vale a representação

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \delta_k(t-x) &= \lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{sen} k(t-x)}{\pi(t-x)} \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{-k}^{k} e^{i\xi(t-x)} \frac{\mathrm{d}\xi}{2\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi(t-x)} \mathrm{d}\xi = \delta(t-x)
\end{aligned}$$

que fornece uma representação integral da função delta de Dirac, interpretada como: a transformada de Fourier da unidade é igual a delta de Dirac.

Exercício 7. Heaviside $\times$ Dirac. *Seja $a \in \mathbb{R}$. Mostre que vale a relação*

$$\delta(x-a) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H(x-a)\,.$$

Solução. Consideremos a integral da função delta de Dirac, $\delta(\xi - a)$, no intervalo $-\infty$ até x

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(\xi - a)\,\mathrm{d}\xi = \begin{cases} 0 & \text{se } \ x < a, \\ 1 & \text{se } \ x > a, \end{cases}$$

que, pode ser escrita em termos da função de Heaviside

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(\xi - a)\,\mathrm{d}\xi = H(x-a)\,.$$

Nesta igualdade não estamos utilizando a definição com a média, isto é, para $x = 0$ vale $H(0) = \frac{1}{2}$. Ainda mais, utilizando a regra de Leibniz, podemos escrever

$$\delta(x - a) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H(x - a)$$

que é a expressão desejada. $\square$

Esta igualdade, mais uma vez, assegura que a função delta de Dirac não é uma função no sentido usual do cálculo, visto que o lado direito da igualdade é o diferencial de uma função descontínua.

Talvez a aplicação mais usual da função unitária de Heaviside seja na obtenção da chamada fórmula de Duhamel. Esta expressão permite obter a solução de uma equação diferencial ordinária, linear e não homogênea, sujeita às condições iniciais homogêneas, o chamado problema de valor inicial, uma vez conhecida a solução desse problema quando o segundo membro, termo de não homogeneidade da equação, é uma função de Heaviside. Vamos apresentar essa aplicação, imediatamente após a introdução da transformada de Laplace, em particular, do chamado produto de convolução de Laplace.

EXERCÍCIO 8. *Considere o problema de valor no contorno* (PVC), *composto pela equação diferencial*

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} y(x, \xi) = -\delta(\xi - x)$$

e satisfazendo as condições de contorno

$$y(0) = 0 = y(1)$$

onde ξ *é a variável independente;* $\xi = x$ *é um ponto pertencente ao intervalo* $0 < \xi < 1$ *e* $\delta(\cdot)$ *é a função delta de Dirac. Mostre que a solução do* PVC *é a função de Green conforme* EXERCÍCIO 4*.*

SOLUÇÃO. Da definição da função delta $\delta(\xi - x) = 0$ nos intervalos $0 \leq \xi < x$ e $x < \xi \leq 1$, temos que a primeira derivada tem uma descontinuidade de salto unitária, quando ξ passa através do valor x. Note que temos dois intervalos $0 < x < \xi < 1$ e $0 < \xi < x < 1$.

Visto que a função de Green não depende do termo de não homogeneidade e é simétrica, isto assegura que a função é exatamente a mesma função de Green, conforme introduzida no EXERCÍCIO 4. □

DO LAR 13. *Mostre que a função de Green, conforme introduzida no* EXERCÍCIO 4*, é simétrica,*

$$G(x|\xi) = G(\xi|x).$$

A resolução através da metodologia da transformada de Laplace será vista mais à frente. Antes de apresentarmos como construir a função de Green no caso unidimensional, apresentamos uma sua interpretação.

$G(x|\xi)$ é a resposta no ponto ξ a um impulso unitário no ponto x. Uma fonte em x tem a sua resposta em ξ dada por $G(x|\xi)$. Ainda mais, $G(x|\xi)$ é interpretada como o resultado da superposição das respostas a um conjunto de impulsos dado por $f(x)$, o termo de não homogeneidade da equação diferencial. Ainda mais, se interpretamos $y(x)$ como sendo um deslocamento e $f(x)$ como uma força por unidade de comprimento, a solução geral dada pela integral

$$y(x) = \int_0^1 G(x|\xi) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

mostra que $G(x|\xi)$ é o deslocamento de x devido a uma força de magnitude unitária concentrada em ξ.

Aqui, vamos apresentar apenas o cálculo da função de Green no caso de a equação diferencial ter os coeficientes constantes. O caso geral, envolvendo um operador de Sturm-Liouville não será abordado.

EXERCÍCIO 9. CONSTRUÇÃO DA FUNÇÃO DE GREEN. *A fim de construir a função de Green devemos impor quatro condições que caracterizam-na. Sejam o intervalo $a \leq x, \xi \leq b$ e a função de Green $G(x|\xi)$. A função de Green satisfaz:*

(i) *a equação homogênea para* $x \neq \xi$*.*

(ii) *as condições de contorno* $G(a|\xi) = 0 = G(b|\xi)$*.*

(iii) *é contínua* $G(\xi + 0|\xi) - G(\xi - 0|\xi) = 0$ *em* $x = \xi$*.*

(iv) *a derivada primeira tem uma descontinuidade de salto em* $x = \xi$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G(x|\xi)\bigg|_{x=\xi+0} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G(x|\xi)\bigg|_{x=\xi-0} = -1$$

A diferença do caso geral é que em (iv)*, no lugar de* -1 *temos* $-\frac{1}{p(\xi)}$*, vindo do operador de Sturm-Liouville.*

Utilize essas condições a fim de determinar a função de Green, conforme EXERCÍCIO 4*.*

SOLUÇÃO. A partir das condições (i) e (ii) podemos escrever, já separando em dois intervalos

$$G(x|\xi) = \begin{cases} a_1(\xi)x & \text{se} \quad 0 < x \leq \xi \\ a_2(\xi)(1-x) & \text{se} \quad \xi < x < 1 \end{cases}$$

onde $a_1(\xi)$ e $a_2(\xi)$ não dependem da variável x e devem ser determinadas a partir das outras condições.

Note que tanto $y_1 = a_1(\xi)x$ quanto $y_2 = a_2(\xi)(1-x)$ satisfazem a equação diferencial homogênea e, a primeira satisfaz a condição de contorno no extremo $x = 0$, enquanto a segunda satisfaz a condição de contorno no outro extremo, $x = 1$. Por outro lado, visto que a função de Green é simétrica, podemos escrever

$$a_1(\xi) = A(1-\xi) \qquad \text{e} \qquad a_2(\xi) = A\xi$$

onde A é uma constante independente de ξ, de onde segue que a condição (iii) está satisfeita. Por fim, agora, vamos impor a condição (iv),

$$A(1-\xi) - A(-\xi) = -1$$

de onde segue $A = 1$. Logo, a função de Green é

$$G(x|\xi) = \begin{cases} x(1-\xi) & \text{se} \quad 0 < x \leq \xi \\ \xi(1-x) & \text{se} \quad \xi < x < 1. \end{cases}$$

Então, a solução do problema de valores no contorno é dada por meio da integral

$$y(x) = \int_0^1 G(x|\xi) f(\xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

Assim, conhecido o termo forçante, $f(x)$, o termo de não homogeneidade da equação diferencial, basta integrar no intervalo considerado. □

DO LAR 14. *Sejam $0 \leq x \leq 1$ e $f(x)$ uma função contínua. Determine a função de Green para a equação diferencial*

$$y'' + \omega^2 y = -f(x)$$

onde $\omega^2 > 0$, satisfazendo as condições de contorno

$$y(0) = 0 = y(1).$$

DO LAR 15. *Utilizando o* DO LAR 14 *e considerando* $f(x) = x$ *determine a solução do problema de valor no contorno.*

REF. E. Capelas de Oliveira e J. Emílio Maiorino, *Introdução aos Métodos da Matemática Aplicada*, Editora Unicamp, Terceira Edição, Campinas, (2010).

30 abril 21

Sobre os questionamentos do Hudson, a seguir:

Ex.28 Primeira igualdade, sim $4x$ no lugar de $2x$.
Ex.30 Sim, a resposta está ok.
Seminário da Renata: 6 de maio de 21 às 14h30min. Mando o link, no classroom, uns 10 minutos antes.