MODELOS MATEMÁTICOS-Capítulo II : *PRINCÍPIO de MALTHUS*

Parte 1 : Modelo Minimalista de Malthus-*Homogeneidade, Independência e Espontaneidade*

Wilson Castro Ferreira Jr.-IMECC–Unicamp- 2020

"*The aim of a mathematical lecture should not be the logical derivation of some incomprehensible assertions from others (equally incomprehensible); it is necessary to explain to the audience what the discussion is about and to teach them to use not only the results presented but (**and this is major)** the **methods** and the **ideas**"* **Vladimir I.Arnold**(1937-2010)-Matemático, Professor, Escritor, e Polemista Extraordinários, e um patriota russo.

I-INTRODUÇÃO: *O Princípio de Comenius, a Metodologia Funcional de Galileo e a Representação Analitica de Newton*

"*A sabedoria é construída no percurso entre as coisas simples e as mais complexas, entre as visíveis e as invisíveis e entre as coisas terrenas e as coisas divina*s". Jan Komensky (*Comenius*)-Pai da Didática (1592-1670).

"La filosofia ‘e scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l’universo) ma non si pu‘o intender se prima non s’impara a intender la lingua e conoscere i caratteri ne’ quali ‘e scritto. Egli ‘e scritto in lingua matematica e i caratteri sono triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche senza i quali mezi ‘e impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi ‘e un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto". -Galileo Galilei (*Dialogo*, 1632)

A Ciência antiga, até à época Medieval, esteve empenhada na busca de uma chave única de todos os mistérios, da Pedra Filosofal (a partir da qual toda a matéria, especialmente o ouro, procederia) à Palavra Mágica Criadora ("Abracadabra",i.e., "avrah kahdabra" que em aramaico significa: "*Eu crio com a minha palavra*"), à procura do Santo Graal e muitos outros empreendimentos fantasiosos, todos eles sem qualquer sucesso, a não ser por alguns dividendos colaterais inesperados e pela literatura associada.(Aparentemente, esta quimera ainda continua vivíssima a julgar pela prometida "Teoria do Tudo" anunciada com frequencia e alarde e renunciada com a mesma frequencia mas sem tanto alarde).

Aristóteles(385-322 AC), por sua vez, que dominou todo o pensamento europeu até então, ensinava que o conhecimento provinha esencialmente da especulação abstrata que menospreza a influencia da realidade experimental, talvez por que esta necessariamente envolveria algum esforço físico e manual e isso seria assunto reservado a escravos.

A Ciência Moderna foi inaugurada com uma mudança radical de paradigmas introduzidos com os trabalhos de Galileo Galilei (1564-1642) nos quais foi estabelecida uma nova Metodologia Científica que rompia com a ilusão da Idade Média e com a passividade de Aristóteles noi que consistia de três fundamentos:

1) O procedimento **Analítico** (ἀνάλυσις), isto é, o estudo de aspectos deliberadamente isolados (artificialmente, mas com critério) de um determinado fenômeno,

2) A observação ativa do fenômeno, com a realização de experimentos exploradores e o registro quantitativo(**Tabelas**) e qualitativo **(Regras)** dos resultados e, finalmente

3) A **Síntese** (σύνθεσις) **Funcional** dos Dados registrados para representar o fenômeno na forma de um **Modelo Matemático** descritivo e preditivo.

(É justo citar que Arquimedes(288-212 AC), talvez a mente mais criativa da Antiguidade, ou de todos os tempos, já havia indicado que a observação ativa da natureza, até quando se tomava banhos, era indispensável à sua compreensão).

A ideia de construir Modelos Matemáticos Funcionais que sintetizam e generalizam a informação contida em extensas **Tabelas** numéricas de dados experimentais e qualitativos foi a grande contribuição de Galileo (sec. XVII) iniciada com o seu estudo da queda livre de corpos e da trajetória de balas de canhão. Apesar dessa origem tão prosaica (que causava horror aos aristotélicos da época), foi com esse trabalho que ele estabeleceu as bases para a Matemática Aplicada e para todas as Ciencias Modernas quantificadas. A expressão quadrática $x = \frac{1}{2}gt^2$ para descrever a posição da altura x de uma partícula em queda livre em qualquer instante t consistiu em uma extraordinária **síntese funcional** de dados experimentais discretos que também audaciosamente interpola instantes continuos t e extrapola preditivamente o resultado para qualquer instante futuro.

É importante ressaltar que a proposição da "Fórmula" para a descrição sintética de suas Tabelas de Dados não foi uma epifania meditativa de misteriosa origem, mas resultado de uma análise laboriosa de dados com a qual Galileo identificou as propriedades geométricas características de uma parábola segundo um sólido conhecimento da Geometria Euclideana previamente adquirida por ele nos textos clássicos e, possivelmente, da Geometria Analitica aprendida nos trabalhos de seu famoso contemporâneo René Descartes (1596-1650). Às origens românticas comumente relatadas como explicação de episódios revolucionários na Ciência é possível citar inúmeros e variados contra-exemplos que, a começar por Galileo, valorizam o trabalho e não a sorte (genética ou histórica).

Theodore von Kármán(1881–1963): "*A Intuição é resultado de muito estudo e cálculos*", Louis Pasteur(1822-1895) : "*As ideias e as descobertas, ou a sorte em uma pesquisa, somente ocorrem para aqueles que já trabalharam muito no assunto*" , Henri Poicaré em "*Ciencia e Hipotese",* UnB 1985.

Isaac Newton (1643-1727), entendendo a importância da Metodologia de Galileo, empregou a mesma "*estratégia funcional*" para descrever sinteticamente a enorme tabela de dados astronômicos colecionados por Tycho Brahe, cujas propriedades geométricas haviam sido sublimadas por uma análise exaustiva e previamente realizada por Johann Kepler. Observando esta conjuntura histórica, é possível entender melhor o significado da conhecida frase atribuida a Newton: "*Se eu consegui ver mais adiante que outros foi porque eu pude subir em ombros de gigantes*".

O grande e revolucionário aspecto diferencial introduzido pela versão Newtoniana da Metodologia de Galileo consistiu em ampliar o universo de funções disponíveis para a descrição de Dados Experimentais caracterizando-as como soluções analíticas de equações diferenciais e não apenas como Fórmulas algébricas elementares "*prêt à porter*".

De fato, a invenção do Cálculo e os trabalhos de Isaac Newton (1643-1727) sobre a Mecânica Celeste expandiram consideravelmente o alcance das ideias de Galileo resultando na contemporânea e prevalente Metodologia Galileo-Newtoniana em que a síntese funcional de dados observados é "encriptada" na forma de equações diferenciais, cujas soluções são, em geral, funções analíticas que compoem um universo muito maior do que a funções elementares. Isto é, enquanto Galileo tinha à sua disposição apenas uma reduzida Biblioteca de funções algébricas elementares, a Metodologia Newtoniana disponibilizou o universo de todas as funções analiticas transcendentais do Cálculo para a representação de fenômenos naturais.

A propósito, é interessante citar a passagem da peça "*Galileo*" de Bertolt Brecht em que o personagem se dirige aos seus contendores com uma pergunta retórica, mas premonitória:

> "*Vossas eminências se expressam em termos de círculos,elipses e velocidades regulares; movimentos simples que a mente pode imaginar. Muito conveniente, de fato. Mas, suponha agora que o Criador decidisse fazer com que as estrelas se movimentassem assim...(E, no ato ele descreve com seu indicador uma trajetória irregular no espaço)...Nesse caso, como ficaremos*?"

Exercício:

Determinar se está registrado em alguma biografia ou em algum relato de Galileo uma frase equivalente à citação acima.

.

A única extensão notável da bem sucedida Metodologia de Galileo após Newton somente se deu em meados do século XX com os trabalhos dos matemáticos Israel M. Gelfand, Laurent Schwartz e outros com a introdução do conceito de Funções Generalizadas, ou, Distribuições. Embora usualmente se atribua a origem concreta do conceito de funções generalizadas à versão de Paul Dirac para a Teoria Quântica desenvolvida nas primeiras décadas do século XX (ca.1920), é importante notar que a semente destas mesmas ideias comparecem de forma natural e quase explicita no Modelo Matemático para a Dinâmica de Fluidos desenvolvida *ab ovo* por Leonhard Euler em meados do século XVIII. (Voltaremos a abordar esta questão em capítulos seguintes).

A obtenção de uma descrição funcional de fenômenos naturais (isto é, os Modelos Matemáticos) nos primórdios das Ciencias Quantitativas foi resultado direto do trabalho de gigantes e resultado de circunstancias históricas que não surgem com frequencia.

Portanto, era necessário que procedimentos padrões fossem desenvolvidos para tornar, na medida do possível, o cumprimento desta tarefa de uma maneira mais sistemática, ainda que sempre dependente da imaginação criativa. Estes Métodos são os temas desenvolvidos especificamente nos capítulos denominados "**Princípios**" deste texto.

A *Linearização Global* e o Método de *Koopman* são dois exemplos recentes de métodos matemáticos destinados a implementar a Metodologia funcional de Galileo-Newton que foram desenvolvidos somente nas últimas décadas, e serão abordadas em capítulos separados.

.

As Tabelas de Dados demográficos das colônias britânicas, especialmente na América do século XVIII, foram a principal motivação e fundamentação fenomenológica para os estudos que resultaram nos dois primeiros trabalhos especificamente destinados à formulação de uma Teoria Populacional de Reprodução devidos a Euler e Malthus . O Modelo de Leonhard Euler de 1748 foi o primeiro deles e tinha um carater matemático exemplar, como tudo o que ele abordava, mas não despertou qualquer interesse científico por mais de um século em que permaneceu praticamente incognito.(O formato matemático escolhido por Euler na exposição deste modelo populacional de 1748 tem grandes semelhanças conceituais, mas é incomparavelmente menos sofisticado do que aquele empregado no seu trabalho em que ele estabelece os fundamentos da dinâmica de fluidos e publicado na mesma época. É razoável supor que Euler tenha apresentado o seu modelo demografico deliberadamente na forma elementar de uma equação recursiva sem o uso do Cálculo para benefício dos menos letrados em Matemática. Apesar disso, e mesmo assim, os demógrafos provavelmente se intimidaram com a Matemática elementar de Euler, enquanto que os Matemáticos não se deram conta da importância de um Modelo Populacional. Talvez, por este mesmo motivo, o modelo de Euler tenha sido redescoberto várias vezes nos séculos que se seguiram, o último em 1958 por H. von Foerster).

Uma trajetória histórica completamente distinta daquelas descritas pelo modelo de Euler esteve associada ao trabalho de Malthus. De fato, a questão populacional se tornou uma "febre" cultural no início do século XIX com a publicação em 1798 do "*Essays on Population*" por Thomas R. Malthus em que ele expõe a sua rumorosa Doutrina, coincidentemente, motivada também pelas Tabelas demográficas da América colonial. Embora o trabalho de Malthus não tenha um formato matemático explicito, ele foi o "motor cultural" que incentivou o início de um estudo mais intenso da dinâmica populacional.

Aproximadamente nesta mesma época, o pastor protestante Jan Amos Komensky (1592-1670), considerado pela UNESCO como o pai da Didática moderna, publicou a sua obra fundamental em que ele expressa a sua máxima pedagógica em um notável paralelismo conceitual com a Metodologia cientifica de Galileo.Neste texto, ele enfatisa o aprendizado como um processo de síntese progressiva (e sinergética) de partes mais simples que são indispensáveis na construção de um todo mais complexo cuja essencia representa muito mais do que um mero empilhamento de fatos desconexos.

Assim, em deferencia aos "pais" da Ciência e da Pedagogia Modernas, iniciaremos o estudo da Dinâmica de Populações com a construção de um Modelo Populacional Minimalista a partir do qual serão construidos Modelos Populacionais progressivamente mais inclusivos.

Analogamente, o presente texto adota deliberadamente a Metodologia geral de Galileo-Newton como formato expositivo, que se apresenta em duas partes distintas: os **Princípios,** que sistematizam procedimentos matemáticos para a obtenção das representações funcionais de fenômenos biológicos a partir de de Regras Qualitativas e Dados Numéricos experimentais, e os **Métodos,** que são instrumentos Matemáticos destinados a analisar propriedades relevantes das Funções que representam um Modelo Matemático na sua síntese diferencial.

I.1-EM BUSCA DO MODELO POPULACIONAL MINIMALISTA (*Minimum Minimorum*)

Ingredientes Fundamentais da Biologia de Populações: **1-Reprodução, 2) Morte, 3)Mutação, 4)Interação**

Mutação: Espontânea-Sem Causalidade Intrinseca-Quebra do Paradigma Clássico-Origem e Manutenção da Diversidade

Modelo *Minimalista*: **1)Homogeneidade** (Sem diversidade), **2)Independencia** (Sem Interação)-Descrição: Tamanho e Traço Biológico uniforme

Restrições Dimensionais para Modelo Minimalista: $N = \varphi(t, N_0, r)$ onde $N_0 = \varphi(0, N_0, k)$ e $[k] = T >> n = \frac{N}{N_0} = \varphi(\frac{t}{k}, 1, 1) = \psi(\frac{t}{k})$

Metodologias de **Síntese Funcional** ($\psi(\zeta)$) de Tabela de Dados & Princípios

1-Metodologia de Galileo : Geometria Cartesiana- Biblioteca de Funções Algébricas Elementares

2-Metodologia de Newton : Equações Diferenciais Ordinárias- Biblioteca de Funções Transcendentais- Extensão do Mundo Linear Micro/Instantaneo

3-Metodologia de Linearização Global:Linearização NãoUniforme(Log)-Nomogr/d’Ocagne/Arnold&Kolmogorov-Linear. Assint.(West)-NNW&AI

4-Metodologia de Koopman &al.-DDM-("Data Driven Models")

"*Life is a self-sustaining chemical system capable of Darwinian evolutio*n" NASA-Definition of Life-1994

O tema central da Biologia consiste essencialmente no estudo de Populações cujos indivíduos estão sujeitos a quatro fenômenos distintos: **1)Reprodução**, **2)Morte** , **3)Interação** e **4)Mutação**.

Dentre estes quatro fenômenos básicos, o mais sutil deles é, sem dúvida, a "**Mutação**", o que explica a sua tardia incorporação à Biologia Teórica e a vigorosa rejeição que este conceito enfrentou à época de sua introdução por Charles Darwin e Alfred Wallace (ca.1858) . Para a sua representação, a Mutação requer, naturalmente, que o modelo matemático descreva explicitamente uma gama de diversidade para os individuos que constituem a População em estudo e, com isto, levanta, de saída a difícil questão de estabelecer e representar características (estados biológicos) que distinguem uns indivíduos dos outros e, portanto, suas respectivas subpopulações.

O fenômeno de Mutação é, na verdade, a fonte inicial da diversidade biológica de uma População e, desde Darwin, a sua ocorrencia é assumida como resultado de eventos aleatórios, ou seja, não se supõe que ela seja efeito de qualquer "causa" primária explícita. Esta hipótese coloca o fenômeno de Mutação em confronto direto com a visão determinística que prevaleceu na ciência clássica e, por este motivo tornou-se um dos pontos frágeis que Darwin e Wallace não podiam justificar melhor, já que desconheciam os experimentos genéticos do seu contemporâneo, o monge tcheco Gregor Mendel (1822-1884) e, obviamente, não podiam conecta-la à origem química e molecular do fenômeno, o que somente veio a ser descoberta em 1957 por Francis Crick e James Watson. Consequentemente, uma discussão apropriada deste tema,mesmo que elementar, exige: 1)A descrição do conceito de heterogeneidade no modelo de uma população (o que somente será abordada no proximo capítulo) e, (2) Uma familiaridade com processos probabilisticos que, coincidentemente, tem a sua expressão mais elementar derivada do Modelo Mathusiano a ser apresentado neste capítulo. Por estes motivos o fenômeno de Mutação deverá ser um tema para um capítulo posterior exclusivamente dedicado aos Modelos Evolutivos.(Para uma interessante discussão a respeito deste importante tema e referencias posteriores, consulte P.Bühlmann-*Toward Causality and External Validity*, Proc.Nat.Acad.Sci., USA, 2020, e J.Pearl-D.Mackenzie-*The Book of Why: The New Science of Causation and Effect,* Basic 2018, cujos argumentos sobre "causalidade" serão importantes na fundamentação de Metodologias para a construção de Modelos Matemáticos a partir de dados registrados, um tema atual a ser especificamente abordado em outros capítulos, e que tem um papel central na Metodologia de Galileo.)

Exercicio:

Leia o artigo de Buhlmann mencionado acima e a resenha de L.Godenberg sobre o livro de Pearl-Mackenzie e faça sua resenha de 20 linhas sobre o tema.

Analogamente, o estudo do fenômeno de **Interação**, exige o conhecimento e a representação matemática de conceitos não de todos elementares relacionados aos estados biológicos e à dinâmica de transferência de informações entre indivíduos. Considerando que a interação ocorre e é descrita pela modificação do "estado biológico" específico de *indivíduos* devido a um intercambio mútuo de informações e influências entre eles, a sua descrição e análise também torna necessária a representação de uma diversidade de possiveis estados em uma população *biologicamente heterogênea*. A descrição do fenômeno geral de Interação (que participa subsidiariamente na descrição de fenômenos de Reprodução e de Mortalidade e como consequencia também do processo de Seleção Natural) exige também a representação da *heterogeneidade espacial ou estrutural* da população, que são temas a serem tratados somente em um próximo capítulo.

Uma situação simplificada e importante de interação é aquela que assume um carater simplesmente populacional, isto é, quando se supõe que a homogeneidade biológica da população é preservada quando os estados biológicos individuais são sempre uniformemente iguais, ainda que variáveis simultaneamente. Neste caso o estado bilógico comum é descrito como uma propriedade populacional e não individual.(Por exemplo, o tempo médio de sobrevivencia, é uma caracteristica "populacional" e não individual. Pode se tratar da "expectativa" (probabilística) de sobrevivencia de um individuo de onde se obtem o tempo de sobrevivencia médio caracteristico da população, mas não o contrário).

Portanto, seguindo o Princípio da Simplicidade de Comenius e a Metodologia de Galileo o presente capítulo iniciará o tratamento dos Modelos Matematicos de Dinâmica Populacional restritos a um cenário mínimalista definido pelas seguintes peculiaridades:

1)**Homogeneidade Fixa** (isto é, a População é formada por individuos em um mesmo "estado" biológico comum e invariável com o tempo, e para todos os efeitos completamente indistinguiveis entre si, excluindo assim a descrição da mutação e reduzindo a descrição biológica da população apenas uma caracteristica biológica comum e constante de seus individuos, além do tamanho da população.)

2)**Independência** entre os seus individuos (ou seja, não há troca de informações e influências que possam modificar o estado biologico comum dos individuos, o que significa a ausência de interações individuais e de diversidade biológica, consequentemente)

restando considerar tão apenas os fenômenos básicos de Reprodução e Morte nestas condições.

O Modelo minimalista desenvolvido neste cenário será denominado ***Modelo Malthusiano*** por razões históricas que apresentaremos oportunamente.

Observemos de saída que um Modelo de Dinâmica Populacional não descreve qualquer distinção entre os seus indivíduos e, portanto, todos eles são considerados *igualmente* suscetíveis à reprodução e/ou à morte. Isto significa também que as únicas informações disponíveis para a representação populacional destes processos são o tamanho da própria população e o "estado biológico comum" que caracteriza uniformemente uma *susceptibilidade* à morte e a reprodução de seus individuos. A ausência de intercambio de informações (e de influencias externas), por sua vez, significa que os estados biologicos dos individuos serão constantes, inclusive os relativos à reprodução e mortalidade.

Antes de passarmos à determinação especifica do Modelo Malthusiano minimalista, consideremos a sua formulação dimensional (mensuração) que decorre das restrições acima.

O conjunto minimo *desejável e indispensável* de parâmetros descritores para um Modelo de Dinâmica Populacional deve necessariamente incluir n , o tamanho observado da população e t , o instante da respectiva observação. Considerações de Análise Dimensional desenvolvidos no capítulo anterior nos compelem a incluir também o parâmetro n_0, tamanho da população inicial, e um parâmetro κ com dimensão do tempo que caracteriza uniformemente a população (ainda sem interpretação biológica). O Modelo Minimal de Dinâmica Populacional teria então a sua expressão dimensional completa da forma $n = \varphi(t, n_0, k)$ e sua expressão adimensional da forma $N = \psi(\tau)$, em que foram tomadas unidades intrínsecas de população e tempo $N = \frac{n}{n_0}$, e $\tau = \frac{t}{k}$, e onde ψ é uma função matemática, isto é, independente de unidades básicas de população e tempo. Para a determinação completa de um Modelo Malthusiano específico será, portanto, necessário discriminar a função matemática de uma variável $\psi(\zeta)$ o que será feito nas proximas seções quando abordaremos alguns exemplos históricos que originaram o Modelo Minimalista.

II- ORIGENS HISTÓRICAS do Modelo Malthusiano e das Metodologias de Síntese Funcional de Galileo-Newton

1-Homo Ludens- Modelos Brinquedos- "Xadrez" (Malba Tahan) e os "Coelhos" de Fibonacci-Metodologia Especulativa

2-Tabelas Demográficas das Colônias Britânicas-Malthus- Euler-Gauss- Regra da Proporção-Linearização Logaritmica–

3-Tabelas de Mortalidade de Graunt-Neumann- Huygens- Euler- Regra Multiplicadora

4-Tabelas de Decaimento Radioativo-Rutherford-Metodologia de Galileo-Newton

xxxxxxxxxxxxxxxxxxx

II.1-HOMO LUDENS- *Brinquedos e Jogos como Motivação: "O Inventor do Xadrez" sec. Malba Tahan, e os "Coelhos" Especulativos de Fibonacci*

> "*O estulto quando se depara com um fato corriqueiro, prossegue o seu caminho sem se perturbar. O sábio, ao contrário, detem-se, observa o fato com cuidado e medita longamente sobre ele, aumentando assim a sua sabedoria*". ~Confúcio

O modelo de Malthus, certamente não foi o mais antigo modelo matemático que previa um crescimento exponencial (geométrico) de populações. Na verdade, esta precedência é devida com inteira justiça ao matemático veneziano Leonardo di Pisa (1170-1250), conhecido como *Fibonacci* quem, por volta de 1202 (século XIII), escreveu um influente livro *Liber Abac*i, talvez, o primeiro texto relevante de matemática na Europa pós clássica. (Kline[], Devlin[..]). Neste texto, Fibonacci apresenta a ciencia aprendida por ele em suas andanças pelas terras islâmicas desde o califado de Bagdad passando pelo norte da África até a peninsula Ibérica. (Este fato deve nos alertar para a possibilidade de que o seu modelo talvez já fizesse parte de um antigo conto das Mil e uma Noites e isso pode ser pesquisado pelo/a leitor/a interessado/a).

O livro de Fibonacci não se dedica à teoria matemática segundo a tradição grega mas, é prático, segundo a tradição oriental (Babilônica e Egípcia) e apresenta suas ideias por intermédio da proposição de questões (desafios!) seguidas de sua resolução, dentre as quais se encontra um conhecido problema sobre uma improvável população de coelhos. A formulação deste problema pode ser modificada para o contexto de dinâmica populacional da seguinte maneira:

Considere uma população de "casais de coelhos" representada pelo número de fêmeas, supondo tacitamente que há um equilibrio populacional entre os sexos.

1)No periodo de observação (digamos, um ano) **não há** mortalidade de coelhos,

2)Os coelhos se tornam *maduros (férteis)*, a partir do mês seguinte ao seu nascimento.

3)Os coelhos, uma vez *maduros,* produzem **um novo coelho (i.e., um casal) por mês**.

Questão: Se, no início do primeiro mês dispomos de um coelho imaturo, quantos coelhos teremos em 12 meses?

Exercício:

Represente a população descrita "biologicamente" por Fibonacci, agora por intermédio de um grafo ("árvore").

.

Uma terceira forma mais matemática e contemporânea de descrever a população de "coelhos de Fibonacci" utiliza um argumento recursivo (algoritmico) para caracterizar a função $N(k)$ que representa a sua medida no k –ésimo mês. Registrando $M(k) =$"*Número total de coelhos maduros no k-ésimo mês*" , $I(k) =$"*Numero de coelhos imaturos" ,* é fácil estabelecer a veracidade das recorrências: $M(k+1) = M(k) + I(k)$, $I(k+1) = M(k)$, de onde, se obtem a recursão de Fibonacci:

$N(k+2) =$"*Número total de coelhos no $(k+2)$-ésimo mês*"$=M(k+2) + I(k+2) = N(k+1) + N(k)$.

Assim, por exemplo, com valores iniciais $N(0) = 1, N(1) = 2$, todos os valores seguintes são obtidos recursivamente.

Surpreeendentemente, a função $N(k)$ pode ser também representada de uma quarta forma, agora por intermédio de uma *Fórmula Elementar* (isto é, Agébrica):

$N(k) = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k$. (Bassanezi-Ferreira, 1988).

Portanto, para $k >> 1$ (grande) , temos $N(k) \sim c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k = c_1 e^{\gamma k}$ ($\gamma = \log(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$), o que indica um crescimento geométrico, ou exponencial, já que $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$.

Exercicio:

1-Verifique as três afirmações acima, i.e., sobre a veracidade 1)da Recursão como representativa do Fenômeno, 2)da Fórmula para representar a População e 3) do comportamento assintótico exponencial/geométrico da Fórmula.

2-Mostre que a função $N(k)$ pode ser representada por intermedio de uma quinta forma, isto é, como solução de uma equação de diferenças finitas da forma $P(E)\varphi = 0$, ou $Q(\Delta)\varphi = 0$ onde P, Q são polinômios e E é um operador de deslocamento e Δ um operador de diferença, ambos aplicáveis no conjunto de funções discretas $\mathcal{F} = \{\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$. (Consulte Bassanezi-Ferreira 1988 a respeito).

.

A ideia fundamental do modelo de Fibonacci pode ser interpretada hoje como a representação de dois estados biológicos para os individuos na forma de duas sub-populações (imaturos e maduros), e a atribuição de uma fertilidade distinta a cada uma delas (0 e 1). Observe que Fibonacci não atribui uma mortalidade para os indivíduos de sua população, e podemos justificá-lo (a revelia dele) supondo que o seu problema trata de determinar o número de coelhos sadios e bem tratados após um curto período de tempo, 12 meses.

O conceito de crescimento exponencial já fora tratado de várias formas na antiguidade. Talvez a mais conhecida e pitoresca seja a estória sobre a invenção do jogo de xadrez que um servo hindu ofereceu como presente ao Rei de seu país. Instado a apresentar um pedido de recompensa a seu critério por essa extraordinária invenção, ele maliciosamente, sugeriu um pagamento em trigo na quantidade que resultasse da seguinte disposição: um grão seria colocado na primeira casa de um tabuleiro de xadrez e o dobro na casa seguinte a cada avanço de uma das suas 64 casas. Aceito o valor, até com certo desdém pela sua aparente humildade, o Rei foi logo surpreendido pelos seus conselheiros mais letrados com a noticia da impossibilidade de resgatar tamanha dívida, da ordem de $2^{63} \approx 10^{19}$ grãos, mesmo com todas as colheitas de trigo do planeta . (Ref. Malba Tahan-*O Homem que Calculava*,)

Exercício:

Avalie o numero de sacas de 20kg de trigo e o numero de caminhões que seriam necessários para transportar esta quantidade de trigo. Compare esta quantidade com a produção mundial anual deste cereal. (Ref. Maharajan, Weinstein)

.

O problema de Fibonacci quase nunca é "levado à sério" ou citado como um modelo populacional na literatura contemporânea, provavelmente devido à sua apresentação original que toma a forma de um ingênuo quebra-cabeças. Por este motivo, apesar de amplamente conhecido na Europa desde a sua publicação, o caráter fundamental dos argumentos contidos no texto de Fibonacci passaram desapercebidos por gerações de importantes cientistas e matemáticos aplicados como se fossem meros truques infantis irrelevantes para a Matematica Aplicada. Até que quinhentos anos mais tarde, Euler, um discipulo não presencial de Confucio, os empregou e generalizou na formulação de seu modelo de 1760 que ainda hoje é a base para a demografia.(N.Bacaer, H.Caswell, J.Cohen, N.Keyfitz)

Votaremos a tratar destes e de outros assim chamados "Modelos Brinquedos" ("*Toy Models*") ao longo do texto, assim como especificamente da lição histórica que este episódio encerra quando sinaliza que as origens de vários Modelos Matemáticos, alguns até muito sisudos, são encontráveis em atividades lúdicas enraizadas na cultura popular. (J.Huisinga-*Homo Ludens:Ensaio sobre a função social do jogo*, 1938, G.Bard Ermentrout-http://www.math.pitt.edu/~bard/bardware/toys2.pdf , Tadashi Tokieda-https://mathematics.stanford.edu/people/tadashi-tokieda , https://www.youtube.com/playlist?list=PLt5AfwLFPxWI9eDSJREzp1wvOJsjt23H).

Exercicios:(Variações sobre o tema de Fibonacci)

Consideremos uma população de organismos que se reproduzem individualmente. Suponhamos, como Fibonacci, que o tempo é medido discretamente e registrado em periodos uniformes, de tal forma que os individuos desta população tornam-se reprodutíveis após uma unidade de tempo e que, após esta maturação, cada um deles, enquanto vivo, produz ν novos indivíduos em cada unidade de tempo. Suponhamos também que a cada unidade de tempo uma fração μ de indivíduos desta população perece. (Este modelo de reprodução e de mortalidade é dito *proporcional* já que são diretamente proporcionais ao tempo).

1-Mostre que se $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi(k)$ representa o número de indivíduos desta população no instante k, então a população acima descrita lhe induz a seguinte restrição (Equação Recursiva de segunda Ordem) $P(E)\varphi = 0$, onde $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ é uma polinômio algébrico de segundo grau, isto é, $a_0 f(k) + a_1 f(n+k) + a_2 f(k+2) = 0$.(Sugestão: Segundo Fibonacci, a população no instante $k+2$ é constituida da população sobrevivente do ano passado, mais os novos integrantes nascidos no período anterior, que são filhos de quem ja estava presente na população dois peridos atrás e não morreu.)

2-Mostre, portanto, que a recursão é de ordem 2 e completamente determinada quando são conhecidos $F(0)$ e $F(1)$.

3-Obtenha condições nos parâmetros μ, ν para que a população apresente um crescimento exponencial

4-Obtenha condições nos parâmetros μ, ν para que a população apresente uma extinção em decrescimento exponencial.

5-Obtenha condições nos parâmetros μ, ν para que a população apresente uma oscilação e crescimento exponencial

7-Mostre que descrevendo esta população pela função $\Phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}^2$, $\Phi_1(k)$ ="P*opulação de Férteis no instant*e k", $\Phi_2(k)$ ="P*opulação de Imaturos no instant*e k" o argumento de Fibonacci pode ser reprsentado na forma recursiva de primeira ordem: $\Phi(k+1) = A\Phi(k)$, onde A é uma matriz 2×2.

8-M**étodo de Fourier**-Transformação-Obtenha uma matriz P invertível tal que $P^{-1}AP = D$ é diagonal, $D = diag\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Obtenha a função $\Phi(k) = P diag\{\lambda_1^k, \lambda_2^k\} P^{-1}$.

9-M**étodo de Fourier-Espectra**l: Se $Av_j = \lambda_j v_j$ (onde v_j é autovetor e λ_j é autovalor), mostre que $\Phi^{(j)}(k) = (\lambda_j)^k v_j$ são soluções da recorrencia vetorial. Mostre como obter a solução da equação com condição inicial $\Phi(0)$ dada.

10*-**Método das Funções Geradoras**: Represente os valores da função discreta $\varphi(k)$ como coeficientes da expansão de uma função analitica f, isto é, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k) z^k$, obtenha uma equação funcional para f com base nas propriedades de φ e obtenha uma representação elementar para a função $f(z)$. Com base nesta sintetização dos valores da função discreta em uma "Função Geradora" , mostre como recuperar os valores de seus coeficientes utilizando a Análise Complexa.

11-Generalize o Modelo de Fibonacci considerando feritilidade variável, ν_j ="N*umero de descendentes produzidos por indivíduo com idad*e j *em uma unidade de temp*o" e também mortaçidade variável, μ_j ="F*ração de indivíduos de uma população de idad*e j q*ue falecem em uma unidade de temp*o".

II.2-MODELOS DE REPRODUÇÃO EXPONENCIAL DE MALTHUS-EULER :

Tabelas Demográficas-Regra da Proporção Simples- Retificação Logaritmica dos Dados -Método

de Representação Funcional (linear) de Gauss

"*Para a existencia da morte, a vida é necessária e suficiente, mas, para procriar, é necessário, mas não suficiente, a vida e a morte.*". (Ditado Popular parafraseado com passagem biblica)

Historicamente há duas vertentes distintas que levaram á formulação do Modelo Malthusiano minimalista. Um deles, que considera separadamente o "fenômeno" de Mortalidade, enquanto que o outro, focaliza apenas o "fenômeno" de Reprodução. Ambos representam os dois lados da mesma moeda, surgiram de forma independente no século XVIII e devem muito credito a Leonhard Euler, direta ou indiretamente.

Tanto a doutrina Malthusiana quanto o Modelo matemático de Euler a serem apresentados, são claramente baseados em fatos expressos nas Tabelas demográficas sobre as colônias britânicas da América no século XVIII o que os coloca, aparentemente, de acordo com um dos requisitos básicos da Metodologia de Galileo que prevê um fundamento experimental para a formulação de um modelo matemático.

Apresentaremos a seguir duas classes de argumentos que poderiam ter sido empregados,implicita ou explicitamente, na formulação original dos Modelos Reprodutivos de Malthus-Euler segundo a Metodologia de Galileo. Estes Métodos (denominados DDM-"*De Dados a Modelos*", ou "*Data Driven Models*") tem antigas e nobres origens como poderemos verificar em seguida e continuam fundamentais e em pleno desenvolvimento na Matemática Aplicada contemporânea.(J.Nathan Kutz).

1-O Dilema entre acuracidade e Interpretação-*Método de Gauss para a Representação Linear Ótima-Retificação Logaritmic*a

A identificação de uma função analítica cujo gráfico descreva geometricamente a "nuvem de pontos" resultante da representação cartesiana de uma Tabela de correlação numérica é uma tarefa difícil de ser visualmente implementada em geral, a não ser no caso em que estes pontos se acumulem claramente no entorno de uma reta.

De qualquer forma, mesmo que visualmente a nuvem de pontos definida pela Tabela de dados não se apresente claramente acumulada em torno de alguma reta, é possivel determinar dentre todas elas aquela que "*melhor se ajusta"* a nuvem de pontos segundo um critério bem determinado.

A definição de um critério de "*ajuste*" com fundamentos geométricos e determinar matematicamente a Reta que melhor representaria uma distribuição de pontos no plano, Carl Friedrich Gauss desenvolveu o que hoje é denominado "Método de Minimização de Quadrados". Assim, com este Método, é possível descrever a melhor expressão de primeiro grau que descreve funcionalmente a referida Tabela.

Entretanto, é claro que nem sempre a restrição a funções lineares produz uma representação suficientemente acurada dos dados experimentais, embora a sua simplicidade (que é caracter

> Estamos, portanto, diante de um dilema, que confronta a desejável acuracidade da representação funcional e a indispensável possibilidade de interpretá-la biologicamente.

A interpolação polinomial de Lagrange para uma Tabela de dados, por exemplo, é um extremo em que uma acuracidade máxima acompanha uma quase certa impossibilidade de interpretação biológica com suas centenas de parâmetros.

Com a sua caracteristica perspicácia e conhecimento de Geometria Euclideana, Galileo conseguiu o feito notável de "visualizar" uma parábola (função quadrática com tres parametros) para a Tabela da trajetória de balas de canhão e fornecer uma interpretação física completa para ela. O mesmo se pode dizer de Kepler que estabeleceu o carater eliptico (função quadrática) das orbitas de cometas a partir das Tabelas astrnômicas registradas por Tycho Brahe.

Todavia, é razoavelmente claro que a "*detecção à ôlho nu*" de uma representação funcional acurada e ao mesmo tempo interpretável para uma enorme Tabela de dados experimentais, se constitui em notável exceção e uma tarefa quase impossível para os menos eruditos e perspicazes do que aqueles gigantes.

Portanto, para fazer uso da brilhante Metodologia de Galileo (sem a ajuda de um Galileo ou de um Newton) é necessário desenvolver Métodos mais algoritmicos e com fundamentos mais matemáticos para implementa-la.

Assumindo por enquanto que o ajuste de retas a nuvens de pontos seja um problema adequadamente resolvido, a representação funcional dos pontos de uma Tabela geral de dados passa necessariamente pela possibilidade de uma *retificação* da Tabela, ou seja, o desenvolvimento de procedimentos que "*retifiquem*" a Tabela inicial de dados, no sentido de torna-la bem representável pelo Método de Gauss. E, para este propósito, lançaremos mão de uma das ideias mais férteis e comumente utilizadas em Matemática: A "*mudança de variáveis*".

Para esclarecer as bases da ideia de "*Retificação*" de uma Tabela de dados, consideremos o exemplo abaixo.

Exemplo: *Nuvens de Pontos Retificáveis* por Mudança de Variáveis

Consideremos a representação cartesiana de uma "enorme" Tabela de dados $T = \{(y_k, x_k)\}$ como uma *"nuvem de pontos"* gerada pelo cálculo da função $y = \varphi(x) = \frac{x+a}{x+b}$, (com $a \neq b$ positivos), para vários pontos $x_k > -b$. Conhecendo de antemão o gráfico da função φ , sabemos que, no caso de uma razoavel proximidade dos pontos obtidos, o Efeito de completamento de Kanizsa nos levará indubitavelmente a associar esta *nuvem de pontos* a uma curva contínua descrita pelo gráfico da função φ, que sem maiores informações, seria muito difícil identificar apeasr de sua simplicidade algébrica. Entretanto, "massageando" a relação na forma:
$y = \varphi(x) = \frac{x+a}{x+b} = 1 + \frac{a-b}{x+b} \Rightarrow y = 1 + (a-b)\frac{1}{x+b}$, e fazendo as mudanças de variáveis, $u = y$ e $v = \frac{1}{x+b}$, a "*nuvem*" de pontos (u_k, v_k) é certamente "retificada", na verdade poderá ser retificada com a reta $u = 1 + (a-b)v$.

Afora o círculo, a reta no plano é a mais simples das curvas, pois exige apenas dois parâmetros para caracteriza-la biunivocamente e, talvez, seja a única curva que podemos identificar visualmente com razoável fidelidade, assim como identificar matematicamente sua natureza com métodos elementares. (Essencialmente, isto se faz utilizando apenas a semelhança de triângulos, segundo a Geometria Euclideana plana). Por esta razão, estamos dispostos a sacrificar muita coisa e lançar mão de muitos argumentos para reduzirmos uma questão à determinação de uma reta.

Entretanto, embora a representação funcional linear de uma nuvem de pontos (x_k, y_k) seja muito conveniente e mais simples, ela nem sempre é suficientemente acurada, como é o caso do exemplo acima. A estratégia mais comum da Matemática para a resolução de um problema,(que consiste em transforma-lo para a forma que podemos soluciona-lo por mudanças de variáveis $u = \alpha(y)$ e $v = \beta(x)$ de tal forma que a nova nuvem de pontos $S_k = (u_k, v_k) = (\alpha(x_k), \beta(y_k))$ seja acuradamente representavel por uma reta. Assim, a obtenção das funções *retificadoras* $\alpha(y)$ e $\beta(x)$ torna-se o novo problema.

O exemplo explicito apresentado, embora obviamente artificial (porque já conhecemos a representação funcional para a Tabela original es este é exatamente o problema a ser resolvido!), exemplifica bem como o mecanismo interno do procedimento de linearização pode funcionar. É interessante observar que este simples exemplo comparece na derivação do método de Lineweaver-Burke para determinação gráfica de constantes de reações enzimáticas e que será apresentado mais adiante.

É importante também observar que nem sempre uma *nuvem de pontos* pode ser "retificada" por mudança de variaveis e a geometria de uma "nuvem circular" é o exemplo mais simples desse fato.

O cerne da questão ("*The crux of the matter*") é que o estabelecimento de um procedimento geral para a obtenção de *funções retificadoras* é tão dificil quanto a solução dos problemas originais o que parece não favorecer muito a utilidade desta ideia. O que a salva, entretanto, são duas situações específicas, mas importantes: A primeira relacionada ao fato de que a **função logaritmica** é uma função retificadora que desempenha um papel frequentemente apropriado para muitos casos, especialmente se uma das variáveis tem uma faixa de variação muito maior do que a outra. A segunda decorre do fato de que, em muitos casos, não é necessária uma retificação "global" para todo o dominio da função, mas apenas nas vizinhanças de um limite, em geral infinito. Trataremos destas duas alternativas logo abaixo.

Observações:

1-A "escala logaritmica" já deve ser familiar para o/a leitor/a por intermédio da utilização do conhecido " papel com escala logaritmo" (ou a régua de cálculo) que tem a vantagem de "compactar" uma grande variação de pontos em um "pequeno" intervalo, de maneira não uniforme,claro.

2-Se alguem considera que uma representação linear reduzida a uma restrita vizinhança é "pouca coisa", lembre-se que todo o Calculo Diferencial é totalmente baseado na aproximação linear ótima em vizinhanças "infinitesimais" (i.e., locais) de pontos do dominio de uma função, ou seja, a tangente representada pela derivada. No presente caso, espera-se que a representação linear tenha um carater um pouco mais dilatado no sentido de prover uma boa aproximação para pontos de um intervalo inteiro, e não apenas "infinitesimal".

Retornando à questão populacional, suponhamos que $P(k)$ represente os casais de uma grande população humana (com equilibrio de sexos) para cada ano k. Como esta população é muito grande quando medida por número de cabeças e varia enormemente, é plausível que tenha ocorrido a Euler que melhor seria "compactar" a sua representação em uma escala não uniforme, no caso tomando $p(k) = \log P(k)$. (Lembre-se de que Euler foi praticamente o responsável pela introdução sistemática na literatura da representação analítica para as funções exponencial e logarítmica). Uma vez compactada a sua representação devido a uma compressão vertical das coordenadas, tornou–se razoavelmente claro para Euler (e esta é uma observação experimental que faz uso do Efeito de completamento visual de Kanizsa) que a "nuvem de pontos" $(\log P(k), k)$ se *aglutinam* na proximidade de uma mesma reta, ou seja, a transformação logaritmica "*retifica*" suficientemente a Tabela inicial.

Assim, se for possivel representar esta Tabela *logaritmizada* por uma reta, então será possivel representa-la funcionalmente (utilizando o Método de Gauss) na forma $\log P(k) = \gamma k + b$. Com isto, obtem-se a representação funcional para a Tabela original de dados demograficos em suas próprias variáveis na forma expoencial, $P(k) = e^{b+\gamma k} = Ae^{\gamma k}$, ou recursivamente, $P(k+1) = r\,P(k)$ que representa exatamente o modelo de reprodução proporcional ($r = 1+\alpha$) de Euler-Malthus.

É difícil saber se este foi, de fato,o argumento de Euler, mas se "*Non è vero, è molto ben trovato*" e o argumento, de qualquer maneira, é de grande utilidade geral e deve ser conhecido.

Voltemos agora à questão da representação linear ótima desenvolvida por Gauss.

Em muitos casos a representação linear é apenas uma "sugestão" intuitiva, que exige uma abordagem mais matemática para determinar com exatidão matemática o sentido da expressão "*a reta que melhor se ajusta a nuvem de pontos dados*".

Um Metodo matemático de "ajuste ótimo" de uma reta a uma "nuvem de pontos no plano" foi introduzido pelo influente matemático Carl F.Gauss (1777-1855) e denominado Método de Minimização de "Êrros" Quadráticos. Este Método determina univocamente a reta que minimiza a soma dos quadrados das distancias entre os pontos da nuvem e a reta e, com isso, apresenta uma medida da máxima acuracidade possível para o "ajuste" linear. Lembremos que a insistencia em buscar uma (simples) reta para representar uma nuvem de pontos (Tabela) decorre exatamente da sua simplicidade, por ser completamente definida com apenas **dois** parâmetros, o que aumenta a chance de que os mesmos tenham interpretações associadas ao problema biológico. (Uma interpolação de Lagrange com 100 parâmetros não tem qualquer chance de ser biologicamente interpretada).

Embora se atribua a Gauss a introdução formal deste método na literatura matemática (que ele inventou para analisar dados astronômicos sobre o planeta Mercurio estudados por ele) as ideias pertinentes certamente já eram conhecidas pelo grande calculador Leonhard Euler(1707-1787) e é razoável assumir que ele as utilizava com frequencia.

Exercicio:

1*-Verifique historicamente se Euler utilizou ideias semelhantes em algum contexto de sua volumosa Opera Omnia.(Ref. Biografias de Euler, R.Graham&D.Knuth).

2*-Consulte uma referencia *Baliza* sobre o Método de Quadrados Mínimos, sua origem e generalizações e faça um resenha de 20 linhas a respeito.(A generalização das ideias da representação linear de Gauss para funções de variáveis vetoriais com o ajuste de hiperplanos a uma nuvem de pontos $P^k = (x_1^{(k)},,,,x_n^{(k)}) \in R^n$ é um dos Métodos contemporâneos mais importantes na busca de uma representação funcional para Tabelas de dados discretos multivariados e se constitui em um instrumento computacional indispensável na computação científica contemporânea(G.Strang-*Introduction to Linear Algebra,* Wellesley, J.N.Kutz-......)).

O Teorema Fundamental da Distribuição de Números Primos

É interessante observar que o famoso Teorema Fundamental sobre a distribuição de Números primos foi sugerido por Gauss com base nas Tabelas que ele obsessivamente calculava sobre este tema desde a sua infância.(W.Buhler, T.Hald, M.Abramowitz&I.Stegun). O seu objetivo era representar funcionalmente (segundo uma Metodologia de Galileo) as suas Tabelas que, para cada inteiro n relaciona a densidade média $\rho_n = \frac{\pi(n)}{n}$ dos numeros primos no intervalo $[0,n]$" (onde $\pi(n)$ ="Quantidade de números primos existentes no intervalo $[0,n]$" . Analisando a sua Tabela ao longo dos anos, Gauss não conseguiu inferir qualquer função elementar então conhecida para a representação funcional da Tabela de numeros primos. Entretanto, observando que a quantidade n varia enormemente comparativamente a $\pi(n)$, (e que $\frac{\pi(n)}{n} \to 0$, ou seja, que há proporcionalmente "muito mais" números inteiros não-primos) Gauss decidiu utilizar a escala logaritmica para construir uma nova Tabela em que a "variável n " era substituida pela variável "*compactada*" $l_n = \log n$. Embora esta nova representação gráfica não sugerisse ainda nenhuma representação funcional,por outro lado, ela sugeria claramente que a "nuvem de pontos $(\frac{n}{\pi(n)}, \log n)$ se aproximava da reta bissetriz. Com base nesta observação, Gauss foi motivado a suspeitar (em 1792, com quinze anos de idade) de uma das hipóteses mais famosas da Matemática na forma da existencia do limite: $\lim_{n\to\infty} \frac{\rho_n}{\left(\frac{1}{\log n}\right)} = \frac{\pi(n)}{n}\log n = 1$. Esta hipótese foi demonstrada a duras penas por Jacques Hadamard e Ch. de la Vallée Poussin somente um século depois,(1896), utilizando a teoria de funções analíticas, reformulando a antiga hipótese de Gauss como o famoso Teorema de distribuição dos Numeros Primos. Observe que, neste caso, ao contrário de Galileo, Gauss desistiu de uma representação elementar "**global**" de toda a Tabela de números primos e se conformou com uma representação apenas no limite $n \to \infty$, o que denominamos hoje como "assintótica", uma vez que a descrição funcional da Tabela se torna progressivamente melhor a nas imediações deo infinito.

Este é apenas um dentre notaveis episódios que demonstram a eficiencia da Metodologia de Galileo mesmo quando aplicado a questões puramente matemáticas. De fato, com o advento dos computadores, a Matemática Experimental tornou-se um dos procedimentos mais importantes para a obtenção de hipóteses matemáticas que, se demonstradas, se tornam Teoremas Matemáticos.(J.Borwein).

A retificação de Tabelas nem sempre é possível com a aplicação da transformação logaritmica mas, como mostra o exemplo no Exemplo do inicio desta seção,isto pode ser conseguido com outras classes de mudnaças de variáveis. Uma metodologia de fundo prático que tem por objetivo construir estas representações gráficas foi desenvolvida por um engenheiro Maurice d'Ocagne (1862-1938) e estabelecida como uma disciplina que se tornou conhecida como *Nomografia* (até pouco tempo muito importante em Engenharia, mas hoje substituida pela Matematica Computacional). Todavia, as ideias de d' Ocagne são importantes e foram levadas à sério por um dos mais influentes matemáticos do século XIX, David Hilbert(1862-1943), na forma do problema de numero 13 dentre os 23 que ele formulou como programa de pesquisa para a Matemática do século XX. Esta questão foi resolvida por dois dentre os maiores matematicos e professores do século XX, Andrei Kolmogorov(1903-1987) e seu aluno Vladimir I.Arnold(1937-2010), o que demonstra a linhagem nobre destas questões. Métodos de Linearização global tem sido utilizados em vários outros contextos. (ref. Kowalski-Ferreira-Ferreira 1995. A construção de curvas que se ajustam a "nuvem de pontos" não lineares em geral é uma tecnica recente (~1990) denominada "Principal Curves", a ser abordada no capítulo sobre Métodos de DMKD mais adiante).

Linearização logaritmica Assintotica

Em várias situações, tais como no caso do Teorema dos Números Primos de Gauss,não há interesse (ou esperança) de que uma "logaritmização" da Tabela permita uma representação linear "global", isto é, em todo o dominio das variáveis correlacionadas. Entretanto, a linearização aproximada em uma região especifica do dominio, em particular no limite infinito, pode ser de grande interesse e o bastante para muitos objetivos, e isto amplia grandemente a utilidade da aplicação da escala logaritmica.

A linearização (aproximada) de relações entre variáveis no limite infinito de uma delas ou das duas (em geral quando todas as outras variáveis se esvaem) é particularmente útil no estudo de tabelas experimentais de Análise Dimensional (G.West-Scales, T.MacMahon-...) e se baseia no seguinte conceito matemático:

Funções Assintoticamente Equivalentes-Assintoticamente exponenciais- Linearização assintótica e Escala logaritmica (Logaritmização)

Considere funções $\mathcal{F} = \{f : (a,\infty) \to \mathbb{C}\}$ que são definidas em alguma vizinhança do infinito (de variável real $(a,\infty) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ou, inteira $(a,\infty) \subset \mathbb{N}$) e que tem limite infinito, isto é, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Define-se uma relação de ordem (de "grandeza") $\preceq$ entre duas funções $f, g \in \mathcal{F}$ da seguinte forma:

a-Diz-se que $f \preceq g$ (ou, "A função f tem **ordem menor ou igual** a ordem de g no infinito") se existe o limite real $\lim_{x\to} \frac{f(x)}{g(x)}$.

b-Diz-se que $f \prec g$ (ou, "A função f tem **ordem menor** do que g no infinito") se $\lim_{x\to} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

c-Diz-se que $f \sim g$ (ou, "As funções f e g são de **mesma ordem**, na vizinhança do ∞") se existe o limite $\lim_{x\to} \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$.

d-Diz-se que as funções f e g são assintoticamente **equivalentes** na vizinhança do ∞ se $\lim_{x\to} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

e-Uma função f é dita assintoticamente **exponencial** (respectivamente logaritmica, polinomial) se $\lim_{k\to\infty} \frac{f(k)}{Ae^{\gamma k}} = 1$ ($\lim_{k\to\infty} \frac{f(k)}{A\log k} = 1, \lim_{k\to\infty} \frac{f(k)}{Ak^n} = 1$).

Observação: O objetivo deste conceito é caracterizar (aproximadamente) o comportamento assintótico (isto é, no limite) de funções gerais complicadas em termos de funções assintoticamente equivalentes Elementares (logaritmo, polinomios, exponencial e funções obtidas como produtos e composições entre elas). Uma estratégia perfeitamente condizente com o Princípio de Comenius.

Exercicios:

1-Mostre que duas funções assintoticamente equivalentes no infinito não implica necessariamente que a diferença entre elas tende a zero, e que pode até mesmo se tornar ilimitada. Mostre que essa equivalencia é uma aproximação no sentido relativo. (Ou seja, *Um erro da ordem de 1km na distancia entre a Terra e a Lua não é "a mesma coisa" que o mesmo erro na distancia entre a Unicamp e Campina*s).

2-Mostre, na verdade, que duas funções são assintoticamente equivalentes no infinito se na escala logaritmica os seus valores se aproximam.

3-Em particular, mostre que se $f(k) \sim e^{\gamma k}$ para $k \sim \infty$, então há uma "*aproximação **linear** na escala logarítmica da funçã*o f" no infinito, ou seja,

$$\lim_{k \to \infty} \{\log(f(k)) - (\log A + \gamma k)\} = 0.$$

4*-Analise uma tabela de números primos (v. Abramowitz&Stegun) e repita o argumento de Gauss.

5*-"*Fórmula de Stirling*": Verifique experimentalmente utilizando as Tabelas de Abramowitz&Stegun que a importante Função Gama de Euler $\Gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, definida recursivamente por $\Gamma(k+1) = (k+1)\Gamma(k), \Gamma(1) = 1$ é assintoticamente equivalente à função elementar (transcendental) $g(k) = \sqrt{2\pi}\, k^{k+\frac{1}{2}} e^{-k}$ logaritmizando as duas variáveis, $u = \log\Gamma(k)$ e $v = \log k$ e comparando os pontos com o grafico de

Observação:

Ao contrário da Função de Fibonacci e tal como a função densidade de números primos de Gauss, a função Gama não é representável por funções Elementares em todo o seu domínio, mas é assintoticamente equivalente a uma Função Elementar, um importantíssimo resultado que é fundamental para a Análise Combinatória (Flajolet&Sedgewick), Teoria de Computação (Graham&Knuth), Teoria de Probabilidade (Gnedenko), Física Estatística(van Kampen) e etc. Nenhum estudante sério de Matemática (Aplicada ou não) pode desconhecer este resultado que será abordado com maiores detalhes no capitulo sobre Métodos Assintoticos).

6-Dada uma "grande" Tabela de dados $P^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$ representada cartesianamente na forma de uma "nuvem de pontos" no plano imagine uma forma de representa-la sinteticamente (e aproximadamente) da melhor maneira possivel com apenas **duas** informações numéricas indepedentes (dois parâmetros reais). Convença-se de que esta questão pode ser geometricamente resolvida obtendo-se uma reta $r(a,b)$ $(r = \{(x,y) : y = ax + b)$ que minimiza a soma dos quadrados das distancias entre $P^{(k)}$ e r medidas das seguintes maneiras: **a)** $d(P^{(k)}, r) = \min\{(x_1^{(k)}, y), r\}$ (distância vertical) e **b)** $d^*(P^{(k)}, r) = \min\{P^{(k)}, (x,y) \in r\}$(distância ortogonal). Resolva matematicamente este problema.

7-Mostre que a População produzida por um Modelo de Fibonacci, $F(k)$, é assintoticamente exponencial e determine esta função exponencial $Ae^{\gamma k}$.

8-Consulte a Linearização assintótica de inumeros dados biológicos, físicos e geométricos apresentados em G.West e particularmente a de Suzana Herculano-Houzel fazendo uma resenha a respeito desta ultima..

9-Obtenha uma tabela de censo demografico do Brasil em sua época de maior crescimento populacional (excetuando imigração) e utilize o Método de Linearização para determinar um modelo proporcional de população de Euler para a sua representação.

10-Faça o mesmo para o inicio de crescimento de mortalidade pela COVID-19 em 2020 no Brasil e alguns paises da Europa e EUA.

2-Representação Funcional resultante de Equações Funcionais e o Principio de Parcimônia de Ockham

A Tabela demográfica da dinâmica populacional nas colonias britanicas no século XVIII despertou um grande interesse devido à sua razoável precisão para a época e ao fato de que se tratava de uma situação inédita considerando-se que a regieão esteve livre de grandes guerras e pestes durante um largo periodo de tempo e havia uma disponibilidade continua de alimentos.

Assim, não escapou aos olhos matematicamente treinados de Thomas Malthus a seguinte observação que ele extraiu após uma análise exploratória da representação grafica desta Tabela demografica:

> "I*n the United States of America, where the means of subsistence have been more ample, the manners of the people more pure, and consequently the checks on early marriages fewer than in any of the modern states of Europe, the population has been found to* ***double*** *itself in t****wenty-five year****s*". Th.R.Malthus "*Population:The First Essay*" 1798, pg.8-9

Em termos mais matemáticos esta observação pode ser descrita na forma $P(k+1) = 2P(k)$ onde a unidade de tempo consiste de vinte e cinco anos e $P(k)$ é a população no k –ésimo período ($25k$ anos).

A Dinâmica recursiva de uma População na forma $P(k+1) = \lambda P(k)$ representa uma ***hipótese de reprodução proporcional***, ou seja, em que a população se reproduz segundo um determinado fator (λ) para cada período unitário de tempo. No caso acima, a observação consistia na reprodução proporcional com $\lambda = 2$ para a unidade de tempo de 25 anos para a população dos EUA em seus primórdios.

Resta mostrar que esta observação é suficiente para a obtenção de uma representação funcional (aproximada) da referida Tabela conforme prescreve a Metodologia de Galileo.

Os exercicios abaixo mostram que há inumeras funções contínuas e diferenciaveis , $P : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ que satisfazem esta equação recursiva discreta, $P(k+1) = 2P(k)$. Entretanto, dentre todas estas soluções, o Principio de Parcimônia de Ockham nos sugere a escolha de uma função analitica (no sentido de Newton-Weierstrass, isto é, caracterizavel por uma série de potencias), que seria única se existir. Como a função exponencial (que é analítica) resolve a equação recursiva, concluimos que a representação funcional desta Tabela deve ser exponencial.

(Observação: As funções analíticas podem ser conisderadas "mais simples" porque formam um subconjunto extremamente reduzido das funções continuas, ou diferenciaveis e dispõe de um grau de liberdade menor. Por exemplo, basta conhecer os valores de uma função analitica em uma sequencia convergente no dominio para determina-la completamente, enquanto que uma função, mesmo infinitamente diferenciavel tem muito mais liberdade. Esta é uma questão interessante em Análise, mas abordaremos o tema aqui apenas sob o ponto de vista intuitivo).

Uma outra forma de caracterizar a solução exponencial para representar esta tabela é verificar se a propriedade multiplicativa vale em geral, ou seja, se para qualquer periodo T, $P(t+T) = \lambda(T)P(t)$ para um respectivo fator $\lambda(T)$ e qualquer instante t.

(Na verdade, basta que a propriedade seja consistentemente válida para duplicações e metades sucessivas da unidade de tempo, $P(t+\frac{1}{2^k}) = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{k}}P(t)$ e $P(t+2^k) = 2^kP(t)$).

Exercícios:

Discuta as afirmações acima e apresentando argumentos que as justifiquem.

Portanto, a observação de Malthus e o Principio de Parcimônia (e um conhecimento da função exponencial) nos levam à representação funcional da Tabela demográfica segundo a Metodologia de Galileo na forma $P(t) = \lambda^t P(0)$.

II-3-MODELOS DE MORTALIDADE:*Tabelas Demográficas de Mortalidade de Graunt&Neumann: Regra de Huygens e Função de Euler*

A pertinácia de John Graunt, a perspicácia de Christiaan Huygens e astúcia do grande calculador Euler

> *"A Vida é incerta e muito rara, Enquanto a Morte é certa, Ainda que muito incerta, Em sua data e hora".* ~Ditado Popular
>
> "C*uidemos da vida porque a morte é cert*a", ou, "*Enterremos os mortos e cuidemos dos vivos*" . Marquês de Pombal após o terremoto/maremoto que devastou Lisboa, 1755.

Os matemáticos do século XVIII eram mais conhecedores e hábeis em argumentos Geométricos (o que incluia especialmente o estudo de propriedades das curvas quadráticas e cúbicas) do que em procedimentos simbólicos analiticos que haviam sido introduzidos apenas recentemente por François Viéte e René Descartes. A Geometria Analitica de Descartes tinha por objetivo conectar as duas linguagens matemáticas, a geométrica e a simbólica. O exemplo mais contundente desta mudança de paradigma expositivo da Matematica é representado pelos trabalhos de Newton, cujo histórico "Principia" utilizava apenas métodos geométricos para expor a sua Nova Mecânica Celeste, algo impensável e difícil de ser compreendida hoje em dia.(ref. S.Chandrasekhar). A exposição posterior da Mecânica Newtoniana em termos simbolicos (analiticos) utiliza o Calculo inventado pelo mesmo Newton e representou uma revolução na Matemática.

Os já citados exemplos da parabola detectada por Galileo para trajetoria de balas de canhão e as elipses detectadas por Kepler para trajetorias de cometas são exemplos notáveis e de grande coincidencia, considerando que as soluções eram funções (curvas) já conhecidas por geômetras desta época. A história da Matematica Aplicada certamente seria completamente distinta se as funções apropriadas para descrever estas duas classes de trajetórias não fossem elementares e, portanto, não identificáveis por Galileo de Kepler?

No exemplo a seguir, veremos como Christiaan Huygens, um matemático de enorme habilidade do século XVII ao examinar as tabelas de mortalidade de Graunt e Neumann, foi incapaz de identificar a função que as representaria por desconhecer a função exponencial, cujo estudo foi levado a efeito somente em anos mais tarde por Euler.(Euler-Introductio in Analysin Inifinitorum, 1748 (trad. Introduction to Analysis of the Infinite_Springer). Entretanto, não escapou à Huygens a propriedade geométrica fundamental que caracteriza esta função e mais tarde foi utilizada pelo próprio Euler para representar analiticamente a curva de mortalidade.

Exercicio: Comentar a frase acima.

Curiosamente, o Modelo Malthusiano tem a sua origem Matemática mais precisa na observação de dados sobre a Mortalidade em populações humanas, e não de Reprodução como tanto enfatizou seu propositor e de onde vem a sua fama.

A construção do Modelo de Mortalidade é um exemplo histórico de aplicação da Metodologia Cientifica de Galileo e, portanto, é de grande interesse pedagógico, pois expõe de maneira simples alguns dos princípios mais fundamentais da dificil arte de construção de Modelos Matemáticos.

Um dos conjuntos de dados demográficos mais antigos e influentes foi coletado por John Graunt no século XVII (1662) sobre a mortalidade em Londres. Nesta Tabela, ("*Bill of Mortality*"), Graunt registra as causas de morte (segundo as variadas "*causa mortis*" conhecidas da época) assim como o número de respectivos óbitos. O objetivo deste trabalho era tentar detectar preventivamente um surto de "peste" e evitar a sua avassaladora propagação, tal como ocorreu em diversas ocasiões na Idade Média. Um outro conjunto de dados demográficos de grande importância nesta época foi registrado por Caspar Neumann na cidade de Breslau, Alemanha, e estudado por Edmund Halley, o mesmo que nomeou um famoso cometa.(Halley, Bacaer,Stigler, Wainer).

É claro que uma representação funcional da Tabela de dados de Graunt poderia facilmente ser obtida por exemplo com uma interpolação polinomial obtida com o Método de Lagrange, dentre várias outras formas. Embora uma coleção de 200 pontos de um gráfico possa ser interpolado exatamente com um polinômio de grau 200, esta seria uma vitória de Pirro, pois não reduz nem organiza conceitualmente os dados discretos, uma vez que é obviamente impossível interpreta-los todos biologicamente. Enfim, a construção de um "*Modelo Interpolador*", ou uma Regressão paramétrica não acrescenta "**Conhecimento**" ao fenômeno, apenas modifica o seu arquivamento e na verdade, introduz uma grande quantidade de informações espúrias.

A curva contínua decrescente obtida de uma interpolação manual da representação cartesiana da Tabela de Gaunt foi analisada pelo matemático holandês Christiaan Huygens[1629-1695] um pouco mais tarde. Em seu estudo, não fugiu à sua conhecidada perspicácia e erudição a seguinte propriedade geométrica (aproximadamente) satisfeita pelo gráfico da curva,

Observação/Regra de Huygens:

"*Uma mesma fração de mortalidade da população ocorre para intervalos de mesmo comprimento de tempo*o".

O fato de que esta propriedade quando expressa funcionalmente de fato caracteriza uma bem determinada classe de funções, somente foi verificado por Euler no século seguinte com a invenção da função exponencial. Na verdade, Euler apresenta esta questão como exemplo de aplicação da função expoencial, tal como definida em seu histórico texto de Cálculo (Introducito in Analysin Infinitorum, 1748).

Exercicio:

Mostre que a regra de Huygens aplicada a funções diferenciáveis positivas determina unicamente a função exponencial.

A grande revolução matemática que ofereceu uma explicação de extrema síntese para o fenômeno de mortalidade descrito pela tabela (grafico) de Graunt foi resultado da invenção da função exponencial. Euler observou que, considerando o parâmetro N_0(de interpretação óbvia), se admitirmos um outro parâmetro positivo $\mu > 0$ era possível interpolar razoavelmente (embora não tão exatamente quanto uma interpolação polinomial !) o gráfico discreto da tabela de Mortalidade com a função exponencial $N_0 e^{-\mu t}$.

Uma vez obtida a função síntese , $N(t) = N_0 e^{-\mu t}$, da tabela de mortalidade de Graunt por via da análise de Huygens, Euler imediatamente a "encapsulou/codificou" como solução de uma Equação Diferencial , $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = -\mu N, N(0) = N_0$, o que registra o Modelo Malthusiano de Mortalidade perfeitamente no figurino da Metodologia Newtoniana.

A redução de dados que esta representação funcional exibe enquanto mantem a informação essencial sobre o fenômeno é simplesmente extraordinária, pois, com isto, uma enorme tabela com **centenas** (talvez milhares) de entradas é resumida a apenas **dois** parâmetros reais, N_0 e μ . Assim se o parâmetro μ for relacionável a alguma medida de carater biológico da população, o modelo poderá ser aplicado a outras populações, mesmo que não se disponha de tabelas de mortalidade para as mesmas. É claro que há, neste procedimento, uma "barganha" entre a "*exatidão pontual"* de uma *interpolação* e uma representação funcional aproximada, mas sintética e biologicamente interpretável da Tabela de dados.

Portanto, para que o modelo exponencial assuma esta vantagem, é indispensável interpretar biologicamente o parâmetro μ, pois caso contrário, ele não passaria de uma outra interpolação "muda" dos dados. A "*biologização*" do parâmetro μ será descrita na seção III deste capítulo.

(Observe que Newton escreveu todo seu *Principia* com apenas construções geométricas e que Huygens descobriu a curva isócrona, que lhe possibilitou a construção do relógio mecânico, também fazendo uso exclusivo de construções geométricas. A representação e operação com funções transcendentais, e especialmente a função exponencial, talvez a mais importante da Matemática, são devidas aos trabalhos de Euler, em pleno século XVIII baseados na técnica de expansão em séries de potências introduzida por Newton.).

Exercicios:

1-Considere uma população Malthusiana que inicia sua história com $P_0 = P(0)$ individuos (vivos!) "colonizadores" submetida a uma taxa especifica de mortalidade μ e de natalidade ν. Determine o número total de nascimentos $N(t)$ e o de óbitos $M(t)$ durante o período $[0, t]$ nesta população.

2-Mostre que a subpopulação de sobreviventes dentre os indivíduos colonizadores P_0 no instante t é $e^{-\mu t}P(0)$ e que, em geral, os sobreviventes no futuro $t + T$ da população $P(t)$ existente no instante t é $e^{-\mu T}P(t)$, e que os não sobreviventes são $(1 - e^{-\mu T})P(t)$.

II.4-O DECAIMENTO RADIOATIVO: *Um Modelo indedutível e a subversão Revolucionária da Metodologia Clássica Newtoniana*

"..*the proton lives for at least* 10^{30} *years....How this figure was arrived at since the earth is only about 5 billion years old? The thing is....we do no*t o*bserve one, but many protons....a block of iron is composed of abou*t 10^{30} p*rotons an*d 10^{30} n*eutrons...The reason of the existence of human life is proof that proton enjoys a long life...Our body contains abou*t 10^{28} p*rotons....If...the human body could not resist..."* H.Fritzsch-The Creation of Matter, BB1984- pg. 165.

"*The probability nature of Quantum Theory can be illustrated by a simple example. A radioactive atomic nucleus has what is called a "half-life" time during which it has 50% chance of desintegrating. For example the half-life time of Pu239, the usual isotope of Plutonium, is around 25000 years. If so much is unknowable about one atomic nucleus imagine how much is fundamentally unpredictable about the entire universe*". Murray Gell'man (n.1929- Nobel de Física em 1969).

A seção anterior descreveu como o Modelo Matemático Malthusiano participou de forma crucial na origem e desenvolvimento da Teoria da Seleção Natural de Darwin e Wallace que, hoje, se constitui na espinha dorsal da moderna Biologia teórica. (Segundo o importante biólogo Theodosius Dobzhansky(1900-1975) "*Em Biologia nada faz sentido fora da Teoria de Seleção Natural*").

É curioso, portanto, embora não seja de todo misterioso, que este mesmo simples modelo matemático, ainda que com roupagens completamente distintas, também tenha sido o pivô da segunda grande revolução científica dos tempos modernos que, neste caso transformou completamente a Física a partir do princípio do século XX.

Ao final do século XIX a Física Clássica (Mecânica, Termodinâmica e Eletrodinâmica) era totalmente determinística e Newtoniana nos seus fundamentos e parecia ter concluido o que havia por descobrir na Natureza quanto aos seus principios básicos (ref. Thompson...). Entretanto, a tinta desta afirmação de Thompson ainda não havia secado quando a radioatividade descoberta acidentalmente por Henri Becquerel em 1896, estudada com afinco pela polonesa Maria Skodlowska (mais conhecida como Madame Curie) e pelo neo-zelandês Ernest Rutherford se apresentaria como um enigma inexplicavel dentro do contexto clássico. Experiencias exaustivas no famoso Laboratorio Cavendish levaram Rutherford e seus cooperadores a concluir em 1900 que a transmutação de um átomo em outro átomo como resultado da emissão radioativa era um fenômeno com descrição essencialmente populacional e completamente incerto quando observado individualmente. A análise cuidadosa das criteriosas tabelas registradas em seu laboratório mostrou claramente que o decaimento radioativo de uma amostra (contendo uma quantidade da ordem de 10^{23} átomos) poderia ser bem descrito pelo gráfico de uma curva que decrescia pela metade a cada periodo fixo de tempo, ou seja, se $A(t) =$"*Quantidade de átomos da substancia original no instante* t", então determinava-se um intervalo de tempo T (denominado "*tempo de meia vida*" característico da substancia), tal que $A(t+T) = \frac{1}{2}A(t)$, para qualquer t. Esta observação exibe uma evidente semelhança com aquela que Huygens descreveu com relação à tabelas de mortalidade de John Graunt e Kaspar Neumann há mais de dois séculos antes e com a observação de Malthus sobre a reprodução da população das colônias britânicas na América do Norte.

Utilizando uma propriedade geométrica já amplamente conhecida das funções exponenciais e seguindo os passos de Galileo, Rutherford propôs que a dinâmica populacional de transmutação poderia ser bem representada por uma destas funções na forma $N_0 e^{-\mu t}$, definida por apenas dois parâmetros, N_0 e μ cujas interpretações Físicas eram imediatas ($\mu = \frac{\log 2}{T}$). Em vista disso, e seguindo a Metodologia de Newton, Rutherford preferiu caracterizar sinteticamente a função que descrevia o processo de transmutação populacional na forma de uma solução da equação diferencial: $\frac{dA}{dt} = -\mu A$, onde, $\mu = \frac{\ln 2}{T}$, $A(t) = A_0 \exp(\frac{-\ln 2}{T} t)$. Enfim, um argumento em tudo paralelo ao de Huygens-Malthus-Euler que produziu o Modelo Populacional Malthusiano para a Mortalidade.

Naturalmente, pela forma como foi obtido, este modelo era considerado "Fenomenológico" e não Newtoniano, ou seja, não era deduzido de principios básicos clássicos aplicados ao comportamento de átomos individuais, mas "*apenas*" procurava reproduzir as observações experimentais.(Em outras palavras, diríamos que este modelo matemático era "suficiente" mas, não "necessário"). A preponderancia do paradigma Newtoniano na Ciencia da época não deixava dúvidas de que o modelo radioativo de Rutherford era tão somente uma representação provisória que eventualmente cederia lugar a um Modelo Newtoniano a ser ("Newtonianamente") *deduzido* da Física Clássica aplicada ao microcosmo, enfim, em tempo deveria se tornar um "Modelo Necessário". Esta perspectiva foi progressivamente sendo abandonada, não porque seria difícil de realizá-la, mas porque o desenvolvimento da Física e especialmente da Teoria Quântica apontava cada vez mais para o fato de que a descrição deterministica Newtoniana seria inconsistente com novos resultados da propria Física microscópica e não por uma dificuldade eventual. Portanto, tornou-se inevitável concluir que o Modelo Fenomenológico para o decaimento radioativo seria a propria realidade, nua e crua, que assim descreveria a informação mais fundamental que se poderia obter para representar este processo. Ou seja, o fenômeno de decaimento radioativo observado era de fato populacional e resultante de comportamentos individuais independentes de átomos inteiramente iguais (homogeneidade), uma hipótese que, como vimos, caracteriza exatamente o Modelo Minimalista de Malthus. A primeira interpretação probabilistica do decaimento radioativo foi apresentada por E. von Schweidler em 1905 e se baseia exatamente nestas condições. (Ref. von Plato, van Brakel, von Schweidler, Amaldi, Borel). Na verdade, a interpretação probabilistica da Teoria Quântica que é considerada um dos pilares mais fundamentais da Física Contemporânea tem no decaimento radioativo o seu exemplo mais antigo e "concreto". Considerando-se que a equação diferencial que representa o fenômeno radioativo é a mesma equação $\frac{dA}{dt} = -\mu A$, a sua interpretação probabilistica pode ser igualmente utilizada em qualquer outro contexto em que seja aplicavel o modelo Malthusiano.

A paradoxal conexão entre a descrição deterministica populacional representada pela equação diferencial de Euler e a (necessária) descrição probabilistica individual, foi resolvida na Física com a aceitação definitiva do caráter probabilistico intrínseco e fundamental, não somente do decaimento radioativo, mas de toda a Física microscopica. A

Teoria Quântica é o resultado mais notável deste novo paradigma.

É necessário ressaltar,entretanto, que o influente matemático Simeon Dennis Poisson (1781-1840), apresentou um modelo matematico demografico na Academia de Ciencias francesa em 1828, que interpreta o nascimento e morte em uma população como um processo probabilistico individual. Para a justificação de seu modelo, Poisson não supõe que o fenômeno de morte biológica seja de fato "intrinsecamente aleatório" (o que é estritamente inaceitável, em geral), mas adota uma atitude pragmática ao verificar (à posteriori) que o Modelo resultante desta hipótese representa "bem" uma Dinâmica Populacional minimalista. Ou seja, o Modelo de Poisson é um modelo "suficiente" para este caso. A interpretação probabilistica do Modelo Malthusiano que apresentaremos em seguida, confirmará o modelo especulativo de Poisson.

A utilização de processos explicitamente probabilisticos para a representação de fenômenos não necessariamente aleatórios, e em alguns casos determinísticos mesmo, é exemplificado pelo procedimento de Poisson. Este procedimento foi "reinventado" em meados do século XX por sugestão do matemático Stanislau Ulam para a resolução numérica de equações diferenciais por intermedio de simulações de jogos aleatórios, que hoje é denominado Método Monte Carlo. Como se Poisson jogasse os dados para resolver a Equação de Malthus.(I.Sobol-The Monte Carlo Method, ed.MIR)

III-INTERPRETAÇÕES BIOLÓGICAS DO MODELO MALTHUSIANO

1-Populacional:Tempo Médio de Sobrevivência&Reprod&Permanência-(Lewis&BMB)-
2-Individual: Expectativa de Vida-Poisson-Mutação e Decisão- DelbruckLuria-Kirman..

O Modelo Malthusiano minimalista pressupõe uma homogeneidade das caracteristicas biológicas de seus individuos que a Análise Dimensional mostrou ser necessariamente representada por um parâmetro relacionado à dimensão do tempo. Resta determinar uma interpretação biológica razoável para este parâmetro. Nas seções seguintes, apresentaremos duas interpretações para este parâmetro e ambas são fundamentais para a conexão entre a estrutura matemática representada pela equação diferencial e as visões biológicas do problema.

III.1-INTERPRETAÇÃO BIOLÓGICA *POPULACIONAL* do Modelo de Malthusiano

Consideremos o Modelo Malthusiano $n = \varphi(t, n_0, \mu)$ em sua formulação diferencial Newtoniana para a *Mortalidade*: $\frac{1}{n}\frac{dn}{dt} = -\mu$, com $\mu > 0$ um parâmetro real positivo cuja dimensão $[\mu^{-1}] = T$ é necessariamente a mesma dimensão do tempo.

Consideremos agora a função,

$S(t)$= "*Quantidade de sobreviventes de uma população no instante t em que **não há** nascimentos nem migrações*".

Se esta população tiver um valor inicial P_0, então, $S(t)$ decrescerá monotonicamente e a sub-população extraída durante um pequeno intervalo de tempo,$[t_k, t_{k+1} = t_k + h]$, é dada por $S(t_k) - S(t_k + h)$. Esta é a quantidade (*aproximada*) da parte da população que sobreviveu até o instante t_k, e não mais do que isso. Calculemos agora uma média aritmética (aproximada) do tempo de permanência destes indivíduos no censo dos "vivos", o que faremos por intermédio de uma *média aritmética ponderada pelo tempo de sobrevivencia*: $\frac{1}{P_0}\sum_{k=0}^{\infty}\{S(t_k)-S(t_k+h)\}t_k$. Por conveniencia matemática, reescrevemos esta expressão na forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{P_0}\{S(t_k)-S(t_k+h)\}t_k = \frac{1}{P_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{S(t_k)-S(t_k+h)}{h}\right\}t_k\,h \cong \frac{1}{P_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{-dS}{dt}(t_k)\right\}t_k\,h.$$

Esta última expressão $\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{-dS}{dt}(t_k)\right\}t_k\,h$ representa a soma integral para a função

$f(t) = -\frac{dS}{dt}(t)\,t$ com repartições de comprimento h .

Portanto, tomando o o limite "integral" para $h \to 0$, temos:

$$\lim_{"h"\to 0}\frac{1}{P_0}\sum_{k=0}^{\infty}\{S(t_k)-S(t_k+h)\}t_k = \frac{1}{P_0}\int_0^{\infty}\left(\frac{-dS}{dt}\right)t\,dt\ ,$$

de onde obtemos : $\lim_{"h"\to 0}\frac{1}{P_0}\sum_{k=0}^{\infty}\{S(t_k)-S(t_k+h)\}t_k = \frac{1}{P_0}\int_0^{\infty}\left(\frac{-dS}{dt}\right)t\,dt = \frac{1}{P_0}\int_0^{\infty}S(t)dt = \frac{1}{\mu}.$

O resultado matemático acima obtido mostra que o parâmetro (de dimensão tempo) $\frac{1}{\mu}$ tem significado biológico claro e significa o "*Tempo Médio de Sobrevivencia*" para os individuos desta população.

Este argumento, que foi sugerido pela análise que Christiaan Huygens realizou sobre Tabelas de Mortalidade, pode ser repetido de maneira totalmente semelhante para qualquer população que, por motivos quaisquer, decresçam.

(Não nos deteremos para demonstrar dentro dos rigores usuais da Análise a existencia e a representação do limite acima, o que pode ser feita por qualquer estudante desta disciplina. O fato da expressão final ser uma integral imprópria, isto é, com limite de integração infinito, exige uma atenção especial mas, a solução explicita da equação diferencial facilita a compreensão do resultado).

Interpetação Biológica Populacional do Modelo Malthusiano de Reprodução

Analisemos agora o modelo Malthusiano de **reprodução** , $\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = \nu > 0$, e interpretemos o significado do parâmetro ν , que nesta expressão matemática representa uma taxa de variação específica ("*per capita*"). Mais uma vez, é importante observar que este modelo assume que todos os indivíduos, antigos ou recém incorporados à população, têm a mesma chance de se reproduzirem nos instantes seguintes, ou seja, não há influencia etária, isto é, de maturação, nem de outros indivíduos na sua capacidade reprodutiva.

Consideremos a sub-população,

$V(t)$ =*"Quantidade de indivíduos dentre os P_0 iniciais , que ainda não se reproduziram até o instante t"*

dentre uma população que se inicia no instante $t = 0$ com P_0 indivíduos e descrita pelo modelo, $\frac{dP}{dt} = (\nu-\mu)P = rP$.

Para analisar a dinâmica desta sub-população observemos que para um pequeno período de tempo $[t, t+\delta t]$ o número de descendentes produzidos por esta população é

$\nu V(t)\delta t + o(\delta t)$, de acordo com o próprio modelo Malthusiano. Portanto, a menos de um erro de ordem $o(\delta t)$ podemos afirmar que, no período $[t, t+\delta t]$, o decréscimo da população $V(t)$ foi de $\nu V(t)\delta t$, ou seja, podemos escrever a seguinte equação:

$\frac{dV}{dt} = -\nu V$, $V(0) = P_0$, de onde $V(t) = P_0 e^{-\nu t}$.

Utilizando agora o mesmo argumento desenvolvido quanto à dinâmica de mortalidade, concluimos que $(\frac{1}{\nu})$ é o tempo médio de permanência de indivíduos na sub-população que ainda não procriou, ou, em termos mais biológicos,

$(\frac{1}{\nu}) =$ "*Tempo médio esperado por um indivíduo para a sua primeira reprodução"*.

É importante notar que a dimensão temporal dos parâmetros $[\mu^{-1}] = T$ e $[\nu^{-1}] = T$ permanecerá sempre a mesma, mas os significados das escalas de tempo μ^{-1}, e ν^{-1} dependem naturalmente da interpretação do próprio modelo em que ele participa, embora não haja variações radicais daquela que acabamos de tratar.

Voltando ao modelo diferencial de Malthus-Euler observamos que a equação nos mostra que o termo à esquerda ($\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}$) representa uma expressão com sentido biológico claro, "*Taxa de Mortalidade per Capita*" e, por outro lado, a igualdade ($\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = -\mu$) nos afirma que esta taxa é constante e **independe** do números de indivíduos. (Claro, desde que forem em quantidade suficiente para que se justifique o emprego do modelo diferencial, como já foi discutido). Estas observações nos levam a concluir que o modelo de Malthus, necessariamente, trata de uma população completamente **homogênea** de indivíduos que **não interagem** entre si negativamente quanto à mortalidade. O fato de que o tempo médio de sobrevivência independe da quantidade inicial de indivíduos da população é também argumento para concluir que não há qualquer interação entre seus membros quanto ao aspecto de mortalidade. Argumentos análogos são aplicáveis à dinâmica de reprodução Malthusiana.

A homogeneidade e a não interação entre individuos de uma "População Malthusiana" são fundamentais para o desenvolvimento do argumento da próxima seção.

III.2-INTERPRETAÇÃO BIOLÓGICA *INDIVIDUAL* DO MODELO MALTHUSIANO: *Processo de Poisson*

> H.Poincaré-" ...*on y reconnait la marque du hasard*.." in E.Amaldi pg. 16.
>
> E.F.**Schumacher**:(in "*Small is Beautiful*", Harper 1973, pg 211): "W*hen the Lord created the World and people to live in it -an enterprise which, according to modern science, took a very long time- I could well imagine that He reasoned with Himself as follows: "If I make everything predictable, these human beings, whom I have endowed with pretty good brains, will undoubtely learn to predict everything, and they will thereupon have no motive to do anything at all, because they will recognise that the future is totally determined and cannot be influenced by any human action. On the other hand, if I make everything unpredictable, they will gradually discover that there is no rational basis for any decision whatsoever and, as in the first case, they will thereupon have no motive to do anything at all. Neither scheme would make sense. I must therefore create a mixture of the two. Let some things be predictable and let others be unpredictable. They will then, amongst many other things, have the important task to find out which is whic*h".

A impossilidade de determinar o momento exato da morte de um indivíduo específico de uma população completamente Homogênea, ou do momento de decaimento radioativo de um átomo C_{14} de uma amostra, não significa que estamos totalmente à mercê do processo, mas significa que dispomos apenas de uma quantidade parcial de informação sobre ele. Vejamos portanto qual é esta informação parcial e que previsão parcial podemos realizar com ela. Para isto, façamos uso do conceito de "Probabilidade" no seu sentido frequentista, para o seguinte fato: "A probabilidade de um átomo de C_{14} decair em um intervalo de tempo t (fixo) é obtida (e definida experimentalmente) como a fração obtida pela divisão da quantidade de átomos que decairam neste período com relação à quantidade total de átomos observados, em um "grande número de observações" . Esta definição é semelhante à determinação (frequentista, e 'experimental' como sempre) da probabilidade de uma moeda produzir uma coroa em um lançamento, obtida após a observação de um "grande" número de lançamentos. Pois bem, quando temos uma amostra de átomos de C_{14} , podemos realizar o experimento de "decaimento" simultaneamente em uma quantidade inimaginável de vezes na prática, ($\sim 10^{23}$), e a fração dos que decairam após um período de tempo t deve nos dar "quase exatamente" a probabilidade frequentista deste processo. (ref. Mahadevan,Keller)

Exercícios:

1a-Realize as seguintes experiencias REAIS: $N \sim 20$ lançamentos sucessivos de uma moeda seguidos da anotação do resultado em uma Tabela concreta (computador ou papel) onde constam o número de experimentos, $1 \leq n \leq N$, o tempo necessário, $T(n)$ para executa-los, o numero de caras e o de coroas ate a referida etapa n, e obtenha uma representação linear (aproximada $T(n) = \alpha n$) entre estas variáveis. Extrapole o resultado para avaliar o tempo necessário para executar 10^{23} experimentos. Compare com a idade da Terra, que segundo alguns físicos contemporâneos é da ordem de (H.Fritzsch) de $\approx 6 \cdot 10^{9}$ de anos. (Sugestão:Método de Minimos Quadrados de Gauss explicado).

1b-No exercicio anterior você fez poucos lançamentos e não se cansou muito, o que resultou em uma reta bem representativa do resultado. Agora repita, *sem descansar ou diversificar a atenção durante o experimento*, 100 lançamentos sucessivos e verifique que a curva é ascendente. Interprete o resultado com relação ao exercicio anterior. Utilize a escala logaritmica e argumente se a curva é assintoticamente exponencial ou polinomial.(Esta questão visa determinar o seu comportamento e é representativo de muitas experiencias em Biologia. Este exercício pode ser feito em grupos em que apenas duas pessoas realizam a experiencia para efeito de comparação).

1c-Antes de se cansar, é possivel que ocorra intermediariamente um "aprendizado" que tornará o procedimento mais rápido. Mas este aprendizado é saturado em pouco tempo. Em uma etapa posterior, "vence o cansaço" e o tempo necessario para cumprir a tarefa começa a se alongar. Analise estas fases do procedimento em termos da Tabela anotada e de um re-escalonamento logaritmico.

1d-Suponha que você tenha vida quase-eterna. Utilizando o resultado anterior (com cansaço) calcule o tempo necessário para realizar os 10^{23} experimentos, mas observe que o "índice de cansaço", que pode ser medido pela curvatura do grafico deve ser variável, ou seja, o cansaço é cumulativo, como sabemos).

Supondo (especulativamente) que sua atenção seja exponencialmente decrescente, analise a questão acima.

2-Aproveite a sua tabela e obtenha uma representação assintótica da função $p_k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida como, $p_k(n)$ =Numero de vezes que em n experiencias produziu k sucessivos" . "Logaritmize" esta Tabela e conclua que ela sugere um comportamento assintótico da função $p_k(n)$ exponencial e analise como variam os coeficientes expoenciais em dependencia de k (Se crescem ou decrescem).

3-Registre (mentalmente) o resultado de cada sequencia de n experimentos na forma de um "sinal" (ou "palavra") de comprimento n constituido de $0's$ e $1's$ onde 0 corresponde a coroa e 1 correspodente a cara da moeda. Seja então $F_2(n)$ ="Número de possiveis "sinais" de comprimento n que não tem $0's$ sucessivos". Mostre que esta função satisfaz à recursão $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$ com dados iniciais $F(1) = 2, F(2) = 3$. Calcule uma Tabela para esta Função e mostre via linearização logaritmica que ela tem comportamente assintotico expoencial , $Ae^{\gamma n}$, e aproximadamente o seu coeficiente γ.

A interpretação probabilistica do Modelo Malthusiano original depende de forma crucial de dois aspectos importantes: o processo de decaimento radioativo/morte individual é ***independente***, isto é, este comportamento individual não é influenciado por outros átomos/individuos da sua população e nem de fatores externos, e é ***homogêneo***, ou seja, não varia de indivíduo para indivíduo. Assim, podemos sempre interpretar a dinâmica de um sistema na forma $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = -\mu$ como resultado populacional de uma grande quantidade de experimentos individuais (independentes) semelhantes, envolvendo toda a população N_0 . Verificamos então que ao fim de um período de tempo t , um total de $N(t) = N_0 e^{-\mu t}$ permaneceram sem decair/morrer e $N_0 - N(t) = N_0(1 - e^{-\mu t})$ decairam/morreram. Interpretando agora a probabilidade de decaimento/mprte de um átomo/indivíduo isolado durante o intervalo de tempo t pelo principio frequentista temos:

$$\frac{No.\ de\ mortos\ durante\ um\ periodo\ de\ tempo\ t}{No.\ total\ de\ indivíduos\ observados} = \frac{N_0 - N_0 e^{-\mu t}}{N_0} = 1 - e^{-\mu t}$$

Passando de uma afirmação de caráter coletivo para uma afirmação de caráter individual o máximo que se pode garantir é uma probabilidade.

"*A Probabilidade de que um átomo individual decaia durante o intervalo de tempo* t *"* = "*Número de átomos que decairam durante este intervalo de tempo*" $DIVIDIDO\ PELO$ "*Número de átomos que participaram da observação*"

ou seja,

"*A Probabilidade de que um átomo individual decaia durante o intervalo de tempo* t *"* = $\frac{A_0(1-e^{-\mu t})}{A_0} = (1 - e^{-\mu t})$,

Enquanto que

"*A Probabilidade de que um átomo individual 'sobreviva' durante o intervalo de tempo* t *"* = $\frac{A_0 e^{-\mu t}}{A_0} = e^{-\mu t}$

Como no Modelo Malthusiano a reprodução futura de um indivíduo independe das reproduções anteriores, o *tempo médio,* ν^{-1} ,pode ser contado a partir de qualquer instante.

Refazendo o argumento acima para o Modelo populacional Malthusiano, podemos interpretar probabilisticamente a expressão

$1 - e^{-\nu T} = \frac{V(0)-V(T)}{V(0)}$ como a "*probabilidade de que um indivíduo se reproduza pela primeira vez no intervalo de tempo T*"

ou,

$e^{-\nu T} = \frac{V(T)}{V(0)}$, como a "*Probabilidade de que um indivíduo não se reproduza em um intervalo de tempo T*".

Observe que este fato independe do momento inicial, pois $e^{-\nu T} = \frac{V(t+T)}{V(t)}$, ou seja, neste modelo, os indivíduos não *envelhecem* com respeito a fertilidade.

Um *Processo de Poisson* é caracterizado como um processo temporal de espera por um acontecimento determinado (sinal do contador Geiger, chamada telefonica, ocorrencia de acidentes, fisgada de um peixe no anzol do pescador e etc.) que satisfaz à seguinte condição infinitesimal:

"*Probabilidade de que ocorra o evento durante um pequeno intervalo de tempo δt* " $= \mu\delta t + o(\delta t)$.

(Onde o símbolo $o(x)$ significa uma função de x que se aproxima de zero mais rápido do que x, quando $x \downarrow 0$, ou seja, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{o(x)}{x} = 0$. Assim, a hipótese de Poisson diz que para pequenos intervalos de tempo a probabilidade de que ocorra um e, apenas um sinal, é proporcional ao comprimento do intervalo a menos de um pequeno erro de segunda ordem).

Esta caracterização é necessariamente satisfeita pelo decaimento radioativo de Rutherford descrito acima pois,

$(1 - e^{-\mu\delta t}) = \mu\delta t + \frac{1}{2}(\delta t)^2 + \ldots..$

O que é interessante, é que esta propriedade é também suficiente, isto é, um processo de espera de Poisson pode também ser caracterizado na forma: "*Probabilidade de que um átomo específico decaia durante o intervalo de tempo t* " $= \frac{A_0(1-e^{-\mu t})}{A_0} = (1 - e^{-\mu t})$).

Assim, tanto o decaimento de átomos da teoria de Rutherford, quanto a Doutrina Malthusiana de morte e nascimento de indivíduos biológicos de uma grande população podem ser reinterpretados probabilisticamente o que enriquece conceitualmente o Modelo Malthusiano e abre novas possibilidades para as suas aplicações.

Em particular, uma vez que temos disponível uma descrição (em termos probabilisticos),do comportamento especifico independente (quanto à mortalidade, reprodução, ou decaimento e etc.) de cada indívíduo, isto torna possível descrever (probabilisticamente) a Dinâmica Populacional de ***Pequenas Populações***, isto é, aquelas que não são suficientemente grandes para que a suas dinâmicas possam ser representadas satisfatoriamente por uma curva contínua e suave. Neste caso, a descrição da população se faz por intermédio de uma família infinita de funções reais da forma $\{p_n(t)\}_{0\leq n<\infty}$ que representam a seguinte informação:

$P_n(t) =$" P*robabilidade de que a População tenha n indivíduos no instant*e t"

Este Modelo, dentre outros temas, será apresentada em detalhes no capitulo referente a Principios Probabilisticos.

Processos de Poisson são Modelos Matemáticos importantes em diversas áreas da Física e Química (ref. van Kampen), da Biologia (ref.Ludwig, Koonin) da Economia (Cramer&Lundberg) da Engenharia (Cramer&Erlang) e, por conseguinte, amplamente estudados na Matematica Aplicada (Lange).

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

BIBLIOGRAFIA:

M.Abramowitz-I.Stegun-ed.-Handbook of Mathematical Functions-Formulas,Graphs and Mathematical Tables, NBS 1964-online

W.C.Allee-Animal Aggregations, U.Chicago Press 1939.

W.C.Allee-Cooperation Among Animals, H.Schumann 1951.

E.Amaldi-Radioactivity: A Pragmatic pillar of probabilistic Conceptions, pp.1-28 in Proc.Int.School Phys. E.Fermi-Corso 72–Problemi dei

Fondamenti della Fisica-ed. G. Toraldo di Francia, North-Holland 1979.

N.Arley-Introduction to Stochastic Processes and Cosmic Radiation, J.Wiley 1948

N.Bacaer-Short History of Mathematical Population Dynamics, Springer 2011 <OL>

A.L. Barabasi-Burst, 2010 - Nature 435, 2005

H.C. von Baeyer-Information-The new Language of Science, Harvard Univ.Press 2003.

Th. Bayes-An Essay towards solving a problem in the doctrine of chances,Phil.Trans.Royal Soc., 53, 370-418, (1763)

H.Bateman-The Probability Variations in the Distribution of Particles, Phil.Mag. 20 (1910), 698-704.

H.Berg-Random Walks in Biology, Princeton UP 1993.

E.Borel-Le Hasard, 1924

E.Borel-Radioactivité Probabilité et Determinism, Oeuvres vol. 4, 1972, pg. 2189-2196.

K.E.Boulding-Foreword to Malthus' Essay, U.Michigan 1959

B.Brecht-*Galileo, A Play*, Grove 1966

J.Browne-Darwin's Origin of Species, 2 vol.

S.G.Brush-Randomness and Irreversibility, AHES 5 1968, 1-36, 12, 1974, 1-80.

P.Buhlmann-Toward Causation and External Validity, Proc.Nat.Acad.Sci(pnas)2020

D.Calvetti-E.Somersalo-An Introduction to Scientific Bayesian Computing, Springer-Verlag 2008.

S.Chandrasekhar-Newton's Principia for the Common Reader. Oxford UPress, 1995.

J.E.Cohen-How many People can Earth Support, Norton 1995

J.E.Cohen-Population Growth and Earth's Human Carrying Capacity, Science (269), 1995, 341-

H.Caswell-Matrix Population Models, 3rd. Ed. Sinauer, 2005.

H.Cramer-Historical review of Filip Lundberg's works on risk theory, pg. 1288-1294 in Collected Works of Harald Cramer.

Charles Darwin-The Origin of Species and the Descent of Man, 1859 (The Modern Library-Random House s/d)

L.Curtis-Concepts of Exponential Law prior to 1900, A.J.Ph. 46(9), 1978, 896-

O.Darrigol-World of Flows- History of Fuid Dynamics....

M.Delbrück-Statistical Fluctuations and Autocatalytic Reactions, J.Chem. Phys. 1940

J.Diamond-

N.Eldredge- Entrevista Revista Pesquisa da Fapesp- "Sobre a capacidade de suporte da Terra"

L.Euler-"Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain- Acad.Sci Berlin 1760- trad. Theor.Popul.Biol. 1:307-314, 1970, & pg. 83-91 in Smith-Keyfitz(1977)-

Leonhardi Euleri-Opera Omnia -ser.I vol 7- pg. 345-352

L.Euler-Introductio Analysin Infinitorum, 1748- trad. inglês– Springer-Verlag

G.T.Fechner-KollektivemassLehre, 1897

W.Feller-An Introduction to Probability Theory and its Applications, 2 vol. J.Wiley 1966

W.Feller-On the logistic law of growth and its empirical verification in biology, Acta Biotheor. 5, (1940): 51-66

E.A.Fellmann-Leonhard Euler (Biography)-Birkhauser 2007

W.C.Ferreira Jr.-Dinâmica de Populações: De íons a sapiens, online- Revista ComCiência

W.C.Ferreira Jr.-The Multiple Faces of Diffusion, 2011

WCFerreira Jr.-O Silêncio dos Conformistas, Conf. Enc.Biomat I, 2017 e 2018-prelo.

R.P.Feynman-The Concept of Physical Law, MIT Press

L.Fibonacci-Liber abbaci di Leonardo Pisano, 1202 (online)

Ph.Flajolet-R.Sedgewick-Analytic Combinatorics, Cambridge UP, 2009

H. von Foerster-Some remarks on changing populations, The Kinetics of Cell Proliferation, pg. 382-407, 1959.

H.Fritzsch-The Creation of Matter, BB 1984 (pg. 165-The decay of the proton)

Galileo Galilei-Dialogo,Fiorenza 1632 (trad. Dialogue Concerning the Two Chief World Systems, UnivCalif.Press1967)

C.W.Gardiner-Handbook of Stochastic Methods for Physics,Chemistry and Natural Sciences, Springer 1985

M. Gellman-The Quark and the Jaguar, Norton 1985.pg.132

R.Graham-D.Knuth-O.Patashnik-Matemática Concreta: Fundamentos para a Teoria de Computação, Livr.Tecno-Cientifica 1988

John Graunt-Natural and Political Observations Mentioned in a Following Index and Made upon the Bills of Mortality, 1662-pg. 12-20 in Smith-Keyfitz(1977).

R.Gregory-Eye and the Brain-The Psychology of Seeing, Princeton UP 2015

E. Halley-An Estimation of the Degree of Mortality of Mankind, PhilTr RS,1693.

W.D.Hamilton-The Moulding of genes by Natural Selection, J.ThBiol 12 (1966), 12-45.

I.Hacking-The Emergence of Probability,

G.Hardin-The Tragedy of Commons, Science 1968

G.Hardin-Living within Limits, Oxford U.P.1993

S. Herbert-Darwin Malthus and Natural Selection, J.Hist.Biol. 4 (1971) 209-217

S. Herculano-Houzel S (2009) The human brain in numbers: a linearly scaled-up primate brain. Frontiers of Hum Neurosci 3:31

E.Hopf- On causality, statistics and probability, J. of Math. and Physics, vol 13, 1934.1763

F.Hoppensteadt-Mathematical Theories of Populations, SIAM 1972

David H. Hubel-Eye, Brain and Vision, Sci. Am. 1988

M.Kac-Lectures on Probabilistic Methods, 1958

D.Kahneman-D.Slovic-A.Tversky-Judgement under uncertainty: Heuristics and Biases, Cambridge Univ. Press 1982.

J.P.Keener-J.Sneyd-Mathematical Physiology, 2 vol. Springer 2008.

J.B.Keller-Mortality rate versus age, Th.Pop.Biol. 65 (2004) pg.113.

N.KEYFITZ - H.Caswell- Applied Mathematical Demography, 3rd Ed._SV2005

B.KEYFITZ-N.KEYFITZ-The McKendrick Partial Differential Equation and its Uses in Epidemiology and Population Study, Math.Comp.Mod. (1997):26, 1-9.

N.Keyfitz-Reconciliation of Population Models:Matrix, Integral and partial fraction, JRStat.Soc. A, 130, 1967, 61-83

N.Keyfitz-World Population and Ageing, UChicago Press 1990.

N.Keyfitz-J.Beekman-Demography through Examples, Springer 1984.

M.Kline-Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford UP 1970

E.V.Koonin-A.Novozhilov-G.Karev-The Biological Applications of Birth&Death Processes, Briefings in Bioinform. 7(1), 2010, 70-85.

H.Kragh-The Origin of Radioactivity: From solvable problem to unsolved Non Problem, Arch.Hist.ExactSci. 50(3-4), 1997, 331-358.

Peter Kropotkin-Mutual Aid:A Factor of Evolution, 1902

K.Lange-Applied Probability, Springer Verlag 2010

P.H.Leslie-On the use of matrices in certain population mathematics, Biometrika, 33 :183-212, 1945.

C.C.Lin-L.A.Segel-Mathematics Applied to Natural Sciences, SIAM 1990

A.J.Lotka-Elements of Physical Biology, 1924, Dover 1956.

D.LUDWIG-Stochastic Population Theories, Springer-Verlag Lect. Notes in Biomath. 3, 1974

D.LUDWIG-The Distribution of Population Survival Times, Am.Nat.147, (1996), 506-520.

S.Luria-M.Delbruck-Mutation of Bacteria, Genetics 28 (1943), 491-511

DJC McKay-Information Theory, Inference and Learning Algorithms, Cambride Univ. Press 2003.

Thomas Robert Malthus- Population: The First Essay, London 1798

R.M.May-When two and two do not make four: nonlinear phenomena in ecology, Proc.R.S.London B 228(1986), 241-66.

R.M.May-Stability and Complexity in Model Ecosystems, Princeton U.P. 1974.

E.Mayr-The Growth of Biological Thoght, Harvard U.Press 1982

A.G.McKendrick-Applications of mathematics to medical problems. Proc.Edinburgh Math.Soc., 44: 98-130, 1926

George A. Miller-The Magical Number Seven, Plus or minus Two: Some Limits on Our Capacity for Processing Information, Psych.Rev. 63(1956), 81-97: "My problem, ladies and gentleman is that I have been persecuted by an integer"

J.Monod-Le hasard et la necessité, Ed. du Seuil 1970-(trad. Chance and Necessity:An Essay on the Natural Philosopy of Modern Biology- Vintage 1971)

J.Monod-The Growth of Bacterial Culture, Ann.Rev. Microbiol. 1949, 3, 371-394.

J. Pearl-D.Mackenzie-The Book of Why: The New Science of Causation and Effect, Basic Books 2018

A.Perelson-P.W.Nelson-.... HIV Virus Dynamics.....SIAM Rev 1999

A.S.Perelson-P.W.Nelson-The Mathematics of HIV Infection, in J.Sneyd-ed-An Introduction to Mathematics of Biology, AMS 2001

Charles S.Peskin-Mathematical Aspects of Heart Physiology, Lect. Courant Inst.-NYU 1978- AMS2008

Physics Web-Bismuth break half-life.....online: http://physicsweb.org/article/news/7/716

PhysicsWeb- Carbon clock could show the wrong time, 10 May 2001-online: http://physicsweb.org/article/news/5/5/7/1J. von Plato-.......

David Pimentel-R.Hopfenberg-Human Population Numbers as a Function of Food Supply, -pp online 2001

S.D.Poisson-La proportion des Naissances des Filles et des Garçons, Memoire de l'Acad. des Science, 08 février 1829.

https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=mdp.39015011958983;view=1up;seq=489

G.Polya-Patterns of Plausible Inference, Princeton Univ. Press 1968.

Th.Porter-A Statistical survey of Gases: Maxwell's Social Physics, Hist.Studies in the Phys.Sci. 12(1) 1980, 77-116

L.Redniss-Radioactive–Marie and Pierre Curie; A Tale of Love and Fallout, 2010

M.Rose-The Evolution of Ageing since Darwin, J.Gen. 87(4) 2008

P.Samuelson-Resolving a historical confusion in population analysis, Human Biology, 48: 559-580, 1976 & pg.109-129 in Smith&Keyfitz(1977).

S.Schweber-The Origin of Origins, J.of the Hist Biol 10 (1977), 229-310.

Scientific American–The Mind's Eye, Readings from Sci. Am. 1986

Scientific American- Image, Object Illusion, Readings from Sci. Am. 1974

A.Shapiro-ed.-The Oxford Handbook of Visual Illusion, Oxford UP 2017

D.Smith-N.Keyfitz-editors-Mathematical Demography-Selected Papers, Springer Verlag 1977.

J.Sneyd-ed-An Introduction to Mathematics of Biology, AMS 2001

J.Sung-J.Yu-Population System Control Springer 1988- rev. J.Cohen SIAM Review 1990

J.Sung-&al-Population System Control_Math.Comp.Mod. 11(1988) 11-16.

L.Szilard-Ageing Process, Proc.Nat.Acad,Sci., USA 1959

S.Ulam-Marian Smoluchowski and the Theory of Probability in Physics, Am.J.Phys. 25 (1957), 475-481.

J. van Brackel-Radioactivity as Probability , Arch.Hist.Exact Sci. 31 (1985), 369-385.

N. van Kampen-Stochastic Methods in Physics and Chemistry,North-Holland 1985.

J. von Plato-Creating Modern Probability-Mathematical Physics Perspective, Cambridge UP 1994

P. Vorzimmer-Darwin Malthus and Natural Selesction, J.Hist.Ideas 30 (1969), 527-542.

Howard Wainer-Picturing the Uncertain World-How to understand, Communicate and Control Uncertainty through Graphical Display, PrincetonUP 2009

Howard Wainer-Graphic Discovery, Princeton UP 2005

A.R.Wallace-Contribution to the Theory of Natural Selesction, 1870.

N.Wax-editor-Selected papers on Noise and Stochastic Processes, Dover 1954

E.Widiger-ed.-The Five Factor Model, Oxford Univ.Press 2014

R.M.Young-Malthus and the Evolutionist'-Common Context, pg. 23-55 in -Darwin's Metaphor, R.M.Young-ed. CUP1985.

R.Zwanzig-....Verhulst logistic Equation......_PNAS

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

APÊNDICES: Leitura Opcional

O MODELO MALTHUSIANO DIFERENCIAL- *Redução da Descrição: Uma Curva Suave em lugar de uma Enorme Tabela Discreta.*

Os Modelos Matemáticos da Mecânica Newtoniana formulados a partir do século XVIII são expressos na forma de equações diferenciais admitindo um conceito de tempo contínuo e sempre "deduzidos" como decorrencia lógica e inexorável de "leis fundamentais" da Física. O Método Newtoniano para a construção de Modelos Matemáticos tornou-se o paradigma predominante da Matemática Aplicada. É natural, portanto, que a aplicação desta metodologia na formulação de um modelo demográfico fosse encarado não apenas como indispensável para estabelecer a sua validade a priori como também para tornar possível a utilização de todas as técnicas do Cálculo Diferencial e Integral para o seu tratamento.

Mas , para que isto fosse possível, o modelo matemático adequado para representar "o tamanho N" da população em cada instante $t, N(t)$, teria que ser uma função contínua e diferenciável. Ora, mas diriam os apressados da objetividade, esta pretensão é um rematado contra-senso já que, notoriamente (!), a função $N(t)$ varia aos saltos,"de um em um" e, portanto, é irremediavelmente descontínua.

Na verdade, esta é uma objeção pertinente e bem fundamentada o que a faz merecer uma abordagem séria e cuidadosa muito embora na maioria das vezes os textos usuais de Matemática Aplicada apelem para um silêncio conformista da audiencia.(WCFerreiraJ-Conferencia/Artigo: O Silêncio dos Conformistas, 2018).

A argumentação mais simples e direta para justificar a transição do discreto para o contínuo (e diferenciável) na representação de uma Dinâmica Populacional tem um fundamento essencialmente cognitivo e também é relevante para diversos outros contextos semelhantes na Matemática Aplicada.

Iniciemos pela observação inequívoca de que em toda a Matemática, dispomos apenas de representações gráficas descontínuas de funções (quaisquer que sejam elas) e, somente por uma ilusão de ótica (efeito Kanizsa) é que mentalmente completamos algumas sequencias pontilhadas por linhas (imaginárias) "contínuas e suaves". Ou seja, a continuidade é apenas uma construção mental que decorre de uma estratégia inata do cérebro humano para fazer sentido dos sinais que a retina lhe envia associando-os a memórias (imagens mentais) de elementos mais organizados, ou estruturados. O cérebro é patentemente incapaz de discriminar uma grande quantidade de informações não estruturadas (segundo George Miller[1956], 7 ± 2) e, por esta razão, a (enorme quantidade de) informação contida em um gráfico pontilhado tem que ser "reduzida" para ser "entendida". De fato, a representação gráfica-visual de uma tabela numérica foi uma das técnicas mais importantes inventadas pela ciência em geral, uma vez que, com isto, toda esta capacidade de percepção visual/mental torna-se disponível. É difícil imaginar que o extraordinário desenvolvimento da ciência nos últimos séculos, especialmente da Matemática, pudesse prescindir desta singular sinergia entre símbolos e representação visual.Uma outra maneira de organizar uma grande quantidade de dados "desconexos" como, por exemplo, uma série aleatória de dígitos (CPF,Telefone e etc.) é associa-los à uma simples melodia que tem estrutura e, portanto, é de mais fácil memorização, ainda que a associação seja completamente desprovida de sentido. A associação de um gráfico pontilhado a uma curva contínua é apenas uma das estratégias que a mente utiliza para "reduzir" uma grande massa de informações.(Sci.Am. [1974],[1986], Hubel[1988],Gregory[2015],Shapiro[2017], Widiger[2014]).

Naturalmente, para que esta suavização de descontinuidades seja possível, é necessário que o conjunto de pontos não apresente "grandes" espaços interstícios e que, de fato, ele disponha de alguma estrutura propícia e não completamente aleatória. Para minimizar a dispersão dos pontos, ou seja, para promover uma "aglutinação" dos pontos do gráfico, usualmente lançamos mão da liberdade de escolha de unidades para as medidas das variáveis numéricas Tempo e População. Por exemplo, uma diminuição (aumento) da unidade Tempo resulta em uma compressão (respectivamente, dilatação) linear do gráfico no sentido horizontal. Efeito semelhante na ordenada vertical é obtido com a modificação da unidade de População. Deformações que utilizam o mesmo fator para as duas direções são homotetias e, portanto, não modificam a forma do grafico. Entretanto, as dimensões de Tempo e População são independentes e não há absolutamente nenhuma razão para que tenham unidades transformadas pelo mesmo fator.Enfim, a forma "rígida" da curva resultante não é essencial, apenas suas propriedades topológicas: monotonicidade, curvatura e etc.

Um gráfico pontilhado pode, portanto, após compressão apropriada nas duas direções, fazer com que os pontos de gráficos discretos se aproximem o suficiente para que virtualmente descrevam uma curva contínua. Obviamente isto não a torna uma função matemática contínua, apenas faz com que seu gráfico, para efeito cognitivo, se apresente como um traço contínuo e assim favoreça psicologicamente esta interpretação.

É bom deixar claro que a hipótese de que um gráfico discreto possa ser bem representado por uma curva contínua e suave é uma hipótese (ou, "wishful thinking") fundamental para a construção do Modelo Matemático diferencial. A adequação do Modelo Matemático resultante desta hipótese somente poderá ser verificada a posteriori , nunca "demonstrada" a priori. Um conjunto de pontos completamente aleatórios dificilmente poderá ser associado a alguma estrutura simples que o represente razoavelmente.

É interessante citar a possibilidade de generalizar estas ideias com a utilização de escalas não lineares cujas "lentes de observação" se modificam segundo as regiões e de acordo com a conveniencia do objetivo descritivo do Modelo matemático. A escala (não linear) logaritma é talvez o exemplo mais comum desta estratégia.Os Métodos Assintóticos também lançam mão desta estatégia com frequencia.(Lin-Segel[1990], Segel[BullMathBiol1989]).

A compressão vertical do gráfico de uma dinâmica populacional somente pode ser realizada se tratamos de grandes populações, por exemplo, da ordem de 10^9 , como as populações do Brasil, de um grande formigueiro [Gordon[1999]), do número de células do sistema imunológico ou de neurônios [Herculano-Houzel-2009] e etc..(O numero de Avogadro é da ordem de 10^{23}). Assim se a unidade empregada for $P_0 = 10^7$ (isto é, um "lote" de 10 milhões de individuos) estas populações biológicas passam a ser descritas com valores $0 \leq n \leq 100$.

A compressão horizontal, por sua vez, pode, por exemplo, aglutinar 200 pontos para a representação discreta de uma dinâmica demográfica de 100 anos com censos semestrais. A dinâmica populacional de um formigueiro, por outro lado, se analisada em um período de 5 anos (Gordon[1999]) com dados semanais apresenta um total da ordem de 250 pontos. A dinâmica imunológica é mais rápida e um período de 1 mês, pode ser regstrada discretamente em intervalos de tres horas o que também exige uma ordem de 250 pontos.

A modificação linear de escalas, ou de unidades, funciona como uma lente regulável que pode, por um lado, focalizar pequenos detalhes locais, tal como um microscópio,(reduzindo o campo de observação), ou, por outro, possibilitar a percepção da estrutura geométrico-topológica do "todo" global com o afastamento do ponto de vista do observador, que aglutina pequenas variações ("borragem") ,reduzindo, neste processo, a quantidade de informação. A construção de imagens contínuas pela iluminação de (invisíveis) pixels e a superposição de imagens em um filme cinematográfico são exemplos comuns e práticos desta técnica.

O problema de redução de informações, todavia, não é apenas uma estrategia psicológica humana. Hoje em dia, qualquer área científica (Social ou da Natureza) é inundada por uma massa avassaladora de informações, de tal monta que se torna patentemente impossível enfrenta-la com os métodos computacionais ou analíticos tradicionais. Em vista disso, os chamados Métodos Matemáticos de Redução, que tem por finalidade exatamente reduzir e organizar apropriadamente enormes arquivos de informações, foram rapidamente desenvolvidos nas últimas décadas tornando-se uma classe especial de métodos da Matemática Aplicada Contemporânea. Um dos métodos mais efetivos e interessantes para este fim faz uso de um processo (artificial) de difusão (um operador de difusão) que de fato associa conjuntos discretos a figuras (gráficos) matematicamente suaves.(WCFerreira Jr.[2018b]).Estes Métodos serão tratados em capítulo a parte.(Kutz[2015],.....).

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

O EFEITO KANIZSA, A METODOLOGIA ANALITICA DE GALILEO, E SUA EXTENSÃO NEWTONIANA:

***Redução e Síntese**: Uma Curva Suave em lugar de uma Enorme Tabela Discreta (Kanizsa), sua Representação Cartesiana Funcional (Galileo) e sua Caracterização como Solução de uma Equação Diferencial (Newton)*

"E*u tenho uma maior admiração por aquele que, pela primeira vez, imaginou e construiu um instrumento musical que seria um tosco protótipo da harpa, do que pelos admiráveis artesãos que aperfeiçoaram este instrumento até a forma graciosa e a sonoridade perfeita que hoje o caracteriz*a". Galileo

A Metodologia de Galileo que busca sintetizar (e generalizar) funcionalmente a correspodencia de uma Tabela de dados experimentais deu início a uma revolução científica quando a sua perspicácia (e conhecimentos de Geometria Elementar) detectou (aproximadamente) as propriedades de uma parábola nas imagens de trajetórias de balas de canhão que ele exaustivamente analisou. (G.Galilei-Dialogo). Daí, à uma formulação analitica para esta trajetória foi um pequeno passo em vista da recentemente desenvolvida Geometria Analitica de Renée Descartes . (Uma coincidencia que não pode passar despercebida).

Entretanto, se a ideia de Galileo era brilhante, por outro lado, a sua implementação era difícil, mesmo com a Geometria Analitica de Descartes, pois não havia um procedimento padrão para caracterizar a função que bem representasse uma Tabela de dados. Além disso não havia ainda uma "biblioteca de funções" suficientemente grande que permitisse encontrar esta representante, visto que as funções disponiveis à época eram apenas as Elementares Algébricas, i.e., obtidas como resultado de uma sequencia finita de operações de soma, produto, composição e potencias racionais aplicadas às funções básicas {funções constantes e função identidade}.

Com a invenção do Cálculo Diferencial a "biblioteca de funções" aumentou consideravelmente pois incluiria a operação (transcendental) de soma infinita (além das operações algébricas) e, não menos importante, disponibilizou o emprego da Metodologia Newtoniana que caracteriza uma função de uma maneira extremamente sintética em termos da solução de uma equação diferencial. (Compare a expressão aritmética da função exponencial, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$, com a sua ultra-sintética descrição diferencial, $\frac{df}{dx} = f, f(0) = 1$).

A Metodologia Newtoniana para a Matemática Aplicada se constitui, portanto, de duas partes:

1)Os Principios que permitem "encriptar" uma função representativa de um Modelo Matematico na forma de solução de uma Equação Diferencial e,

2) Os Métodos analiticos que são instrumentos necessários para a "abertura destes códigos", ou seja, os métodos de resolução de equações diferenciais.

(O Presente texto está organizado segundo esta Metodologia Newtoniana).

Os Modelos Matemáticos da Mecânica Newtoniana formulados a partir do século XVIII são expressos na forma funcional, cujas funções são definidas como soluções de equações diferenciais. A Metodologia Newtoniana para a construção de Modelos Matemáticos tornou-se o paradigma predominante da Matemática Aplicada devido à sua capacidade de síntese que estava imersa na Teoria do Cálculo Diferencial e Integral inventado por Newton e Leibniz. É natural portanto que a aplicação desta metodologia na formulação de um modelo demográfico fosse encarado como indispensável.

Entretanto, para que isto fosse possível o modelo matemático adequado para representar "o tamanho N" da população em cada instante t, $N(t)$, teria que ser uma função contínua e diferenciável. Ora, mas diriam os apressados da objetividade, esta pretensão é um rematado contra-senso já que, notoriamente (!), a função $N(t)$ varia aos saltos,"de um em um" e, portanto, é irremediavelmente descontínua.

Na verdade, esta é uma objeção pertinente e bem fundamentada o que a faz merecer uma abordagem séria e cuidadosa muito embora na maioria das vezes os textos usuais de Matemática Aplicada apelem para um silêncio conformista da audiencia.(WCFerreiraJ-Conferencia/Artigo: O Silêncio dos Conformistas, 2018).

A argumentação mais simples e direta que sugere a transição do discreto para o contínuo (e para a suavidade do diferenciável) na representação de uma Dinâmica Populacional tem um fundamento essencialmente cognitivo e também é relevante para diversos outros contextos semelhantes na Matemática Aplicada.

Iniciemos pela observação inequívoca de que em toda a Matemática, dispomos apenas de representações gráficas descontínuas de funções (quaisquer que sejam elas) e, somente por uma ilusão de ótica (efeito Kanizsa) é que mentalmente completamos algumas sequencias pontilhadas por linhas (imaginárias) "contínuas e suaves". Ou seja, a continuidade e a suavidade é apenas uma construção mental que decorre de uma estratégia inata do cérebro humano para fazer sentido dos sinais que a retina lhe envia associando-os a memórias (imagens mentais) de elementos mais organizados, ou estruturados. O cérebro é patentemente incapaz de discriminar uma grande quantidade de informações não estruturadas (segundo George Miller[1956], 7 ± 2) e, por esta razão, a (enorme quantidade de) informação contida em um gráfico pontilhado tem que ser "reduzida" para ser "entendida", isto é, memorizada por intermedio de algumas de suas caracteristicas mais proeminentes. De fato, a representação gráfica-visual de uma tabela numérica foi uma das técnicas mais importantes inventadas pela ciência em geral, uma vez que, com isto, toda esta capacidade de percepção visual/mental torna-se disponível. É difícil imaginar que o extraordinário desenvolvimento da ciência nos últimos séculos, especialmente da Matemática, pudesse prescindir desta singular sinergia entre símbolos e representação visual.Uma outra maneira de organizar uma grande quantidade de dados "desconexos" como, por exemplo, uma série aleatória de dígitos (CPF,Telefone e etc.) é associa-los à uma simples melodia que tem estrutura e, portanto, é de mais fácil memorização, ainda que a associação seja completamente desprovida de sentido. A associação de um gráfico pontilhado a uma curva contínua é apenas uma das estratégias que a mente utiliza para "reduzir" uma grande massa de informações a um tamanho que pode ser "arquivado" e classificado segundo algumas poucas caracteristicas(Sci.Am. [1974],[1986], Hubel[1988],Gregory[2015],Shapiro[2017], Widiger[2014]).

Naturalmente, para que esta suavização de descontinuidades seja possível, é necessário que o conjunto de pontos não apresente "grandes" espaços interstícios e que, de fato, ele disponha de alguma estrutura propícia e não completamente aleatória. Para minimizar a dispersão dos pontos, ou seja, para promover uma "aglutinação" dos pontos do gráfico, usualmente lançamos mão da liberdade de escolha de unidades para as medidas das variáveis numéricas Tempo e População. Por exemplo, um aumento da unidade Tempo resulta em uma compressão linear do gráfico no sentido horizontal. Efeito semelhante na ordenada vertical é obtido com a modificação da unidade de População. Estas deformações do grafico não modificam aspectos topologicos que representam informações essenciais como região de crescimento e de curvaturas (isto é, os sinais da primeira e segunda derivadas). Enfim, na representação gráfica, a forma "rígida" da curva resultante não é essencial, apenas suas propriedades topológicas: monotonicidade, curvatura e etc.

Como as duas dimensões (Tempo e População), a principio, nada tem a ver uma com a outra, isto é, são independentes, não há absolutamente nenhuma razão para que tenham unidades transformadas pelo mesmo fator e este fato será utilizado em várias situações para enfatizar aspectos distintos do Modelo Matemático.

Um gráfico pontilhado pode, portanto, após compressão apropriada nas duas direções, fazer com que os pontos de gráficos discretos se aproximem o suficiente para que virtualmente descrevam uma curva contínua. Obviamente isto não a torna uma função matemática contínua, apenas faz com que, para efeito cognitivo, seu gráfico se apresente como um traço contínuo e assim favoreça psicologicamente esta interpretação.

De qualquer forma, é bom ressaltar que a hipótese de que um gráfico discreto possa ser bem representado por uma curva contínua e suave é uma hipótese (ou, "wishful thinking") fundamental para a construção do Modelo Matemático diferencial. A adequação do Modelo Matemático resultante desta hipótese somente poderá ser verificada a posteriori , nunca "demonstrada" a priori. Um conjunto de pontos completamente aleatórios dificilmente poderá ser associado a alguma estrutura simples que o represente razoavelmente. Mesmo assim, veremos que há casos em que isto é possível.(....[..]).

É interessante citar a possibilidade de generalizar estas ideias com a utilização de escalas não lineares cujas "lentes de observação" se modificam segundo as regiões e de acordo com a conveniencia do objetivo descritivo do Modelo matemático. A escala (não linear) logaritma é talvez o exemplo mais comum desta estratégia.Os Métodos Assintóticos também lançam mão desta estatégia com frequencia.(Lin-Segel[1990], Segel[BullMathBiol1989]).

A compressão vertical do gráfico de uma dinâmica populacional somente pode ser realizada se tratamos de grandes populações, por exemplo, da ordem de 10^9 , como as populações do Brasil, de um grande formigueiro [Gordon[1999]), do número de células do sistema imunológico ou de neurônios [Herculano-Houzel-2009] e etc..(O numero de Avogadro é da ordem de 10^{23}). Assim se a unidade empregada for $P_0 = 10^7$ (isto é, um "lote" de 10 milhões de individuos) estas populações biológicas passam a ser descritas com valores $0 \leq n \leq 100$.

A compressão horizontal, por sua vez, pode, por exemplo, aglutinar 200 pontos para a representação discreta de uma dinâmica demográfica de 100 anos com censos semestrais. A dinâmica populacional de um formigueiro, por outro lado, se analisada em um período de 5 anos (Gordon[1999]) com dados semanais apresenta um total da ordem de 250 pontos. A dinâmica imunológica é mais rápida e um período de 1 mês, pode ser regstrada discretamente em intervalos de tres horas o que também exige uma ordem de 250 pontos.

A modificação linear de escalas, ou de unidades, funciona como uma lente regulável que pode, por um lado, focalizar pequenos detalhes locais, tal como um microscópio,(reduzindo o campo de observação), ou, por outro, possibilitar a percepção da estrutura geométrico-topológica do "todo" global com o afastamento do ponto de vista do observador, que aglutina pequenas variações ("borragem") ,reduzindo, neste processo, a quantidade de informação. A construção de imagens contínuas pela iluminação de (invisíveis) pixels e a superposição de imagens em um filme cinematográfico são exemplos comuns e práticos desta técnica.

O problema de redução de informações, todavia, não é apenas uma estrategia psicológica humana. Hoje em dia, qualquer área científica (Social ou da Natureza) é inundada por uma massa avassaladora de informações, de tal monta que se torna patentemente impossível enfrenta-la com os métodos computacionais ou analíticos tradicionais. Em vista disso, os chamados Métodos Matemáticos de Redução, que tem por finalidade exatamente reduzir e organizar apropriadamente enormes arquivos de informações, tem sido rapidamente desenvolvidos nas últimas décadas tornando-se uma classe especial de métodos da Matemática Aplicada Contemporânea. Um dos métodos mais efetivos e interessantes para este fim faz uso de um processo (artificial) de difusão (um operador de difusão) que de fato associa conjuntos discretos a figuras (gráficos) matematicamente suaves.(WCFerreira Jr.[2018b]).Estes Métodos serão tratados em capítulo a parte.(Kutz[2015],.....).

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx-KANIZSA

II-A Metodologia de SÍNTESE FUNCIONAL DE DADOS EXPERIMENTAIS: Galileo-Newton-Kanizsa

A Estética como Economia de Informação.

> "The ability to describe underlying patterns from data has been called the fourth paradigm of scientific discovery. [However, according to Kanizsa, that is exactly what our cognitive senses authomatically do all the time since immemorial eras. Besides, people forget to point out that Kepler, Huygens, and Rutherford have done just that

centuries ago]". Primeira parte. J.G. Hey Anthony &al;Report Microsoft Res., Redmond WA 2009. Segunda parte parafrase anônima.

O trabalho de Galileo com a sua descoberta de que a tabela de dados observados para a queda livre de um objeto apresentava propriedades geométricas típicas de uma quádrica (uma parábola) e portanto, poderia ser descrita pela recém inventada Geometria Analitica de Descartes como uma função quadrática, inaugurou um Método revolucionário para a representação matemática da Natureza. Este procedimento foi logo abraçado por Isaac Newton que o empregou na descrição funcional das órbitas celestes, mas agora caracterizando as funções como solução de Equações Diferenciais, o que sintetizava ainda mais as informações e aumentava a "biblioteca" de funções disponiveis para a descrição.

O enorme sucesso da Metodologia Newtoniana introduzida com a construção do Modelo Matemático da Mecânica no século XVIII, estabeleceu um paradigma que tem prevalecido sem contestação para a Matemática Aplicada desde então. Sob este ponto de vista, um Modelo Matemático para um fenômeno natural, em geral, faz uso da vasta "biblioteca" de Funções reais (diferenciaveis) do Cálculo para descrevê-lo e de Equações Diferenciais para caracterizar estas funções.(Frequentemente o Modelo é confundido com estas equações diferenciais, mas como o proprio Newton enfatizou, a escolha das funções que descreverão o "estado" do objeto de estudo é um passo preliminar e crucial para a construção do Modelo e antecede a sua caracterização especifica por intermedio de uma equação diferencial).

É natural, portanto, que a formulação de um Modelo Matemático para a Dinâmica de grandes Populações também fosse buscada nestes termos que imediatamente coloca à disposição de seu tratamento todo o vasto e eficiente instrumental analítico do Cálculo Diferencial e Integral desenvolvido por Newton, e Leibniz.

Entretanto, a descrição matemática de uma Dinâmica Populacional é necessariamente intermediada por uma função que representa a medida N do tamanho (cardinalidade) de um conjunto de organismos em cada instante t, que, a rigor, assume apenas valores inteiros não negativos. Sob o ponto de vista Newtoniano, a construção de um Modelo diferencial para este problema é, portanto, de saída um notório contra-senso já que esta função $N(t)$ varia aos saltos ,"de um em um" subitamente em instantes pontuais e, portanto, irremediavelmente descontínua e não difeenciável.

De fato, esta é uma objeção pertinente e bem fundamentada o que a faz merecer uma abordagem séria e cuidadosa muito embora na maioria das vezes os textos usuais de Matemática Aplicada apelem para um silêncio conformista do/as leitores/as quanto a este aspecto.(Lin-Segel é um dos poucos textos didáticos que enfrentam honestamente esta questão. WCFerreiraJr-Conferencia/Artigo: O Silêncio dos Conformistas, 2018).

A argumentação mais simples e direta para justificar a transição do discreto para o contínuo (e diferenciável) na representação de uma Dinâmica Populacional tem um fundamento essencialmente cognitivo e também é relevante para diversos outros contextos semelhantes na Matemática Aplicada.

Iniciemos pela observação inequívoca de que em toda a Matemática, dispomos apenas de representações gráficas descontínuas de funções (quaisquer que sejam elas) e, somente por uma ilusão de ótica (efeito Kanizsa) é que mentalmente completamos algumas sequencias pontilhadas por linhas (imaginárias) "contínuas e suaves". Ou seja, a continuidade é apenas uma construção mental "estética" que decorre de uma estratégia inata (evolutiva) que o cérebro humano dispõe para "entender" os sinais que a retina lhe envia associando-os a memórias (imagens mentais) de elementos mais organizados, ou estruturados. O cérebro é patentemente incapaz de discriminar uma grande quantidade de informações não estruturadas (segundo George Miller[1956], 7 ± 2) e, por esta razão, a (enorme quantidade de) informação contida em um gráfico pontilhado tem que ser "reduzida" para ser "entendida", isto é, memorizada. De fato, a representação cartesiana gráfico-visual de uma tabela numérica foi uma das técnicas mais evolucionáis e eficazes introduzidas pela ciência, que lança mão de toda esta capacidade de percepção visual/mental. É difícil imaginar que o extraordinário desenvolvimento da ciência nos últimos séculos, especialmente da Matemática, pudesse prescindir desta singular sinergia que associa formas geométricas familiares a tabelas numéricas "caóticas". (v. citação de Galileo).

(Uma outra maneira de organizar uma grande quantidade de dados "desconexos" como, por exemplo, uma série aleatória de dígitos (CPF,Senhas, Telefone e etc.) é associa-los à uma simples melodia que tem estrutura rítmica e, portanto, é de mais fácil memorização, ainda que a associação possa ser completamente desprovida de outro sentido. A associação de um gráfico pontilhado a uma curva contínua é apenas uma das estratégias que a mente utiliza para "reduzir" uma grande massa de informações a uma única e rememorável objeto. O reconhecimento de padrões faciais, por exemplo, assunto em que a cognição humana é especialista, se faz por intermédio de uma redução de detalhes a ponto de poder representa-las por intermedio de "caricaturas" com poucos traços notáveis.Este processo tem analogias óbvias com a técnica de Funções Geradoras utilizada para encapsular uma sequencia infinita de números por meio de uma função analítica.(Sci.Am. [1974],[1986], Hubel[1988],Gregory[2015],Shapiro[2017], Widiger[2014], Pólya, Wilf).

Naturalmente, para que esta suavização de descontinuidades seja possível, é necessário que o conjunto de pontos não apresente "grandes" espaços interstícios e que, de fato, ele favoreça a associação à alguma estrutura subjacente e não seja completamente aleatória.

> Portanto, a primeira condição para que a representação de uma dinâmica populacional possa ser bem realizada por intermedio de funções continuas e suaves, é que a população seja formada por um grande números de indivíduos e que os dados observados ocorram em pequenos intervalos de tempo.Obviamente, os conceitos de "grande" e "pequeno" nesta afirmação são diretamente dependentes da representação geométrica da função e da cognição visual humana.

Consideremos a representação geométrica cartesiana. Para minimizar a dispersão dos pontos, ou seja, para promover uma "aglutinação" dos pontos do gráfico, usualmente lançamos mão da liberdade de escolha de unidades para as medidas das variáveis numéricas Tempo e População. Por exemplo, uma diminuição (aumento) da unidade Tempo resulta em uma compressão (respectivamente, dilatação) linear do gráfico no sentido horizontal. Efeito semelhante na ordenada vertical é obtido com a modificação da unidade de População. Deformações que utilizam o mesmo fator para as duas direções são homotetias e, portanto, não modificam a forma do grafico. Entretanto, as dimensões de Tempo e População são independentes e não há absolutamente nenhuma razão para que tenham unidades transformadas pelo mesmo fator. Enfim, a forma "rígida" da curva resultante não é essencial, apenas nos interessam algumas de suas propriedades topológicas: monotonicidade, tipos de curvatura e etc. que podem caracterizar uma imagem mental da função.

(A representação cartesiana de funções, que aos olhos dos Conformistas parece ser inelutável, na verdade é uma construção arbitrária, ainda que de grande utilidade como mostra a história. Na verdade, nem sequer o espaçamento uniforme das medidas na reta real é uma necessidade. É interessante citar a possibilidade de generalizar estas ideias com a utilização de escalas não lineares e não uniformes cujas "lentes de observação" se modificam segundo as regiões e de acordo com a conveniencia do objetivo descritivo do Modelo matemático. A escala (não linear) logarítmica é talvez o exemplo mais óbvio e mais utilizado desta estratégia.Os Métodos Assintóticos também lançam mão desta estatégia com frequencia.(Lin-Segel[1990], Segel[BullMathBiol1989])).

Assim, após uma compressão apropriada, um gráfico pontilhado pode fazer com que os pontos de gráficos discretos se aproximem o suficiente para que virtualmente descrevam uma curva contínua. Obviamente isto não a torna uma função matemática contínua e suave, apenas faz com que seu gráfico, para efeito cognitivo, se apresente mais como um traço contínuo e assim favoreça psicologicamente esta interpretação.

É importante enfatizar que a hipótese de que um gráfico discreto (Tabela) possa ser bem representado por uma curva contínua e suave é uma hipótese (ou, "wishful thinking") fundamental para a construção do Modelo Matemático diferencial. A adequação do Modelo Matemático resultante a esta hipótese somente poderá ser verificada a posteriori , nunca "demonstrada" a priori. (Um conjunto de pontos completamente aleatórios dificilmente poderá ser associado a alguma estrutura simples que o represente razoavelmente).

A compressão vertical do gráfico de uma dinâmica populacional somente pode ser realizada se tratamos de grandes populações, por exemplo, da ordem de 10^9 , como as populações do Brasil, de um grande formigueiro [Gordon[1999]), do número de células do sistema imunológico ou de neurônios [Herculano-Houzel-2009] e etc..(O numero de Avogadro(número de moléculas de um gás em um mol) é da ordem de 10^{23}. O número de particulas no Universo, $10^{?}$. t'Hoft, H.Fritzsch$)$. Assim se a unidade empregada for $P_0 = 10^7$ (isto é, um "lote" de 10 milhões de individuos) estas populações biológicas passam a ser descritas com valores $0 \leq n \leq 100$.

A compressão horizontal, por sua vez, pode, por exemplo, aglutinar 200 pontos para a representação discreta de uma dinâmica demográfica de 100 anos com censos semestrais. A dinâmica populacional de um formigueiro, por outro lado, se analisada em um período de 5 anos (Gordon[1999]) com dados semanais apresenta um total da ordem de 250 pontos. A dinâmica imunológica é mais rápida e um período de 1 mês, pode ser registrada discretamente em intervalos de tres horas o que também exige uma ordem de 250 pontos.(Perelson).

A modificação de escalas, ou de unidades, funciona como uma lente regulável que pode, por um lado, focalizar pequenos detalhes locais, tal como faz um microscópio,(reduzindo o campo de observação), ou, por outro, possibilitar a percepção da estrutura geométrico-topológica do "todo" global com o afastamento do ponto de vista do observador, que aglutina pequenas variações ("borragem") ,reduzindo, neste processo, a quantidade de informação.

A construção de imagens contínuas pela iluminação de (invisíveis) pixels e a superposição rápida de imagens em um filme cinematográfico são exemplos comuns e práticos desta técnica de apresentar (ilusoriamente) como um contínuo aquilo que é fundamentalmente discreto.

O problema de redução de informações, todavia, não é apenas uma estrategia psicológica humana. Hoje em dia, qualquer área científica (Social ou da Natureza) é inundada por uma massa avassaladora de informações, de tal monta que se torna patentemente impossível enfrenta-la com os métodos computacionais ou analíticos tradicionais. Em vista disso, os chamados Métodos Matemáticos de Redução, que tem por finalidade exatamente reduzir e organizar apropriadamente enormes arquivos de informações, foram rapidamente desenvolvidos nas últimas décadas tornando-se uma classe especial de métodos da Matemática Aplicada Contemporânea. Um dos métodos mais efetivos e interessantes para este fim faz uso de um processo (artificial) de difusão (um operador de difusão) que de fato associa conjuntos discretos a figuras (gráficos) matematicamente suaves. Tal como a diversão de encontrar padrões de carneirinhos em formação de nuvens.(WCFerreira Jr.[2018b]).Estes Métodos serão tratados em capítulo a parte.(Kutz[2015],.....).

E, por fim, a substituição do discreto pelo contínuo e vice-versa não é uma atitude nova ou abstrusa, mas é exatamente o que se faz o tempo todo com a representação gráfica no papel de funções infinitamente diferenciáveis, como, por exemplo a função seno. (Afinal, como diz um surpreso personagem de uma peça teatral ao seu instrutor: "A prosa é isto? Então, eu estou a pratica-la durante toda a minha vida sem o saber!")

Resolvida a questão geral da plausibilidade da aplicação da Metodologia Newtoniana à Dinâmica de grandes Populações, o segundo passo consiste na caracterização funcional da função diferenciável $N(t)$ que descreve o estado da população em cada instante. Esta segunda etapa depende naturalmente de cada caso específico e das hipóteses biológicas particulares assumidas para esta população. Neste capitulo trataremos do problema proposto por Malthus que, apesar de (ou, por) considerar situações extremamente específicas, é fundamental para toda a Dinâmica Populacional em geral.

É interessante ressalvar que, embora o problema abordado na questão Malthusiana trate explicitamente de Grandes populações, os conceitos que serão desenvolvidos neste mister serão úteis para o tratamento de Pequenas populações , só que, neste caso, a função $N(t)$ será assumidamente discreta, mas com valores estocásticos.

xXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX