MT 724
Bio 2

Em seguida à "monstração" feita para indicar que a Equação a Derivadas Parciais dada por

(1)
$$\begin{cases} c = c(x,y,t) \text{ com } (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \text{ e } t \in (0,T] \subset \mathbb{R} \\ \dfrac{\partial c}{\partial t} - \alpha \Delta_{xy} c + \mathbb{V} \cdot \nabla_{xy} c + \mu c = f(x,y,t) \\ \text{tendo como condições de contorno uma das formas da condição de } \underline{\text{Robin}} \\ a \cdot c(x,y,t) + b \dfrac{\partial c}{\partial \eta}(x,y,t) = h(x,y,t),\ (x,y) \in \partial\Omega \text{ e } t \in J = (0,T] \end{cases}$$

A derivada direcional $\frac{\partial c}{\partial \eta}(x,y,t) = \nabla c \cdot \eta$

sendo η o vetor unitário ortogonal a $\partial\Omega$ e externo a Ω.

Obs 1: se $b = 0$ e $h \equiv 0 \Rightarrow$ a condição é de <u>Dirichlet</u> Homogênea e se $h \not\equiv 0$ é de Dirichlet não-Homogênea

Obs 2: Se $a = 0$ e dependendo de h ser ou não identicamente nula, a condição fica sendo de <u>von Neumann</u> homogênea ou não

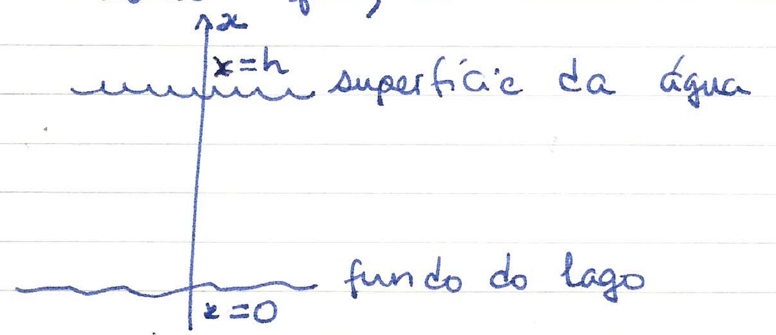
Obs 3: (1) e a sequência são evidentemente análogas se $\Omega \subset \mathbb{R}^1$ ou se $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

Consideremos alguns casos:

1. Se este problema, para $\Omega \subset \mathbb{R}^1$ for estacionário, (1) se reduz a

$$(2)\begin{cases} -\alpha\, C''(x) + v.C'(x) + \mu.C(x) = f(x), \quad x \in \Omega \\ \text{com condições de fronteira adequadas} \end{cases}$$

À primeira vista, esta E.D.O. de 1ª ordem, linear e a coeficientes constantes deve ser resolvida por métodos analíticos mas ... supusemos, em aula que, considerando $\Omega = [0, h]$, f será dada por



$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < h \\ F, & x = h \end{cases}$$

Pronto, é necessário aproximar!

Uma aproximação usual, via Diferenças Divididas Centrais, considera, mas usando

$$C_i \simeq C(x_i) \quad \text{ou} \quad C_{i+1} = C(x_{i+1}) = C(x_i + \Delta x)$$

em que $x_0 = 0,\ x_1 = \Delta x,\ x_2 = 2\Delta x, \ldots, x_i = i\cdot\Delta x, \ldots x_n = n.\Delta x = h$

com $\Delta x = \dfrac{h}{n}$,

temos (via Série de Taylor/MacLaurin):

(a) $C_{i+1} = C_i + \Delta x . C_i' + \frac{\Delta x^2}{2} C_i'' + \frac{\Delta x^3}{6} C_i''' + \frac{\Delta x^4}{24} C_i^{IV} + \dots$

(b) $C_{i-1} = C_i - \Delta x C_i' + \frac{\Delta x^2}{2} C_i'' - \frac{\Delta x^3}{6} C_i''' + \frac{\Delta x^4}{24} C_i^{IV} \pm \dots$

Ora, fazendo (a) + (b) e "ajeitando", temos

$C_{i-1} - 2C_i + C_{i+1} = \Delta x^2 C_i'' + O(\Delta x^4)$, ou

(3) $C_i'' \cong \frac{C_{i-1} - 2C_i + C_{i+1}}{\Delta x^2}$ → esta operação "aproxima" o valor da 2ª derivada com erro $O(\Delta x^2)$

Mas agora fazendo (a) − (b) e ajeitando, vem:

(4) $C_{i+1} - C_{i-1} = 2\Delta x\, C_i' + O(\Delta x^3)$, ou

$$C_i' = \frac{C_{i+1} - C_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

Pode-se observar que, em (3), ao dividir $O(\Delta x^4)$ por Δx^2, temos $O(\Delta x^2)$ e, em (4), dividindo $O(\Delta x^3)$ por $2.\Delta x$, temos, também, $O(\Delta x^2)$

A aproximação de (2), para um x_i da partição
5 do intervalo J fica sendo

$$\boxed{-\alpha \frac{C_{i-1} - 2C_i + C_{i+1}}{\Delta x^2} + v \frac{C_{i+1} - C_{i-1}}{2\Delta x} + \mu C_i = f_i}$$

De 5, rearranjando, obtem-se um sistema linear cuja i^{a} linha (com $i \neq 0$ e $i \neq 1$) é dada por:

$$(6) \begin{cases} \left(-\frac{\alpha}{\Delta x^2} - \frac{v}{2\Delta x}\right) c_{i-1} + \left(\frac{2\alpha}{\Delta x^2} + \mu\right) c_i + \\ + \left(-\frac{\alpha}{\Delta x^2} + \frac{v}{2\Delta x}\right) c_{i+1} = f_i \end{cases}$$

E porque isto não vale dos extremos? Nesses 2 pontos, há as condições de contorno. Como exemplo consideremos, no fundo, i.e.: para $x=0$, como o poluente não chega lá que $c(0)=0$ (Dirichlet Homogênea) e, na superfície, como o poluente não evapora, que $c'(h)=0$. Isto significa que $c(h)$ não é conhecida, mesmo conhecendo sua derivada, assim como $c(0)$ é conhecida, sendo 0.

Assim, temos, para $i=1$

$$\cancel{\left(-\frac{\alpha}{\Delta x^2} - \frac{v}{2\Delta x}\right)} \cdot 0 + \left(\frac{2\alpha}{\Delta x^2} + \mu\right) c_1 + \left(-\frac{\alpha}{\Delta x^2} + \frac{v}{2\Delta x}\right) c_2 = f_1 ,$$

para $2 \leq i < n$, a expressão 6 e, quando

$i=n$, $\quad -\frac{2\alpha}{\Delta x^2} \cdot c_{n-1} + \left(\frac{2\alpha}{\Delta x^2} + \mu\right) c_n = f_n$ (*)

(*) a explicação seguirá, é preciso confiar na Matemática!

Assim, a aproximação de $c = c(x)$, dada por

$vc = [0, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_i, \ldots, n]$, é obtida resolvendo

$M.C = fb$ sendo M dada por

$$
\begin{bmatrix}
\frac{2\alpha}{\Delta x^2}+\mu & -\frac{\alpha}{\Delta x^2}+\frac{v}{2\Delta x} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
-\frac{\alpha}{\Delta x^2}-\frac{v}{2\Delta x} & \frac{2\alpha}{\Delta x^2}+\mu & -\frac{\alpha}{\Delta x^2}+\frac{v}{2\Delta x} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & -\frac{\alpha}{\Delta x^2}-\frac{v}{2\Delta x} & \frac{2\alpha}{\Delta x^2}+\mu & -\frac{\alpha}{\Delta x^2}+\frac{v}{2\Delta x} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{\alpha}{\Delta x^2}-\frac{v}{2\Delta x} & \frac{2\alpha}{\Delta x^2}+\mu & -\frac{\alpha}{\Delta x^2}+\frac{v}{2\Delta x} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{2\alpha}{\Delta x^2} & \frac{2\alpha}{\Delta x^2}+\mu
\end{bmatrix}
$$

o termo independente, acima indicado como fb é da forma

$$
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{bmatrix}
$$

Obs.: a fonte é pontual em $x = h$ ou seja, na nª posição de um vetor que, até a posição $(n-1)$ só tem zeros