MODELOS MATEMÁTICOS:*Princípios, Métodos e Fins* -Ano da Peste 2020

Wilson Castro Ferreira Jr.- IMECC–UNICAMP- wilson@ime.unicamp.br

CAPITULO III -

HETEROGENEIDADE E O PRINCÍPIO DE CONSERVAÇÃO "*apud Eulero*"

.

.

I-INTRODUÇÃO HISTÓRICA: *O Modelo Discreto de Euler para Heterogeneidade Populacional(~1750)*

"Leiam Euler, ele é o mestre de todos nós" **-Pierre Simon de Laplace**

Leonhard Euler (⋆1707-Basileia-Suiça-†1783-S.Petersburgo-Russia), o mais prolífico e um dos mais criativos matemáticos em todas as épocas, conhecido por sua modéstia e lisura de caráter, tem o seu nome relacionado à concepção e ao desenvolvimento de importantes áreas da Matemática e de suas Aplicações.(E.Fellman, N.Bogolyubov). Particularmente notáveis são as suas ideias e técnicas que simultaneamente fundamentaram a descrição matemática da Dinâmica do Meio Contínuo e da Dinâmica de Grandes Populações em meados do século XVIII.

Ao longo dos últimos 250 anos os métodos e conceitos criados por Euler nesta empreitada foram amplamente generalizados e se tornaram ferramentas matemáticas fundamentais na formulação de Modelos destinados a descrever o inclusivo tema da *Dinâmica de "Grandes" Populações* que compreende uma vasta gama de aplicações específicas em Física, Química, Demografia e especialmente em Biologia de Populações.

O objetivo deste capítulo é apresentar os elementos básicos destas ideias em uma linguagem contemporânea tomando como um protótipo concreto delas o Modelo Matemático de demografia publicado por Euler em um artigo de 1748 e que também fez parte seus textos pedagógicos de Matemática como um exemplo de aplicação.

A definição de *População* segue o conceito matemático de conjunto, cujos elementos são indivíduos indistinguíveis entre si para os propósitos em questão e dotados de alguma caracteristica comum que define a sua pertinencia a ela. (Tal como ocorre no conceito matemático, o critério de pertinência de um individuo a uma população deve ser verificável, inequívoco e, de certa maneira, é a única característica que o distingue dos demais indivíduos do Universo. Modelos fuzzy, que não serão abordados aqui, substituem a condição categórica de pertinência por uma medida de "possibilidade").

> A informação fundamental que se deseja determinar sobre uma População é o seu tamanho, ou seja, a cardinalidade do conjunto de seus indivíduos.

Todavia, ao contrário do que ocorre com os conjuntos matemáticos, a mensuração do tamanho de "*Grandes*" Populações, como já foi observado no Capítulo I, não é necessariamente expressa pela cardinalidade simples do conjunto de seus indivíduos, (i.e., o "*número inteiro de cabeças*"), mas em termos de alguma unidade definida por um "grande lote" de indivíduos. Mesmo assim, em linguagem matemática corrente, nos referimos a esta medida como o "*número de indivíduos*" da População.

> Por exemplo, sob um ponto de vista de Modelos Matemáticos, registrar a população do Brasil como sendo constituída por 205.435.731 indivíduos às 10hs:55min37seg5fs em 16/04/2018 é completamente sem sentido, se é que há alguma utilidade nesta "precisão". Em geral, é mais do que suficiente e razoável descreve-la, por exemplo, com a expressão $20,435(\pm 10^{-3})P$ onde P é um "lote" de 10^7 indivíduos, que toma o lugar de uma unidade de população.

Isto significa, em particular, que o tamanho de uma população será, em geral, denotada por um número **real** N . (A escolha dos numeros reais e não dos numeros racionais para a medida do tamanho de grandes populações, com já foi comentado, decorre do efeito visual de Kanizsa).

A Dinâmica Populacional é uma área da Matemática Aplicada que consiste na descrição de seu tamanho ao longo de um intervalo determinado de tempo , $[0,T]$, na forma de uma **função** $n(t)$, segundo a Metodologia de Galileo.

Um Modelo de Dinâmica Populacional consiste em,

> *"Uma caracterização matemática da função* $n(t)$ que representa a *evolução temporal do tamanho da População, isto é, suia Dinâmica".*

Tratando-se de "Grandes Populações" e do estudo de uma Dinâmica que envolve variações relativamente "Pequenas" de seu tamanho na escala de tempo T de interesse, o "Efeito de Completamento Visual de Kanizsa" nos **sugere** que $n(t)$ seja representadas por uma função de variável contínua (real) diferenciável o que possibilita a sua caracterização matemática na forma de uma solução de uma Equação Diferencial segundo a Metodologia de Newton. O Modelo mais fundamental e simples (minimalista) de Dinâmica Populacional de Malthus-Euler com representação diferencial foi abordado no capítulo anterior e trata de uma população "*homogênea*" e "*não interativa*" na qual ocorrem unicamente processos vitais de reprodução e morte.

> Em termos mais especificos, uma população Malthusiana é aquela em que o tempo médio de espera para um individuo se reproduzir, ν^{-1} , e a sua expectativa média de sobrevivencia, μ^{-1} , são características biológicas únicas da população, o que automaticamente possibilita a sua descrição pelo fundamental Modelo matemático de Malthus-Euler: $\frac{1}{n}\frac{dn}{dt} = \nu - \mu$.

As Dinâmicas Populacionais para as quais o efeito Kanizsa não é assumido (por intenção ou imprecisão) são descritas por funções $n(k)$ de variável inteira $k \in \mathbb{N}$ e valores n reais, em que os respectivos Modelos Matemáticos são representados por Equações Recursivas que caracterizam Newtoniamente a função $n(k)$, como no caso de Fibonacci e Malthus-Euler.

(Dinâmicas de pequena populações também podem ser descritas probabilisticamente segundo o Princípio de Poisson-Kolmogorov por uma sequencia infinita de funções discretas, $P_n(t) = \{$*Probabilidade da População ter* n *indivíduos no instante* $t\}$. Neste caso, o Modelo Matemático é representado por um sistema também infinito de equações diferenciais ordinárias, tema a ser tratado especificamente no capítulo sobre

Princípios Probabilisticos)

A condição de homogeneidade para a população malthusiana é, obviamente, muito radical para que seja pressuposta na maioria dos fenômenos biológicos uma vez que as características vitais de mortalidade e natalidade são fortemente dependentes de vários fatores biológicos individuais, especialmente a idade, e, portanto, altamente variáveis para indivíduos de uma grande população humana.

A idéia fundamental utilizada por Euler para o tratamento da dinâmica de populações heterogêneas é muito bem exemplificada em seu modelo demográfico e consiste em simplesmente parcelar a população total em subpopulações de tal forma que para cada uma delas a hipótese de homogeneidade vital seja plausível e, assim, admita uma descrição segundo o Modelo Malthusiano.

> Enfim, a estratégia de Euler é representar a descrição de uma população heterogênea em termos de subpopulações que podem ser consideradas homogêneas segundo o Modelo Malthusiano.

Embora esta ideia seja simples, a sua formulação apropriada em linguagem matemática não é tarefa para amadores e sua realização constitui um dos Princípios básicos da Matemática Aplicada contemporânea. (Observe-se que, neste modelo,permanece a condição de não-interatividade entre os indivíduos exigida pelo Modelo minimalista Malthusiano; apenas a homogeneidade da população total será relaxada. A inclusão de interações será tema de um capítulo posterior).

Assim, por exemplo, o modelo demográfico de Euler para a população brasileira poderia considerar os seus 220 milhões de individuos em subpopulações referentes a faixas etárias (digamos, de 0 a 5 anos, de 5 a 10 anos e daí por diante), com tamanhos respectivos denotados por $n_i(t) = \{$*Individuos com idade na faixa* $[i, i+5)$ *no instante* $t]$, de tal forma que $n = \sum_{i=0}^{i=95} n_i$ (excetuando os centenários!). A descrição completa de uma população como união de uma quantidade finita de subpopulações *disjuntas* é denominada **Estruturação Discreta** e representada por uma matriz, no caso $(n_0, \ldots, n_k, \ldots n_{95})$, onde cada coordenada n_i se refere ao tamanho da respectiva sub-população.

Considerando assim, parcimoniosamente, apenas um aspecto da heterogeneidade humana, Euler estabeleceu que os parâmetros populacionais vitais de reprodução e mortalidade seriam completamente determinados e uniformes para cada subpopulação das estreitas faixas etárias, o que permite a aplicação do Modelo Minimalista malthusiano separadamente à cada uma delas. (Aliás, uma ideia cujo embrião já se encontra de forma quase explícita no problema de Fibonacci, 500 anos antes, quando ele separa uma população em duas subpopulações, de imaturos e reprodutores!).

> Uma vez inventada a ideia da Estruturação Etária, é quase imediata a tentação de estender a estratégia distributiva de Euler e estruturar uma população segundo outros critérios de maneira a aperfeiçoar a justificativa de homogeneidade Malthusiana para as subpopulações resultantes. Por exemplo, a população brasileira poderia ser estruturada não apenas segundo faixas etárias, mas também segundo a sua situação econômica estabelecendo-se faixas de poder aquisitivo, $[a, a+1)$, $0 \leq a < A$ (em unidade monetária apropriada) que fosse registrável para cada individuo. Com isto, a população

total seria estruturada segundo uma **matriz** M cujas entradas m_{ia} representariam a população com idade na faixa etária $[i, i+1)$ e poder aquisitivo $[a, a+1)$ e os respectivos parâmetros Malthusianos seriam representados na forma μ_{ia} e ν_{ia}.

Analogamente, a estruturação segundo a localização geográfica em um plano, é de grande interesse em muitas situações, mas exigiria a introdução de duas novas "dimensões" cada uma delas referente a uma das coordenadas. A estruturação de uma população segundo m critérios independentes exige, portanto, uma Tabela numérica $m-$dimensional para representá-la. Embora a estruturação múltipla seja indispensável em situações importantes, especialmente com respeito à localização espacial,(v. Capitulo sobre Principios de Discretização) torna-se claro que a tentação generalizadora é rapidamente refreada diante das óbvias complicações resultantes do aumento das coordenadas que, portanto, devem ser parcimoniosamente acrescentadas.

Desta forma, um modelo demográfico de Euler de 1748 estabelece de partida uma **Estruturação Discreta Etária** da população considerando um número finito $m+1$ de faixas etárias, *regularmente espaçadas* segundo uma unidade de tempo. Em linguagem matemática contemporânea, o **Estado** da população (isto é, a totalidade das informações disponíveis) neste modelo é descrito em qualquer instante por uma grande matriz **(vetor)** $N = (n_0, n_{1,} \ldots\ldots, n_m) \in R^{m+1}$, em que n_i representa o número de individuos da subpopulação encontrada na $i - ésima$ faixa etária, $0 \leq i \leq n$, em que o tamanho da população total é $n(t) = \sum_{i=0}^{i=n} n_i(t)$.

Ao contrario do modelo simples em que todas as informações sobre a população se resumiam a um único número, n, neste caso, dizemos que o "**Estado**" da população estruturada é representada por uma matriz coluna, $N \in \mathbb{R}^{n+1}$. (Embora os vetores representativos de uma população estruturada sempre tenham coordenadas com valores racionais positivos, a sua representação matemática em um espaço vetorial mais inclusivo ($\mathbb{C}^{m+1}$, por exemplo) permite a utilização da estrutura vetorial destes espaços e, portanto, uma maior liberdade operacional).

Naturalmente, as Dinâmicas destas $n+1$ subpopulações *não são desacopladas*, isto é, independentes, pois o envelhecimento contínuo "transporta" todos os individuos sobreviventes de uma faixa etária para a seguinte em cada unidade de tempo (por exemplo, no intervalo de cinco anos). Além disso, a primeira faixa etária N_0 (de indivíduos com idade entre 0 e 5 anos) tem um papel especial neste modelo uma vez que é a única faixa etária que recebe os indivíduos recém-nascidos.

Consideremos agora a unidade de tempo igual ao mesmo intervalo que define uma faixa etária, no caso,cinco anos. Portanto, a evolução temporal (história) desta população poderá ser visualizada como a trajetória de um ponto $N(t)$ no espaço $\mathbb{R}^{m+1}$, ou seja, uma função $N : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{n+1}$.

Construído o cenário matemático apropriado para descrever o fenômeno populacional, resta estabelecer o Modelo Matemático para a **Dinâmica** que deverá **gerar** a **evolução temporal** de $N(t)$ em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Assumindo, portanto, uma homogeneidade malthusiana para cada uma destas faixas etárias caracterizadas pelos parâmetros vitais ν_i, μ_i (na unidade de tempo já estabelecida) concluimos que entre os instantes t e $t+1$ os seus sobreviventes são em número de $(e^{-\mu_i})n_i(t)$ indivíduos que passarão a ser contabilizados na faixa etária seguinte, ou seja, $(i+1)-\acute{e}sima$ no momento $t+1$. Portanto, $n_{i+1}(t+1) = (e^{-\mu_i})n_i(t)$ para $i \geqq 0$.

Por outro lado, neste mesmo intervalo de tempo (entre t e $t+1$) nascem $\sum_{i=0}^{n} e^{\nu_i}n_i(t)$ indivíduos , que serão contabilizados na **primeira** faixa etária no instante $t+1$, ou seja, $n_0(t+1) = \sum_{k=0}^{n} e^{\nu_i}n_i(t)$. Como todos os *sobreviventes* de $n_0(t)$ foram transferidos após este intervalo de tempo para a segunda faixa etária no instante $t+1$, temos, $n_1(t+1) = (e^{-\mu_0})n_0(t)$.

Reunindo todas estas informações podemos escrever o Modelo de Euler-Malthus na seguinte formulação operacional:

$$N(t+1) = LN(t)$$

A evolução temporal desta população é, portanto, representada pela trajetória descrita por um ponto $N(t)$ em $\mathbb{R}^{m+1}$ **gerada** recursivamente a partir do seu Estado inicial $N(0)$ pela aplicação sucessiva do operador L. Este operador L é denominado **Gerador** da Dinâmica do sistema, e neste caso é representado por uma matriz quadrada positiva de ordem $m+1$, denominada Matriz de Leslie.(v. H.Caswell).

O operador L pode ser interpretado como o "*motor*" da dinâmica do modelo de Euler e a sua estrutura matemática reflete todas as caracteristicas biológicas vitais (mortalidade e fertilidade) da população estruturada em faixas etárias.

Esta é uma formulação do Modelo (discreto) de Euler em uma nomenclatura contemporânea.

> A escolha de uma estrutura discreta (i.e., aritmética) para a formulação de seu modelo demográfico original, provavelmente foi motivada por uma deferência especial de Euler ao fato de que poucos dominavam os métodos (e quase ninguem entendia a teoria) do Cálculo Diferencial àquela época, e os demógrafos, provavelmente, muito menos. A boa intenção de Euler, todavia, resultou-se desastrosa sob o ponto de vista da propaganda uma vez que, por motivos opostos, nem demógrafos nem matemáticos se interessariam pelo seu trabalho ao longo dos dois séculos seguintes!

É razoável supor que estreitando as faixas etárias (e aumentanto o seu número) a hipótese de homogeneidade vital se torne cada vez mais acurada já que os indivíduos de cada uma destas subpopulações exibirão uma menor variação de idades e uma menor heterogeneidade vital.

> Seguindo com este argumento, seria imaginar a formulação de um modelo demografico no limite em que "*subpopulações com homogeneidade vital perfeita*" seriam atingidas e, no qual, tanto as faixas etárias quanto o tempo tomariam um sentido de "*variação contínua*".

A interpretação do "valor limite" da função, todavia, traria dificuldades consideráveis pois,a rigor, cada ponto da reta real positiva (idade) representaria uma subpopulação etária (?) e a soma de todas elas careceria de sentido, pois teríamos uma quantidade não enumerável delas.

A solução de Euler para esta dificuldade conceitual foi desenvolver **de saída** um modelo demográfico contínuo utilizando para isso as mesmas ideias e técnicas empregadas por ele na formulação do seu Modelo para a Dinâmica de Fluidos. Apresentaremos abaixo o modelo demográfico contínuo como possivelmente Euler o teria feito caso se dirigisse a um público mais restrito e com maior habilidade Matemática.

O conceito de "*População Continuamente Distribuida*" (ou, "*Estruturada"*, segundo alguns autores contemporâneos) e com dependencia contínua com relação ao tempo introduzido por Euler mostrou-se um instrumento de grande versatilidade demonstrada pela sua posterior utilização na construção de Modelos matemáticos para a descrição de coleções de indivíduos das mais variadas naturezas, desde a escala molecular (reações químicas e fluidos) até à escala astronômica (galáxias), passando por partículas quase macroscópicas (poluição), células (neurobiologia, imunologia), organismos microscópicos (vírus, bactérias, fungos) e "macroscópicos" (ecologia, demografia). Esta enorme abrangência exemplifica a capacidade de síntese e de representação que esta classe de Modelos oferece, razão da sua centralidade na Matematica Aplicada moderna e, particularmente, na Biomatemática.(W.C.Ferreira Jr. – "*Dinâmica de Populações; De angströms a km, de íons a sapiens*" Revista Comciencia 10/02/2002 online: http://www.comciencia.br/comciencia/, Lin-Segel).

Além disso, segundo a Metodologia de Newton, que foi abraçada e desenvolvida com entusiasmo por Euler, um Modelo Matemático deve ser preferencialmente descrito por funções de variáveis contínuas (reais) e caracterizadas matematicamente como solução de uma equação diferencial, o que submete o problema à poderosa teoria do Cálculo com sua conhecida capacidade de produzir uma enorme biblioteca de funções.

Este é o tema da próxima seção.

II-Distribuição (*Estruturação*) Contínua de Populações Heterogêneas e a Função Densidade

Aumentando a quantidade de faixas etárias (e estreitando a amplitude delas) no modelo demográfico discreto, é altamente plausível que a hipótese de homogeneidade Malthusiana também se torne progressivamente mais adequada para cada faixa separadamente. Por outro lado, esta vantagem biológica é rapidamente descontada pela dificuldade matemática da análise e do cálculo algébrico-numérico com matrizes que a maior dimensão do Modelo acarreta. (Além disso, o conceito de "grande população" para estretias faixas etárias pode perder o significado).

A primeira opção para evitar esta dificulade seria considerar uma situação limite em que a população seria distribuída *continuamente* ao longo da idade e a representação de seu estado em cada momento realizada por uma função de variável real contínua. Embora este cenário limite fosse sugestivo, ele conduzia às dificuldades já mencionadas de interpretação.

A estratégia matemática de Euler para contornar estas questões foi direta e aborda *de saída* uma formulação contínua para o modelo populacional como, de resto, já havia sido feito por ele no seu modelo de Dinâmica de Fluidos.

De fato, um modelo discreto não apresenta, em princípio, nenhuma vantagem ou precedencia conceitual sobre um modelo contínuo que justifique a derivação de um a partir do outro. Na verdade, o enorme desenvolvimento e sucesso do Cálculo nas mãos de matemáticos habilidosos, como o próprio Euler, tornou vantajosa a representação de difíceis problemas discretos na forma de problemas diferenciáveis equivalentes.

Uma das principais estratégias comumente utilizada em Matemática Discreta para a representação de uma grande tabela (ou, sequencia) numérica por intermédio de uma **única** função **analítica** é denominada Método da Função Geradora que, à propósito, foi também amplamente utilizado, se não inventado, pelo mesmo Euler.[D.Knuth&al.-*Matematica Discreta*]. A representação da Função Fatorial-Gama de Euler na forma integral $\Gamma(n) = n! = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt$, é o exemplo típico e mais bem sucedido deste procedimento. Segundo George Polya "*A função geradora é uma maneira conveniente de transportar uma grande quantidade de objetos em uma única sacola*", o que, não somente tem vantagens mnemônicas, mas também operacionais. Entretanto, se por um lado, a representação de uma sequencia por uma Função Geradora pode ser conveniente sob o ponto de vista matemático, por outro, em geral, ela não representa conceitos biológicos de maneira natural o que dificulta a sua interpretação como um modelo populacional contínuo. A estrategia de Euler para a representação de uma grande população continuamente distribuida introduz um argumento revolucionário totalmente distinto do Método de Função Geradora que foi inventado *ab ovo* por ele especificamente para este fim.

Utilizando uma linguagem matemática contemporânea para as ideias de Euler, introduziremos inicialmente o conceito de **Espaço Etário** contínuo**, (**ou de *Estrutura Etária* contínua**)** $A = \{x \in R, x \geq 0\}$, onde cada indivíduo da população é *registrado/representado por* um ponto na posição respectiva de sua idade $x \geqq 0$. A população torna-se, portanto, "*virtualmente*" representada pelo conjunto de todos os pontos que registram as idades respectivas de seus indivíduos na semireta real positiva A que, desta forma, pode ser visualizada como uma "*nuvem*" contínua sobre a reta real. É exatamente esta representação mental induzida pelo Efeito de Completamento Visual (descrito com detalhes dois seculos depois de Euler pelo psicólogo Gaetano Kanizsa) que sugere fortemente a seguinte abordagem para a formulação de um Modelo Matemático contínuo para a Dinâmica Populacional.

Para representar matematicamente toda a informação sobre a população em estudo (isto é, o "**Estado**" da população), Euler, em um lance de característica genialidade, introduziu o conceito de “***Função Densidade***” (ou, F***unção de Distribuiçã***o) $\rho : A \to R^+$ cujo significado (como Modelo Matemático) é *definido* pela seguinte interpretação de suas ***integrais*** *:*

$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x)dx =$" *Quantidade de indivíduos da população cujas idades estão entre* x_1 *e* x_2 "

A população total, em particular, é dada pela integral em toda a semi-reta positiva:

$$N = \int_0^\infty \rho(x)dx.$$

Neste Modelo, o **Estado** de uma população heterogênea, isto é, o conjunto completo de informações que são necessárias e suficientes para descrever a sua Dinâmica, será representado por uma função de variável contínua, $\rho : A \to R^{+}, \rho(x)$ segundo a interpretação definida acima, e não mais por uma matriz de números.

> A grande síntese desta ideia consiste na representação do Estado de uma grande população heterogênea por um único objeto matemático, a função densidade $\rho(x)$, o que possibilitará sua caracterização por intermédio de uma equação diferencial, segundo o figurino da Metodologia de Galileo e Newton. A representação etária de uma grande população como um fluido contínuo (mais do que uma "nuvem" ligeiramente esparsa de pontos) é psicologicamente sugerida (ou mesmo *imposta*) pelo Efeito Kanizsa de completamento da imagem.

A função densidade $\rho(x)$ encapsula, portanto, não apenas a informação fundamental que *nos* ***interessa*** *conhecer* sobre a população (i.e., o número total de indivíduos), mas também as informações que são *n**ecessárias*** para que o argumento de Malthus possa ser aplicado com mais propriedade na formulação de um modelo matemático para a sua dinâmica.

> Esta situação é muito semelhante ao que ocorre na Mecânica Newtoniana, onde as posições de um sistema de particulas em cada instante é um "*Estado*" insuficiente para descrever a sua própria dinâmica. Para obter uma dinâmica **autônoma**, ou, Markoviana (isto é, cuja evolução de um *Estado* dependa apenas do *Estado* presente) Newton mostrou a necessidade de **acrescentar à posições das particulas** *também* as suas velocidades. A descoberta do *Estado suficiente* por Newton, denominado *Espaço de Configuração (que consta da posição e da velocidade)*, foi a ideia fundamental para a formulação de uma *recursão infinitesimal* autônoma na forma das "Leis diferenciais da Dinâmica"**.**

A evolução temporal (história) desta população será agora descrita matematicamente por uma função $\rho(x,t)$,que, para cada instante t , representa o **Estado** momentâneo da referida população, ou seja,

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)dx = \text{" Número de indivíduos da população que tem suas idades entre } x_1 \text{ e } x_2 \textbf{ no instante } t\text{"}$$

Utilizando uma nomenclatura matemática análoga ao modelo discreto, diz-se que a evolução temporal de uma população continuamente distribuida é descrita por uma *trajetória* no espaço de funções densidade representada por uma função $\rho(x,t)$ de tal forma que, a cada instante t está definida uma função "da variável x" $\rho_t(x) = \rho(x,t)$. Para definir matematicamente esta função $\rho(x,t)$ segundo a Metodologia Newtoniana será necessário caracterizá-la como solução de uma equação diferencial. Portanto, ao contrário do modelo discreto de Euler, em que o Estado da População era representado por um ponto $N \in \mathbb{R}^{n+1}$, e a sua Dinâmica descrita por uma trajetória neste mesmo espaço gerada recursivamente na forma do algorítmo $N(t+1) = L\,N(t)$, no caso contínuo, o Estado da População é representada por uma função densidade "da variável x" , e a trajetória se dará em um Espaço Funcional de dimensão *infinita* $E = \{\sigma : A \to \mathbb{R})$, em termos de um *algoritmo* *infinitesimal* que gera esta trajetória, isto é, representada por uma equação diferencial da forma $\frac{\partial \rho}{\partial t} = L\rho$, em que o "Gerador" da dinâmica, L é agora uma operação funcional (diferencial e/ou integral) em E.

Este será o tema da próxima seção.

OBSERVAÇÕES:

1-**A recorrência histórica cíclica do Modelo de Eule**r

O modelo de dinâmica populacional de Euler (1760) é uma lição de Matemática Aplicada em seu melhor estilo e um dos primeiros trabalhos de "Biomatemática" quando este termo ainda teria que esperar por mais de dois séculos para ser definido. Embora o artigo original de Euler tenha sido citado por ninguém menos do que Charles Darwin em um dos mais famosos textos da Ciência, "*The Origin of Species*" , mesmo assim, a sua importância, ou, sua mera existencia, foi misteriosamente ignorada em todos os níveis e áreas da Biologia durante os dois séculos seguintes à sua publicação. Basta mencionar que a mesma equação tem sido "redescoberta" , *sem referencias* ao trabalho de Euler, inúmeras vezes por eruditos personagens como, por exemplo, os importantes (proto)biomatemáticos A.Lotka(~1907), W.Kermack&A.McKendrick(~1920), H.vonFoerster(~1958) e, certamente, por muitos outros. O artigo original de Euler foi reproduzido no primeiro número da prestigiosa revista Theoretical Population Biology em 1970 durante a comemoração (atrasada) do bicentenario de sua publicação, talvez para faze-la, enfim, universalmente conhecida de uma vez por todas. Sob o ponto de vista matemático este interessante modelo também foi totalmente ignorado nos últimos 200 anos. Para verificar este fato basta constatar a sua inexistência na maioria dos textos matemáticos clássicos de Equações Diferenciais Parciais e de Física Matemática. (Riemann, Goursat, Smirnov ,Courant-Hilbert, Petrovskii, Garabedian, Evans, e etc.)

2-**A Generalização do Conceito de Funçã**o

Ao contrário da prescrição clássica (atribuida a P.L.Dirichlet, 1828) para a definição de uma função, em que ela é determinada pelo conjunto de todos os seus *valores pontuais*, na teoria de Euler, a caracterização de uma função densidade $\rho(x)$, **se dá** pelo conhecimento do valor de suas *integrais* em uma classe de "conjuntos testes" ou, sob um ponto de vista do modelo matemático, como depositária da informação sobre o "número de indivíduos" (subpopulação) de cada intervalo $[x_1, x_2] \subset R^+$**.**

O conceito de função densidade segundo Euler é um autêntico "ovo de Colombo", se lembrarmos que, desde a formulação da Mecânica de Partículas de Newton para a Mecânica de Fluidos passaram-se mais de meio século sem que os notáveis intelectos do período resolvessem a dificuldade de representar matematicamente a Dinâmica de uma grande quantidade de partículas, como, por exemplo, de um fluido! Apesar da clareza da ideia de Euler, muitos textos contemporaneos de Mecânica do Contínuo e Biomatemática ainda persistem definindo o significado da função densidade "pontualmente" com o enigmático "limite experimental": $\rho(x) = \lim_{x \in \Omega \ \& \ vol(\Omega) \to 0} \frac{N^o \ particulas \ em \ \Omega}{vol(\Omega)}$. Obviamente, este "limite experimental" não tem o sentido matemático do termo pois, caso contrário, para um volume extremamente pequeno (menor do que "o de um átomo de hidrogênio", por exemplo) esta fração não teria sentido algum. Mas, se este "limite" não for matemático, o que ele poderia ser então? O conforto da tradição de um lado e o "silêncio dos conformistas" do lado discente, ajudou a preservar esta incongruência por gerações. (WCFerreira Jr.-*O Silêncio dos Conformistas,* Conf. ERMAC-RS03 Dez. 2020- IEncontro de Biomat. IMECC-Unicamp, 2017). Uma das poucas discussões lúcidas a respeito desta enganosa "definição experimental", encontra-se em Lin-Segel 1974).

O conceito operacional de função introduzido por Euler, (isto é, em que uma função é definida matematicamente pelo valor de suas integrais) era tão revolucionário, que foram necessários aproximadamente 200 anos para a sua incorporação formal às estruturas da Matemática com os trabalhos de Laurent Schwartz (c.1950) precedido por Kurt–Otto Friedrichs, Sergei L.Sobolev e Israel M. Gelfand, (c.1930). O texto representativo da escola de Gelfand :"*Funções generalizadas*", 5 volumes, é uma notável expressão da Análise Matemática "sensata" do século XX,enquanto que o texto de Schwartz, "*Théorie des Distribuitions*", Hermann 1950, é uma abstração típica da escola francesa!

A generalização formal do conceito relacional clássico de função foi motivada pela bem sucedida utilização da famosa "*função de Dirac*" que se tornou o exemplo fundamental e protótipo de uma "função" sem qualquer representação clássica pontual. L.Schwartz muito apropriadamente designou suas funções de "distribuições", embora não tenha sequer mencionado Euler na atribuição de créditos, preferindo muito mais basear suas motivações nos trabalhos de Paul A.M. Dirac (~1920), aproveitando, obviamente, o *glamour* que a Física Quântica já desfrutava na época. A teoria de funções generalizadas e algumas de suas aplicações são encontradas nos clássicos de Gelfand&al., e nos textos pedagógicos de V.S.Vladimirov-"*Equations of Mathematical Physics*", MIR 1984, e "*Generalized Functions in Mathematical Physics*", MIR1979).

3-**O Conceito de Estado na Física Estatística**: James C. Maxwell e Josiah W.Gibbs

O desenvolvimento imediato das idéias de Euler para a representação matemática de populações se deu em grande parte ao seu interesse na Mecânica de Fluidos, que foi o objeto principal dos seus estudos. Posteriormente, durante a segunda metade do seculo XIX os métodos de Euler foram empregados na formulação da Mecânica Estatistica segundo James Clerk Maxwell, J. Willard Gibbs e Ludwig Boltzmann, dentre outros. O objetivo original da Mecânica Estatistica era explicar os fenômenos descritos pela Termodinâmica contínua e macroscópica como manifestações médias do movimento newtoniano de grandes populações ($\sim 10^{23} = Número\ de\ Avogadro$) de particulas microscópicas segundo uma hipotese atômica da matéria ainda pouco aceita àquela época. Para se ter uma ideia da ousadia destes personagens, é importante lembrar que até a primeira década do século XX a hipótese atômica da matéria (tão antiga quanto Democrito) ainda era considerada como, no máximo, um modelo matemático abstrato e, às vezes, conveniente, mas ideologicamente combatida com vigor por figuras proeminentes da Ciência. O trágico suicidio de Boltzmann em 1906, pouco antes da comprovação cabal da materialidade dos átomos por Jean Perrin, é atribuido, em parte, às contrariedades que esta disputa lhe impôs. (ref.C.Cercignani, E.Broda, S.Brush).

Dentre as várias e importantes contribuições teóricas de Maxwell, a introdução dos conceitos de *Espaço de Fase* e de *População Distribuida* no espaço de fase foi fundamental para o desenvolvimento da Mecânica Estatística. O principio básico da Mecânica Newtoniana estabelece que o estado mecânico completo de uma partícula pontual (isto é, o conjunto de informações necessárias para prever algoritmicamente a trajetória futura de seu próprio estado mecânico) é constituido por sua posição espacial e velocidade. Isto compreende seis medidas contínuas no espaço, representável, portanto, na forma $(x,v) \in R^6$, denominado Espaço de Fase por Maxwell. Assim, para descrever o Estado Mecânico completo de uma enorme "população" de N partículas microscópicas,(~$N = 10^{23}$ moleculas) pela teoria de Newton seria necessário um espaço de dimensão colossal $R^{3N} \times R^{3N} = R^{6N}$. Obviamente esta quantidade de informações seria flagrantemente tão impossivel de armazenar como inútil de se conhecer para o objetivo macroscópico em vista. (Observe-se, a propósito, que o problema gravitacional newtoniano somente é completamente solúvel por métodos elementares para o caso de **dois** (2×10^0) corpos/particulas, conhecido como problema de Kepler, enquanto que o problema de **três** (03) corpos, é insolúvel mesmo com respeito a questões mais simples e, em particular, não soluvel explicitamente com funções elementares. (Ref. Moser 1978, Diacu-Holmes 1997,Barrow-Green 1997).

A estratégia idealizada por Maxwell para descrever satisfatoriamente esta enorme quantidade de informações microscópicas foi reduzi-las drasticamente até o ponto que ainda restasse informação suficiente para seus propósitos macroscópicos. Este é um exemplo de uma importante estratégia de Matemática Aplicada denominada como Método de Redução que segue exatamente a sugestão "psicológica" do efeito de Kanizsa.

De qualquer forma, ambos adaptaram as já centenárias ideias introduzidas por Euler em sua Dinâmica de Fluidos, interpretando o estado mecânico de um gás formado por N ($\sim 10^{23}$) particulas como uma enorme *população contínua* de pontos $(x,v)_{1 \le k \le N}$ $\in R^3 \times R^3 = R^6$,cada um deles representando o estado mecânico de uma das N particulas. Em seguida, este conjunto de N informações vetoriais discretas é visualizado como uma "nuvem contínua" de pontos no Espaço de Fase R^6 e, com base em tal intepretação, "homogeneiza-se" esta massa gigantesca de informações discretas por intermedio de uma (única) função contínua de densidade,$\rho(x,v)$, cujo significado é definido pela descrição:

$\int_{\Omega}\int_{v_1} \rho(x,v)dxdv =$ " 'Quantidade' de particulas cujos estados mecânicos $(x,v) \in \Omega \times \Lambda$" . (O.Buhler,A.Chorin&O.Hald).

3-A ***Função Densidade*** como um ponto no espaço de funções

O modelo demográfico original de Euler descreve o Estado dinâmico de uma população por um vetor ,$N = (N_0, N_1, \ldots, N_i, \ldots N_n)$ cujas respectivas coordenadas são identificadas por um índice discreto, i. Assim, a evolução temporal de uma população deste modelo discreto é completamente representável pela trajetória (poligonal) de um ponto N no espaço de aspecto $E = R^{n+1}$, que pode ser descrita pela função $N : \mathbb{N} \to R^{n+1}$.

O modelo de tempo contínuo mantem a mesma interpretação do modelo original de Euler representando agora o seu Estado dinâmico por uma função densidade do espaço vetorial $\mathcal{F} = \{h : R^n \to R\}$ para cada momento t, por meio de uma função $\rho(x,t)$, em que para cada t, $\rho_t(x) \in \mathcal{F}$. O espaço vetorial funcional $\mathcal{F}$ em que estão as possiveis funções densidade é o espaço de Estado da dinâmica (uma função de um espaço vetorial funcional $\mathcal{F}$) o que aproveita tanto a estrutura matemática de seu "habitat" (uma estrutura vetorial) quanto a sua visualização geométrica na forma de um ponto em $\mathcal{F}$. Assim, para preservar a mesma interpretação geométrica e matemática do modelo discreto, a função densidade, $\rho(x)$, será também interpretada como um ***vetor*** cujas "*coordenadas*" são agora identificadas por um "*índice contínuo*", x, de tal forma que a cada x corresponde um valor ρ_x. Desta maneira a evolução temporal de uma população, $\rho(x,t)$ pode ser interpretada como uma curva contínua (e suave) em um espaço vetorial funcional $\mathcal{F}$ que a cada instante t determina um ponto $\rho(t) = \rho(x,t) \in \mathcal{F}$ (i.e., uma "função de x"). Esta generalização formal na interpretação do modelo matemático tem um significado de grande alcance que possibilitará sua abordagem matemática no contexto da Análise Funcional conveniente para o desenvolvimento de Métodos Operacionais.(Chorin&Hald).

II-ESPAÇO DE ASPECTO: *REPRESENTAÇÃO DE HETEROGENEIDADES MÚLTIPLAS E CONTÍNUAS*

A Física Estatistica estabelecida por Gibbs, Maxwell e Boltzmann, dentre outros, ainda no séciulo XIX foi certamente a mais vistosa descendente imediata das ideias introduzidas por Euler no século XVIIII e de tal forma que muitas vezes é citada como sendo a própria fonte delas. Entretanto, constitui uma grave injustiça histórica e um engano pedagógico não reconhecer que no longinquo ano de 1748, Euler utilizou explicitamente um conceito abstrato de estrutura etária que, sob certos aspectos, era mais ousado do que os trabalhos de Física desenvolvidos no século seguinte. A razão de fundo para tal equívoco histórico deve-se, em grande parte, à já citada obscuridade que envolveu o artigo de Euler causada, possivelmente, por uma infeliz confluência: os biólogos não lhe deram atenção por conta de sua linguagem matemática (apesar da boa intenção de Euler em torna-lo simples), enquanto que os matemáticos não se deixaram impressionar pela sua simplicidade matemática. De qualquer maneira, não parece ser uma simples coincidencia histórica e nem surpreendente que o fundador da Dinâmica do Meio Contínuo e da Dinâmica de Populações, tenha sido o mesmo personagem e que o modelo demografico(1748) tenha sido desenvolvido na mesma época que as famosas Equações de Euler para a Dinâmica dos Fluidos (1754). (Ref: E.Fellmann, N.Bogolyubov, N.Keyfitz).

Para apreciarmos a importancia e o alcance desta ideia, consideremos o problema de descrever uma grande população de indivíduos. À primeira vista, a ingenuidade nos leva a supor que, a rigor, seria indispensável nomear individuo a indivíduo e registrar todas as suas caracteristica individuais ao longo do tempo. Mas, obviamente, isto é tarefa para organismos de "Inteligencia" e controle politico-social e não para Modelos Matemáticos de grandes populações. A Stasi, por exemplo, o ‘eficientíssimo’ organismo de espionagem da antiga DDR-Alemanha Oriental- tinha uma pasta com informações incrivelmente detalhadas para cada um e de todos(!) os seus cidadãos. Este arquivo, que pode parecer a mais perfeita e completa informação sobre a população do país tornou-se, todavia, inútil pois, para examina-la adequadamente, esta agência necessitaria de um corpo de funcionários muito maior do que sua própria população, na época, de aproximadamente 10^6 indivíduos! De fato, ao final desta loucura espiatória, quase todo mundo espionava todo mundo dentro da DDR e não se pode espantar com o fato de que tanta "*eficiência*" tenha falhado na previsão do seu colapso político! [**ref. M.Wolf-The Man without a Face, e "*A Vida dos Outros*", um filme**]. Em termos, este contrasenso é semelhante ao do personagem Funes de José Luís Borges que tinha uma memória tão boa e detalhista que, para relatar um dia qualquer do seu passado, perdia um dia todo do presente! Enfim, um dos procedimentos mais fundamentais e indispensáveis na abordagem científica de qualquer fenômeno natural é discriminar *sensatament*e a quantidade e qualidade de informação arquivada o que consiste na difícil admnistração de duas condições conflitantes: reduzí-a radicalmente para se tornar *processável*, mas com critério, para que possa conter alguma *utilidade*. Este procedimento pode ser denominado "*Principio de Mark Kac*" segundo o autor da espirituosa frase: "*É preciso descartar muita informação, mas com o cuidado de não lançar fora o bebê junto com a água do banh*o".

O conceito de representação de uma população em um ***Espaço de Aspecto*** *contínuo* A, que generaliza biologicamente o conceito de Espaço Etário de Euler foi (re)introduzido na Biomatemática moderna somente na década de 1970, mais de duzentos anos depois do trabalho demográfico de Euler.(L.A.Segel in di Prima R.ed.1974).

Um Espaço de Aspecto é a estrutura matemática contínua $\mathbb{R}^n$ em que estão representados todos os individuos de uma população heterogênea segundo n aspectos biológicos individuais que os distinguem e que são continuamente mensuráveis de tal forma que cada individuo é registrado por um ponto $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ onde x_k é a medida correspondente ao $k - ésimo$ aspecto biológico sobre o mesmo.

O Modelo original de Euler registra uma única informação mensurável para cada indivíduo, a idade, obviamente representada em $\mathbb{R}$. (Ou, em $[0, L] \subset \mathbb{R}^+$, para uma idade limite L).

A escolha do elenco de informações (aspectos) cujas medidas individuais serão registradas é crucial para a definição do Modelo de Dinâmica Populacional e será discutido caso a caso.

Se, em outras circunstâncias for necessário que estes mesmos indivíduos sejam descritos também segundo suas localizações no plano, (digamos, com coordenadas cartesianas, x_1 e x_2) então o registro completo de cada indivíduo deverá consistir de três "*coordenadas*" (x_1, x_2, x_3) onde x_3 representará a idade. Outros aspectos mensuráveis como peso, carga viral e etc. , se necessário conhece-los, podem ser acrescentados à estrutura do modelo o que resultará, ao final, em n medidas individuais registradas como um conjunto ordenado representável na forma de um ponto $x = (x_1, \ldots, x_m)$ no Espaço $\mathbb{R}^m$.

Portanto, uma vez escolhidos os n aspectos numericamente mensuráveis que importam descrever sobre indivíduos de uma população, cada um destes passa a ser *representado, ou registrado*, por um ponto $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ no chamado ***Espaço de Aspecto*** $\mathbb{R}^n$, que é a estrutura matemática onde estão depositadas estas informações.

Esta representação obviamente não é necessariamente biunívoca e, com esta abstração, passamos a analisar os pontos do Espaço de Aspecto e não, especificamente, os indivíduos, uma vez que todas as informações desejadas e necessarias sobre a população estão registradas no conjunto de pontos deste Espaço. Entretanto, sob o ponto de vista intuitivo é *conveniente associar cada ponto a um único indivíduo "localizado" em seu respectivo registro o que não é de todo absurdo considerando que, se mensurados com precisão suficiente, não haveria possibilidade de ambiguidades. (*Por exemplo, considere o registro na reta real das idades "precisas até o mínimo segundo" dos indivíduos da população. Em $\mathbb{R}$ há pontos mais do que suficientes para registrar binunivocamente a idade de todos os individuos de qualquer população).

Naturalmente, para evitar um "Efeito Pandora" que pode resultar do entusiasmo com este procedimento, é necessário lembrar do Princípio de Parcimônia de Ockham que sugere a mais reduzida dimensão possivel para o Espaço de Aspecto de um Modelo Matemático.

O processo de escolha do Espaço de Aspecto na construção de um Modelo Matemático de Dinâmica Populacional apresenta sempre uma tensão entre o desejável (a ser conhecido) e o necessário (para definir a Dinâmica) que é exemplarmente ilustrado pelo modelo demográfico de Euler. Embora o objetivo primordial de Euler com este modelo fosse descrever apenas a evolução do número total de individuos da população humana, mesmo assim ele verificou que seria **necessário** que o **Estado** da População em cada instante também registrasse a sua distribuição etária para que o modelo malthusiano pudesse ser utilizado com plausibilidade.

O objetivo deste capítulo é apresentar Modelos Matemáticos de Populações continuamente distribuidas (ou, "estruturadas") em Espaços de Aspecto enquadrando os conceitos e argumentos clássicos de Euler na linguagem matemática contemporânea que permita o seu emprego e análise para uma ampla variedade de fenômenos populacionais das mais diversas origens.

Uma vez definida a maneira de descrever a Dinâmica Populacional segundo a Metodologia de Galileo (isto é, representando-a na forma funcional como densidades variáveis no Espaço de Aspecto, $\rho(x,t)$), o próximo passo consiste em expressar hipóteses biológicas na forma de *condições matemáticas* que resultem na *caracterização* destas funções como soluções de Equações Diferenciais e Integrais segundo a Metodologia Newtoniana.

Os ***Principios de Conservação*** introduzidos por Euler no século XVIII constituem a Metodologia mais empregada e eficiente para caracterizar matematicamente a evolução temporal das funções densidade $\rho(x,t)$.

Apêndice:Espaços de Aspecto

1-**Espaços de Aspecto Curvilíneos**:

O modelo de Espaço de Aspecto global pode, eventualmente, assumir uma estrutura matemática distinta do R^n, não pelo gosto da generalização, mas pela propria natureza do problema. Por exemplo, um processo dinâmico de cicatrização de tecidos planos(Murray[1989]), pode ser modelado com uma dinâmica de populações de células alongadas (chamadas fibroblastos que tem a tarefa de reconstruir rupturas de tecidos) sobre as quais é necessário descrever pelo menos duas caracteristicas :

a)A posição espacial de seu centro, digamos, $x \in R$ e,

b) A sua orientação definida por um ângulo $\theta \in S^1$.

Neste caso, o Espaço de Aspecto global para representar esta população é naturalmente a superfície de um cilindro, ainda que localmente seja um R^2.

2-**Espaços de Aspecto de Dimensão Infinita**:

Uma outra extraordinária mas, inevitável, generalização do conceito de Espaço de Aspecto foi introduzida por Alan Perelson e Lee Segel em 1989 na formulação de modelos matemáticos para o sistema imunológico cuja população é constituida de uma enorme quantidade e variedade de células. Neste caso, as células devem ser necessariamente caracterizadas pela forma exterior de seu sitio reativo que determina completamente o comportamento interativo dela no sistema. Assim, o aspecto que caracteriza o individuo tem, de alguma maneira, que representar a "forma" de seu sitio reativo o que, matematicamente, somente é possivel por intermedio de uma função e não um número. A rigor, portanto, o Espaço de Aspecto da população das células do modelo matematico do sistema imune deveria ser um Espaço Funcional de dimensão infinita ("*Shape Space*"). Recentemente, esta estrategia também foi utilizada na construção de um modelo para o fenômeno de mimetismo em que o comportamento do predador(pássaro) depende de maneira crucial do reconhecimento dos padrões de asas de suas presas (borboletas).[Ferreira-Marcon 2014]. Embora este conceito generalizado seja importante para analisar o modelo, ele apresenta dificuldades analiticas insuperaveis. Com o objetivo de torna-lo matematicamente tratável, alguns recursos matemáticos derivados de sua interpretação podem ser utilizados para simplifica-lo consideravelmente sem que se diminua a sua relevancia. Por exemplo, o reconhecimento de Padrões geometricos das asas de borboletas tóxicas por seus predadores, pode ser aproximadamente realizado de maneira efetiva em um subespaço de dimensão finita (e razoavelmente pequena) constituido da percepção aguda de caracteres desenvolvidos evolutivamente pelo seu sistema cognitivo visual. Matematicamente isto significa projetar o Espaço de Aspecto em um sub-espaço de pequena dimensão que concentra uma grande quantidade de informação sobre o padrão geométrico, que é suficiente para discrimina-lo com a acuracidade que o fenômeno exige. Esta estrategia é exatamente aquela utilizada na reconstituição policial do *retrato falado* de um criminoso por testemunhas ou, na elaboração de caricaturas excepcionalmente minimalistas e explica a extraordinária capacidade para a avaliação da intenção alheia desenvolvida pelo sistema cognitivo humano e de alguns animais com uma "leitura facial".(L.Sirovich-Eigenfaces, M.Kac-*Can you hear the shape of a drum*? AMM1967, Widiger2017, George Miller (7 ± 2), 1956, Ch.Darwin-Observation about the expression of emotions by animals)..

III-O PRINCÍPIO DE CONSERVAÇÃO *apud EULER*:

Ingredientes fundamentais de um Modelo Populacional: *Espaço de Aspecto e Densidade, Fluxo, e Fonte*

> "S*ábios são aqueles que desvendam a complexidade do mundo por intermédio de coisas simples, ao contrário dos estultos que teimam em obscurecer as coisas mais simple*s". ~Confucio

O Modelo Populacional de Euler em sua versão diferencial, apesar de suas peculiaridades simplificadoras (como um Espaço de Aspecto unidimensional), pode ser considerado como o protótipo de uma abrangente teoria, uma vez que já apresenta em sua formulação o conceito de Espaço de Aspecto como um cenário de fundo apropriado onde são definidos os ingredientes fundamentais para o desenvolvimento do Principio geral de Conservação.

A origem do conceito do **Princípio de Conservação** é uma observação absolutamente óbvia que não deve surpreender ninguém, a menos que seja por sua simplicidade.

Este Princípio, a bem da verdade, trata de uma "*Contabilidade*" matemática instantânea dos indivíduos pertencentes a sub-populações definidas por regiões $\Omega \subset A$ delimitadas do Espaço de Aspecto A e não exatamente de uma "*Conservação*". O termo "conservação" se refere mais ao fato de que há um controle dos processos que regulam o ganho e perda de indivíduos destas subpopulações por intermédio de suas representações matemáticas e à sua aplicação especifica à Dinâmica de Fluidos no que se refere à massa material do meio.

A representação matemática adequada para estes processos foi o "Ovo de Colombo" da teoria de Euler, e a metodologia proveniente destas idéias constitui uma síntese de linguagem, conceitos e objetos matemáticos que possibilitam a descrição matemática de uma notável variedade de fenômenos naturais.

O Principio de Conservação, portanto, tem por objetivo estabelecer um Modelo Matemático para a Dinâmica de uma População Heterogênea segundo uma distribuição contínua (estruturação) em um Espaço de Aspecto $A \subset \mathbb{R}$ que, a cada instante t, é *completamente* descrita pela sua densidade $\rho_t(a) = \rho(a,t)$ como função de $a \in A$ segundo a interpretação:

$\int_\Omega \rho(a,t)da =$" *Quantidade de indivíduos registrados na região $\Omega \subset A$ do Espaço de Aspecto no instante t*".

A definição de um Espaço de Aspecto e, consequentemente, de sua função densidade estabelece assim o primeiro e mais fundamental ingrediente do Modelo geral de Euler.

Para estabelecer a contabilidade da sub-população definida por Ω analisaremos a expressão

$\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \rho(a,t)dadt =$" *Variação do tamanho da subpopulação definida por Ω no intervalo de tempo entre t_1 e t_2*

ou em sua versão instantânea:

$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho(a,t)da = \int_\Omega \frac{\partial\rho}{\partial t}(a,t)da =$ "*Taxa de variação do conteúdo populacional definido pela região Ω no*

Naturalmente, uma derivada positiva indica uma taxa de crescimento instantâneo da subpopulação contida em Ω no instante *t* e uma derivada negativa significa uma taxa de decréscimo instantâneo da mesma subpopulação no instante *t*. A variação de população é resultado de uma contabilidade final entre ganhos e perdas de individuos *registrados* em Ω.

Portanto, termos positivos que contribuirem para definição da expressão $\int_\Omega \frac{\partial\rho}{\partial t}(a,t)da$

se referem a uma taxa "líquida" de **introdução** de indivíduos "*registrados*" na região fixa Ω do Espaço de Aspecto, enquanto que os termos negativos representam a taxa "líquida" de **retirada** de indivíduos "*registrados*" na mesma região.

O passo crucial na formulação do Princípio de Conservação consiste em representar matematicamente os fenômenos biológicos que poderiam causar a variação do tamanho da população contida (i.e., *registrada*) em uma região fixa (mas suficintemente genérica) Ω do Espaço de Aspecto. Estes fenômenos podem ser classificados de acordo com duas origens bem distintas e peculiares quanto à sua interpretação populacional, uma delas relativa à fronteira e a outra relativa a processos interiores da região:

1^0-"*Passagem"* de indivíduos *através da fronteira* $\partial\Omega$ denominada "*Fluxo*" (para dentro se positiva, e para fora se negativa) representada matematicamente por *integrais de superficie* que utilizam informações contidas apenas na fronteira da região estudada,

2^0-"*Nascimentos"* (se acréscimos) ou "*Mortes*" (se decréscimos) de indivíduos com respeito à região Ω representados matematicamente por *integrais de volume* de funções denominadas "*Densidade de Fontes*".

Observe-se que os termos "Passagem, Nascimento, Morte" estão ressaltados em itálico para enfatizar que se referem aos registros dos indivíduos no Espaço de Aspecto e não necessariamente a uma presença física deles, embora utilizemos uma linguagem sugestiva que se refere à posição em A como se fosse de fato uma localização geográfica, e se refere ao aparecimento como se fosse nascimento e ao desaparecimento como se fosse a própria morte do indivíduo correspondente.

Por exemplo, tratando-se de uma reação química (digamos, a combustão de hidrogenio em reação com o oxigenio cujo resultado é a água) a densidade $\rho(o,t)$ do oxigenio livre varia durante o processo de combustão, mas não por desaparecimento físico dos átomos de oxigenio e sim pela sua condição química de estar "livre" e que determina a sua pertinência à respectiva subpopulação.

Em uma primeira abordagem pedagógica utilizaremos o Modelo original de Euler como protótipo para exemplificar o Princípio de Conservação devido à conveniente vantagem de se tratar, neste caso, de um Espaço de Aspecto *unidimensional*, $A = \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, o que simplifica consideravelmente a geometria do problema.

Em uma seção posterior apresentaremos estes mesmos conceitos em Espaços de Aspecto $A \subset \mathbb{R}^n$ multidimensionais que exigem construções geométricas mais sutis para representar conceitos análogos.

Portanto, no que se segue imediatamente, os conjuntos $\Omega \subset A \subset \mathbb{R}$ para "testes" de variação de conteúdo populacional serão intervalos $\Omega = [x_1, x_2]$, cujas fronteiras são constituídas pelos pontos extremos x_1 e x_2 e que no modelo demografico continuo de Euler representarão faixas etárias.

1-O CONCEITO DE FLUXO J no Modelo *unidimensional* de Euler

Obviamente, a *passagem* de indivíduos através de uma fronteira é resultado de sua movimentação no Espaço de Aspecto, ou seja, da variação das medidas de seus registros.

Para melhor entender a representação matemática desta ideia, imaginemos que a "movimentação dos indivíduos" no Espaço de Aspecto unidimensional analisando a sua passagem nos dois sentidos através de um ponto x fixo, tanto para à direita (direção positiva) como para à esquerda dele. Denotando $J^{+}(x)$ a ***taxa*** *de passagem na direção positiva* e $J^{-}(x)$ a *taxa de passagem na direção negativa*, então $J(x) = J^{+}(x) - J^{-}(x)$ é o "***saldo líquido***" deste processo em que o sinal tem significado de orientação. Assim, se $J(x) > 0$, haverá um "*saldo líquido*" de taxa de passagem através de x no sentido positivo (*muito embora alguns individuos possam eventualmente ter passado na direção negativa*). Se, em outro caso, $J(x) < 0$, o "*saldo líquido*" da taxa de passagem através de x será no sentido negativo. Para a formulação do Princípio de Conservação (contabilidade) a introdução de J^{+} e J^{-} é meramente pedagógica, pois nos interessará apenas o "*saldo líquido*" de passagem J e não a "fulanização" deste tráfego.

Definiremos então o conceito de **Fluxo** através de um ponto x no Espaço de Aspecto **unidimensional** $A \subset R$ como sendo o "*saldo líquido da taxa de passagem*" de indivíduos através de x no instante t que será, denotado por $J(x,t)$ e entendido pelo argumento acima como sendo $J(x) = J^{+}(x) - J^{-}(x)$.

Portanto, se na fronteira *à esquerda* do conjunto $\Omega = [x_1,x_2]$, isto é,no ponto x_1, o Fluxo for positivo, $J(x_1,t) > 0$, isto significa que há uma contribuição instantânea para a taxa de aumento da subpopulação de Ω, enquanto que se for negativo, , $J(x_1,t) < 0$, então há uma taxa de retirada de indivíduos da subpopulação de Ω. Por outro lado, se na fronteira à direita $x_2$do conjunto $\Omega = [x_1,x_2]$ o Fluxo for positivo, $J(x_2,t) > 0$, isto significa que há uma retirada instantânea de indivíduos da subpopulação de Ω, enquanto que se for negativo, $J(x_1,t) < 0$, então há uma taxa de *acréscimo* de indivíduos da subpopulação de Ω.

Assumindo a definição acima e a sua interpretação decorrente, se a variação da população contida em Ω for unicamente causada pelo trânsito (intercâmbio) de indivíduos através de sua fronteira $\partial\Omega = \{x_1,x_2\}$, (sem a ocorrencia de "morte" ou "reprodução" interna de indivíduos), podemos representar matematicamente este fato com a igualdade:

EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONSERVAÇÃO (*Unidimensional*):

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\rho(x,t)dx = \int_{\Omega}\frac{\partial\rho}{\partial t}(x,t)dx = -J(x_2,t) + J(x_1,t) = \int_{x_1}^{x_2} -\frac{\partial J}{\partial x}dx$$

ou,

$$\int_{\Omega}\left\{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x}\right\}dx = 0, \forall\{0 < x_1 < x_2\}, t > 0$$

Assumindo agora a **continuidade** da expressão $\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x}\right)$, é possível concluir (via *Argumento de Localização de Eule*r-v. Apêndice) que esta função é identicamente nula para $x > 0, t > 0$, ou seja, a função densidade pode ser caracterizada matematicamente pela seguinte Equação Diferencial, denominada

"EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE CONSERVAÇÃO (*Unidimensional*) ":

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0, \forall\{x > 0, t > 0\}$$

É importante ressaltar que a continuidade da expressão $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x}$ em todo o Espaço de Aspecto e para todo o instante $t > 0$, é condição essencial para a obtenção do Princípio de Conservação na forma de uma *Equação Diferencial*.

Observações:

1-Atente para os sinais dos Fluxos em cada extremidade do intervalo e suas interpretações.

2-O termo "Conservação" neste caso se justifica porque associamos à não ocorrencia de "mortes" ou "nascimentos" como sendo a preservação, em algum "lugar" (ou forma), dos individuos representados na região Ω.

3-A Equação Integral de Conservação é mais geral do que a Equação Diferencial porque a precede na argumentação e a implicação entre as duas depende da continuidade do termo integrando da equação integral.

4-A Equação Integral de Conservação tem um carater *não local* e é definida para "todos os intervalos de tempo $[t_1, t_2]$ e todas as regiões $[x_1, x_2]$, enquanto que a Equação Diferencial é *local* sendo definida instantaneamente e pontualmente em (x, t).

5-Em alguns casos relevantes para a Matemática Aplicada,(especialmente em Dinâmica de Gases) a continuidade do integrando da Equação integral será explicitamente violada, devido a fenômenos dinâmicos intrínsecos (denominados "choques") que levam à formação de variações bruscas e com limite em tempo finito de descontinuidades de saltos da função de fluxo J . Nestes casos a equação integral permanece válida, mas a equação diferencial somente se aplica nas regiões exteriores ao "choque" , o que usualmente ocorre em pontos que se movimentam. Para uma análise elementar deste fenômeno consulte R.Bassanezi-W.C.Ferreira Jr ou G.Whitham. A preferencia pela Equação Diferencial se deve ao fato de que não é necessário especificar intervalos de tempo ou regiões do espaço de aspecto, mas apenas pontos.

APÊNDICES:

A-Argumento de Localização de Euler: (Quase óbvio, mas indispensável!)

Se uma função contínua $h : I = [A, B] \to R$ for tal que para todo sub-intervalo $[a, b] \subset [A, B]$ tenhamos $\int_a^b h(x)dx = 0$, então h é identicamente nula em I.

Dem: Basta supor o contrário. Digamos que $m = h(x_0) > 0$ para algum $x_0 \in (A, B)$. Pela continuidade de h existe um subintervalo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset I$ em que $h(x) > \frac{1}{2}h(x_0)$ e, portanto, $\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h(x)dx \geqq 2\delta\frac{m}{2} = \delta m > 0$ é uma contradição. (Se $h(x_0) < 0$ considere $-h(x)$).

B-Exemplo: Fluxo do Modelo Demográfico de Euler

O modelo demográfico de Euler distribui a sua população em um Espaço de Aspecto etário $A = R^+$ e, portanto, todos os indivíduos (i.e., seus registros de idade) se movimentam para a direita (sentido positivo) sempre com velocidade unitária, isto é, envelhecem 1 dia por dia. Portanto, o fluxo através de cada ponto x será sempre no sentido positivo. O total dos indivíduos que passarão por uma idade fixa $x > 0$ no período de tempo $[t-\Delta, t]$ será dado por $\int_{x-\Delta t}^{x} \rho(s, t-\Delta t) ds$ (isto é, todos os indivíduos que se tornarão mais idosos do que a idade x , estão registrados na faixa etária $[t\ ,\ t+\Delta]$ no instante t. Portanto, a taxa de passagem de individuos através do ponto x (para a direita) por unidade de tempo, isto é, o Fluxo $J(x,t)$, pode ser obtido da seguinte forma:

$$J(x,t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{x-\Delta t}^{x} \rho(s, t-\Delta t) ds = \rho(x,t).$$

O Princípio de Conservação diferencial para o Modelo de distribuição etária de Euler considerando apenas envelhecimento, sem mortalidade ou reprodução, pode então ser representado pela equação diferencial parcial de 1^a ordem na forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \qquad \forall \{x > 0, t > 0\}$$

Observe-se que o ponto x , neste caso, é sempre maior do que zero. Em $x = 0$ o fluxo é singularmente distinto, uma vez que representará a taxa de nascimentos (que só ocorrem com esta idade!) e será tratado logo adiante.

C-Relação Constitutiva para o Fluxo

Ressalte–se que, em geral, o Fluxo J não é, necessariamente, uma função diretamente dependente de (x,t) mas sim, indiretamente, ou seja, ela pode ser obtida como resultado de uma operação funcional Φ aplicada a ρ na forma $J(x,t) = \Phi[\rho](x,t)$. Este funcional pode ser classificado em quatro tipos:

1)Pontual (quando $J(x,t)$ depende apenas do valor de $\rho(x,t)$),

2)"Infinitesimal" , ou, *Local e Instantâneo*, (quando $J(x,t)$ depende apenas do valor de $\rho(x,t)$ em alguma vizinhança de x e t, como no caso de derivadas, um exemplo particular sendo o importante fluxo de difusão definido como $J = -D\frac{\partial \rho}{\partial x}$ a ser tratado em proximos capitulos.),

3)"Não Local" (quando $J(x,t)$ depende de valores de $\rho(s,t)$ para s em um intervalo finito), e

4)"Não Instantâneo" *ou seja, com memória* (quando $J(x,t)$ depende de valores de $\rho(x,\tau)$ para $t-T \leq \tau \leq t,\ T > 0$). Exemplos de todos estes casos serão apresentados mais adiante.

D-Princípio de Leibniz : "*O Mundo Infinitesimal é plano e linear*"

Em textos de Matemática Aplicada, e principalmente de Física, é comum encontrar frases ligeiras como "...*Desprezando termos de segunda ordem*..." como justificativa na obtenção de algum resultado limite que envolve uma integral ou o cálculo de uma derivada. Em poucos, ou quase nenhum destes casos, apresenta-se alguma indicação matemática ou argumento de evidência que torne esta afirmativa mais plausível ou aceitável além da força de autoridade ("*Magister Dixit*") que não é desprezível, já que tem sua origem em ninguem menos do que G.Leibniz (sec.XVII) um dos fundadores do Cálculo! Apesar disso, e surpreendentemente, com menos frequência ainda se ouve alguma expressão de desconforto intelectual por parte de uma audiência conformista, e isto não se deve à trivialidade da questão e nem à sua total compreensão por todos/as. (A explicação para este fenômeno social pode estar na pegagogia pouco sutil instituida por d'Alembert que alegadamente repreendia seus pupilos mais inconformistas com a (para)frase: "*Cale a boca, continue calculando incessantemente e a fé um dia lhe chegará. Se ela não vier, desista da Matemática e vá procurar a sua vocação em outro lugar"*).

O mais notável é que uma argumentação razoávelmente simples e intuitiva a respeito pode ser apresentada na maioria dos casos.

Um exemplo importante por si mesmo e o protótipo destes argumentos é representado pela definição usual de comprimento de curvas e de área para superficies ditas suaves (isto é, que admitem tangencia de retas e respectivamente de planos em cada ponto). Observe-se que a definição de tangência segundo o conceito de Leibniz é analiticamente expressa como a existencia de uma aproximação linear local ótima. No caso de uma variável, isto pode ser descrito na forma: $f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + h\varepsilon(h)$ onde $\varepsilon(h) \to 0$ quando $h \to 0.$ O "erro" $h\varepsilon(h)$ é denotado pelo símbolo $o(h)$ que signifca um erro de ordem menor do que de $h.$ A aproximação linear Ah com esta "precisão" se existe é única e, claro, é a própria derivada da função, ou seja, $f'(x_0) = A)$.(Ref. W.C.Ferreira Jr.-As multiplas faces da derivada I, Ciencia e Natureza-UFSM 2014)

A **definição** do conceito geométrico de curvas retificáveis está associada ao conceito de mensuração de seu comprimento e deriva da *percepção geométrica* altamente intuitiva de que a razão entre o (pretendido) comprimento Δs de um pequeno arco em torno de um ponto e o comprimento (efetivamente mensurável) Δl do segmento obtido da sua projeção sobre a reta tangente neste ponto se aproxima de 1 ($\frac{\Delta s}{\Delta l} \to 1$, para $\Delta s \to 0$) o que é equivalente a dizer que $\Delta s = \Delta l + o(\Delta l)$. (Esta afirmação também pode ser entendida como uma aproximação em escala logaritmica ou seja, $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \{\log \Delta s - \log \Delta l\} = 0.$ Verifique). Esta **afirmação** (axiomática) se constitui na propria definição do conceito da *função* s=comprimento de uma curva.

Uma "medida" s que satisfizer esta condição "local" será determinada por um limite integral como soma Riemanniana de segmentos **lineares**, ou seja, reduz-se (no limite) à medida já definida de comprimento de segmentos lineares, que, em princípio, é a única geometricamente definivel.

Portanto, com base nesta "linearização local" e na sua interpretaçao geométrica, o comprimento de uma linha suave é definida da seguinte maneira:

$s = \lim \sum \widehat{(s_{k+1} - s_k)} = \lim \sum \left[\overline{(l_{k+1} - l_k)} + \varepsilon_k(\delta)\delta \right] = \lim \sum \left[\overline{(l_{k+1} - l_k)} \right]$, onde $\widehat{(s_{k+1} - s_k)}$ é o "comprimento do arco", $\left[\overline{(l_{k+1} - l_k)} \right]$ é o comprimento do segmento retilineo projetado sobre a tangente. A justificativa da igualdade no limite decorre do fato de que os erros de ordem $o(h) = \varepsilon_k(\delta)\delta$ se aproximam uniformemente de zero (quando no limite integral o segmento de máximo comprimento se aproxima de zero), de onde temos

$$\left| \sum [\varepsilon_k(\delta)]\delta \right| \leq \left(\max |\varepsilon_k(\delta)| \right) \sum \delta \to 0.$$

Observe-se que este argumento não é uma "demonstração matemática" porque, afinal, estamos tratando de um conceito exterior à Matemática (comprimento de curvas que, em princípio, ainda não foi definido); o objetivo é exatamente o de tornar plausivel esta definição!

Observe-se também que para a lisura do argumento acima, é necessário que o erro local seja considerado como de segunda ordem e uniforme com relação ao ponto central.

Sob um ponto de vista matemático a linearização de um argumento decorre da possibilidade de substituir o valor de uma função f (cujo gráfico é retificável, ou seja, diferenciável) nas imediações $x_0 + \delta = x$ de um ponto x_0 , por uma aproximação linear cujo erro é de "ordem infinitesimal superior" a δ o que, na verdade, é exatamente a definição de derivada segundo Leibniz: $f(x) = f(x_0 + \delta) = f(x_0) + A\delta + o(\delta)$ em que $o(\delta)$ é uma função avaliada na forma $|o(\delta)| \leq \delta\varepsilon(\delta)$ onde $\varepsilon(\delta) \to 0$ quando $\delta \to 0$ e, obviamente, $A = f^{/}(x_0)$.

Assim ,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max|\Delta_k|\to 0} \sum_{k=0}^{k=N} f(x_k)\Delta_k = \lim \sum_{k=0}^{k=N} f(\xi_k)\Delta_k = \lim \sum_{k=0}^{k=N} \Big\{ f(\xi_k) + f^{/}(\xi_k)(x_k - \xi_k) + o(x_k - \xi_k$$

se $|x_k - \xi_k| < \max|\Delta_k|$, pois supondo que a estimativa seja uniforme, podemos escrever $\left| \sum_{k=0}^{k=N} \Big\{ f^{/}(\xi_k)(x_k - \xi_k) + o(x_k - \xi_k) \Big\} \Delta_k \right| \leq C\max|\Delta_k|$ de onde vem o argumento.

Enfim, em linguagem mais coloquial, este resultado implica que é possível substituir a função integranda por uma outra em cada parcela da soma integral se o erro cometido for uniformemente de ordem menor do que $\max|\Delta_k|$ e isto significa substituir localmente Δ_k por sua aproximação linear.

O Cálculo de razões no limite (derivadas) também pode ser substituido por sua aproximação linear, ou seja, formalmente:

$$\lim \frac{\Delta f}{\Delta g} = \lim_{\delta\to 0} \frac{f(x_0+\delta) - f(x_0)}{g(x_0+\delta) - g(x_0)} = \lim_{\delta\to 0} \frac{f^{/}(x_0)\delta + o(\delta)}{g^{/}(x_0)\delta + o(\delta)} = \lim_{\delta\to 0} \frac{f^{/}(x_0)\delta}{g^{/}(x_0)\delta}.$$

Estes fatos genéricos são a explicação da afirmação também genérica comumente utilizada de que (graças à concepção Leibniziana do Cálculo) "*Localmente e Instantaneamente o Universo é linea*r", e felizmente!

Argumentos baseados em Análise Dimensional clássica (que está baseada na mudança de escalas uniformemente relacionadas) também é um procedimento de "linearização" que fornece uma primeira aproximação quantitativa do fenômeno. A substituição de escalas uniformes por escalas não uniformes é uma extensão não linear destes argumentos e será tratada nos Métodos Assintóticos.

-O FLUXO DE TRANSPORTE Unidimensional: *Movimento Induzido e Determinístico*

O Fluxo em um Espaço de Aspecto é resultado da variação temporal dos registros mensuráveis dos individuos, isto é, da movimentação dos pontos de um Espaço de Aspecto. Matematicamente, a representação deste processo pode ser convenientemente descrito por trajetórias geradas por campos vetoriais como um Sistema Dinâmico. Assim, em muitos casos, o conceito de Fluxo pode ser reduzido ao conceito de um campo vetorial, $v(x)$ e às soluções de seus respectivos Problemas de Valor Inicial (Cauchy), $\frac{dx}{dt} = v(x)$,

$x(0) = \alpha$ que denotaremos por $x = \varphi(t,\alpha)$.

(A função $\varphi(t,\alpha)$ é denominada *função de fluxo* na teoria de Sistemas Dinâmicos. O termo "Fluxo" é utilizado com precedência de muitos séculos na Dinâmica de Fluidos e este será o seu sentido intencionado durante o presente texto).

O Modelo demográfico continuo de Euler, por exemplo, tem o Fluxo gerado pelo campo vetorial $v(x) = 1$, cuja função de fluxo é representada pela expressão elementar $x = \varphi(t,\alpha) = \alpha + t$. (Verifique e interprete).

Assim, sob este ponto de vista, o ingrediente fundamental do Modelo Dinâmico passa a ser o "**Campo Vetorial**" e sua função de fluxo no Espaço de Aspecto que resultam na formulação do conceito de **Fluxo de Transporte** a ser derivado em seguida.

Antes, apresentaremos uma classificação de Campos Vetoriais que se reflete no tipo de Fluxo de Transporte que lhe é associado.

O exemplo mais comum destes consiste em Campos Vetoriais que podem ser interpretados como uma velocidade $\vec{v}(x)$ imprimida em qualquer indivíduo que esteja localizado no ponto x. Neste caso, o movimento é interpretado como *involuntário* e *deterministico* e resulta em um "arrasto" ao longo de uma "*corrente*" (função de fluxo) associada ao ponto x , *como se fosse um rio*.

O campo neste caso independe da variável t , e diz-se que é **intrínseco**, também denominado "**autônomo"**, ou seja, não apresenta influencia exterior regulada pela variável t como seria em geral se $\vec{v}(x,t)$. (Uma manipulação matemática pode reduzir um problema não autônomo a um problema autônomo considerando t como uma coordenada $x_{n+1} = t$ extra, mas não abordaremos este fato enquanto considerarmos modelos sem influencia exterior)

Neste caso, utilizando um argumento analogo àquele empregado na formulação do Modelo demografico de Euler, o **Fluxo de Transporte** $J(x,t)$ resultante de um campo de velocidades $v(x)$ no Espaço de Aspecto será definido (convincentemente)na forma

$$J(x,t) = \rho v$$

Exercício: Argumentos matemáticos que corroboram a boa definição interpretativa de Fluxo de Transporte: $J(x,t) = \rho v$.

-Considere um campo $v(x)$ e dois pontos $x_1 < x_2$ assim como a função de fluxo $\varphi(t,x)$. Como as trajetórias dos pontos $a = \varphi(t,x_1)$ e $b = \varphi(t,x_2)$ se movimentam com o campo, nenhum outro ponto cruza com eles.(Unicidade local de solução do Problema de Cauchy). Portanto, o tamanho da população no intervalo movel $[a,b]$ se mantem constante e igual a $\int_a^b \rho(x,t)dx$ e sua derivada deve ser nula. Calculando matematicamente a derivada desta integral, argumente que o Fluxo de Transporte deve ser representado segundo a expressão de Fluxo de Transporte: $J(x,t) = \rho v$.

Portanto, o Princípio de Conservação para a função densidade $\rho(x,t)$ que descreve uma população distribuída em um Espaço de Aspecto unidimensional A no qual age um **Campo de Velocidades** $v(x)$, é representado na forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0$$

em que $J = \rho v$ é o Fluxo denominado *Fluxo de Transporte* resultante do campo de velocidade v.

2-O CONCEITO DE FONTE: A *Representação Matemática de "Nascimento" e "Morte" no interior da região* $\Omega \subset A$.

A variação populacional em uma região Ω (medida como uma taxa instantânea) será interpretada como um processo de *Nascimento* (se positivo) e *Morte* (se negativo) quando for representada por uma *integral de volume* em Ω cuja função integranda será, portanto, interpretada como uma densidade de fonte. (Observe o contraste com a definição de Fluxo que faz uso apenas de informações na fronteira de Ω e, portanto, é associada à ideia de "Passagem" de individuos através da fronteira).

Assim como no caso do Fluxo, a abstração das causas microscópicas deste conceito permite que o utilizemos em uma ampla gama de situações específicas sem perda de sua interpretação intuitiva.

A este conceito dá-se o nome apropriado de ***"Densidade de Fonte"***, ou, simplesmente "***Fonte***", e é designado *genericamente* por uma função $f(x,t)$ que tem a seguinte interpretação como modelo matemático:

$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} f(x,t)dxdt = \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} f(x,t)dxdt =$"***Saldo líquido*** *da população que foi originada* ***do/no interior*** *do intervalo* $[x_1, x_2]$ **durante** *o intervalo de tempo* $[t_1, t_2]$"

O emprego do termo densidade (de fonte) é justificado pelo fato de que a expressão que define sua interpetação no modelo matemático é uma população e se refere a uma integral da expressão $\left(\int_{t_1}^{t_2} f(x,t)dt\right)$ ao longo da região $[x_1, x_2]$. Por outro lado, como esta integral se dá entre os limites t_1 e t_2 , o significado de $f(x,t)$ pode ser associado também a uma taxa instantânea.

A integral entre t_1 e t_2 de uma expressão ($\int_{x_1}^{x_2} f(x,t)dx$) implica que esta expressão tem um sentido de taxa populacional uma vez que a integral em um intervalo de tempo para esta expressão, $\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{x_1}^{x_2} f(x,t)dx\right)dt$ foi definida como sendo uma população.

Para melhor entender o conceito de "saldo líquido" da origem interior de indivíduos, utilizamos um artifício semelhante ao empregado para a análise correpondente do fluxo. Considerando $f^+ (\geq 0)$ a densidade de taxa de *introdução* de individuos, e $f^- (\geq 0)$ representando a densidade de taxa de *retirada* de indivíduos, escrevemos $f = f^+ - f^-$. Portanto, se $f(x,t) > 0$ em uma região Γ do espaço de aspecto, então $\int_\Gamma f(x,t)dx > 0$ e isto representa uma taxa instantânea de acréscimo da subpopulação de Γ no instante t. Se, por outro lado, $f(x,t) < 0$ em uma região Γ, então, $\int_\Gamma f(x,t)dx < 0$, e o número positivo $-\int_\Gamma f(x,t)dx < 0$ representa uma taxa instantânea de retirada da subpopulação de Γ no instante t.Naturalmente $f(x,t)$ pode, em geral, mudar de sinal no interior de uma região Ω em A e em cada uma das subregiões em que preserva o sinal pode ser interpretado adequadamente.

Ressalte–se mais uma vez que, genericamente, os processos de intercambio com o exterior (tanto na fronteira quanto ao longo de uma região) não se referem propriamente aos indivíduos físicos, mas sim ao registros pontuais de seus aspectos que se modificam com o tempo e, com isso, a sua representação no espaço de aspecto.

A definição representativa destes objetos como modelos matemáticos segue, mais uma vez, um argumento típico de Euler já utilizado para a definição do conceito de função densidade, ou seja, utilizando suas integrais, e não os seus valores pontuais para defini-las, já que tanto o fluxo quanto a fonte são também conceitos de densidade.

Analogamente ao campo de velocidades, no caso geral o ingrediente Fonte $f(x,t)$, não é, a rigor, uma função diretamente dependente de (x,t) mas sim resultante da aplicação de um funcional Ψ à função densidade ρ, ou seja, $\Psi[\rho](x,t) = f(x,t)$. Da mesma forma, este funcional pode ser de uma das classes funcionais mencionadas naquela situação.

Uma vez construído o cenário e os objetos matemáticos apropriados para representar a Biologia do fenômeno em vista, a afirmação

> *"A taxa de variação instantânea dos individuos contidos no conjunto $[x_1,x_2]$ no instante t é igual ao "saldo líquido" da taxa de individuos intercambiados com o exterior, (1) na fronteira deste conjunto* ***&*** *produzidos (ou retirados) do seu interior(2)",*

pode ser representada na forma matemática de um

PRINCÍPIO GERAL DE CONSERVAÇÃO INTEGRAL *Unidimensional*

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)dx\right) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t}dx = J(x_1,t) - J(x_2,t) - \int_{x_1}^{x_2} f(x,t)dx \quad \forall 0 < x_1 < x_2,\ t > 0$$

Observações:

1-Observe-se que a primeira igualdade é uma simples operação matemática, enquanto que a segunda é uma afirmação com base nas interpretações de Fonte e de Fluxo.

2-Para o exemplo demográfico de Euler, toma-se sempre $x_1 > 0$ evitando assim tratar dos nascimentos biológicos que não ocorrem no "interior" do espaço de aspecto, mas excepcionalmente como um fluxo positivo de entrada no ponto $x_1 = 0$.

Fazendo uso do Teorema Fundamental do Cálculo e assumindo a continuidade da derivada do Fluxo, $J(x,t)$, reescrevemos a equação acima na forma

$$\int_{x_1>0}^{x_2} \left\{ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} - f \right\} dx = 0 \quad \text{,para quaisquer } 0 < x_1 < x_2, et > 0$$

A**ssumindo a continuidade** da expressão $\left\{ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} - f \right\}$ em x para todo $t > 0$, concluimos (via argumento de localização de Euler) que ela é identicamente nula. Neste caso, a afirmação acima assume a forma equivalente de uma Equação Diferencial Parcial, denominada

PRINCÍPIO GERAL DE CONSERVAÇÃO DIFERENCIAL

Unidimensional:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = f \text{, para quaisquer } 0 < x, \text{ e } t > 0$$

O Modelo de Euler

Assumindo, segundo Euler, o Modelo Malthusiano de mortalidade, os indivíduos da (pequena) subpopulação registrada em $[x, x+\delta]$ (aproximadamente $\rho(x,t)\delta$ para δ positivo e bem pequeno) tem (aproximadamente) uma mesma taxa de mortalidade caracteristica da idade x, ou seja, $\mu(x)$. Portanto, de acordo com o modelo Malthusiano, a expressão $\int_{x_1}^{x_2} \mu(x)\rho(x,t)dx$, representa a taxa de mortalidade para a subpopulação contida no intervalo $[x_1, x_2]$ no instante t, e, assim, no modelo de Euler a Fonte é representada por $f(x,t) = -\mu(x)\rho(x,t)$, com o sinal negativo, pois "retira" indivíduos da faixa analisada (já que μ e ρ são não-negativos).

Substituindo os termos particulares do Modelo Demografico de Euler, obtemos a Equação Diferencial Parcial de Euler:

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial x} - \mu(x)\rho(x,t) \text{ , para } x > 0 \text{ e } t > 0$$

Para completar o Modelo Demográfico de Euler, é necessário incluir os nascimentos biológicos nesta população, ou seja, é necessário analisar o que ocorre no ponto peculiar $x = 0$ do espaço etário onde são introduzidos os (registros dos) recém-nascidos.

Lembrando-se do significado: $\rho(0,t) = J(0,t) =$" *Fluxo de passagem de indivíduos através do ponto* $x = 0$ " escrevemos, coerentemente, o termo que introduz os nascimentos segundo uma hipótese Malthusiana de natalidade:

$$\rho(0,t) = \int_0^{\infty} \nu(s)\rho(s,t)ds$$

Derivando a última expressão com relação a t e substituindo o termo integrando de acordo com a expressão anterior, a Dinâmica do "Estado da População", representada pela derivada temporal da função ("vetor") densidade $\rho_x(t)$, toma a forma do modelo populacional de Euler como a

Recursão Infinitesimal:

$$\frac{\partial\rho(x)}{\partial t} = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial x} - \mu(x)\rho(x,t), & \text{para } x > 0, \text{ e } t \geq 0 \\ \int\limits_0^\infty \left(-\nu(s)\left(\frac{\partial\rho(s,t)}{\partial x} + \mu(s)\rho(s,t)\right)\right)ds, & \text{para } x = 0,\ t \geq 0 \end{array} \right\}$$

em resumo: $\frac{\partial}{\partial t}\rho = £[\rho]$, para $x \geqslant 0$ e $t \geqslant 0$

Uma característica notável do Modelo de Euler é o fato de que o Gerador (infinitesimal) da dinâmica populacional, $£$, definido no quadro acima, atua no espaço de configuração $M = \{u : R^+ \to R\}$, $£ : M \to M$,e é um operador linear integro-diferencial, o que faz dele um operador **não local** pois, em particular, o valor de $(£\rho)(0,t)$ depende de $\rho(s,t)$ para todos os valores de s . Esta característica peculiar de £ torna o Modelo de Euler um exemplo à parte com relação às equações funcionais (diferenciais e integrais) clássicas da Física-Matemática Aplicada e talvez explique a sua ausência dos textos usuais de Métodos Matemáticos.

Exercícios:

1-Mostre que o operador de Euler $£$ é, de fato, Linear.

2-Se $\mu(x,t)$ e $\nu(x,t)$ são funções que dependem do instante t (o que significa a ação de uma influência externa sobre a dinâmica), obtenha o operador linear de Euler, $£(t)$ que agora também depende de t..

3-Se μ e ν são constantes, obtenha o Modelo Malthusiano para a população total.

4-Considere a "coorte" de indivíduos $m_{[x_1,x_2]}(t) = \int\limits_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho(x,t)dx$, onde $\frac{dx_1}{dt} = 1 = \frac{dx_2}{dt}$. Interprete esta expressão. Mostre que não há acrescimo ou decrescimo de individuos neste conjunto "em movimento". (As extremidades estão se movimentando com os indivíduos no Espaço de Aspecto etário). Derive a função $m_{[x_1,x_2]}(t)$ com relação a t e, com base nas interpretações adequadas, obtenha a equação de Euler para $\rho(x,t)$ em $x > 0, t > 0$ e, de sobra, a confirmação de que o fluxo é descrito pela relação constitutiva $J = \rho$.

O PRINCIPIO DE CONSERVAÇÃO EM ESPAÇOS DE ASPECTO DE DIMENSÃO SUPERIOR

"A *história das grandes ideias e descobertas usualmente apresentam três etapas. A primeira se carcateriza pela indiferença ou mesmo hostilidade de muitos à nova ideia que é reputada insensata, ou mesmo idiota. Caso esta ideia produza algum resultado interessante, ela passa a ser considerada simples e trivial. Em uma terceira etapa, se ela realmente se mostra brilhante, então muitos/as dirão que esta era uma ideia antiga já conhecida deles/as há muito tempo.*". Anônimo

A estrutura geométrica simples do Espaço unidimensional facilita enormemente a introdução dos conceitos que definem os ingredientes básicos de um Princípio de Conservação. Entretanto, a utilidade do conceito geral de Espaço de Aspecto impõe a necessidade de tratar as idéias de Euler em contextos geométricos mais includentes.

Neste capítulo abordaremos os Espaços de Aspecto representados em R^n que abrangem uma considerável variedade de aplicações, seguindo de perto a intuição associada ao plano bidimensional e ao espaço tridimensional. Neste caso o primeiro ingrediente matemático de um Principio de Conservação está automaticamente definido: o Espaço de Aspecto ($A \subset R^n$) e suas densidades, constituidas de funções $\rho(x)$ com valores reais não negativos e integráveis em subconjuntos "regulares" de $A \subset R^n$.

O segundo ingrediente do Principio de Conservação em dimensão superior, o Fluxo, exige um tratamento mais cuidadoso que será apresentado em seguida.

1-O MODELO MATEMÁTICO GERAL DE *DENSIDADE DE FLUXO*- (*CORRENTE*) J

O mais sutil dos três ingredientes que compõe um Principio de Conservação é certamente o conceito de **Fluxo** que tem por tarefa descrever o trânsito de individuos *através* das fronteiras $\partial\Omega = S$ de regiões Ω , e que será representado matematicamente por integrais restritas à esta superficie $\partial\Omega = S$.

Os argumentos a seguir se restringirão ao espaço tridimensional cuja familiaridade e intuição indicará claramente o caminho formal para a respectiva definição em espaços de dimensão superior.

Seguindo a estratégia "distributiva" de Euler, a função representativa do Fluxo será definida, não por valores pontuais, mas pelas suas integrais de *superfície* o que lhe confere uma interpetação como uma *densidade superficial*.

Para que as integrais de fronteira sejam definidas, os conjuntos testes Ω nos quais o Principio de Conservação será aplicado consistirão de regiões com fronteiras orientadas e suaves, ou seja, que admitem em cada ponto $s \in \partial\Omega$ um plano tangente que varia continuamente com o ponto $s \in S = \partial\Omega$ exceto em algumas poucas "*quinas*". (Textos usuais se restringem ao tratamento de regiões na forma de paralelepipedos, mas aqui aproveitaremos a oportunidade para introduzir conceitos geométricos em regiões mais gerais. V. Exercício abaixo).

O argumento que conduz ao Princípio de Conservação Diferencial é fundamentado no mesmo Lema de Localização de Euler para o qual basta considerar regiões regulares, o que, felizmente, nos exime de analisar integrais em fronteiras "rugosas" ou fractalizadas. Na verdade, basta a verificação de "contabilidade" em superfícies poliedrais formadas por faces planas já que uma integral de superficie é definida com o limite de integrais sobre reticulados poliedrais que a envolve progressivamente. Em vista disso, a interpretação do conceito de fluxo é completamente apreendida em uma análise do seu efeito para pequenas superficies planas.

> A respectiva generalização matemática deste conceito foi denominada por L.Schwartz de "*Courant*" (ou, "Corrente", em português), também caracterizado por suas integrais de superfície e não por seus valores pontuais.[Schwartz-*Théorie des Distributions*, 1950]. Em textos de Geometria Diferencial este e outros conceitos relacionados são representados pela estrutura de formas diferenciais.(M.Perdigão, B.Dubrovnin)
>
> O Conceito generalizado de Fluxo exige o tratamento de questões geométricas mais delicadas que envolve o conceito de tensores e nem sempre são necessárias no estudo de Dinâmica de Populações, a menos de questões especiais em Dinâmica do Meio Contínuo

e de Fisiologia.(Gurtin). Por este motivo, nos restringiremos ao estudo de Fluxos de transporte que constituem a maioria dos casos de interesse para a Dinâmica de Populações e admitem uma apresentação pedagógica mais intuitiva.

FLUXO DE TRANSPORTE:

Como o **Fluxo de Transporte** é resultado do movimento causado por um campo de velocidades $v(x,t)$ definido no Espaço de Aspecto o ingrediente fundamental deste objeto passa a ser o ***Campo de Velocidades*** e sua função de fluxo $x = \varphi(t,\alpha,t_0)$ que representada pela solução geral do Problema de Valor Inicial (Cauchy) $\frac{dx}{dt} = v(x,t), x(t_0) = \alpha$.

APÊNDICE: *Campos Funcionais e não autônomos*

1-Um campo de velocidades $v(x)$ que independe da variável t, é dito **autônomo** na terminologia de Sistemas Dinâmicos e pode ser interpretado como **intrinseco**, já que uma dependencia de t pode ser interpretado como resultado de uma influencia do exterior ao Espaço de Aspecto, onde o valor de t é determinado. Uma simples, mas artificial, manipulação matemática pode reduzir o tratamento dinâmico de um campo sempre ao caso autônomo introduzindo uma variável "espacial extra" $x_{n+1} = t$.

2-O campo de velocidades representado na forma $v(x,t)$ não é, em muitos casos,uma função **direta** da posição x do espaço de Aspecto e do instante t, isto é, não é diretamente calculável dado o ponto e o instante, mas pode depender da densidade local da população, ou seja, da função ρ. Neste caso, a função $v(x,t)$ é resultado de uma operação funcional aplicada sobre a função densidade ρ e, a rigor, deveria ser denotada por $v[\rho](x,t)$ e não $v(x,t)$.

Uma operação funcional Φ aplica-se a uma função φ e obtem-se como resultado,$\Phi[\varphi]$, um número ou uma outra função. Por exemplo, a derivada, $\Phi = \frac{d}{dt}$ é uma operação funcional que aplicada a uma função φ produz uma outra função enquanto que a integral definida, $\int_0^1 \varphi(s)ds$, é uma operação funcional que aplicada a uma função φ dá como resultado um número. Há três tipos de operações funcionais básicas:

1-**Pontual**: Em que os valores da função resultante $\Phi[\varphi](x)$ depende apenas dos respectivos valores pontuais de $\varphi(x)$.Por exemplo: $\Phi[\varphi] = 2\varphi^2$.

2-**Local**: Em que os valores da função resultante $\Phi[\varphi](x)$ depende apenas dos valores de φ em uma vizinhança "infinitesimal" do ponto x .Por exemplo: $\Phi[\varphi](x_0) = \frac{d\varphi}{dx}(x_0)$.(Impossivel calcular a derivada de uma função em um ponto conhecendo-se apenas o seu valor neste ponto!)

3-**Não Local**:Em que os valores da função resultante $\Phi[\varphi](x)$ depende dos valores de φ em um intervalo completo em torno do ponto x .Por exemplo: $\Phi[\varphi](x_0) = \frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h} \varphi(s)ds$ (Média local da Função).

A dependencia do Campo de Velocidades em relação ao instante t , $v(x,t)$, se refere, em última análise, a influencias externas ao Espaço de Aspecto, uma delas sendo a propria densidade.

Exercícios(*): Interprete as equações diferenciais para a função $\rho(x,t)$ abaixo como um Principio de Conservação identificando o Fluxo de Transporte.

1- $\frac{\partial \rho}{\partial t} + 2\frac{\partial}{\partial x}(\rho) = 0$, 2- $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\rho^2\right) = 0$ (Equação de Burgers) ,
3- $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(g(t)\rho) = 0$, 4- $\frac{\partial \log \rho}{\partial t} + \frac{\partial \log \rho}{\partial x} = 0$

Analisemos geometricamente no espaço tridimensional a expressão que será interpretada como um Fluxo de transporte.

A passagem de indivíduos através da fronteira $\partial\Omega = S$ de uma região regular Ω em R^3 será representada de forma global por uma integral de superficie genericamente descrita na forma de um limite integral de somas de Riemann $\int_S g dS = \lim_{\max\{d_k\}\to 0} \sum_{k=1}^{N} g(s_k)|\Delta\Sigma_k|$ em que s_k são pontos sobre a superficie e $|\Delta\Sigma_k|$ as áreas de pequenos polígonos $\Delta\Sigma_k$ sobre o plano tangente a S em s_k circundando o proprio ponto s_k, e $d_k = diâmetro\ de\ \Delta\Sigma_k.$ As somas são realizadas em um poliedro formado pelos fragmentos de planos $\Delta\Sigma_k$ que tangenciam, reticulam e envolvem completamente a fronteira. Este poliedro se aproxima da fronteira segundo o limite integral de Riemann, i.e., com o refinamento progressivo da reticulação da superficie, que é indicado pelo símbolo $\max\{d_k\} \to 0$.

A expressão integral faz uso apenas dos valores de uma função g nas imediações da fronteira e, como ao final esta integral representará um conceito de taxa de variação populacional, interpretaremos o seu efeito como um processo de "passagem" de individuos através da fronteira. Sendo a integral superficial, g será também encarada como uma densidade de superfície.

O objetivo agora é propor uma expressão para a função g que corrobore a interpretação reservada para ela (taxa de passagem de individuos) e para isto, substituiremos este conceito não linear pela sua aproximação linear tal como justificado no Apêndice sobre a linearização local de Modelos.

Para isto, consideremos os pequenos polígonos planos $\Delta\Sigma_k$ em torno de pontos $s_k \in S = \partial\Omega$, orientados por um respectivo vetor normal $\overrightarrow{N_k}$ à superficie neste ponto, determinando uma orientação da fronteira $\partial\Omega$ no sentido exterior à região Ω , e que denominaremos de positiva.

O Fluxo através deste pequeno fragmento plano $\Delta\Sigma_k$ será causado, naturalmente, pela passagem de indivíduos "arrastados" em trajetórias segundo o campo vetorial através dele. Para que um cenário seja visualizado consideremos que nesta pequena superfície o produto interno $v(s_k,t) \bullet N_k$ seja positivo, o que, será interpretado como a passagem de uma trajetória na direção positiva da superficie do polígono no sentido exterior à região.

(Observe que, de acordo com a Geometria Analitica elementar, $v(s_k,t) \bullet N_k$ é a componente da velocidade na direção da normal N_k e, para um campo fixo v, o produto escalar $v \bullet N$ atinge o seu máximo quando a normal N for colinear e de mesmo sentido do campo.)

Assim $v(s_k,t) \bullet N_k > 0$ pode ser interpretado como indicador da passagem instantânea de todas as trajetórias através do fragmento no sentido positivo, isto é, para fora da região Ω. Por continuidade, este sinal é preservado para instantes em um intervalo $(t-\delta,t)$.

Portanto, neste intervalo de tempo o volume formado pelas trajetórias que atravessam o polígono $\Delta\Sigma_k$ no sentido positivo é (linearmente em δ) aproximado por $\delta v(s_k,t) \cdot N_k|\Delta\Sigma_k| = \Delta V_k$, e o mesmo pode ser afirmado para a sub-população que a atravessa e que é também (linearmente em δ) aproximada por $\rho(s_k,t)\Delta V_k = \rho(s_k,t)\delta v(s_k,t) \cdot N_k|\Delta\Sigma_k|$. Assim, a taxa de passagem de individuos na direção positiva pelo fragmento plano $\Delta\Sigma_k$ será $\rho(s_k,t)v(s_k,t) \cdot N_k|\Delta\Sigma_k|$.

Argumento análogo ocorre quando $v(s_k,t) \cdot N_k < 0$, mas indicando, neste caso, a passagem de indivíduos no sentido oposto ao da Normal N_k, isto e´, para o interior da região Ω.

Os termos da soma para os quais $v(s_k,t) \cdot N_k = 0$, não contribuirão para a soma Riemanniana, e podem ser interpretados como movimentos tangenciais ao longo da fronteira que não contribuem (no limite) para a passagem de indivíduos *através* da fronteira, para dentro ou para fora.

Assim, a soma integral de Riemann pode ser interpretada como uma Taxa de passagem líquida de indivíduos pela fronteira do poliedro envolvente à região Ω e a mesma interpretação será atribuida ao seu limite integral.

A função de valores reais $j(x,t,\rho,N) = -\rho(x,t)v(x,t) \cdot N(x)$ definida sobre $S = \partial\Omega$ é, desta forma, interpretada como uma densidade superficial e sua integral de superficie representará uma taxa de passagem líquida pela superficie no sentido de sua orientação interior.

Observe-se que o **vetor Fluxo** definido como

$$\vec{J}(x,t,\rho) = -\rho(x,t)\vec{v}(x,t)$$

é linearmente dependente da densidade e do campo de velocidades.

Assim, a integral de superfície:

$$-\int_{\partial\Omega} \rho v \cdot d\vec{S} = \int_{\partial\Omega} J \cdot d\vec{S} = -\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \rho(s_k)(N_k \cdot v(s_k))\Delta\Sigma_k$$

será **definida** como a *taxa "líquida" de passagem de indivíduos através da fronteira no sentido interior à região* Ω se positivo e exterior se negativo.

Neste contexto, o "vetor" Fluxo de transporte $\vec{J} = -\rho\vec{v}$ é, a rigor, representante de um funcional linear ($J(\vec{N}) = -\rho\vec{v} \cdot \vec{N}$) e, portanto, deve ser encarado como um *tensor, ou,* como uma matriz linha *(isto é, um funcional linear)* e não exatamente como um "campo vetorial".

É importante frisar sob o ponto de vista metodológico que a argumentação apresentada acima não é de forma alguma uma demonstração matemática, pois trata-se de interpretações que utilizam elementos exteriores à Matemática. Esta argumentação é uma maneira de apresentar evidências de que a integral acima pode de fato representar de maneira plausível os conceitos geométricos/biológicos abordados. A expressão para o fluxo é, portanto, proposta, com (*fortes*) evidências corroborativas de interpetação, mas não matematicamente deduzida , o que seria impossível, já que faz uso de conceitos exteriores à Matemática.

2-O MODELO MATEMÁTICO DE FONTE

A formulação e definição do conceito de Densidade (volumetrica) de Fonte, que deverá representar a produção, ou desaparecimento, de indivíduos do *interior* de conjuntos, será necessariamente representada por uma *integral de volume*.

Este conceito, geometricamente mais simples do que o conceito de Fluxo tem a sua argumentação semelhante àquela apresentada no caso unidimensional.

A fonte será representada por funções de valores reais, $f(x,t)$, embora nem sempre diretamente dependente das variáveis (x,t).

A definição da função fonte como modelo matemático também segue os argumentos de Euler e é expressada por intermédio de integrais volumétricas, sobre todos conjuntos Ω (regulares) que nos interessam testar:

$\int_{\Omega} f(x,t)dx=$ "*Taxa de produção 'líquida' de indivíduos no interior de Ω no instante t .*"

Observações:

1–A explicação sobre o significado da expressão "*Taxa de produção líquida* " apresentada para a fonte no Modelo Unidimensional, pode ser repetida aqui.

2-Se $f(x)$ for de fato uma função direta de x , ela é intrínseca. A dependência com relação à variável t, significa que $f(x,t)$ sofre uma influência externa ao Espaço de Aspecto.

3-A fonte pode ser definida por uma "**Relação constitutiva**", isto é, como resultado da aplicação de um funcional em ρ, de tal forma que $f(x,t) = \Psi[\rho](x,t)$.

4-Se o valor de $f(x,t)$depende apenas do valor $\rho(x,t)$, então o funcional é pontual, isto é, da forma: $f(x,t) = \varphi(\rho(x,t))$. Este caso é exemplificado pela mortalidade no modelo demográfico de Euler, onde $f(x,t) = -\mu(x,t)\rho(x,t), f = -\mu\rho$.

5-Em algumas situações de interesse o valor de $f(x,t)$ depende de uma gama de valores $\rho(y,t)$, para y distantes de x. Neste caso, a relação constitutiva pode tomar uma forma "não-local" comumente representada por expressões integrais do tipo, $f(x,t) = \int_{\Omega} K(x,y,t)\rho(y,t)dy$, onde $K(x,y,t)$ é interpretada como uma "*medida de influência*" de indivíduos da posição y sobre a fonte (produção/retirada de indivíduos) na posição x. Fontes não locais ocorrem naturalmente em espaços de aspecto não geográficos quando indivíduos "*distantes*" podem estar,na verdade, fisicamente próximos.(Por exemplo em um Modelo de canibalismo com a população distribuida em espaço de "tamanho". G.Odell&Wm.Fagan 1994). Todavia, estes modelos também ocorrem em espaços de aspecto geográficos, quando, por exemplo, os indivíduos têm capacidade de se movimentar por grandes distâncias em uma escala de tempo muito menor do que da própria da dinâmica populacional e, portanto, pode-se supor que a influência seja instantânea. Um exemplo típico deste fato é um modelo para a dinâmica florestal, que evolui na escala de meses, ou anos, enquanto uma semente pode ser transportada a quilômetros em poucos minutos, por vento, animais, veículos e etc. e são depositadas diretamente no interior da região.(M. Kot, R.Nathan, D.Mistro).

3-O PRINCÍPIO DE CONSERVAÇÃO GERAL

Uma vez determinados os seus três ingredientes básicos , $((A, \rho), J, f)$ um Princípio de Conservação de Euler é auto-explicativo segundo as interpretações apresentadas e pode ser imediatamente formulado da seguinte na sua forma **integral**:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \rho(x,t)dx = \int_{\partial\Omega} -J \bullet \overrightarrow{dS} + \int_{\Omega} f dx, \forall\Omega\forall t$$

Passando-se a primeira derivada para o interior da integral e transformando (via Teorema de Gauss) a integral de fluxo de fronteira para uma integral de volume, podemos escrever o *Princípio de Conservação geral na forma Integro-diferencial*:

$$\int_{\Omega}\left\{\frac{\partial\rho}{\partial t}(x,t) + div\{J\} - f\right\}dx = 0, \forall\Omega\forall t$$

onde Ω são conjuntos regulares.

Esta formulação do Princípio de Conservação geral não parece "prática", uma vez que envolve a verificação da integral de uma expressão em todas as regiões fechadas contidas no espaço de aspecto, e para todos os instantes! Entretanto, a sua generalidade é importante sob o ponto de vista conceitual e teórico e, mesmo útil em muitas situações práticas, por exemplo na concepção de alguns métodos numéricos. (v. R. LeVeque).

Se o integrando do Principio de Conservação Integral for contínuo, podemos estabelecer

O Princípio de Conservação Diferencial:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -divJ + f$$

A condição de continuidade desta expressão pode parecer uma daquelas inoportunas filigranas matemáticas mas, como já observamos anteriormente, há casos especiais e, importantes, da Matemática Aplicada, em que a formulação integral faz sentido enquanto que a correspondente equação diferencial parcial deixa de ser uma descrição razoável por razões muito "práticas". O protótipo de todos estes casos é o fenômeno de ondas de choque em dinâmica de gases, que foi primeiramente estudado com as equações de Euler por ninguém menos que Riemann.(G.F.B.Riemann-(H.Weber)-Die Partielle DifferentialGleichungen der Mathematischen Physik", 1876 - R.Courant-K.-O. Friedrichs-Supersonic Flow and Shock Waves, J.Wiley 1948, Ya.B.Zeldovich-Yu.P.Rizer-Elements of Gasdynamics and the Classical Theory of Shock Waves, Acad.Press 1968, A.J.Chorin-J.E. Marsden-A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics , 3rd ed. Springer 2000. Veja também R.Bassanezi-WCFerreira Jr, EDO1988).I

Em muitos casos importantes, especialmente na Dinâmica de Fluidos e na Física o princípio de conservação diferencial é válido em toda a região a menos de delgadíssimas interfaces de separação dentro das quais se desenvolve algum fenômeno extraordinariamente complexo comparado ao modelo inicial. Por exemplo, em dinâmica de gases, no interior de um "choque" desenvolvem-se processos térmicos violentos, inclusive de ionização, onde, obviamente, não são razoáveis as considerações que nos convencem do modelo de Euler. Entretanto, a relativa "magreza" da região de interface ou, de fronteira, onde efeitos mais complicados ocorrem, torna conveniente considerá-la como de fato uma fronteira sem conteúdo volumétrico (isto é, um ponto na reta, uma linha no plano ou, uma superfície no espaço e etc.). Mas, por outro lado, o processo interno não pode ser ignorado e, portanto, é necessário admitir um salto de descontinuidade das funções de fluxo, em que se considera a existência de fontes internas à interface. Nestes casos, se a interface é descrita por um ponto em uma reta, é parte do modelo estabelecer o salto de descontinuidade do fluxo que é definido e denotado na forma:

.

$$[J]_{x_0} = \lim_{h \downarrow 0} \left(J(x_0 + h) - J(x_0 - h) \right)$$

Um problema adicional, é que nem sempre a localização do ponto de descontinuidade (choque) é conhecido 'a priori', mas é uma incógnita, importante, do problema.

Em muitas outras situações, a interface é uma fronteira fixa e estabelecida, o que ocorre em problemas de dinâmica de populações biológicas. (v. Fagan&al)

O modelo geral de conservação expresso na forma diferencial, será repetidamente invocado nestas notas daqui por diante como uma das principais fontes de Equações Diferenciais Parciais (e integro-diferenciais) da Matemática Aplicada ; as equações específicas, como já foi observado, serão caracterizadas pelas relações funcionais constitutivas para o Fluxo e para a Fonte .

Um Princípio de Conservação, acrescido das relações constitutivas para fluxo e fonte, reduz a incógnita do problema à função densidade.

EXEMPLOS DA APLICAÇÃO DO PRINCIPIO DE CONSERVAÇÃO

1-MODELO DE AGREGAÇÃO & COAGULAÇÃO (Fragmentação/Fissão) de Smoluchowski- Modelos de Canibalismo

Em vista das ideias empregadas na construção do modelo populacional de Euler, torna-se claro que argumentos semelhantes podem ser aplicados a outros problemas de dinâmica populacional em que a "reprodução e a mortalidade" (fonte) dependem de alguma característica dos indivíduos que seja continuamente mensurável. Um dos modelos clássicos que fez uso desta argumentação foi desenvolvido pelo físico-químico polonês Marian Smoluchowskii (~1916/17) para a descrição de fenômenos de coagulação em um processo particulado. Neste caso, a população é constituída de agregados ("*clusters*") de pequenas particulas (células, ou organismos) formados por fusão de dois outros agregados ou por fissão (fragmentação) deles mesmos. Neste modelo interessa descrever a população de agregados e, não apenas o número deles, mas, também a maneira como eles estão distribuidos segundo seus tamanhos, ou seja, "quantos de cada tamanho". Portanto, é natural que cada agregado (o "individuo" desta população) seja registrado segundo este aspecto, isto é, o seu tamanho. Supondo que as particulas sejam pequenas comparadas ao tamanho típico destes agregados podemos considerar que a medidas destes tamanhos sejam representaveis continuamente por um numero real positivo.(Ref. Chandrasekhar, Redner, Wattis).

A bem da verdade, Smoluchowski, tal como Euler em seu famoso artigo demográfico, descreveu seu modelo original utilizando tamanhos apenas discretos de agregados, o que, a rigor, resulta em um conjunto infinito de equações diferenciais ordinárias não lineares acopladas, onde cada uma delas descreve a dinâmica da população de agregados de um determinado tamanho. Este procedimento é razoavel quando as particulas/organismos são grandes comparadas aos tamanhos dos agregados. Neste caso, o numero efetivo de equações diferenciais é finito e pequeno o que facilita o seu tratamento sob o ponto de vista analitico e numérico.

Recentemente as ideias de Smoluchowski tem sido empregadas na formulação de modelos matemáticos para a descrição de fenômenos de agrupamentos de células, microorganismos e de animais presentes em variados temas, da oncologia e morfogenese fisiológica à ecologia da predação e sociobiologia (Ref. Gyllenberg, Sumpter, Ruxton...).

Portanto, fica claro que o Espaço de Aspecto é $A = R^{+}$, onde registramos o aspecto tamanho do individuo (agregado) e a respectiva Função de Distribuição / Densidade $\rho(x,t)$ interpretada como sempre por intermedio das integrais: $\int_a^b \rho(s,t)ds$= "*Quantidade de Agregados com 'tamanhos' entr*e $[a,b]$") .

O proximo passo é caracterizar os demais ingredientes:

1-O Fluxo J causado "movimentação" de agregados neste espaço (ou seja , a sua taxa de crescimento ou decrescimento de volume) e

2-A Função de Fonte f que representa a produção ou perda de agregados com tamanhos na faixa $a < s < b$

As diversas classes de hipoteses sobre como se dá cada um destes processos levam a diferentes modelos mas, todos eles obtidos do mesmo Principio de Conservação, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial J}{\partial x} + f$.

O modelo geral de agregação e fragmentação se constitui em um problema matemático extremamente dificil de analisar, muito embora a sua construção resulte de uma aplicação imediata do Principio de Conservação. Para que o tratamento analitico da questão seja possivel e esclarecedor, é necessario considerar inicialmente hipoteses simplificadoras para os processos microscopicos de agregação e fragmentação.

Um conjunto de hipoteses simplificadoras mas que ainda abrange situações de interesse é supor que os agregados estejam suspensos em um meio formado por N particulas e que o processo de agregação se dê somente pela captação destas particulas soltas e nunca pela aglutinação de dois agregados e que a fissão destes se dê sempre por perdas unitárias e nunca pela fragmentação em dois agregados complementares quaisquer. Além disso é interessante considerar a hipotese de que a agregação e a fragmentação unitária ocorra apenas na superficie dos agregados e, portanto, que o processo se dê proporcionalmente à sua área. Como um agregado esférico de volume x tem um raio $\propto \sqrt[3]{x}$ e sua área exterior é proporcional a $(\sqrt[3]{x})^2 = x^{\frac{2}{3}}$, um agregado registrado com o tamanho x tem um crescimento (velocidade positiva no espaço de aspecto) proporcional a $Nx^{\frac{2}{3}}$ e um drecrescimento proporcional a $x^{\frac{2}{3}}$, ou seja, o campo de velocidades no espaço de aspecto seria determinado por $v(x) = (\beta N - \alpha)x^{\frac{2}{3}}$. Por outro lado o numero total de particulas soltas $N(t)$, não havendo introdução e nem retirada exteriores delas, a dinâmica total seria regulada por: $\frac{dN}{dt} = \int_0^\infty \alpha x^{\frac{2}{3}} \rho(x,t)dx - \int_0^\infty \beta N x^{\frac{2}{3}} \rho(x,t)dx$. O Principio de Conservação aplicado à população de agregados portanto resultaria na sequinte equação: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0$ onde $J = \rho(\beta N - \alpha)x^{\frac{2}{3}}$, que é uma Equação Diferencial Parcial de 1a Ordem, mas acoplada a uma equação integro diferencial para $N(t)$. Observe que tanto $\rho(x,t)$ quanto $N(t)$ são incognitas do problema.

Exercício:

Considerando apenas fusão, com uma taxa que independe dos tamanhos envolvidos, e que não haja aumento ou diminuição de tamanho por crescimento ou decrescimento contínuo, escreva a equação para coagulação:Argumente tanto quanto lhe parecer interessante e escreva um modelo de coagulação em que ocorra não apenas fusão, mas também fissão dependentes do tamanho (como?) e crescimento contínuo, por exemplo, “Malthusiano” ou, com saturação.

Equações semelhantes para modelos de precipitação de solventes foram descritas por R.Becker e W.Doering em 1935, por I.M.Lifschitz, V.V.Slyozov e C. Wagner em 1961, (modelo LSW) ,(Fife & Penrose), para dinâmica de agregados celulares por O. Diekmann na década de 1970,(Diekmann), para dinâmica de reprodutiva de colônias de abelhas africanizadas por D.C.Mistro e WCFJr. em 1997 e, para o desenvolvimento de doenças em plantações (L.A.Kato & WCFJr 2005) e muito(a)s outro(a)s.O estudo de dinâmica populacional de insetos (mantidae/ “louva-deus”) e outras populações, em que o canibalismo é um comportamento predominante (e, onde, como em qualquer lugar e circunstância, é muito mais frequente que o “marmanjo” ataque o “fedelho”, tanto mais quanto maior a diferença de tamanho, (daí a necessidade de se descrever sua estrutura etária ou, volumétrica) foi estudado em diversos trabalhos de Biomatemática como, por exemplo, W. Fagan , G.Odell e O.Diekmann. ("*Cannibalism is more frequent than we think*"- G.Odell).

2-EQUAÇÃO DE LIOUVILLE: *Dinâmica Não linear e Modelo Linear de Koopman*

Consideremos o estudo de uma epidemia em uma grande população humana e que o conhecimento que se deseja obter sobre ela em cada uma de sua ocorrencia, denominado Estado da Epidemia, são as duas seguintes medidas: $S =$"Numero de individuos susceptiveis" e $I =$"Numero de individuos infecciosos". O modelo matematico SIS para a evolução desta classe de epidemias estabelece um Algorítmo Infinitesimal (isto é, uma equação dferencial ordinária) **não linear** que permite descrever a evolução temporal do Estado $e = (S,I)$ da Epidemia em termos do proprio estado atual, ou seja,

$$\frac{dS}{dt} = -\lambda SI$$
$$\frac{dI}{dt} = \lambda SI - \mu I$$

com as interpretações usuais para os parâmetros: λ é a taxa de contágio e μ a mortalidade Malthusiana de infectados/infecciosos.

O modelo consiste em definir um campo vetorial $F : E = R^2 \to R^2, F(S,I) = (-\lambda SI, \lambda SI - \mu I)$ no Espaço $E = \{(S,I)\}$ que "propulsiona" deterministicamente o estado do sistema de um ponto do espaço para outro. O estudo deterministico deste modelo procura, portanto, descrever a trajetoria $e(t) = (S(t), I(t))$ de uma epidemia ao longo do tempo cujo estado "inicial" é dado (com absoluta certeza) por $e_0 = (S_0, I_0)$. Entretanto, deve se admitir que o dado inicial é, em geral, conhecido apenas incompletamente e assim a sua evolução $e(t) = (S(t), I(t))$ também transporta esta incerteza ao longo do tempo sendo, portanto, natural analisar esta questão.

Uma das maneiras de estudar o efeito da incerteza sobre o estado de uma epidemia é procurar descreve-la não pelo seu estado preciso mas por intermedio de uma função densidade ρ definida no Espaço de Estados da epidemia, que tem por objetivo fornecer a frequencia com que este estado se encontraria em regiões do referido Espaço ou, em outras palavras:

$$\int_{\Omega} \rho(e)de = \text{"Expectativa de que o estado e da Epidemia se encontre no conjunto } \Omega\text{; isto é, que } e \in \Omega\text{"}$$

A analogia desta questão com o Principio de Conservação segundo Euler é impossivel de ser ignorada. Aprofundando esta analogia, consideremos a função densidade deste caso como a representação de uma população de "possibilidades" (ou, na linguagem frequentista, de "experimentos") de estados da epidemia registrados no Espaço de Aspecto $E = \{(S, I)\}$. Utilizando a linguagem de Euler, estamos tratando de uma População de Estados de uma epidemia SIS em que o Espaço de Aspecto é exatamente E. Portanto, segundo o proprio modelo SIS a movimentação (deterministica) dos pontos deste espaço de aspecto é uma consequencia do efeito do campo F , ou seja, há um processo de transporte neste espaço patrocinado por F. Uma vez que estes estados não aparecem nem desaparecem, isto é, são conservados de fato, e que não há interação entre eles (já que são fictícios) podemos descrever a evolução da função densidade na seguinte forma segundo a aplicação do Principio de Conservação para a função $\rho(S, I, t)$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\{\rho F\} = 0, \text{ ou seja,}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial S}(\lambda \rho S I) + \frac{\partial}{\partial I}\{\rho(\lambda S I - \mu I) = 0$$

Esta Equação Diferencial Parcial, EDP de Liouville, é de primeira ordem, linear na incognita ρ, e descreve a evolução probabilistica da epidemia. (Ludwig 1974). Operacionalmente esta equação pode ser re-escrita como uma dinâmica no espaço funcional de configurações $M = \{\rho\}$ onde se representam todas as densidades na forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = L\rho$$

onde $L : M \to M$ é o operador **Linear** de Liouville : $L[h] = \frac{\partial}{\partial S}\{(\lambda S I)h\} + \frac{\partial}{\partial I}\{-(\lambda S I + \mu I)h\}$. Observe que o problema deterministico com condições iniciais (S_0, I_0)se resume em analisar a evolução temporal da densidade inicial dada por $\rho_0(e) = \delta(S - S_0, I - I_0)$, onde δ é a função generalizada de Dirac.

A abordagem apresentada para o modelo de epidemias é apenas um exemplo de uma estrategia que pode ser aplicada a qualquer sistema dinâmico.

A teoria abstrata de Sistemas Dinâmicos é descrita por intermedio de dois ingredientes fundamentais:

1)Espaço de Fase, que em geral é um subconjunto do R^n (ou uma copia local dele) em que se registra os Estados do Sistema e

2)Campo Vetorial , $v : R^n \to R^n$, que dá origem a trajetorias no espaço de fase por intermedio de uma equação diferencial ordinaria $\frac{dx}{dt} = v(x)$.

O Problema de Cauchy $\frac{dx}{dt} = v(x), x(0) = x_0$, determina uma função solução da forma $x = \varphi(x_0, t)$ que pode ser interpretado, para cada x_0, fixado como uma trajetoria $\varphi_{x_0}(t)$ da "particula" denominada x_0 (sua posição inicial), ou, para cada t, como um mapeamento entre a posição inicial x_0 de cada particula e sua posição no instante t : $\varphi_t(x_0) = x, \varphi_t : R^n \to R^n$ que, nas melhores condições, (assumidas em default) é diferenciavelmente inversivel entre seu dominio e contradominio.O sistema dinamico acima é portanto totalmente deterministico uma vez que dado o ponto inicial x_0, consequentemente o estado x do sistema é determinado por $x = \varphi(x_0, t)$ em qualquer instante t .

Em muitas questões, todavia, há uma incerteza com respeito à localização x_0 e, em muitos casos esta dinâmica é tão complicada em seus detalhes deteministicos individuais que é suficiente conhecer o efeito da dinâmica "média" sobre conjuntos. A dinâmica individual de pontos significa um excesso de informações, difícil de obter e inútil de se ter.

Digamos que a posição inicial x_0 seja tentativamente obtida como resultado de uma enorme quantidade de experimentos (ou medidas independentes), cada uma delas resultando em uma posição x_0. Interpretando frequencialmente os dados experimentais, a função de densidade que representa continuamente esta "nuvem" de pontos no espaço de fase R^n pode ser interpretada como uma função de distribuição de probabilidade $\rho_0(x)$, no seguinte sentido: $\int_\Omega \rho_0(x)dx$ ="Probabilidade de que a condição inicial $x_0 \in \Omega$"="Numero de pontos iniciais que se encontram dentro de Ω") . Considerando que cada condição inicial x_0 determina uma trajetoria possivel do sistema, interpretamos o consequente movimento desta nuvem de pontos iniciais como um transporte efetuado pelo campo vetorial $v : R^n \to R^n$. Portanto, considerando esta "nuvem" de pontos como situada em um meio continuo, podemos garantir que a situação de incerteza do sistema no instante t será dada por uma função de distribuição $\rho_t(x) = \rho(x,t)$. Observando que estes pontos ("dados") não aparecem ou desaparecem do espaço de fase, podemos escrever a dinâmica de ρ por um principio de conservação com fluxo $J = \rho v(x)$ que é um funcional (pontual) linear com relação a ρ e de onde escrevemos a famosa Equação de Liouiville:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(v\rho) = 0$$

que é necessariamente uma EDP **linear**, ao contrario do sistema dinamico que, em geral, é não linear. Levando em conta a interpretação do modelo e do fato de que não há interação entre os pontos, é razoavel escrever a solução desta equação na forma:$\rho(x,t) = \rho(\varphi_t^{-1}(x),t)$. Portanto, a solução deste problema matematico é equivalente à obtenção da inversa da função φ_t , o que pode ser (e de fato é) interessante mas apenas indica a enorme dificuldade da questão. Sendo este um problema matematico de grande interesse especialmente devido a esta interpretação, abordaremos alguns métodos de tratamento analitico dela no capitulo adequado.

(Ref-Chorin–Hald 2005, Zwanzig, Lasota&Mackey,Cvitanovic,Mesic, Kutz, Bassanezi&Ferreira...)

3-TRANSPORTE E DINÂMICA VITAL

Consideremos por simplicidade operacional um meio físico (que pode ser um rio ou um tubo) ao longo do qual escoa um liquido com velocidade estabelecida $v(x,t)$ e cujos individuos (particulas poluidoras, animais aquaticos e ribeirinhos, ou microorganismos) estão em suspensão e são carregados por esta corrente. Se não houver perda ou ganho (contabilistico) de individuos ao longo deste trajeto a Equação de Conservação (isto é, a equação diferencial parcial para a função densidade $\rho(x,t)$) pode ser imediatamente escrita:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0$$

Entretanto, por exemplo, em um modelo de dispersão de poluição é por vezes indispensavel considerar que as particulas suspensas são depositadas no leito do rio a uma taxa proporcional à densidade o que pode ser descrito por uma Fonte negativa $f(\rho) = -\mu\rho$, com a seguinte interpretação $\int_{x_1}^{x_2} \mu\rho(x,t)dx$ ="*Taxa de deposição de particulas no trecho* $[x_1,x_2]$". Ainda em um modelo desta natureza, o efeito de emissões poluidoras ao longo do rio também é um fator a ser considerado o que, no caso, poderia ser descrito por uma função $\lambda(x,t)$ com o seguinte sgnificado: $\int_{x_1}^{x_2} \lambda(x,t)dx$ ="*Taxa de emissão de populentes no trecho* $[x_1,x_2]$ ". Com isto, o modelo matematico tomaria a forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = -\lambda$$

No caso de microorganismos existe a possibilidade da ocorrencia de uma reprodução vital de individuos ao longo do habitat. Consideremos então um processo vital de reprodução e morte segundo o modelo de Verhulst, ou seja, Malthusiano para populações rarefeitas e assumindo um efeito de saturação para altas densidades. Se descrevermos a capacidade de suporte do meio por uma função densidade $k(x)$, com a interpretação: $\int_{x_1}^{x_2} k(x)dx =$"C*apacidade de suporte da região compreendida pelo interval*o $[x_1, x_2]$ ", então em um pequeno segmento $[x, x+dx]$ ("i*nfinitesima*l") do habitat a taxa de variação da população por efeitos vitais pode ser descrito (em primeira ordem em dx) na forma: $r\rho(x,t)dx\left(1 - \frac{\rho(x,t)dx}{k(x)dx}\right) = r\rho\left(1 - \frac{\rho}{k}\right)dx$ de onde vem que a fonte vital do modelo Verhulst é representada na forma$f(\rho)(x,t) = r\rho\left(1 - \frac{\rho}{k}\right)$.
Recolhendo os ingredientes e considerando o Principio de Conservação correspondente a uma população de um habitat unidimensional submetida a um transporte com velocidade $v(x,t)$ e desenvolvendo-se segundo uma dinâmica vital de Verhulst, obtemos o modelo matematico:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\{v\rho\} = r\rho\left(1 - \frac{\rho}{k}\right)$$

que é uma EDP de primeira ordem e não linear para a função incognita $\rho(x,t)$.

Obviamente um habitat tem inicio e fim, digamos, o intervalo $a \leq x \leq b$ e a descrição do modelo matematico se restrige a um periodo de tempo finito, digamos $[0, T]$. A EDP obtida do Principio de Conservação, na verdade, rege o funcionamento do sistema apenas internamente a esta região de espaço-tempo e isto deve ser especificado: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\{v\rho\} = r\rho\left(1 - \frac{\rho}{k}\right), a < x < b\ [0 < t < T]$. Portanto, para descrevermos a evolução da função densidade $\rho_t(x)$ é necessario acrescentar ao problema a maneira como o meio exterior interage com o sistema nas fronteiras $x = a$ e $x = b$, (denominada condições de fronteira) e, também a seu estado incial de partida $\rho(x,0) = \rho_0(x)$ (denominada condição inicial). As condições de fronteira mais comuns serão analisadas em outro item.(Kenkre)

4-TAXIA: Modelo Keller-Segel

Organismos dispersos em uma região espacial estão quase sempre efetuando movimentos constantes em busca de melhores condições ou em fuga de piores condições. Uma das observações mais impressionantes e que tem intrigado os biólogos há muito tempo se refere ao movimento de populações de microorganismos (a famosa Escherichia Coli, por exemplo) quando dispersas em um meio liquido.(Berg, Lin-Segel, Segel). Se este meio apresenta uma suspensão heterogenea de algum nutriente útil para estes microorganismos verifica-se que, por "um passe de mágica" eles se dirigem em ondas na direção de maior concentração nutritiva. Como explicar este comportamento coletivo sem assumir que estes simples organismos disponham de uma capacidade "cognitiva" excepcional, ou melhor, como explicar este fenômeno sem abandonar o Principio de Parcimonia de Ockam? A tensão entre a plausibilidade (~parcimônia) das hipóteses biológicas e a sua suficiencia para a descrição do fenômeno é evidente neste caso como, de resto, em todas as formulações de modelos matematicos na Biologia.

Há dois modelos matemáticos que apresentamos como explicação deste fenômeno, ambos,assumindo uma capacidade intrinseca de processamento muito rudimentar e plausivel para organismos elementares. Um deles assume a existencia de uma sinalização entre individuos, inconsciente, claro, mas que permite a realização desta façanha e será analisada no capitulo de Difusão. O modelo que apresentaremos aqui foi desenvolvido por Evelyn Fox-Keller e Lee A. Segel em 1970 e se constitui em um dos trabalhos fundamentais da Biomatematica contemporânea.

Os organismos em questão são unicelulares e, como se pode observar no microscopio, eles dispõe de sensores em toda a sua membrana externa capazes de detectar a concentração do nutriente em cada ponto da membrana em termos da taxa de reação entre o sensor e o nutriente. Estas células também dispõe de flagelos que funcionam como motores a hélice e que podem impulsiona-los em qualquer direção (Bonner, Berg) . O comportamento microscópico destes organismos é o seguinte: O organismo testa a concentração em todos os seus sensores. Por intermedio de um processo interno (ainda desconhecido, mas plausivel) os flagelos da direção oposta a dois sensores são ativados com maior ou menor intensidade dependendo da discrepância da medida entre os dois sensores antípodas. Assim, um movimento final do organismo se dará na direção de maior concentração do nutriente pelo menos por um pequeno percurso.

O comprimento deste percurso (ou do tempo de ativação dos flagelos depende da discrepância entre as concentrações detectadas pelos respectivos sensores antípodas mas de uma maneira regulada por um dos principios mais fundamentais e universais da psicologia de organismos denominada de "**Lei de Weber-Fechner**". Esta "lei" é amplamente ilustrada no nosso dia a dia com a "receita para o escaldamento de um sapo vivo" (em termos de sensação térmica) ou, "o risco de se assentar em uma poltrona ocupada no escurinho do cinema"(em termos de percepção de luminosidade). A sua forma original foi amplamente verificada experimentalmente e proposta pela primeira vez na segunda metade do século XIX (~1870) pelos fisiologistas/psicologos alemães Ernst H.Weber, Gustav Fechner, H. von Helmholz e Wihelm Wundt sendo posteriormente aperfeiçoada por Stanley S.Stevens um seculo depois (~1970), continuando ainda como tema de estudo. Simplificadamente esta "lei" estabelece que a percepção de um estimulo sensorial (tactil-térmico, olfativo, visual,...) ocorre quando a variação logarímica , $\frac{\Delta S}{S}$, da intensidade de um determinado estímulo, S, ultrapassa um valor limiar λ (caracteristico do estimulo e dos sensores),isto é, $\frac{\Delta S}{S} > \lambda$, onde S é a intensidade do estímulo **de fundo**. Além disso, a reação ao estímulo depende do valor $H(\frac{\Delta S}{S} - \lambda)$, onde H é a função de Heaviside ($H(x) = 0$ para $x \leq 0$ e $H(x) = 1$ para $x > 0$).

Uma vez efetuado um pequeno percurso retilineo proporcional à reação Weber-Fechner causada pela percepção da discrepancia de concentração do nutriente, o organismo novamente cessa o seu movimento e procede a uma nova avaliação sensorial do ambiente após o qual o processo se repete. Com este procedimento calibrado, a observação macroscópica da população de organismos apresenta um evidente movimento contínuo na direção de maior concentração do nutriente. Sob o ponto de vista do Principio de Conservação segundo Euler, é possível descrever macroscopicamente o fenômeno como um fluxo de transporte na direção do gradiente da concentração da referida substancia. Assim, considerando $\eta(x)$ como sendo a densidade do nutriente (função densidade de um população de moleculas!) a população de microorganismos descrita pela função densidade $b(x,t)$ se movimenta no espaço de aspecto (espaço físico) segundo um fluxo $J = b\left(\chi \frac{\nabla\eta}{\eta}\right)$ de onde vem a equação de Keller-Segel:

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \mathrm{div}\left\{b\left(\chi\frac{\nabla\eta}{\eta}\right)\right\} = 0$$

O fenômeno em questão é denominado de Quimiotaxia, uma vez que há um movimento ("taxia") na direção de concentração Química. Analogamente, existe uma enorme variedade de tipos de Taxia, que se referem aos mais diversos tipos de estímulos, FotoTaxia,GyroTaxia,TermoTaxia,PresaTaxia, HaptoTaxia,..., todos eles passiveis de serem analisados por argumentos semelhantes. (Murray, Segel..). O modelo completo de Keller-Segel também inclui uma dinâmica da "população" do nutriente que varia, uma vez que está sendo consumida pelos microorganismos. Em outros casos particularmente importantes, a substancia quimica de concentração $\eta(x,t)$ não é exatamente um nutriente mas um estimulador (sinalizador) secretado pelos proprios microorganismos, assunto que será tratado mais adiante.

É importante observar que neste modelo há a presença de duas populações constituidas de individuos (moleculas e microorganismos) completamente distintos, em natureza e tamanho, mas que todavia interagem entre si.

5-DIFUSÃO COMO TAXIA de DESAGREGAÇÃO

Os Modelos de Difusão são fundamentais para toda a Biomatematica e serão tratados em capitulo a parte. Entretanto, uma de suas múltiplas interpretações (não encontrada em textos da praça) decorre da aplicação dos conceitos desenvolvidos no item anterior sobre taxia, o que motiva a sua inclusão nesta oportunidade.

Em termos gerais, um Processo de Difusão é uma dinâmica temporal no Espaço de Configuração $M = \{\rho\}$ de densidades que tem o efeito de "homogenização" monotonica, ou seja, $\rho_t(x) \in M$ descreve um Proceso de Difusão temporal com relação ao tempo t, se $\rho_{t+\delta}(x)$ é "mais homogênea" do que $\rho_t(x)$ para $\delta > 0$. O conceito de Dinâmica de "Homogenização" será discutido com maiores detalhes no capitulo que tratará especificamente de Difusão. Aqui nos basta observar que um processo de Difusão tende a "dispersar" picos relativos de concentrações da população em questão.(V. também W.C.Ferreira Jr.-*The Multiple Faces and Feats of Diffusion*, 2019)

Consideremos então uma população distribuida no espaço físico com densidade ρ constituida de individuos que têm "horror" a aglomeração e que são dotados de capacidade intelectual suficiente para avaliar a concentração de individuos em sua vizinhança e reagir a esta informação segundo a "Lei" de Weber-Fechner movimentando-se na direção contrária ao gradiente de ρ. Em linhas gerais este processo pode ser interpretado como um modelo de "Quimiotaxia" de Keller-Segel com relação à concentração de indivíduos e será descrito da seguinte forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\left\{\rho\left(-\chi\frac{\nabla\rho}{\rho}\right)\right\} = 0$$

Re-escrevendo a equação dinâmica para $\rho(x,t) = \rho_t(x)$ obtemos o Modelo de Difusão:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \mathrm{div}(\chi\nabla\rho)$$

e, se o coeficiente χ (dito de Difusão e usualmente denotado por D) for independente do local, tempo e concentração, obtemos finalmente a equação clássica de Difusão:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\Delta\rho = D\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial^2\rho}{\partial x_k^2}$$

em que $\Delta = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ é o operador diferencial de Laplace, o mais importante da teoria e aplicações de EDP.

Re-escrevendo a Equação de Difusão clássica como um Principio de Conservação, podemos obte-la definindo um (funcional local) de Fluxo da forma $J = -D\nabla\rho$.

O modelo fundamental para o estudo da Difusão em Físico-Química é fundamentado em uma hipótese para o Fluxo de moleculas nesta forma que é denominada de "Lei de Fick" . (Os quimicos e físicos professam muita fé na existencia de "Leis 'Pétreas' da Natureza" que, a rigor, são apenas "Modelo/Hipóteses" convenientes para descreve-la. A Equação acima é mais conhecida em livros de EDP como Equação do Calor, já que é o modelo obtido quando a Termodinâmica é tratada fenomenologicamente, isto é, quando se trata o calor como um fluido. Neste caso o Fluxo de Calor (energia termica cuja densidade é $Q(x,t)$) é representado pela "Lei de Newton" $J = -c\nabla Q$, uma precursora óbvia da lei de Fick.(P.J.Nahin-*Hot Molecules and Cold Electrons*, Princeton UP 2020).

É importante ressaltar que o mesmo modelo matemático populacional representado pela equação de Difusão, pode ser interpretado macroscopicamente como resultante do comportamento microscopico de partículas sem qualquer iniciativa ou de indivíduos com alta capacidade intelectual.

6-DINÂMICA DO PULSO ARTERIAL

Analisaremos agora rapidamente um modelo de fluxo sanguíneo em vasos arteriais assumindo que o sangue é um fluido de densidade constante ρ_0 e "ideal", isto é, sem viscosidade. Este modelo é útil para uma análise preliminar de alguns aspectos dinâmicos da circulação. (Keener-Sneyd).

(Para remediar uma eventual ofensa causada pela radicalidade desta simplificação, observa-se que um modelo mais inclusivo do sangue deveria considerar um fluido não apenas viscoso mas, anisotrópico e não newtoniano, cujo modelo matematico pode igualmente ser estabelecido segundo os métodos de Euler, mas cuja complexidade permitiria poucas chances de uma análise matemática relevante).

Um dos problemas fundamentais na fisiologia dinâmica do sistema circulatório diz respeito à análise do pulso arterial que decorre basicamente da interação entre a elasticidade das paredes arteriais e a pressão do fluxo sanguíneo, cujos aspectos mais fundamentais podem ser analisados com um modelo relativamente simples como aquele que apresentaremos. Apenas os princípios básicos da formulação do modelo matemático serão aborados, deixando o seu estudo mais detalhado para o(a) leitor(a) interessado(a) que se dispuser a consultar as referências abaixo.

Consideremos então um fluxo unidimensional do sangue ao longo da coordenada x de uma artéria com velocidade $v(x,t)$ e pressão $p(x,t)$ em um tubo cujas seções tem área $A(x,t)$ em cada ponto x e instante t. (Observe que as arterias são elasticas e a área seccional varia ao longo do comprimento e do tempo).O fluxo do sangue será de transporte com densidade $J = \rho_0 v$, e o fluxo total unidimensional através de uma seção será $j(x,t) = \rho_0 vA$.

Portanto, em principio, o modelo estabelece **três** funções incognitas: $A(x,t), p(x,t)$ e $v(x,t)$ o que significa, segundo o "Principio de Compatibilidade", que necessitaremos **três** equações para determina-las completamente.

O primeiro aspecto considerado é , naturalmente, a conservação de massa sanguínea que descreveremos da maneira usual :

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} \rho_0 A(x,t)dx = j(x_1,t) - j(x_2,t) = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}\rho_0 v(x,t)A(x,t)dx$$

de onde tiramos a primeira equação

$$\text{(I)}\quad \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(vA) = 0$$

:

A segunda consideração será o principio mecânico de conservação de quantidade de movimento (ou, segunda lei de Newton) aplicada à massa de sangue de um segmento genérico $[x_1, x_2]$ da artéria na direção longitudinal. Observe que neste caso a quantidade de movimento(longitudinal) deste segmento é dada por

$\int_{x_1}^{x_2} q(x,t)dx$ onde $q(x,t) = \rho_0 A(x,t)v(x,t)$ é a densidade da quantidade de movimento, cujo fluxo de transporte é dado por $J = vq$. Entretanto, a segunda lei de Newton afirma que há também um segundo fluxo de quantidade de movimento na fronteira do segmento causado pela força de pressão exercida sobre ela (as forças internas de pressão se anulam) de onde vem o Principio de Conservação para a Quantidade de Movimento:

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} \rho_0 A(x,t)v(x,t)dx = J(x_1,t) - J(x_2,t) + p(x_1,t)A(x_1,t) - p(x_2,t)A(x_2,t)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho_0 \frac{\partial}{\partial t}(A(x,t)v(x,t))dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}\{p(x,t)A(x,t) + \rho_0 A(x,t)v(x,t)\}dx$$

de onde, fazendo uso do argumento de Euler, e já utilizando a primeira equação, obtemos a equação (**Exercício**)

$$\text{(II)} \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(v^2) = 1\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}$$

.

Para completar o sistema de **três** equações a **três** incognitas, utilizaremos uma relação constitutiva entre a pressão que o fluido exerce sobre as paredes longitudinais dos vasos e a sua dilatação seccional. Um dos modelos mais simples é representado por uma relação linear ("Lei" de Hooke):

$$\text{(III)} \quad A - A_0 = c(p - p_0)$$

onde A_0 é a seção constante e não distendida da artéria, p é a pressão sobre a parede e p_0 a pressão atmosferica e, finalmente, c uma constante de elasticidade. Substituindo esta relação constitutiva (III) nas equações anteriores obtemos um sistema de duas equações com duas funções incognitas (v,p) que determina um sistema hiperbolico de EDP que pode ser analisado pela teoria desenvolvida para as Equações de Euler para a Dinâmica de Fluidos iniciada pelas famosas notas das aula de G.B.Riemann em 1855, redescobertas por Richard Courant e Kurt–Otto Friedrichs na década de 1940 como programa de guerra, desenvolvida por Peter Lax, e bem expostas por Whitham, Lax, e LeVeque). Esta linha histórica demonstra a importância do tema.

Ref.

J.Keener-J.Sneyd-Mathematical Physiology, Springer , 1998.

T.J.Pedley-The Fluid Mechanics of Large Blood Vessels, Cambridge U.Press 1980.

J.Lighthill-Mathematical Biofluidynamics, SIAM 1975.

M.Anliker et.al.-Nonlinear Analysis of flow pulses and shock waves in arteries, Z.Ang.Math.Phys. 22, (!971), (I):pg. 217-246 , (II): pg.563-581.

7-DIFUSÃO: Modelo Macroscópico de Movimento Microscópico Orientado-*Taylor&Kac*

Nesta seção apresentaremos, um outro modelo matemático para o fenômeno de Difusão, totalmente oposto ao anterior sob o ponto de vista microscópico, mas que, surpreendentemente, é representado macroscopicamente pela mesma equação diferencial parcial. Este modelo tem origem nos trabalhos de

L.Boltzmann escritos ao final do século XIX, mas a sua "popularização" somente ocorreu com os trabalhos de Mark Kac na década de 1960, embora tivesse sido considerado também por G.Taylor em dinâmica dos fluidos.

Consideremos uma população de partículas que trafegam em um tubo (unidimensional) com velocidade constante v mas separadas em duas subpopulações; uma que se movimenta para a direita e outra para a esquerda, com respectivas densidades $\rho^+(x,t)$, $\rho^-(x,t)$. Consideramos que não ocorra choque entre elas, mas que eventualmente elas se choquem elasticamente (isto é, sem perda de energia) com impurezas distribuidas ao longo do tubo, o que imediatamente modifica a direção de seu movimento para o sentido oposto. Consideremos que estes choques com impurezas ocorram segundo um modelo probabilistico de Poisson, ou seja, com uma dinâmica Malthusiana. O objetivo final do modelo será obter uma equação (macroscópica, isto é, sem se referir diretamente a estes eventos) para a densidade total da população, $\rho(x,t) = \rho^+(x,t) + \rho^-(x,t)$. (A separação das duas populações é um mero artificio introduzido para desenvolver a argumentação do modelo).

As equações para cada população será obtida utilizando um princípio de conservação em que o fluxo é de transporte (respectivamente) $J^\pm = \pm v\rho^\pm$ e há fontes negativas de perda e positivas de ganho por conta dos choques que modificam as direções de percurso. Assim, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^+}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}(v\rho^+) - \lambda\rho^+ + \lambda\rho^- \\ \frac{\partial \rho^-}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}(-v\rho^-) - \lambda\rho^- + \lambda\rho^+ \end{aligned}$$

onde λ^{-1} é a constante de tempo de Malthus, isto é, o tempo médio de espera para que ocorra um choque. (ou, $\exp(-\lambda t)$= Probabilidade de que uma particula não sofra um choque e, assim, mantenha sua direção de movimento durante todo o período de tempo t).

Escreveremos este sistema de duas equações operacionalmente, utilizando as notações simplificadas $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, e $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, e na forma:

$$\begin{pmatrix} L^+ & -\lambda \\ -\lambda & L^- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho^+ \\ \rho^- \end{pmatrix} = 0$$

onde $L^+ = \partial_t + v\partial_x + \lambda$, e $L^- = \partial_t - v\partial_x + \lambda$.

Observando que os operadores constantes da matriz operacional $M = \begin{pmatrix} L^+ & -\lambda \\ -\lambda & L^- \end{pmatrix}$ são comutativos (especialmente, $L^+L^- = L^-L^+$), aplicaremos à igualdade do sistema a matriz adjunta de cofatores de M (isto é, regra de Cramer sem a divisão pelo determinante), de onde obteremos (pela propria regra de Cramer) um sistema desacoplado:

$$\begin{pmatrix} \det M & 0 \\ 0 & \det M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho^+ \\ \rho^- \end{pmatrix} = 0$$

de onde obteremos a equação satisfeita por ρ:

$$\det \mathrm{M}\{\rho\} = 0$$

onde, naturalmente, $\det M = L^+L^- - \lambda^2 = \partial_t^2 - v^2\partial_x^2 + 2\lambda\partial_t$, ou ainda, na forma clássica, a equação de Kelvin (ou, do telégrafo)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\left(\frac{v^2}{2\lambda}\right)\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}+\left(\frac{-1}{2\lambda}\right)\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}$$

Para completar o modelo matemático, consideraremos o caso em que a frequencia de choques λ é extremamente alta, assim como a velocidade v, de tal forma que $\left(\frac{1}{2\lambda}\right) \ll 1$, enquanto $\left(\frac{v^2}{2\lambda}\right) = D \approx 1.$ Nestas condições, o modelo matemático pode ser reduzido, eliminando-se o ultimo termo da equação de Kelvin o que resultará na equação de difusão:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\left(\frac{v^2}{2\lambda}\right)\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}$$

(A equação completa de Kelvin é tipicamente uma equação de propagação de ondas ($\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} + \left(-2\lambda\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)$) com amortecimento viscoso($-2\lambda\frac{\partial\rho}{\partial t}$), o que representa, em princípio, fenômenos físicos completamente distintos daqueles descritos pela equação de difusão. Surpreendentemente, todavia, há uma sobreposição assintótica no comportamento destes dois modelos para valores extremos de parâmetros, tal como aquele considerado acima).

Desde a década de 1990 estas ideias tem sido grandemente generalizadas e empregadas na construção de modelos matemáticos destinados a representar populações biológicas que se movimentam no espaço físico alternando percursos retilineos com períodos de rápidas rotações em torno de um ponto fixo ("*Run and Tumble*").. O modo rotacional do movimento destina-se a recolher informações da vizinhança que serão utilizadas no proximo lance de corrida. Esta estratégia de movimentação exibem um certo carater universal em biologia de populações tendo sido observadas em diversas espécies de organismos microscopicos e macroscopicos, assim como no movimento de células epiteliais (reparadoras de tecidos) o que faz de seu estudo um tema com importancia singular em Biomatematica. O espaço de aspecto adequado para representar este fenômeno no plano é $\Omega = \{(x_1,x_2,\theta) \in R^2 \times S_1\}$, onde cada indivíduo é caracterizado por sua posição no espaço físico (x_1,x_2) e pela sua orientação, θ. A densidade que descreverá o estado desta população será uma função $\rho(x_1,x_2,\theta,t)$, 2π –periódica na terceira variável. É interessante observar que, à semelhança das equações de Boltzmann para a Mecânica Estatística, estes são também modelos não-locais pois, indivíduos que se encontram fisicamente proximos mas distantes no espaço de aspecto (isto é, com orientações muito distintas) interagem entre si, o que nos levará inevitavelmente a equações integro-diferenciais para $\rho(x_1,x_2,\theta,t)$.(ref. WCFJr-As Múltiplas Faces da Difusão, Hillen&Othmer, Mogilner). Para uma interessante descrição histórica da relação entre a equação de difusão proposta por J.B.Fourier(1768 –1830) em 1807 para a transmissão do calor e a equação do telégrafo derivada por Oliver Heaviside 1830 e analisada por William Thompson (Lord Kelvin) em 1857 que possibilitou a comunicação transoceânica consulte o texto: Paul J.Nahin-*Hot Molecules, Cold Electrons:From the Mathematics of Heat to the development of the Transatlantic Telegraph Cable*, Princeton Univ.Press 2020)

8-MODELOS DE TRÁFEGO

Diversos fenômenos interessantes de trafego em uma autoestrada tem sido estudados como uma população de veículos que se movimentam em um meio unidimensional com densidade $\rho(x,t)$ e segundo um campo de velocidades dado por um funcional (pontual) da densidade $v(\rho)$. Esta função $v(\rho)$ é determinada experimentalmente e tem valor maximo para densidade nula e decresce até zero para uma densidade limite. A equação de conservação é imediatamente escrita na forma:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v(\rho)) = 0$$

Esta simples EDP se refere a uma função incognita escalar $\rho(x,t)$ definida em um espaço unidimensional e apresenta um carater não-linear o que faz dela um prototipo para o estudo de diversas questões importantes da classe geral de EDP denominadas Sistemas Hiperbolicos que representa uma enorme variedade de fenômenos denominados "Choque" que no caso de trafego são de fato relacionados a "choques de veiculos". A ocorrencia deste fenômeno depende da geometria de inflexão da curva função de velocidade $v(\rho)$ o que, portanto, pode ser encarado como fator de controle (dinâmico) da velocidade maxima permitida em trechos dependendo da concentração de veiculos na vizinhança. (v. Whitham 1974, Bassanezi-Ferreira, 1988).

9-TRANSPORTE FLUVIAL E SEDIMENTAÇÃO de Particulados Suspensos

Consideremos um rio não turbulento como um canal retangular retilineo com correnteza uniforme de margem a margem, de tal maneira que a seção longitudinal central representa todo o sistema e tem a forma de um retângulo de altura h e comprimento infinito: $(x_1,x_2) \in \Re = \mathbb{R} \times [0,h]$. Assim, a velocidade da correnteza será descrita pela função vetorial $\vec{v_r}(x_1,x_2) = (V_r(x_1,x_2),0)$ em que $V(0) = 0$, ou seja, a velocidade no fundo do rio é nula e $V(h)$ é a velocidade da sua superficie, em geral a máxima. Consideraremos que função $V_r(x_1,x_2) \geqq 0$ que descreve a correnteza do rio é conhecida e, portanto, o rio será representado pela sua seção longitudinal central.

Suponhamos agora que este rio contenha uma grande quantidade de particulas em suspensão (pequenas, mas macroscópicas) que são transportadas pela correnteza, mas que não influem nela, descritas pela função de densidade $\rho(x_1,x_2,t)$, e que são submetidas também a um processo de sedimentação vertical que as deposita no leito do rio, de onde não mais se desprendem. Portanto, as particulas já depositadas abandonam a sua condição de particula em suspensão contabilizada pela função densidade. A velocidade de queda vertical das particulas será denotada por $\vec{v}_s(x_1,x_2) = (0,-V_a(x_1,x_2))$, $V_a(x_1,x_2) \geqq 0$, e pode ser analisada de diversas maneiras. Em qualquer caso, a velocidade resultante de uma particula em supensão será obtida pela soma vetorial $v(x_1,x_2) = \vec{v}_s + \vec{v_r} = (V_r(x_1,x_2),-V_a(x_1,x_2))$.

Suponhamos que o movimento de correnteza do rio e a sedimentação ocorrem em uma escala de tempo razoavelmente pequena comparada à escala de tempo de processos de difusão molecular, o que nos leva a considerar apenas as dinâmicas de transporte e sedimentação.

Uma das maneiras de simplificar radicalmente este modelo é considerar um rio "raso" e verticalmente uniforme de tal maneira que possamos representá-lo unidimensionalmente pela coordenada $x_1 = x$ com uma correnteza $\vec{v_r}(x) = (V_r(x))$. Neste caso, a sedimentação será descrita como um processo malthusiano que depende apenas da concentração e se dá com uma fonte (negativa) da forma $-\mu\rho(x,t)$.(L.Leopold-*Fluvial Processes in Geomorphology*, Dover 2020).

Modificações dos modelos descritos acima podem ser utilizadas para a representação de diversos processos de transporte e sedimentação de particulados, poluidores ou aluviões em correntes fluviais ou atmosféricas. A análise de processos em uma longa escala de tempo, como a nuvem radioativa resultante do desastre de Chernobyl-URSS 1986 (Numero não identificado de mortos) ou de Brumadinho-MG 2019 (259 mortos)) exige a consideração de fenômenos difusivos a serem aborados no proximo capitulo.

Exercícios:

1*-Considere $\rho(x,v,t)$ a densidade de partículas de massa m e carga elétrica e ,

distribuidas no espaço de fase (posição-velocidade $(x,v) \in R^6$), submetidas a um campo elétrico potencial ambiente $E(x,t) = \nabla\phi$. Mostre que no espaço de fase a "movimentação do aspecto" (x, v) de cada particula se dará segundo o campo vetorial $V(x, v, t) = (v, \frac{e}{m}\nabla\phi)$, e obtenha, como consequencia a importante equação de Vlasov (1940): $\frac{\partial\rho}{\partial t} + v\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{e}{m}\nabla\phi(x,t)\frac{\partial\rho}{\partial v} = 0$ para a dinâmica de plasmas eletrostáticos. (Se o campo elétrico ambiente não for muito forte ou se a população de partículas for muito densa,o campo elétrico $E(x, t)$ deverá levar em consideração também da distribuição de cargas das próprias partículas, o que será expresso de maneira autoconsistente por uma equação adicional de Poisson, razão porque o modelo completo se denomina "Vlasov-Poisson eletrostático". O modelo se torna consideravelmente mais complexo se levarmos em conta também o campo magnético B. Este modelo tem importancia fundamental para o estudo da astrofísica e da fusão nuclear. (J.H.P. Goedbloed-*Principles of Magnetohydrodynamics,* Cambridge UP -online-2010).

2-Considere o modelo de sedimentação. Suponha que as partículas aproximadamente esféricas, todas de massa m , estejam se decantando segundo a "lei de Stokes" , isto é, em queda com velocidade limite de queda v_S constante (que depende de m , da viscosidade do fluido μ e do raio r das partículas).Obtenha uma equação para a dinâmica desta densidade. Qual seria a condição matemática adequada para ser imposta no leito do rio $x_2 = 0$, que represente o fato (obvio para nós mas desconhecido do modelo matemático) de que as partículas não o atravessam?

3-Mesma questão anterior, mas agora suponha que as partículas sejam distintas em raio r, ($R_0 > r > r_0 > 0$), a densidade no espaço de aspecto, $\rho(x_1, x_2, r, t)$, e a velocidade de queda segundo a lei Stokes variável com o raio, $v_S = k\frac{g}{\mu r}$, onde g constante da gravidade, μ a viscosidade e k uma constante dimensional.

4*-Mesma questão anterior analisando agora o decantamento de particulas suspensas na atmosfera $\Omega = \{(R, \theta, \phi) \in [R_0, \infty) \times S_2\}$ para a distribuição $\rho(R, \theta, \phi, t)$ incluido campo de transporte (velocidade de ventos) $v(R, \theta, \phi, t)$. Inicie pelo modelo mais simples em que se supõe uma simetria esférica, ou seja, a função densidade depende apenas da altitude R, $\rho(R, t)$. (Este é um exemplo típico em que o espaço de aspecto [o proprio espaço físico, no caso] não é exatamente o espaço euclideano plano.)

5-Considere um modelo fluvial para um rio suficientemente raso para que o consideremos unidimensional com velocidade de correnteza $v(x, t)$ e que o decantamento ocorra segundo uma sedimentação, proporcional à densidade, Malthusiano. Escreva a equação do modelo para a densidade $\rho(x, t)$ e obtenha a solução para o caso em que um "derrame" de poluentes ocorre com vazão (fonte) $f(x, t) = F_0(H(t) - H(t - t_0))\{H(x) - H(x - x_0)\}$, onde F_0 constante e $H(s)$ é a função de Heaviside: $H(s) = 0, s < 0$, e $H(s) = 1$, para $s > 0$.

Este problema é particularmente interessante sob o ponto de vista inverso, ou seja, conhecendo-se a função velocidade, obter a localização de um emissor pontual de poluente a montante conhecendo-se a densidade em pontos à jusante.

6-Descreva um modelo de sedimentação de um rio unidimensional com emissor (clandestino) localizado em algum ponto ou mesmo em alguma faixa limitada do mesmo. Considerando medidas à jusante verifique como seria possivel determinar a origem e intensidade deste emissor.

10-ETC.

Ondas de Superfície em Oceanos.

Equações de Euler-manuscrito

Equações de Navier Stokes-manuscrito

Modelos de Imunologia-Segel&Perelson

BIBLIOGRAFIA:

V.Arnold-Sur la Geometrie differentielle des groupes de Lie de dimension infinite et ses applications a l'hydrodynamique des fluides parfaits, Ann.Inst.Grenoble 16(1) (1966), 319-361.

V.I.Arnold-Metodi Matematici della Meccanica Classica, MIR 1980

J.Barrow-Greene-Poincaré and the Three Body Problem, AMS 1997

H.Berg-Random Walk in Biology, Princeton UP 1985.

J.Bertoin-Random Fragmentation and Coagulation Processes, Cambridge Univ.Press 2005

N.N.Bogolyubov &al. ed.-Euler and Modern Science, AMS 2007

J.T.Bonner-

S.Brush-The Motion we call Heat, 2 vol.

O.Buhler-Classical Mechanics, Waves and Statistical Mechanics, AMS-Courant Lectures 2004

C.Cercignani-Ludwig Boltzmann: The man who trusted atoms, Oxford U.P.

S.Chandrasekhar-Stochastic Processes in Physics, 1941, reproduzido em N.Wax ed. 1954.

A.J.Chorin-O.Hald-Stochastic Methods in Science, Springer 2005.

A.J.Chorin-On the convergence of Discrete Approximation of Navier-Stokes Equations, Math. of Comp. 23 (1969), 341-53.

A.J.Chorin-J.E.Marsden-A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics, 3rd edition Springer 2000

M.Choppard-M.Droz-Cellular Automata, Cambridge UP

P.Civitanovic-editor- The Chaos Book, Niels Bohr Institute-Copenhague- online

R.Courant-K.-O. Friedrichs-Supersonic Flow and Shock Waves, Wiley 1948

J.Cushing-An Introduction to Structured Population Dynamics, SIAM1998.

O.Darrigol-U.Frisch-From Newton's Mechanics to Euler's Equations, pp.: <http://www.oca.eu/etc7/EE250/texts/darrigol-frisch.pdf>

O.Darrigol-Worlds of Flow-Hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl, Oxford U.P. 2008

S.de Groot-P.Mazur-Non Equilibrium Thermodynamics, North-Holland/Dover, 1965

F.Diacu-Ph.Holmes-Celestial Encounters-The Origin of Chaos and Stability, Princeton UP 1997

O.Diekmann-J.A.P.Heesterbeek-Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases, J.Wiley, 2000.

O.Diekmann-H.Heesterbeek-Mathematical Tools for Understanding Infectious Disease Dynamics,Princeton UP2012

L. Euler-Principes générauxs du mouvement des fluides, Mem.Acad.Roy.Sci. Berlin 1757, 274-315. (trad.ingles em arXiv:0802.2383v1-17 Feb 2008-U.Frisch)

L.Euler-Recherches Générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain, Acad. Sci. Belgique 1760–Trad. Ingles_ThPop.Biol 1(3)1970, 307-314.

L.Euler-Recherches sur populations.....

L.Evans-Partial Differential Equations, Springer

W.Fagan-R.S.Cantrell-C.Cosner-How Habitat Edges Change Species Interaction, The Am. Nat. 153(2), 1999, 166-182.

A.Fasano-The "Volume Scattering" Effect in Liquid-Liquid Dispersion, SIAM News2001: http://www.siam.org/pdf/news/523.pdf

E.Fellman- Euler, Birkhauser

P.Fife-Some Nonclassical Trends in Parabolic and Parabolic-like Evolutions, preprint-online

P.Fife-J. Carrillo-Gradient Flows, pp

J.H.P.Goedbloed-Principles of Magnetohydrodynamics, Cambridge UP2004-online

R.Graham-D.Knuth-Matematica Discreta, JO Ed. 1980

F.Hoppensteadt-Mathematical Theories of Populations, SIAM 1975.

I.Horenko&-....Sensitivity....

D.Hubel-T.Wiesel- Eye..., W.Freeman

G.Kanizsa_Vedere e Pensare, Mulino 1991

J.P.Keener-J.P.Sneyd-Mathematical Physiology, Springer, 1998

N.Keyfitz-Applied Mathematical Demography , Springer-Verlag, 1977

B.V.Kogan-The Dynamical Theory of Rarified Gases, Plenum 1975

Mark Kot-Elements of Mathematical Ecology, Springer 2002

A.Lasota-M.Mackey-Chaos, Fractals and Noise Stochastic Dynamics, Springer 1986.

P.D.Lax-Hyperbolic Systems of PDE, AMS

L.Leopold-Fluvial Processes in Geomorphology, Dover 2010

R. LeVeque-Hyperbolic Systems of Conservation Laws,

V.G.Levich-Physico-chemical Hydrodynamics, Prentice-Hall 1962.

J.Lighthill-

C.C.Lin-L.A.Segel-Mathematics Applied to Nature, SIAM 1990

Th.Malthus-Essays on Population... 1798 (1a. edição)

M. Marder-L.Kadanoff&-Flow and Diffusion of High-Stakes Test Scores, PNAS2009

J.Marsden-T.Hughes- Mathematical Foundations of Elasticity, P.-Hall/Dover 1983

Igor Mesic-Applied Koopmanism,...

D.C. Mistro-L.A.D.Rodrigues-W.C.Ferreira Jr.-The Africanized honey bee dispersal: a mathematical zoom, Bull.Math.Biol 2004-

D.Mollison-editor-Epidemic Models, Cambridge Univ. Press 1995. (H.Daniels-"A Perturbation Approach to Nonlinear Deterministic Epidemic Waves", pg-202-214)

J.K.Moser-Is the Solar System Stable?, The Mathematical Intelligencer vol. 1, 1978, 65-71

J.D.Murray-Mathematical Biology, 2 vol. Springer 2002.

G.Odell-W.Fagan-.....Cannibalism...Am.Naturalist 1994

J.C.Neu-Transport and Fluids, AMS 2010

O.Penrose-The Becker-Döring equation for the kinetics of phase transition, preprint- 2001-online-HP- Penrose- Heriot-Wats University , England

Ch.S.Peskin-Mathematical aspects of Heart Physiology, NYU_Courant Inst. Lectures 1974

Ch.S.Peskin-Partial Differential Equations in Biology, NUYU_Courant Inst. Lect. 1975

Ch.S.Peskin-The Immersed Boundary Method, Acta Numerica

Ch.S.Peskin-D.M.McQueen-Fluid Dynamics of the Heart and its Valves, in pg.309-337, H.Othmer&al.ed.-Mathematical Modeling, PHall1997.

S.V.Petrovskii-H.Malchow-A.B.Medvinsky-Noise and productivity dependence of spatiotemporal pattern formation in a prey-predator system, Discrete &Cot. Dyn.Syst 4, 707-713, 2002.

S.Redner-A Guide to First Passage Processes, Cambridge UP 2001

G.F.B. Riemann-Die Partiellen Differential-Gleichungen -Vorlesungen, 1860 - publicado em 1869: <http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PID=PPN234595299> e <https://archive.org/details/diepartiellendi00riemgoog>

L.Schwartz-Théorie des Distributions, Hermann, 2nd. Ed. 1966.

L.V.Sedov-Mécanique des Millieux Continus, 2 vo. MIR 1985

L.A.Segel-L.E.-Keshet-A Primer on Mathematical Biology, SIAM 2015

L.A.Segel-A.S.Perelson-....Shape Space....1989

L.Sirovich- artigos diversos sobre população neuronal: v. HomePage.

J.J.Stoker-Water Waves, J.Wiley 1950

J.V.Stone-Vision, MIT

G.Strang-Introduction to Applied Mathematics, Wellesley/SIAM, 1980.

R.Strichartz-Differential Equations on Fractals: A Tutorial, Princeton Univ. Press 2006

S.Vogel-Comparative Biomechanics,

N.Wax, ed.-Selected Papers on Stochastic Processes, Dover 1954.

Th.Widiger ed.-The Oxford Handbook of the Five Factor Model, Oxford UP2017

G.Whitham-Linear and Nonlinear Waves,J.Wiley1974.

G.Zaslavsky-Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport, Phys.Reports 371(2002), 461-580.

Ya.B.Zeldovich-Yu.P.Rizer-Elements of Gasdynamics and the Classical Theory of Shock Waves, Acad.Press 1968

R.Zwanzig-Non-Equilibrium Statistical Mechanics, Oxford UP 2001

APÊNDICE: *FENÔMENOS DE TRANSPORTE segundo a Equação de LIOUVILLE*

Dada a importância dos chamados Fenômenos de Transporte analisaremos o movimento gerado por um campo de velocidades com mais detalhes por intermédio das trajetórias de pontos no Espaço de Aspecto.

Para efeito de simplicidade intuitiva analisemos o Fluxo de Transporte resultado do movimento gerado por um Campo de Velocidades autônomo, $v(x)$ no Espaço de Aspecto. Assim, cada ponto do espaço segue uma trajetória determinada pela solução $x = \varphi(t,x_0)$ do Problema de Cauchy:

$$\frac{dx}{dt} = v(x), x(0) = x_0$$

Podemos interpretar a função $\varphi(t,x_0)$ fixando x_0 e considerando a função $t \mapsto \varphi(t,x_0)$ como a trajetória do indivíduo que ocupava a posição x_0 no instante $t = 0$.

Por outro lado, fixado t e variando x_0 em um subconjunto Ω_0, podemos interpretar a função $x_0 \to \varphi_t(x_0)$ como um transporte do conjunto de pontos originalmente situados em Ω_0 no instante $t = 0$, para a sua posição atual , $\Omega_t = \{x = \varphi_t(x_0),\, x_0 \in \Omega_0\}$. Portanto, podemos analisar as trajetórias Ω_t dos diversos subconjuntos do Espaço de Aspecto. Em particular, o Lema de Euler nos levam à Fórmula de Liouville:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho(x,t)dx = \int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\{\rho v\}\right)dx$$

que representa a taxa de variação de indivíduos contidos no subconjunto transportado Ω_t. Se não há mortes ou nascimentos nesta população, obviamente este conteudo é conservado pois não há passagem pela fronteira $\partial\Omega_t$, já que os indivíduos dela se movem solidários à fronteira.

(Sobre a derivação de determinante de uma matriz $A(t)$, $\frac{d}{dt}\{\det A(t)\} = \left(Tr\left\{A^{-1}\frac{dA}{dt}\right\}\det A\right)$, $\frac{d}{dt}Vol(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} div\{v(x)dx = \int_{\Omega_t}\sum \frac{\partial v_k}{\partial x_k}(x)dx)$ e o Teorema de Liouville ($\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} h(x,t)dx = \int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial h}{\partial t} + div\{hv\}\right)dx$ consulte Bassanezi-Ferreira 1988 ou W.C.Ferreira jr-A multiplas faces da derivada, Ciência e Natureza, 2016).

Por outro lado, como o termo $\int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx$ calcula a taxa de variação da população contida em Ω_t fixo, concluimos que a taxa de passagem de indivíduos pela fronteira deve ser dada por $\int_{\Omega_t} -div\{\rho v\}dx$. Lembrando-se do Teorema da divergência de Gauss ($\int_{\Omega} \left\{div\overrightarrow{V}\right\} dx = \int_{\partial\Omega} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dS}$) concluimos que o fluxo total sobre a fronteira $\partial\Omega$ de um subconjunto Ω é dada por: $\int_{\Omega_t} div\{\rho v\}dx = \int_{\partial\Omega_t} \rho v \cdot \overrightarrow{dS}$. Deste argumento, concluimos que o Fluxo de Transporte causado pelo movimento gerado por um campo de velocidades v é dado por:

$$\overrightarrow{j}_{Transporte} = \rho \overrightarrow{v}$$

A Equação de Conservação para uma Dinâmica de População representada por Função Densidade ρ e Fluxo de Transporte gerado por um Campo de Velocidades v é denominada , em particular,

EQUAÇÃO DE LIOUVILLE:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -div\{\rho v\}$$

ou, na forma de uma recursão infinitesimal:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \pounds\rho = -\sum \frac{\partial}{\partial x_k}\{\rho v_k\}$$

onde o Operador Gerador da Dinâmica no Espaço de Densidades é $\pounds\rho = -\sum \frac{\partial}{\partial x_k} v_k$.

O operador $\pounds$ será linear se o campo vetorial $v(x,t)$ for previamente determinado como função direta de (x,t) ,sendo particularmente importante no caso de Campos Autônomos, $v(x)$.

A Equação de Liouville tem grande importância na formulação de Princípios Probabilísticos (Chorin&Hald) e na Formulação dos Métodos Reducionistas de Koopman (Mesic, Kutz) a serem tratados em outro capítulo.

Se o Modelo Populacional dispõe de seus três ingredientes, densidade ρ, Fluxo de Transporte $j = \rho\overrightarrow{v}$ e Fonte, f o Principio de Conservação é representado por uma Equação de Liouville não Homogênea:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \pounds\rho + f = -\sum \frac{\partial}{\partial x_k}\{\rho v_k\} + f$$

.

.

Exercícios*- (Obs: Os exercícios abaixo devem ser trabalhados *ab ovo*, ou seja, sem "fórmulas" de mudança de variáveis)

1-Considere um tubo retilíneo descrito ao longo de seu comprimento pela coordenada x_1, que apresenta uma seção transversal com área $A(x_1,t)$. Suponha que neste tubo se movimenta um "fluido" de partículas com densidade $\rho(x_1, x_2, x_3, t)$ por ação do transporte causado por um campo de velocidades $v(x,t)$ paralelo ao tubo. Escreva uma equação dinâmica para $\rho(x,t)$ com base no Princípio de Conservação e reduza o problema a uma questão unidimensional ao longo do tubo. (v. exemplo sobre ondas em artérias mais adiante).

2--Utilizando conjuntos de teste geometricamente adequados obtenha a Equação de Liouville em coordenadas polares no plano, esféricas, cilindricas.

3-Considere um Espaço de Aspecto representado pela superfície de uma esfera e obtenha a equação de Liouville neste caso.