PROVA 03: MS680-MT624- II Sem 2020:

POSTADA: 14 de Janeiro 2021

RECEBIMENTO: **18 janeiro 2021-Segunda-feira- 8:00 horas da manhã**

ATENÇÃO:

1-As Questões devem ser encaradas como **oportunidades** para demonstrar conhecimento e não como perguntas.

Precisão e Concisão serão qualidades avaliadas. Portanto, atente para o enunciado das questões para evitar uma exposição de fatos e desenvolvimentos não relacionados ou não solicitados.

2-A Redação de cada Prova deve apresentar a forma de um depoimento **pessoal** distinto.Caso ocorram cópias, todas as envolvidas serão invalidadas.

3-Cada Questão resolvida deve ser precedida de seu respectivo Enunciado Original completo.

4-A Resolução deve ser **digitalizada** em um **único** documento pdf (Manuscritos NÃO serão aceitos!)

5-O documento pdf da Resolução deve ser enviado no Anexo de uma mensagem com título "PROVA 03" para o endereço eletrônico: wilson@unicamp.br até no máximo as **8:00 horas da manhã do dia 18 de Janeiro 2021-Segunda-Feira.**

6-Não deixe para resolver,redigir e/ou enviar a sua Prova na última hora e evitando assim ser responsabilizado por acidentes imprevisíveis, mas possíveis. (*Lei de Murphy*)

Questão 01-*Método de Fourier e Linearização Logaritmica Assintótica*

Considere um Modelo Matemático descrito por funções $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, $x(t) = (x_1(t), \ldots\ldots, x_n(t))^t$ definidas Newtonianamente como soluções de uma equação diferencial vetorial "Malthusiana" da forma abaixo em que $S \in M_n(\mathbb{R})$ é uma matriz $n \times n$ simétrica:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = Sx$$

a-Mostre que se v for um autovetor de S referente ao autovalor λ, $Sv = \lambda v$, então a função, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ da forma $h(t) = e^{\lambda t} v$ é solução da equação. (Chamada Solução básica de Fourier).

b-Verifique a veracidade do Principio de Superposição:

"Se $h_k(t) = e^{\lambda_k t} v^k$ são soluções básicas de Fourier, então, qualquer combinação linear $h = \sum_k c_k e^{\lambda_k t} v^k$ (para conjuntos de coeficientes $\{c_k\} \in \mathbb{C}$) é solução do mesmo sistema com condição inicial $h(0) = \sum_k c_k v^k$.

c-Citando o enunciado completo do Teorema Espectral para matrizes simétricas, verifique que o Problema de valor inicial $\frac{dX}{dt} = SX, X(0) = \alpha \in \mathbb{C}^n$ sempre tem solução obtida pelo Principio de Superposição, e determine os valores dos respectivos coeficientes c_k como projeções.

(Observação: É relativamente fácil demonstrar que, existindo, a solução do Problema de Valor Inicial é único.(V.Bassanezi-Ferreira). Portanto a solução espectral de Fourier é "A solução".)

d-Se a matriz S tem seus autovalores (reais) ordenados segundo

$\lambda_{k+1} < \lambda_k < \ldots < \lambda_1$, mostre que , em geral, uma solução $x(t)$ da Equação $\frac{dx}{dt} = Sx$, admite a seguinte linearização assintotica: $\frac{\log|x(t)|}{\lambda_1 t} \longrightarrow 1$. (Obs: O Teorema espectral garante a ortogonalidade dos autovalores $\{v_k\}$)

e-Portanto, se $x(t_n)$ são dados de um fenômeno dinâmico com t_n muito grandes, qual o teste gráfico natural (e porque) deve ser seguido para determinar se é razoável descrever $x(t)$ por um Modelo $\frac{dx}{dt} = Sx$ e qual o maior valor de seu autovalor.

EXTRA:

Considere a Equação Diferencial Matricial (Operacional) $\frac{dX}{dt} = AX$, onde $A \in M_n(\mathbb{C})$, e $X : \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ =" Matrizes quadradas complexas de ordem n".

f-Mostre que cada coluna da matriz X é solução da Equação Vetorial $\frac{dx}{dt} = Ax$, e, vice-versa, se cada coluna for solução da Equação Diferencial Vetorial então a respectiva matriz será solução da Equação Operacional (Matricial).

Definição: A solução $U(t)$ da Equação Diferencial Matricial $\frac{dX}{dt} = AX$ com condição inicial $U(0) = I$ ="Matriz Identidade de ordem n" , é denotada pela notação exponencial: $U(t) = e^{At}$.

g-Utilizando os argumentos do Método Operacional mostre que a solução de uma equação com influencia externa $f(t)$ ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$) $\frac{dx}{dt} = Sx + f(t)$ é da forma

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau.$$

Questão 02 : *Médias e Homogeneidade*

Uma Média M_φ para uma sequência de dados numéricos $a_k > 0$, $M_\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ segundo Kolmogorov-Nagumo (KN) é definida da forma $M_\varphi(a_1, \ldots, a_N) = \varphi^{-1}(\frac{1}{N}\{\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_N)\})$ onde φ é uma função real contínua estritamente monotônica e convexa/côncava.

a-Obtenha as respectivas funções φ para que as Médias usuais, Aritmética, Harmônica, Geométrica e Quadrática sejam da forma prevista acima.

b-Analisando **o gráfico** de suas respectivas funções φ representativas, dados dois numeros positivos, $0 < a < b$, discuta a ordem para os valores obtidos de suas Médias $M_\varphi(a,b)$ com funções $\varphi(x) = x^{2n}$, e $\varphi(x) = x^{\frac{1}{2n}}$. $n \in \mathbb{N}$.

c-Argumente, com base na questão anterior,que escolhendo *capciosamente* a função $\varphi(x) = x^\lambda, \lambda > 0$, a respectiva média KN M_φ de filhos de um casal brasileiro pode ser qualquer número real entre $m = \min\{a_k\}$ e $M = \max\{a_k\}$ onde $a_k =$"*Número de casais com k filhos*" .

d-Considere uma população de N indivíduos submetidos à medida de um aspecto biológico (digamos, a idade) cujos valores são representados (no respectivo espaço de aspecto etário) pelos seguintes números positivos $\{a_k\}_{1 \leq k \leq N}$. Discuta, com argumentos, a definição de uma medida de Heterogeneidade desta população quanto a este aspecto em termos de Médias gerais de KN.

e-Considere a dinâmica de uma população descrita pelo Modelo Malthusiano de mortalidade $\frac{dN}{dt} = -\mu N$, $N(0) = N_0$. Defina, com justificativa, a expressão para a Média de Sobrevivência KN M_φ, com $\varphi(x) = x^\lambda, \lambda > -1$, e calcule-a em termos elementares para $\lambda = n \in \mathbb{N}$. (Sugestão de Calculo Elementar: Derivada paramétrica $\frac{d}{d\mu}$ de integral conhecida.Observação: As Médias Harmônica e Geométrica para a sobrevivencia são infinitas e, portanto, não trazem informação util sobre a distribuição de sobrevivencia da população, o mesmo acontecendo para $\lambda \leq -1$.)

Questão 03:*Predação e Sobrevivência*

-Considere uma grande população distribuida *uniformemente* no espaço em regiões esféricas cujo tamanho é descrito por $N(t)$ e cuja mortalidade é causada unicamente por uma predação "*periférica*" com taxa proporcional (e coeficiente λ) ao número de indivíduos localizados na superficie exterior da esfera.

a-Descreva, com argumentos, um Modelo Diferencial para a dinâmica de mortalidade desta população,

b-Mostre que o tempo médio aritmético de sobrevivencia dos individuos, $T_*(N_0, \lambda)$, aumenta com o tamanho inicial do grupo, o que caracteriza um Efeito de Rebanho Egoista, e determine este valor.

c-Determine também o tempo médio quadrático de sobrevivencia desta população.

d-Segundo o Principio de Weber-Fechner, quão bem recebido é um novo membro de um grupo? Ou seja, como interpretar neste contexto, a antológica frase de Woody Allen: "*Eu não gostaria de fazer parte de um clube que me recebesse (bem) como um de seus memb*ros".

Questão 04-

Considere um líquido em repouso (por exemplo, um lago) onde está suspensa uma "população" de partículas esféricas de variados raios r que se dissolvem (ou se evaporam) a uma taxa proporcional à área de sua superficie exterior.

a-Descreva, justificando, a população destas particulas em um dado instante segundo o conceito de densidade de Euler

b-Obtenha o tempo de "existencia" de uma partícula de raio R.

c-Descreva um Modelo Conservativo de Euler Integral e Diferencial para a distribuição destas particulas ao longo do tempo.

d-Faça uma analogia deste modelo com o modelo demografico continuo de Euler.

Questão 05: *Principio de Conservação*

Considere uma população distribuida continuamente segundo Euler em um espaço de aspecto unidimensional representado por $\mathbb{R}^+$ onde é definido um "Campo de velocidades" $v(x)$ que determina a taxa de modificação do aspecto x em termos dele mesmo.

a-Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são dois pontos móveis no espaço de aspecto que "seguem" o movimento determinado por $v(x)$, isto é, $\frac{dx_k}{dt} = v(x_k)$, com $x_1(0) < x_2(0)$, analise o sentido (no modelo) para a expressão $\frac{d}{dt}\left(\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho(x,t)dx\right)$.

b-Desenvolva a expressão acima e utilize seu resultado para definir **justificadamente** o conceito de Fluxo de Transporte $J(x,t)$.

Questão 06: *Sedimentação*

Seja $0 \leq x$ a coordenada da posição longitudinal em um rio "infinito" com escoamento unidimensional a uma velocidade de arrasto $v > 0$ constante. Suponha que neste rio exista uma população de partículas suspensas descrita pela densidade $\rho(x,t)$ que se depositam no seu leito (deixando, assim, de serem suspensas) a uma taxa proporcional à densidade delas. Suponha ainda que exista uma injeção de partículas em $x = 0$ descrita por um fluxo de entrada $J(0,t) = a > 0$ constante e que a densidade seja nula a longas distancias, isto é, $\rho(\infty,t) = 0$.

a-Interprete e determine a expressão $N(t) = \int_0^\infty \rho(x,t)dx$ mostrando que ela se aproxima de um valor constante.(Sugestão: Obtenha uma equação para $\frac{dN}{dt}$)

b-Argumente que a distribuição espacial de particulas suspensas se aproxima de uma densidade constante com o tempo $\rho_\infty(x) = \lim_{t\to\infty} \rho(x,t)$ e calcule esta distribuição.(Sugestão: Considere a equação estacionária, sem variação no tempo).

c-Determine a quantidade total de material depositado no leito do rio durante um intervalo de tempo $[t_1, t_2]$.