MA952 – Introdução ao Cálculo Fracionário

1 Introdução

Após uma revisão do cálculo de diferentes integrais, sem utilizar o plano complexo, vamos dividir a ementa desta disciplina em quatro etapas. Começamos com uma breve revisão das variáveis complexas, com o intuito de efetuarmos a inversão das transformadas integrais. Após as variáveis complexas, vamos apresentar as equações diferenciais ordinárias, com o intuito de introduzir o conceito de funções especiais, com destaque para as funções hipergeométricas e seus casos particulares. Ainda nas funções especiais, abordamos uma outra classe de funções especiais, com destaque para as funções de Mittag-Leffler, caso particular das funções H de Fox, visto desempenharem papel crucial no cálculo fracionário. A terceira etapa é toda ela dedicada ao estudo das transformadas integrais, em particular Laplace, Fourier e Mellin, com o intuito de abordarmos as equações diferenciais fracionárias, com destaque para o problema da inversão. Por fim, uma introdução ao cálculo fracionário, com o intuito de resolver problemas que contêm, além da respectiva equação fracionária, condições. Neste sentido, o destaque é dado para as formulações de Riemann-Liouville e Caputo.

Em cada uma das etapas, após uma breve revisão da teoria, discutimos vários exercícios de aplicação, bem como alguns sendo deixados a cargo do estudante e que, eventualmente, poderão contar para o cômputo da nota.

2 Variáveis complexas

Nesta primeira etapa vamos, através de exemplos e exercícios, recuperar alguns conceitos que nos levarão ao teorema dos resíduos, tendo como objetivo final a inversão das transformadas integrais, metodologia que vamos apresentar, pois desempenha papel fundamental na resolução de uma equação diferencial fracionária.

EXEMPLO 1. *Seja* $z = x+iy$ *com* $x, y \in \mathbb{R}$. (a) *Calcule a integral*

$$\Lambda = \int_{C_i} z \, \mathrm{d}z$$

com $i = 1, 2, 3$ *ao longo dos caminhos:*

$$\begin{aligned} C_1 &: (0,0) \to (1,0) \to (1,1) \\ C_2 &: (0,0) \to (1,1) \\ C_3 &: x^2 + y^2 = 1 \end{aligned}$$

(b) *Discuta a analiticidade da função* $f(z) = z$ *e confronte com os resultados obtidos no item anterior.*

▼ Solução. Primeiro, devemos notar que temos três contornos (caminhos) de integração distintos, C_1, composto por dois segmentos de reta, coincidindo com os eixos coordenados; C_2, um segmento de reta e C_3, um arco de circunferência, como podemos verificar nas respectivas figuras. (a) Começamos por esboçar uma simples figura destacando o caminho de integração

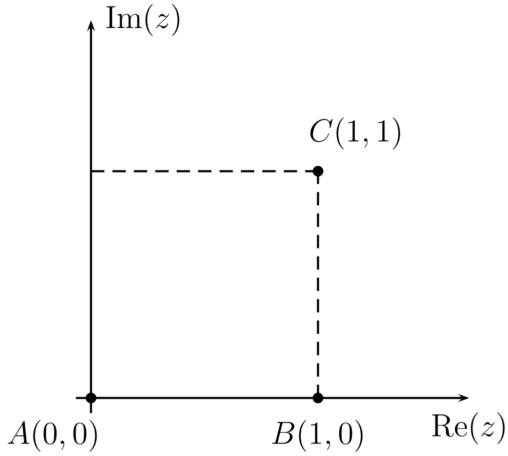


Figura 1: Contorno composto por dois segmentos.

Neste caminho, FIGURA 1, temos

$$
\begin{aligned}
A(0,0) \to B(1,0) &\longmapsto y = 0,\ \mathrm{d}y = 0 \\
B(1,0) \to C(1,1) &\longmapsto x = 1,\ \mathrm{d}x = 0
\end{aligned}
$$

de onde segue, para a integral,

$$
\begin{aligned}
\int_{C_1} z\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 (x+iy)(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y) \\
&= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (1+iy)i\,\mathrm{d}y \\
&= i\,.
\end{aligned}
$$

No segundo contorno temos um segmento de reta, $\overline{AC}$, a integral será nesse caminho, sem termos que somar duas integrais. Para tal, devemos utilizar uma parametrização. Seja t um parâmetro, logo $z = t + it$.

Consideremos a FIGURA 2.

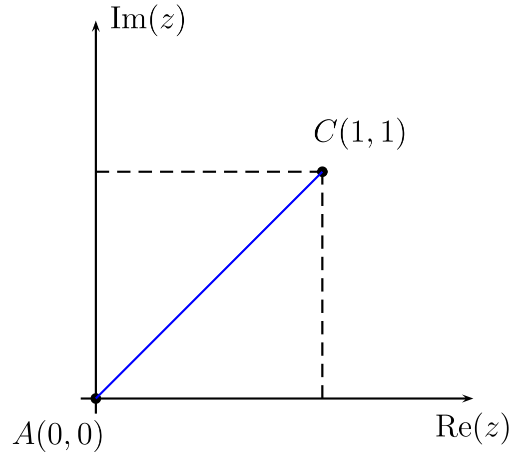


Figura 2: Contorno composto por um único segmento.

Utilizando a parametrização $z = t + it$ de onde com $\mathrm{d}z = \mathrm{d}t + i\,\mathrm{d}t$ e substituindo na integral, obtemos

$$\int_{C_2} z\,\mathrm{d}z = \int_0^1 (t + it)(i + 1)\,\mathrm{d}t = (1 + i)^2 \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = i\cdot$$

No terceiro contorno, temos uma circunferência, centrada na origem e raio $r = 1$, conforme FIGURA 3. Note que os pontos inicial e final, coincidem $B \equiv D$. Aqui, também, devemos utilizar uma parametrização. Neste caso, utilizamos as coordenadas polares a fim de parametrizar a circunferência. Seja $z = e^{i\theta}$ com $0 < \theta \leq 2\pi$.

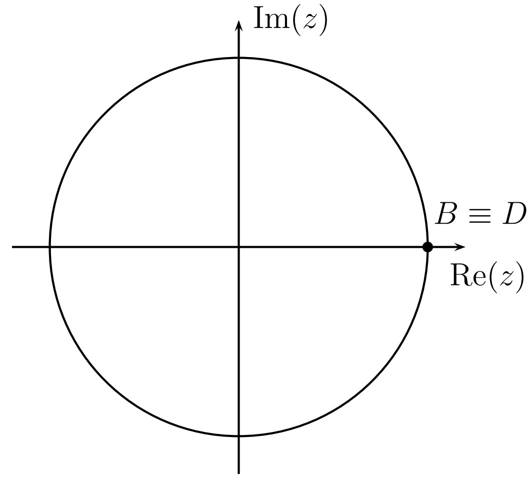


Figura 3: Contorno composto por uma circunferência.

Logo, podemos escrever

$$\int_{C_2} z\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} e^{i\theta} i\, e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = i\int_0^{2\pi} e^{2i\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0\,\cdot$$

Note que, nos dois primeiros contornos, compostos por segmentos de reta (abertos) o resultado é o mesmo, enquanto no terceiro contorno, (fechado), o ponto inicial coincide com o ponto final, o resultado não retornou o mesmo dos dois anteriores. Esse fato, como vamos ver, desempenha papel importante no cálculo de integrais reais, via variáveis complexas. Ainda mais, como vamos discutir, temos duas possibilidades de percorrer a circunferência, no sentido horário ou no sentido anti-horário (positivo).

Do lar 1. *Integre $f(z) = z^2$ nos caminhos C_1 e C_2, respectivamente, tais que:* (a) *segmento de extremos* *nos pontos* $A(0,0)$ *e* $B(2,1)$ *e* (b) *circunferência de equação* $x^2 + (y-1)^2 = 4$.

(b) A fim de analisar a analiticidade de uma função complexa, vamos apresentar o que atende pelo nome de condições/equações de Cauchy-Riemann, que se constituem na maneira de verificar a analiticidade de uma função. A importância de uma função ser analítica é que ela pode ser expressa numa série de Laurent que está associada com o conceito de resíduo.

Começamos com a definição de função analítica, introduzimos as chamadas equações de Cauchy-Riemann e concluímos com o chamado teorema de Cauchy, visando, ao final, o teorema dos resíduos.

Definição **1.** *Uma função* $f(z)$ *é chamada analítica num domínio* $\mathbb{D}$ *se* $f(z)$ *é definida e diferenciável em todos os pontos de* $\mathbb{D}$. *A função* $f(z)$ *é dita analítica num ponto* z_0 *em* $\mathbb{D}$*, se* $f(z)$ *for analítica numa vizinhança de* z_0. *Ainda mais, quando* $f(z)$ *for analítica em todo o plano é chamada de função inteira.*

Teorema **1.** *Seja* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *uma função definida e contínua em alguma vizinhança* D *do ponto* $z = x + iy$ *e diferenciável em* D. *Então, as derivadas parciais de primeira ordem de* $u(x,y)$ *e* $v(x,y)$

existem e satisfazem às equações

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}v(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}v(x,y)$$

chamadas condições/equações de Cauchy-Riemann. Então, se $f(z)$ é analítica num domínio $\mathbb{D}$, suas derivadas parciais existem e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em todos os pontos do domínio.

DO LAR 2. *Prove o* TEOREMA 1 *usando, como caminhos de integração, a* FIGURA 4.

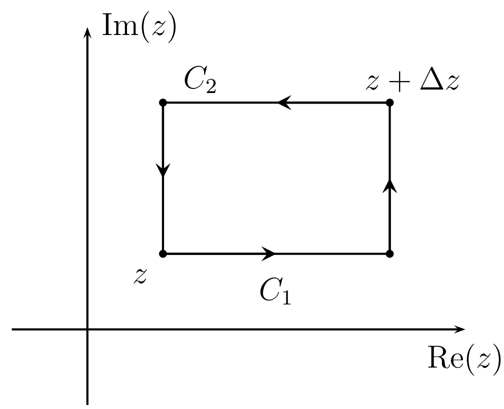


Figura 4: Dois possíveis caminhos de integração.

TEOREMA **2.** *Se duas funções contínuas com valores reais $u(x,y)$ e $v(x,y)$ de duas variáveis reais x e y, têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas que satisfazem as condições de Cauchy-Riemann em algum domínio $\mathbb{D}$, então a função complexa $f(z)$ sendo $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ é analítica em $\mathbb{D}$.*

Do lar 3. *Prove o* Teorema 2.

Este teorema assegura que as condições de Cauchy-Riemann, mais a continuidade das derivadas parciais de primeira ordem tornam-se também suficientes para garantir a analiticidade.

Exemplo 2. *Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Encontre uma função analítica $f(z)$ da qual a parte imaginária é dada por $v(x, y) = 2xy$.*

▼ **Solução.** Começamos por calcular a derivada parcial

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

onde a segunda igualdade é devido a uma das condições de Cauchy, e, integrando em relação a x, obtemos

$$u(x, y) = x^2 + \phi(y)$$

sendo $\phi(y)$ uma função somente de y. Derivando essa igualdade em relação à variável y e utilizando a outra condição de Cauchy, temos

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \phi'(y) = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

que, integrando, permite escrever

$$\phi(y) = -y^2 + C$$

onde C é uma constante arbitrária. Voltando com $\phi(y)$, na expressão para $u(x,y)$, podemos escrever a igualdade $u(x,y) = x^2 - y^2 + C$, de onde segue

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = x^2 - y^2 + C + 2xyi$$

ou ainda, na seguinte forma, fatorando

$$f(z) = (x+iy)^2 + C = z^2 + C$$

que é o resultado desejado ▲

Do LAR 4. *Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Encontre uma função analítica $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ da qual a parte real é dada por $u(x,y) = x^2 - y^2 - x$.*

Antes de concluírmos o nosso EXEMPLO 1, apresentamos o teorema integral de Cauchy que necessita da definição de domínio simplesmente conexo.

DEFINIÇÃO **2.** *Um domínio $\mathbb{D}$, no plano complexo, é chamado domínio simplesmente conexo se todo caminho fechado simples, em $\mathbb{D}$, encerra somente pontos em $\mathbb{D}$. Um domínio que não é simplesmente conexo é dito multiplamente conexo. Ver* FIGURA 5.

TEOREMA **3.** *Se $f(z)$ é uma função analítica em um domínio $\mathbb{D}$, simplesmente conexo, então para todo caminho fechado C, em $\mathbb{D}$, temos*

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

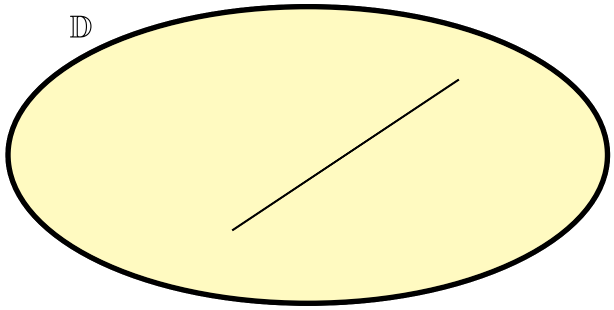


Figura 5: Domínio simplesmente conexo.

Do lar 5. *Prove o* Teorema 3.

Teorema 4. *Se $f(z)$ é analítica num domínio simplesmente conexo, então existe uma primitiva $F(z)$ de $f(z)$, em $\mathbb{D}$, que é analítica em $\mathbb{D}$ e satisfaz à relação*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(z) = f(z).$$

Do lar 6. *Prove o* Teorema 4.

Voltemos ao nosso caso. Temos $f(z) = z$ de onde seguem para as funções $u(x, y) = x$ e $v(x, y) = y$. Assim, calculando as respectivas derivadas parciais, verifica-se que as equações de Cauchy-Riemann estão satisfeitas, logo é uma função analítica

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0\,,$$

que é exatamente o resultado obtido no item (a) com o terceiro contorno, a circunferência. ▲

Do lar 7. *Seja* $C : z(t) = \exp(it)$ *com* $0 \le t \le \pi/2$. *Mostre que*

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{\pi}{2} i\,.$$

Teorema **5.** *Seja* $f(z)$ *uma função analítica, num domínio* $\mathbb{D}$, *simplesmente conexo. Então, para qualquer ponto* z_0 *em* $\mathbb{D}$, *e qualquer caminho simples fechado,* C, *em* $\mathbb{D}$, *que encerra* z_0, *temos*

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0)$$

onde a integração é efetuada no sentido anti-horário.

Do lar 8. *Prove o* Teorema 5.

Do lar 9. *Análogo ao* Exemplo 1 *sendo* $f(z) = \overline{z}$.

Exemplo 3. *Sejam* $n \in \mathbb{Z}$ *e* $f(z) = z^n$. *Calcule a integral* $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ *sendo* C *um contorno simples fechado que circunda a origem.*

▼ **Solução.** Antes de apresentarmos a solução, considere a Figura 6, relativa às possibilidades.

Vamos considerar esse contorno como sendo uma circunferência centrada na origem e de raio $\epsilon > 0$, logo $z = \epsilon\, e^{i\theta}$ com $0 < \theta \le 2\pi$. Substituindo na integral,

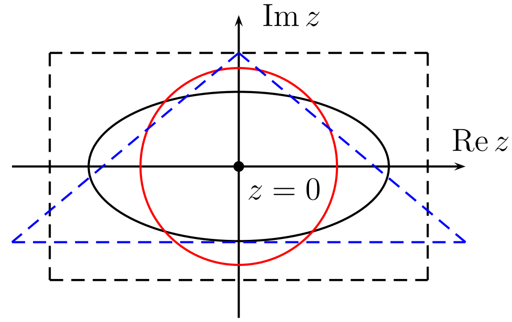


Figura 6: Domínio simplesmente conexo. Vários caminhos.

podemos escrever

$$\begin{aligned}
\int_C z^n \, \mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \underbrace{\epsilon^n e^{in\theta}}_{z^n} \underbrace{\epsilon i e^{i\theta} \, \mathrm{d}\theta}_{\mathrm{d}z} \\
&= i \int_0^{2\pi} \epsilon^{n+1} e^{i(n+1)\theta} \, \mathrm{d}\theta \\
&= \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Note que $f(z) = z^n$ não é analítica em $z = 0$ para $n < 0$, exceto para $n = -1$, único termo que contribui para a integral. Note que (antiderivadas)

$$z^n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\frac{z^{n+1}}{n+1} \right)$$

que impõe $n \neq -1$. ▲

Do lar 10. *Seja $\alpha > -1$ um número real. Considere* *a integral*

$$J(\epsilon) = \oint_{C_\epsilon} z^\alpha f(z)\,\mathrm{d}z$$

onde C_ϵ é uma circunferência de raio ϵ, centrada na origem e $f(z)$ uma função analítica no interior da circunferência. Mostre que

$$\lim_{\epsilon\to 0} J(\epsilon) = 0\,\cdot$$

Do LAR 11. *Sejam $m = 1, 2, \ldots, M$ e C um contorno simples e fechado. Mostre o seguinte resultado*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^m} = \begin{cases} 0 & z = a \ \text{fora de } C, \\ 0 & z = a \ \text{dentro de } C,\ m \neq 1, \\ 1 & z = a \ \text{dentro de } C,\ m = 1. \end{cases}$$

TEOREMA **6.** (Consequência de Cauchy). *Se $f(z)$ é analítica no interior e sobre o contorno fechado C, então todas as derivadas $f^{(k)}(z)$ com $k = 1, 2, 3, \ldots$ existem no domínio $\mathbb{D}$, interior a C, e*

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}}\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Do LAR 12. *Prove o* TEOREMA 6*.*

Do LAR 13. *Discuta o caso $k = 0$ no* TEOREMA 6*.*

Do LAR 14. *Integre a função*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{\tan z}{z^2 - 1}$$

numa circunferência C orientada no sentido anti-horário, centrada na origem com raio igual a $12/11$.

DEFINIÇÃO **3.** (**Série de Laurent**). *Uma função analítica na coroa circular* (anel) $R_1 \leq |z - z_0| \leq R_2$ *pode ser representada pela expressão*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

na região $R_1 < R_a \leq |z - z_0| \leq R_b < R_2$ *onde os coeficientes são dados por*

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z$$

e C é um contorno fechado simples na região de analiticidade encerrando a fronteira interior, $|z - z_0| = R_1$. Para o contorno, considere a FIGURA 7.

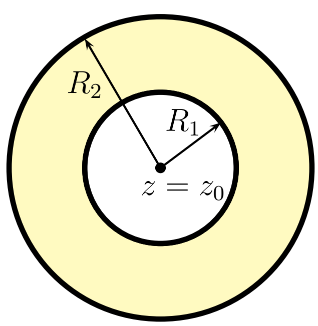


Figura 7: Coroa circular de raios R_1 e R_2.

Exemplo 4. *Seja* $1 < |z-2| < 2$. *Encontre a série de Laurent de*

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} \cdot$$

▼ **Solução.** Começamos com as frações parciais que permitem escrever a função na forma

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} \cdot$$

A fim de usar a série geométrica – primeiro, vamos conduzir essas frações parciais para adequadas séries geométricas – escrevemos

$$f(z) = -\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-1/z}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z/2}\right) \cdot$$

Considerando as desigualdades $1 < |z| < 2$, $|1/z| < 1$ e $|z/2| < 1$, e a definição da série geométria, temos

$$f(z) = -\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^k} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k$$

que é o resultado desejado ▲

Do lar 15. *Utilizando o* Exemplo 4 *mostre que*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k z^k$$

onde os coeficientes são dados por

$$C_k = \begin{cases} -1, & k \leq -1 \\ \\ -\dfrac{1}{2^{k+1}}, & k \geq 0 \end{cases}$$

Exemplo 5. *Encontre os dois primeiros termos não nulos da expressão de Laurent da função $f(z) = -\tan z$ em torno do ponto $z = \pi/2$.*

▼ Solução. Começamos, a fim de simplificar os cálculos, utilizando a relação trigonométrica

$$\tan\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = -\cot z = -\frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}.$$

Assim basta determinar os dois termos não nulos da expansão da função $y = \cot z$ em torno de $z = 0$. Conhecidas as séries de Mclaurin (expansão em torno de $z = 0$) para as funções cosseno e seno, respectivamente

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Vamos efetuar a divisão

$$
\begin{array}{l|l}
+1 - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^4}{4!} - \dfrac{z^6}{6!} + \cdots & z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \dfrac{z^7}{7!} + \cdots \\
 & \text{— — — — — — — — — — —} \\
-1 + \dfrac{z^2}{3!} - \dfrac{z^4}{5!} + \cdots & \dfrac{1}{z} - \dfrac{z}{3} + \dfrac{26z^3}{5!} - \cdots \\
\text{— — — — — — — — — — —} & \\
\qquad -\dfrac{z^2}{3} + \dfrac{4z^4}{5!} - \cdots & \\
\qquad \dfrac{z^2}{3} - \left(\dfrac{4}{5!} - \dfrac{1}{3 \cdot 3!}\right) z^4 + \cdots & \\
\text{— — — — — — — — — — —} & \\
\qquad\qquad +\dfrac{26}{5!} z^4 + \cdots &
\end{array}
$$

que é o resultado desejado. ▲

DO LAR 16. *Encontre os dois primeiros termos não nulos da expressão de Laurent da função* $f(z) = \tan z$ *em torno do ponto* $z = 0$.

09 abril 21

Uma vez apresentada a série de Laurent que contém termos com potências positivas e negativas, diferentemente das séries de Taylor que só contêm potências positivas, vamos destacar um e um só termo dessa série, o chamado resíduo.

Imediatamente após o conceito de resíduo, introduzimos o teorema dos resíduos que, junto ao lema de Jordan, desempenha papel crucial, seja no cálculo de integrais reais via variáveis complexas, como na inversão das transformadas integrais, dentre outras aplicações.

Definição 4. (Resíduo). *Seja a série de Laurent*

$$f(z) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} C_k(z-z_0)^k}_{\text{Principal}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} C_k(z-z_0)^k}_{\text{Taylor}}$$

O particular coeficiente, obtido com $k=-1$, é chamado resíduo e denotado por C_{-1} ou $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$. É um mero coeficiente da série de Laurent, logo

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i C_{-1} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)\,.$$

Do lar 17. *Utilize o exercício* Do Lar 11 *para integrar $f(z)$ num contorno C, simples, orientado no sentido positivo, num domínio simplesmente conexo.*

Ressaltamos que uma outra notação para indicar o resíduo, b_1, também é utilizada, pois é frequente escrever para os coeficientes de potências positivas (série de Taylor) a_k, enquanto para coeficientes de potência negativa, b_k que, para $k=1$ fornece o resíduo.

Na definição de resíduo deve ser notado que no membro à esquerda temos uma integral que depende, além da função, do caminho e dos extremos, enquanto no segundo membro, temos um simples número, um particular coeficiente da série de Laurent, associado ao ponto z_0, o centro da expansão em série de Laurent.

Antes de apresentarmos o teorema dos resíduos e o lema de Jordan, de crucial importância para calcular integrais reais utilizando o plano complexo, vamos discutir os tipos de singularidades.

A série de Laurent é uma ferramenta muito conveniente para discutirmos as singularidades de uma função num ponto $z = z_0$. Visto que a parte relativa à série de Taylor é analítica em $z = z_0$, vamos considerar apenas a parte principal, com as potências negativas, escrita na forma

$$\frac{b_1}{z - z_0} + \cdots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m}$$

onde $b_m \neq 0$, tem uma singularidade em $z = z_0$.

Então, classificamos as singularidades de modo que:

(a) se a série tem um número finito de termos, a singularidade é chamada polo e m é a ordem;

(b) se temos um número infinito de termos, a singularidade é dita essencial;

(c) se $f(z)$ não é analítica em $z = z_0$, mas pode vir a ser, a partir de um certo valor de $f(z_0)$, chamamos a singularidade de removível;

(d) se a série tem um fator $(z - z_0)^\mu$, com $\mu \notin \mathbb{Z}$, a singularidade é dita ponto de ramificação.

Ainda mais, dizemos que $z = z_0$ é uma singularidade isolada de uma função $f(z)$ se em alguma vizinhança de $z = z_0$ não temos mais singularidades de $f(z)$.

Por fim, dizemos que uma função $f(z)$ é analítica ou singular no infinito se $g(\omega)$ é analítica ou singular, respectivamente, em $\omega = 0$, onde $f(z) = f(1/\omega) = g(\omega)$.

EXEMPLO 6. *Classifique os pontos singulares da função*

$$f(z) = \frac{18 \operatorname{sen} z}{z\sqrt{z+4}(z^2+9)}$$

com $f(0) = 1$

▼ **Solução.** As singularidades de $f(z)$ ocorrem nos zeros do denominador, logo $z = 0$, $z = -4$ e $z = \pm 3i$. Antes da análise, verificamos que

$$\lim_{z \to 0} f(z) = f(0) = 1.$$

Agora sim, dizemos que $z = 0$ é uma singularidade removível. Para os pontos $z = \pm 3i$ temos polos simples, enquanto para $z = -4$, temos um ponto de ramificação, que é o resultado desejado ▲

DO LAR 18. *Seja $z \in \mathbb{C}$. Considere a função*

$$f(z) = \frac{z^3 + 1}{z^4 + 3z^2 + 5}.$$

Discuta a singularidade em $z = \infty$.

TEOREMA **7.** (Teorema dos resíduos.) *Seja C um contorno fechado simples, dentro e sobre o qual f é uma função analítica, exceto para um número finito de pontos singulares isolados $z_1, z_2, \ldots, z_N$. Então,*

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} a_j = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)$$

onde a_j é o resíduo de $f(z)$ em $z = z_j$.

DO LAR 19. *Sejam $z_1, z_2, z_3, \ldots$ os pontos singulares de $f(z)$. Considere o caminho simples fechado conforme a* Figura 8. *Prove o* TEOREMA 7.

TEOREMA **8.** (Polo de ordem k). *Se o polo é de ordem k, o resíduo pode ser calculado através da expressão*

$$C_{-1} = \frac{1}{(k-1)!}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}\left[(z - z_0)^k f(z)\right]_{z=z_0}.$$

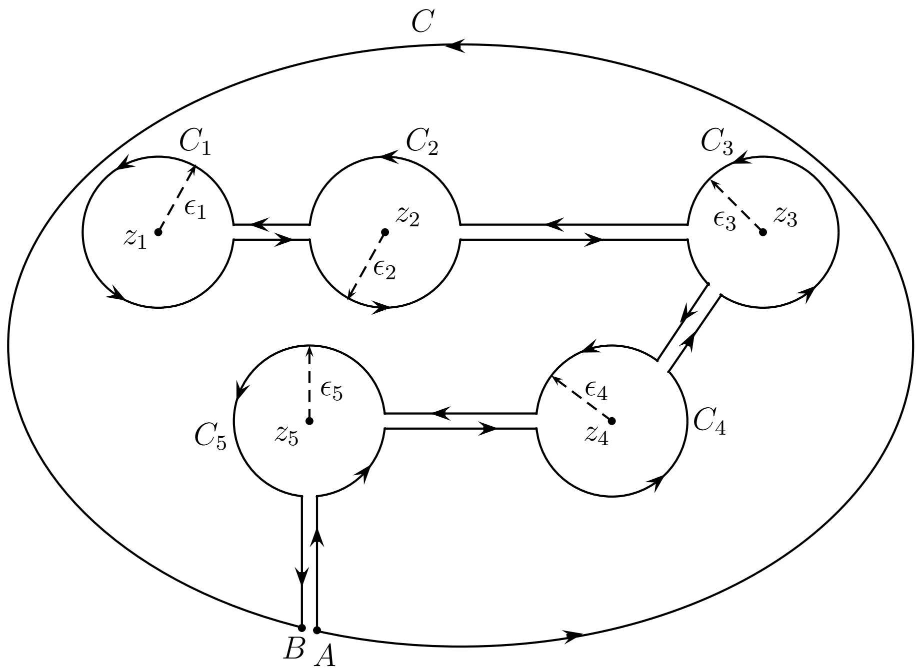


Figura 8: Caminho simples orientado no sentido positivo.

Do lar 20. *Prove o* Teorema 8.

Exemplo 7. *Seja* Γ *uma semicircunferência,* $|z| = 1$ *com* $y \leq 0$*, orientada no sentido anti-horário. Calcular a integral*

$$J = \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}.$$

Calcule-a com o sentido invertido, horário.

▼ **Solução.** Vamos escrever a equação da semicircunferência em termos das coordenadas polares (coordenadas polares no plano), r e θ,

$$z = 1 \cdot e^{i\theta} = e^{i\theta}$$

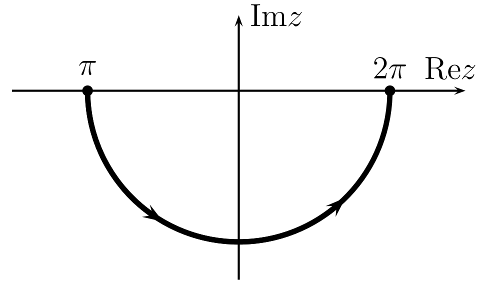


Figura 9: Semicircunferência nos quadrantes terceiro e quarto.

com $\pi \leq \theta \leq 2\pi$. Considere a Figura 9.

Introduzindo a parametrização na integral, temos

$$\begin{aligned} J &= \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta/2}}\, i\, \mathrm{d}\theta \\ &= i \int_{\pi}^{2\pi} e^{i\theta/2}\, \mathrm{d}\theta = 2\, e^{i\theta/2}\Big|_{\theta=\pi}^{\theta=2\pi} \\ &= 2(e^{i\pi} - e^{i\pi/2}) = -2(1+i) \end{aligned}$$

que é o resultado desejado ▲

Exemplo 8. *Seja $a \in \mathbb{C}$. Calcular a integral*

$$J(a) = \int_{\Gamma} z^a\, \mathrm{d}z$$

sendo Γ uma circunferência unitária centrada na origem e orientada no sentido positivo.

▼ **Solução.** *A esta altura, neste particular exemplo, não nos parece necessário esboçar o contorno de integração, pois trata-se da circunferência unitária centrada na origem. Assim, seja*

$$z = e^{i\theta}$$

com $0 \leq \theta \leq 2\pi$. *Primeiro, vamos subdividir em dois casos, a saber:* $a \neq -1$ *e* $a = -1$. *Portanto, no primeiro caso, podemos escrever*

$$J(a) = \int_0^{2\pi} (e^{i\theta})^a i\, e^{i\theta}\, \mathrm{d}\theta = i \int_0^{2\pi} e^{i(1+a)\theta}\, \mathrm{d}\theta$$

cuja integração, fornece

$$J(a) = \frac{e^{2i\pi a} - 1}{a+1}$$

de onde fica claro termos considerado $a \neq -1$. *Por outro lado, considerando* $a = -1$, *devemos integrar*

$$J(-1) = \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{i\, e^{i\theta}\, \mathrm{d}\theta}{e^{i\theta}} = i \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi i$$

que é o resultado desejado ▲

Do lar 21. *Calcule a integral*

$$J(a) = \oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2 + a^2}$$

onde $C : x^2 + y^2 = r^2$ *com* $r > a$.

Antes de apresentar o chamado lema de Jordan, vamos definir qual o significado de uma função tender uniformemente a zero.

Definição **5.** *Dizemos que* $f(z) \to 0$ *uniformemente quando* $R \to \infty$ *no caminho* C_R *se* $|f(z)| \leq K_R$

onde K_R depende somente de R (não do argumento) e $K_R \to 0$ quando $R \to \infty$.

LEMA **1. (Lema de Jordam).** *Suponha que sobre o arco circular C_R tenhamos $f(z) \to 0$ uniformemente quando $R \to \infty$. Então,*

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} e^{i\alpha z} f(z)\, \mathrm{d}z = 0$$

com $\alpha > 0$.

PROVA 1. *Com $|f(z)| \leq K_R$ (constante) temos*

$$I = \left| \int_{C_R} e^{i\alpha z} f(z)\, \mathrm{d}z \right| \leq \int_0^\pi e^{-\alpha y} K_R R\, \mathrm{d}\theta \cdot$$

Sendo $y = R \operatorname{sen} \theta$ e $\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen} \theta$ podemos escrever, somente para a integral,

$$\int_0^\pi e^{-\alpha y}\, \mathrm{d}\theta = \int_0^\pi e^{-\alpha R \operatorname{sen} \theta} \mathrm{d}\theta = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \operatorname{sen} \theta} \mathrm{d}\theta\, .$$

Ora, na região $0 \leq \theta \leq \pi/2$ temos a estimativa (gráfico!!!) $\operatorname{sen} \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$ de onde segue para a integral

$$I \leq 2K_R R \int_0^{\pi/2} e^{-2\alpha R\theta/\pi} \mathrm{d}\theta = \frac{K_R \pi}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha R}\right)$$

e $I \to 0$ quando $R \to \infty$ visto que $K_R \to 0$. $\square$

Exemplo 9. *Seja $a \in \mathbb{R}$. Calcule a integral real*

$$J(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2}.$$

▼ **Solução.** Apenas para lembrar, essa é uma integral que pode ser calculada a partir de uma conveniente mudança de variável, $x = a \tan\theta$ de onde segue

$$J(a) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\ \sec^2\theta}{a^2 + a^2\tan^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

ou ainda, na seguinte forma, já simplificando

$$J(a) = \frac{1}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{a}.$$

Vamos recuperar esse resultado a partir das integrais no plano complexo, utilizando o teorema dos resíduos e o lema de Jordan. Ainda que mais longo, é mais geral, pois pode ser utilizado para outros casos em que a integração não é imediata, como neste caso, por exemplo, se tivéssemos no denominador $x^3 + a^3$.

Vamos considerar uma integral no plano complexo

$$\Omega(a) = \oint_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2 + a^2}$$

sendo $a > 0$, $z = x + iy$ e Γ o contorno fechado, orientado no sentido positivo, conforme Figura 10, composto

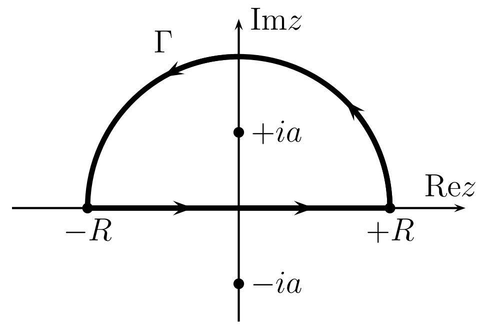


Figura 10: Contorno Γ orientado no sentido positivo.

de uma semicircunferência nos primeiro e segundo quadrantes, centrada na origem e de raio $R > a$.

Vamos percorrer o contorno Γ, logo

$$\oint_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2 + a^2} = \int_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^2 + a^2} + \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2}$$

onde C_R é a semicircunferência e a integração no eixo horizontal, escrevemos $z = x + i0 = x$. Note que os polos do denominador, valores que tornam o denominador nulo, são $z = \pm ia$, sendo que $z = +ia$ encontra-se no interior do contorno fechado e o outro, $z = -ia$, fora.

Cabe uma observação. Como saber qual é o contorno adequado? A resposta é sempre a mesma, treino, treino e treino. Neste caso, como queremos a integral de $-\infty$ até $+\infty$, eixo horizontal, devemos fechar, ou por cima, como fizemos, ou por baixo. Nesse caso, se tivéssemos fechado o contorno por baixo (quadrantes três e quatro) teríamos $z = -ia$ dentro e $z = +ia$ fora. Confirme, pois o resultado é exatamente o mesmo.

Então, a partir da nossa escolha, utilizando o teorema dos resíduos, podemos escrever

$$\int_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+a^2} + \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=+ia} f(z).$$

Como já havíamos mencionado, o segundo membro é um número e não depende das integrais do primeiro membro. Começamos calculando o resíduo,

$$\operatorname*{Res}_{z=+ia} f(z) = \lim_{z\to +ia} (z-ia)\frac{1}{(z-ia)(z+ia)} = \frac{1}{2ia}.$$

Voltando na integral e tomando o limite $R \to \infty$ temos

$$\int_{C_\infty} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+a^2} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = 2\pi i \frac{1}{2ia} = \frac{\pi}{a}.$$

Usando o lema de Jordan para a integral em z, parametrizando a semicircunferência, $z = R\, e^{i\theta}$ para $0 \leq \theta \leq \pi$, assim, podemos escrever, tomando o módulo,

$$|I_R| \equiv \left| \int_{C_\infty} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+a^2} \right| \leq \int_{C_\infty} \left| \frac{1}{R^2 e^{2i\theta} + a^2} \right| \left| Re^{i\theta} \mathrm{d}\theta \right|$$

ou ainda, na seguinte forma

$$
\begin{aligned}
|I_R| &\leq \int_{C_\infty} \frac{R}{|R^2 e^{2i\theta} + a^2|} \mathrm{d}\theta \\
&= R \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(R^2 e^{2i\theta} + a^2)(R^2 e^{-2i\theta} + a^2)}} \\
&= R \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{R^4 + 2R^2 a^2 \cos 2\theta + a^4}} \\
&\leq R \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{R^4 + 2R^2 a^2 + a^4}} \\
&= R \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{R^2 + a^2} = \frac{\pi R}{R^2 + a^2}
\end{aligned}
$$

que, tomando o limite $R \to \infty$ de ambos os lados,

$$
\lim_{R\to\infty} I_R = \lim_{R\to\infty} \frac{\pi R}{R^2 + a^2} \to 0
$$

Note que podemos utilizar diretamente a desigualdade

$$
|1 + z^2| \leq 1 + |z^2| = 1 + R^2.
$$

Por fim, podemos escrever para a integral de partida,

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a}
$$

exatamente como obtido através da mudança de variável trigonométrica, que é o resultado desejado ▲

Do lar 22. *Sejam* $a > 0$ *e* C (*arco com ângulo central* $2\pi/3$) *um contorno fechado que encerra somente*

$z_1 = a\exp(i\pi/3)$, *orientado no sentido anti-horário. Calcule a integral*

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^3 + a^3}\,.$$

DO LAR 23. *Seja $t > 0$. Calcule a integral real*

$$J = \int_0^\infty e^{-itx^2}\mathrm{d}x$$

considerando uma integral no plano complexo onde C é um arco de circunferência com ângulo central $\pi/4$, orientado no sentido positivo. Note que o integrando é uma função inteira.

DO LAR 24. *Use o resultado do* DO LAR 23 *para mostrar que valem os resultados*

$$\int_0^\infty \cos(tx^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{8t}} = \int_0^\infty \mathrm{sen}(tx^2)\,\mathrm{d}x\,.$$

DO LAR 25. *Seja $0 < k < 2$. Mostre que*

$$\int_0^\infty \frac{x^{k-1}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi/2}{\mathrm{sen}(k\pi/2)}\,.$$

REF. E. Capelas de Oliveira e W. A. Rodrigues Jr., *Funções Analíticas com Aplicações*, Editora Livraria da Física, São Paulo, (2005).

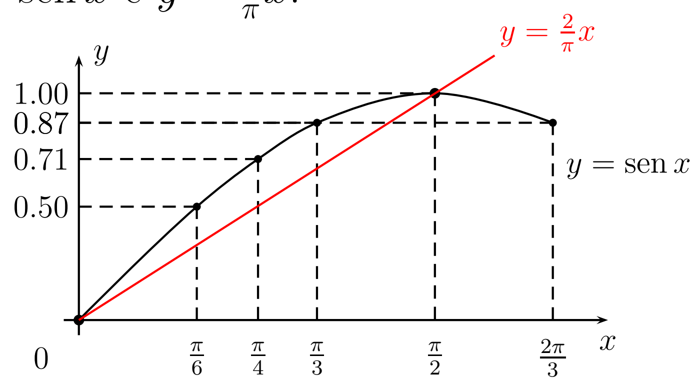
3 Complementos

Nesta seção coletamos alguns exercícios, que serão discutidos e resolvidos, a fim de complementar o texto de revisão das variáveis complexas.

Exercício 1. *Sejam* $x \in \mathbb{R}$ *com* $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. *Justifique a validade da desigualdade*

$$\operatorname{sen} x \geq \frac{2}{\pi} x.$$

Solução. Para mostrarmos essa desigualdade, vamos esboçar um gráfico, no mesmo sistema de eixos, para as funções $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \frac{2}{\pi} x$.



Deste esboço segue a desigualdade $\operatorname{sen} x \geq \frac{2}{\pi} x$. $\square$

Exercício 2. *Sejam* $x, y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$ *e* u *e* v *as partes real e imaginária da função analítica* $f(z)$. *Mostre que* $u = u(x, y)$ *e* $v = v(x, y)$ *satisfazem a equação de Laplace bidimensional.*

Solução. Primeiro, do enunciado, concluímos que u e v satisfazem as condições de Cauchy-Riemann e que a equação de Laplace bidimensional é dada por

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(x,y) = 0,$$

sendo $\phi(x,y)$ uma função duas vezes continuamente diferenciável. Assim, admitindo as funções u e v duas vezes continuamente diferenciáveis, podemos escrever, a partir das condições de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}v(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}v(x,y)$$

a seguinte igualdade, derivando em relação a x,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}v(x,y)$$

bem como, derivando em relação a y,

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) = -\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}v(x,y).$$

Admitindo que as derivadas são contínuas, podemos trocar a ordem no segundo membro da segunda igualdade de onde segue, somando tais expressões

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) = 0,$$

que é o resultado desejado. Analogamente, derivando a primeira em relação a y a segunda em relação a x, utilizando a continuidade e adicionando, obtemos a expressão

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}v(x,y) = 0,$$

isto é, ambas satisfazem a uma equação de Laplace. Por um processo similar, podemos partir da equação de Laplace e utilizar ora uma ora outra condição de Riemann-Liouville obtendo aquela que não foi utilizada. $\square$

EXERCÍCIO 3. *Esboçar um domínio:* (a) *simplesmente conexo e* (b) *duplamente conexo.*

SOLUÇÃO. (a) Simplesmente conexo

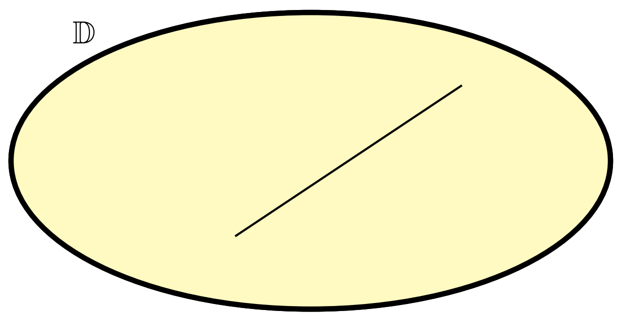


Figura 11: Domínio simplesmente conexo.

Note que, por exemplo, um segmento de reta pode ser colocado sem que parte dele não esteja no domínio. Em resumo, não temos "buracos".

(b) Duplamente conexo

Neste caso, por exemplo, um segmento de reta não pode ser colocado sem que todo ele esteja no domínio. Em resumo, temos "buracos", aqui um só. No caso de triplamente conexo, dois e assim por diante.

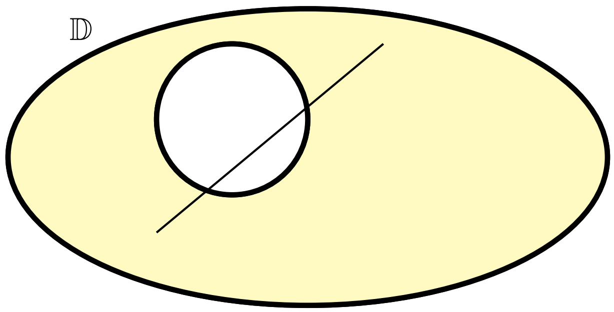


Figura 12: Domínio duplamente conexo.

O domínio está destacado na parte amarela. Note que o segmento tem uma parte que se encontra fora da parte em amarelo, isto é, não pertencente ao domínio, o que caracteriza-o como não conexo, diferentemente daquele que se encontra na figura do item anterior.

Exercício 4. *Seja $x \in \mathbb{R}$. Calcule a integral real*

$$\Omega = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, \mathrm{d}x$$

(a) *utilizando integração no plano complexo e* (b) *sem utilizar o plano complexo.*

Solução. (a) Primeiro, devemos escolher uma particular função a fim de integrá-la num particular contorno de integração. Neste caso, temos uma singularidade removível e, para tanto, vamos considerar a função

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

pois a parte imaginária é exatamente $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$. A função $f(z)$ apresenta uma singularidade em $z = 0$. Assim, vamos considerar o contorno como na Figura 13, excluindo a singularidade em $z = 0$ (note que $\operatorname{sen} x \div x$ no limite $x \to 0$ é igual à unidade)

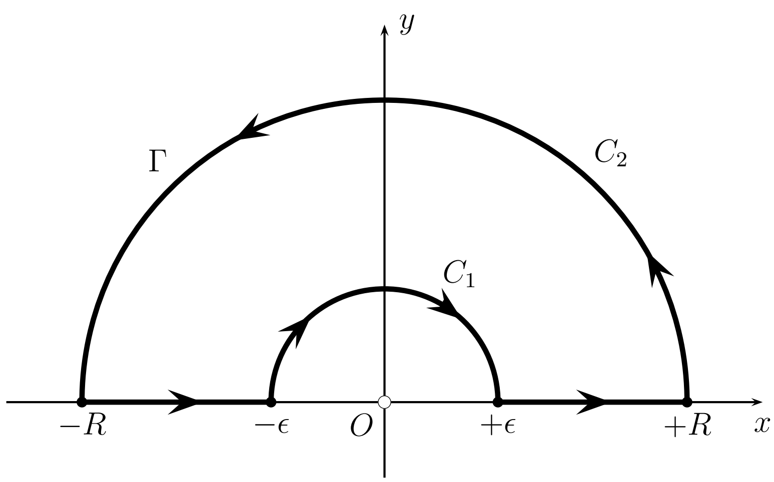


Figura 13: Contono excluindo a singularidade removível em $z = 0$.

Esse contorno é fechado, está orientado no sentido positivo, e é composto por dois segmentos de reta e duas semicircunferências, uma de raio R e outra de raio ϵ, ambas centradas na origem. Note que nos limites $\epsilon \to 0$ e $R \to \infty$ os extremos da integral real são recuperados.

A fim de calcular a integral no plano complexo, vamos percorrer o contorno Γ no sentido anti-horário e utilizar o teorema dos resíduos, logo segue

$$\int_{+\epsilon}^{+R} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{-R}^{-\epsilon} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \\ = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z)$$

Note que as primeira e terceira integrais têm a parte imaginária nula, $z = x + i0 = x$. Ainda mais, o segundo membro é igual a zero, pois $z = 0$ encontra-se fora do contorno de integração. Vamos calcular, separadamente, as integrais sobre C_1 e C_2 com $\epsilon \to 0$ e $R \to \infty$.

Para a integral sobre C_1 vamos escrever z na forma polar, ou seja, considerar $z = \epsilon\, e^{i\theta}$ com $0 < \theta < \pi$. Assim, podemos escrever

$$\int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z = \int_{\pi}^{0} \frac{e^{i\epsilon\, e^{i\theta}}}{\epsilon\, e^{i\theta}}\epsilon i\, e^{i\theta}\mathrm{d}\theta$$

e, tomando o limite para $\epsilon \to 0$ temos

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z = i\int_{\pi}^{0} \mathrm{d}\theta = -i\pi.$$

Analogamente, para a integral sobre C_2, considerando, agora $z = R\, e^{i\theta}$, logo podemos escrever

$$\int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z = \int_{0}^{\pi} \frac{e^{iR\, e^{i\theta}}}{R\, e^{i\theta}}Ri\, e^{i\theta}\mathrm{d}\theta.$$

Utilizando a relação de Euler, obtemos

$$\int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}z = i \int_0^{\pi} e^{iR\cos\theta - R\,\mathrm{sen}\,\theta} \mathrm{d}\theta.$$

Para esta integral, vamos usar o lema de Jordan e tomando o módulo temos

$$\left| \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}z \right| \leq R \int_0^{\pi} e^{-R\,\mathrm{sen}\,\theta} \mathrm{d}\theta = 2R \int_0^{\pi/2} e^{-R\,\mathrm{sen}\,\theta} \mathrm{d}\theta$$

que vai para zero no limite $R \to \infty$. Voltando na soma das integrais, podemos escrever, já tomando os limites

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{ix}}{x} \mathrm{d}x - i\pi + \int_0^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} \mathrm{d}x = 0.$$

Usando a relação $2i\,\mathrm{sen}\,x = e^{ix} - e^{-ix}$ e rearranjando, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\,x}{x} \,\mathrm{d}x = \pi$$

e, visto que o integrando é uma função par e os limites de integração são simétricos, podemos escrever

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\,x}{x} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

que é o resultado desejado. (b) Para recapitular, vamos obter o mesmo resultado sem utilizar o plano complexo e sim com o "truque" de Feymann.

A integral que queremos calcular é, às vezes, conhecida com o nome de integral de Dirichlet. Essa integral não é absolutamente convergente, então não está definida no sentido de Lebesgue. Assim, vamos considerar uma função $f(a)$, com $a \leq 0$ tal que

$$f(a) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, e^{ax} \, \mathrm{d}x.$$

Destacamos a importância de impormos o parâmetro, a, não positivo o que é devido ao extremo superior da integral de partida. Com essa função, recuperamos a integral inicial, considerando $a = 0$, isto é, $\Omega = f(0)$.

Vamos derivar essa função em relação ao parâmetro,

$$\frac{\partial f(a)}{\partial a} = \int_0^\infty \operatorname{sen} x \, e^{ax} \, \mathrm{d}x.$$

A fim de calcular essa integral, podemos utilizar duas vezes integração por partes, porém, aqui, vamos utilizar a relação de Euler, logo

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, e^{ax} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2i} \int_0^\infty \left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \, e^{ax} \, \mathrm{d}x$$

ou ainda, na seguinte forma

$$= \frac{1}{2i} \int_0^\infty \left[e^{x(a+i)} - e^{x(a-i)}\right] \, e^{ax} \, \mathrm{d}x.$$

Note que essas integrais existem, pois com a imposição no parâmetro a, convergem.

Integrando e voltando na expressão para $\frac{\partial f(a)}{\partial a}$, podemos escrever

$$\frac{\partial f(a)}{\partial a} = \frac{1}{a^2+1}$$

que é uma equação diferencial cuja integração é imediata, pois é a primitiva do arco tangente, logo

$$f(a) = \arctan a + C$$

onde C é uma constante de integração.

Para determinar a constante, devemos impor uma condição

$$\lim_{a\to-\infty} = \lim_{a\to-\infty}(\arctan a + C) = -\frac{\pi}{2} + C$$

que, levando na definição de $f(a)$, fornece

$$-\frac{\pi}{2} + C = \lim_{a\to-\infty}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, e^{ax}\,\mathrm{d}x = 0$$

de onde segue $C = \pi/2$. Voltando na integral, temos

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, e^{ax}\,\mathrm{d}x = f(a) = \arctan a + \frac{\pi}{2}$$

para todo $a \leq 0$. Note que esta é uma expressão geral, dependendo do parâmetro a que, em nosso caso, devemos calcular $f(0)$, logo

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

que é o resultado desejado. $\square$

Exercício 5. *Calcular a integral imprópria*

$$\Lambda = \int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

sem utilizar o plano complexo.

Solução. Ainda que não venhamos a utilizar o plano complexo, note que temos dois pontos singulares $x = \pm 1$, que, além de anularem o denominador, também oferecem problema no logaritmo, deixando o logaritmando nulo.

Seja $a \leq 0$. Vamos considerar a seguinte integral

$$f(a) = \int_0^\infty \frac{\ln(1+a^2x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

cujo derivada em relação ao parâmetro a, fornece

$$\frac{\partial f(a)}{\partial a} = \int_0^\infty \frac{2ax^2}{(1+a^2x^2)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x.$$

A fim de calcular esta integral, começamos com frações parciais de onde podemos escrever

$$\frac{\partial f(a)}{\partial a} = \frac{2a}{1-a^2}\left(\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+a^2x^2} - \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\right).$$

Estas duas integrais são imediatas, pois ambas resultam no arco tangente, logo

$$\frac{\partial f(a)}{\partial a} = -\frac{\pi}{1-a^2} - \frac{a\pi}{1-a^2}.$$

Por fim, integrando os dois lados dessa expressão, temos

$$f(a) = \pi \ln|1-a| + C$$

onde C é uma constante de integração. A fim de determinar a constante tomamos $a = 0$, de onde segue

$$f(0) = \pi \ln 1 + C = 0$$

logo $C = 0$. Assim, a integral geral, dependendo do parâmetro, é

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+a^2x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi \ln|1-a|.$$

Em nosso caso, basta considerar $a = -1$, logo

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi \ln 2,$$

que é o resultado desejado. $\square$

Exercício 6. Valor principal de uma integral.

O valor principal de Cauchy é uma maneira de atribuir valores a certas integrais impróprias que, em princípio, são indeterminadas.

Este estudo é dividido conforme o tipo de singularidade. Aqui, vamos apresentar apenas o clássico exemplo de uma integral mal definida. Assim, a integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

é uma integral imprópria mal definida. Note que $x = 0$ é um ponto onde o integrando não está definido, é uma singularidade, neste caso, um polo simples.

Ao efetuar a integração diretamente, temos

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(1) - \ln(-1) = -\ln(e^{i\pi}) = -i\pi!!!$$

uma integral real resultando num imaginário puro.

O valor principal desta integral é tal que

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{\epsilon}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \right) = 0.$$

Ainda que existam outras notações, vamos usar

$$\mathsf{P} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{\epsilon}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \right).$$

Em geral, se $x = x_0$ é uma singularidade isolada no intervalo (a, b), então o valor principal de Cauchy em torno de x_0 é dado por

$$\mathsf{P} \int_{a}^{b} f(x) \mathrm{d}x = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{a}^{x_0 - \epsilon} f(x)\, \mathrm{d}x + \int_{x_0 + \epsilon}^{b} f(x)\, \mathrm{d}x \right).$$

DO LAR 26. *Mostre que o valor principal da fórmula de Cauchy para um ponto sobre o contorno de integração, denotado por C, é dado por*

$$\mathsf{P} \int_{C} \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}x = \pi i f(z_0).$$

Do lar 27. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}_+$. Calcule a integral real*

$$\Lambda(a,b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Exercício 7. *Seja $0 < a < 1$. Mostre que*

$$J(a) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}.$$

Solução. Esta integral (valor principal) utiliza um contorno retangular no plano complexo, tendo apenas a singularidade $z = i\pi$ dentro do contorno, isto é contribuindo para o resíduo. Alternativamente, vamos calcular esta integral após uma simples mudança de variável $e^x = t$, ou seja, conduzimos a integral de partida na seguinte integral

$$J(a) = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Note que voltamos na variável x, pois é uma variável muda o que garante que não interferirá no resultado final. Para calcular esta integral real, vamos considerar a integral no plano complexo

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_C \frac{z^{a-1}}{z+1}\,\mathrm{d}z$$

com $z = x + iy$, sendo C um contorno fechado, composto de uma circunferência centrada na origem, raio $R > 1$, bem como dois segmentos de reta e uma circunferência centrada na origem de raio $\epsilon < 1$, orientado no sentido positivo. Ainda mais, evitando o ponto de ramificação, $z = 0$, deixando apenas o ponto $z = -1$ dentro do contorno, conforme Figura 14.

Por fim, deve ser notado que devemos considerar o valor principal da integral, pois a integração vai eliminar a linha de corte, destacada em vermelho.

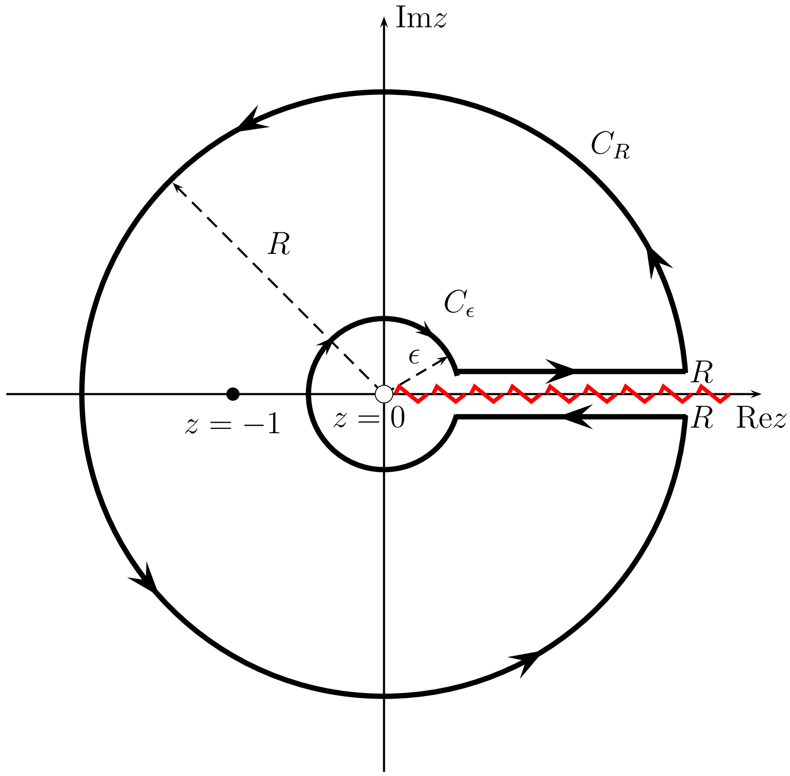


Figura 14: Contono excluindo o ponto de ramificação $z = 0$.

Vamos percorrer o contorno da Figura 14 e utilizando o teorema dos resíduos, levando em conta que o único ponto encerrado pelo contorno é $z = -1$, logo

$$\int_\epsilon^R f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_R^\epsilon f(x\,e^{2\pi i})\,\mathrm{d}(x\,e^{2\pi i}) +$$

$$\int_{C_\epsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)$$

Em analogia ao Exemplo 9 mostra-se que a integral em C_R, no limite $R \to \infty$ vai a zero. Visto que

$$\mathrm{d}(x\,e^{2\pi i}) = \mathrm{d}x$$

podemos escrever a expressão anterior na forma

$$\int_\epsilon^R f(x)\,\mathrm{d}x + \int_R^\epsilon f(x\,e^{2\pi i})\,\mathrm{d}x +$$

$$\int_{C_\epsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-1} f(z).$$

Começamos por calcular a integral em C_ϵ. Parametrizamos $z = \epsilon\,e^{i\theta}$ com $0 < \theta < 2\pi$ de onde segue

$$\int_{C_\epsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{2\pi}^0 \frac{(\epsilon\,e^{i\theta})^{a-1}}{\epsilon\,e^{i\theta} + 1} i\epsilon\,e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = i\,\epsilon^a \int_{2\pi}^0 \frac{e^{i\theta a}}{\epsilon\,e^{i\theta} + 1}\,\mathrm{d}\theta$$

que, no limite $\epsilon \to 0$, vai a zero, pois $0 < a < 1$, logo

$$\int_{C_\epsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Assim, simplificando e rearrajando, obtemos a expressão

$$\left(1 - e^{2i\pi a}\right) \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x+1} \, \mathrm{d}x = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)$$

ou ainda, explicitando os cálculos, na forma

$$\left(1 - e^{2i\pi a}\right) J(a) = 2\pi i \lim_{z \to -1} (z+1) \frac{z^{a-1}}{z+1} = -2\pi i \, e^{i\pi a}$$

Utilizando a relação que expressa o seno trigonométrico como exponenciais complexas, obtemos

$$J(a) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi a}.$$

Por fim, as integrais reais são tais que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}}{1+e^x} \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x+1} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi a}.$$

Ressaltamos que a primeira integral, envolvendo as exponenciais, pode ser calculada com um outro contorno, como já mencionado.

16 abril 21

Exercício 8. (Função logaritmo.) *Consideremos* $z \in \mathbb{C}$ *e* $f(z) = \ln z$ *a função logaritmo. O domínio da função logaritmo é tal que* $z \in \mathbb{C} - (-\infty, 0)$ *um corte (a ser excluído) ao longo da semirreta* $(-\infty, 0)$.

Vamos exemplificar com a função

$$f(z) = \ln\left(1 - e^{2iz}\right)$$

de tal modo que tenhamos

$$z \in \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} : 1 - e^{2iz} \text{ um número real negativo}\}$$

Sendo $z = x + iy$ *com* $x, y \in \mathbb{R}$, *temos para o logaritmando*

$$1 - e^{2iz} = 1 - e^{2i(x+iy)} = 1 - e^{-2y}(\cos 2x + i \operatorname{sen} 2x)$$

que será real se, e somente se, a parte imaginária for igual a zero

$$e^{-2y} \operatorname{sen} 2x = 0$$

de onde segue $x = \frac{k\pi}{2}$ *com* $k \in \mathbb{Z}$. *Assim, devemos ter a desigualdade*

$$1 - e^{-2y} \cos k\pi \leq 0$$

que é verificada se, e somente se, k *for um número inteiro e par e* $y \leq 0$. *Então, o domínio de* $f(z)$ *é o plano complexo* $\mathbb{C}$, *excluindo a família de semirretas* $z_k = k\pi + iy$ *com* $y < 0$ *e* k *inteiro e par.*

Com o acima discutido, vamos calcular a integral

$$\oint_\Gamma \ln\left(1 - e^{2iz}\right)\, \mathrm{d}z$$

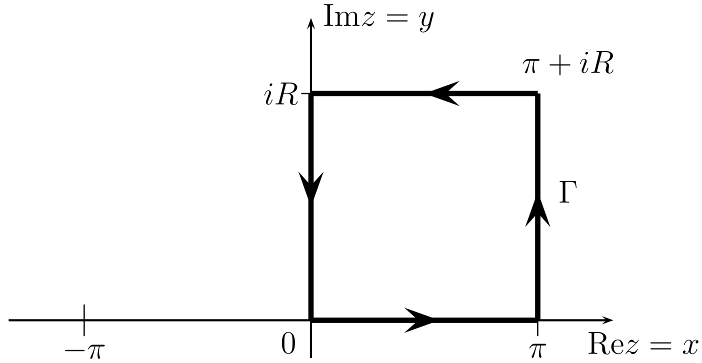


Figura 15: Contono Γ com $R > 0$.

sendo Γ *o contorno no plano complexo, fechado e orientado no sentido positivo, conforme* Figura 15

Uma vez que não há ponto singular de $f(z)$ *no interior do contorno, a integral sobre* Γ *é igual a zero,*

$$\oint_\Gamma \ln\left(1 - e^{2iz}\right)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Percorrendo o caminho de integração temos

$$\int_0^\pi \ln\left(1 - e^{2ix}\right)\,\mathrm{d}x + \int_0^{iy} \ln\left(1 - e^{2\pi i - 2t}\right)\,\mathrm{d}t +$$

$$\int_\pi^0 \ln\left(1 - e^{-2R+2ix}\right)\,\mathrm{d}x + \int_{iy}^0 \ln\left(1 - e^{-2t}\right)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Note que, nessa ordem, $y = 0$, $x = \pi$, $y = R$ *e* $x = 0$, *respectivamente, nas integrais anteriores. Visto que* $e^{-2t+2i\pi} = e^{-2t}$, *temos que a segunda e quarta integrais se cancelam, bem como no limite* $R \to \infty$, *a terceira* *integral é nula, pois* $\ln 1 = 0$, *de onde segue*

$$\int_0^\pi \ln\left(1 - e^{2ix}\right)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Utilizando a relação de Euler $2i \operatorname{sen} x = e^{ix} - e^{-ix}$ *temos*

$$1 - e^{2ix} = -2i\,e^{ix} \operatorname{sen} x$$

que, substituído no integrando da equação anterior, permite escrever

$$\int_0^\pi \ln\left(-2i\,e^{ix} \operatorname{sen} x\right)\,\mathrm{d}x = 0$$

de onde segue, utilizando a propriedade dos logaritmos, logaritmo do produto é a soma dos logaritmos,

$$\int_0^\pi \left[\ln 2 + \ln(-i) + \ln e^{ix} + \ln \operatorname{sen} x\right]\,\mathrm{d}x = 0$$

ou ainda, integrando e simplificando, na forma

$$\int_0^\pi \ln \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -\pi \ln 2.$$

Do lar 28. *Mostre que*

$$\int_0^{\pi/4} \ln \operatorname{sen} 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}\ln 2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln \operatorname{sen} 2x\,\mathrm{d}x$$

Exercício 9. *Seja $-1 < r < 2$. Calcule a integral*

$$J = \int_0^1 \frac{x^{1-r}(1-x)^r}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x.$$

Solução. *Sejam $z \in \mathbb{C}$ com $z = x + iy$ e $x, y \in \mathbb{R}$. Consideremos a integral no plano complexo*

$$J_0 = \oint_\Gamma \frac{z^{1-r}(1-z)^r}{(1+z)^3}\,\mathrm{d}z$$

onde Γ é um contorno limitando um domínio duplamente conexo, conforme Figura 16

Percorrendo o contorno, conforme orientação, podemos escrever a soma das integrais

$$J_0 = -\int_{C_R} f(z,r)\,\mathrm{d}z + \int_{C_1} f(z,r)\,\mathrm{d}z + \int_{L_1} f(x,r)\,\mathrm{d}x +$$
$$\int_{C_0} f(z,r)\,\mathrm{d}z + \int_{L_2} f(x,r)\,\mathrm{d}x$$

onde C_0 e C_1 são circunferências centradas em $z = 0$ e $z = 1$, respectivamente, ambas de raio ϵ, enquanto C_R é uma circunferência centrada em $z = 0$ e raio R e introduzimos a notação,

$$f(z,r) = \frac{z^{1-r}(1-z)^r}{(1+z)^3}.$$

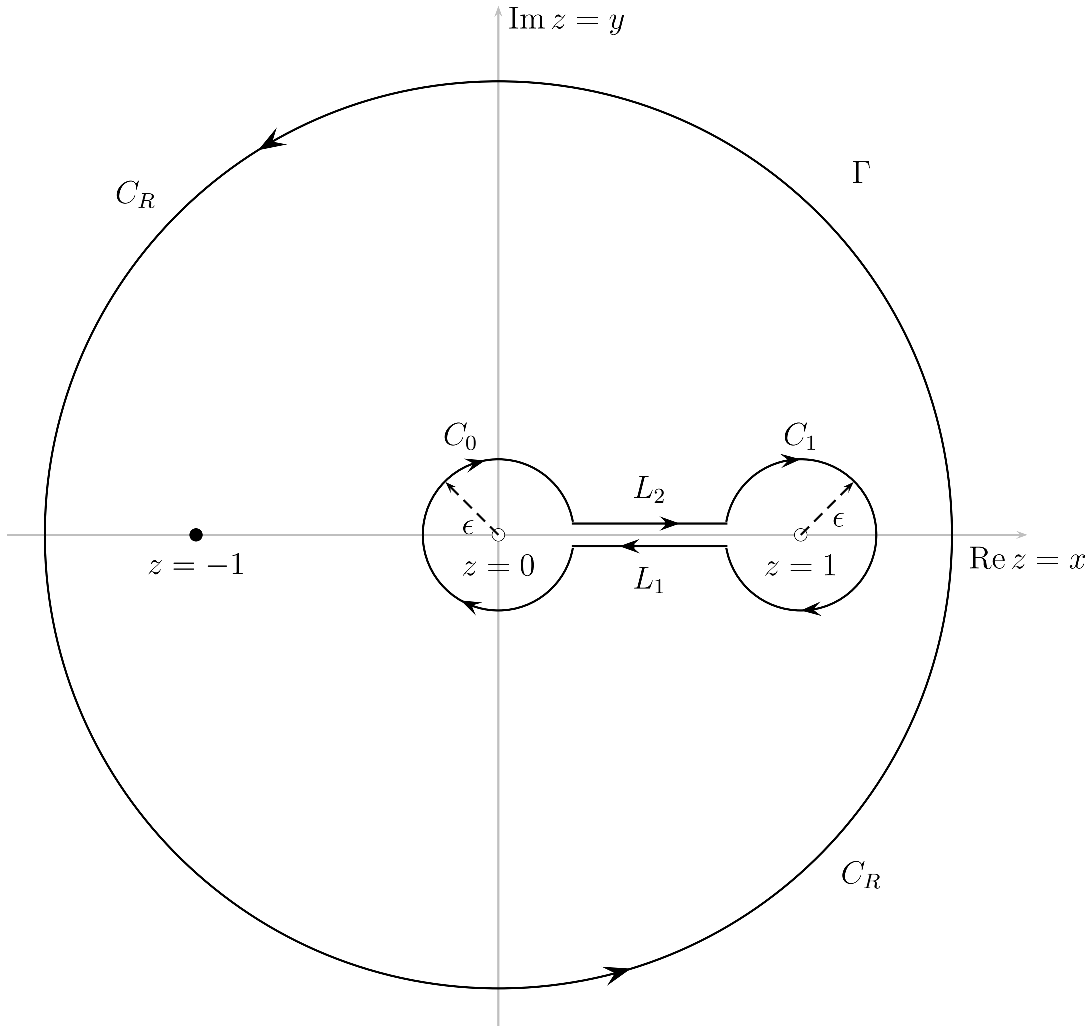


Figura 16: Dois pontos de ramificação e um polo.

Utilizando o teorema dos resíduos, podemos escrever

$$J_0 = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-1} f(z,r)$$

pois $z = -1$ *é a única singularidade que se encontra dentro do contorno* Γ*, logo a única a contribuir. Note que as outras duas singularidades* $z = 0$ *e* $z = 1$ *são pontos de ramificação e se encontram fora do con-*

torno Γ, logo não contribuem para a integral.

Passemos a calcular as integrais em separado. Para a primeira integral, parametrizamos a circunferência

$$z = R\,e^{i\theta} \qquad \longrightarrow \qquad \mathrm{d}z = iR\,e^{i\theta}\mathrm{d}\theta$$

de onde podemos escrever

$$\int_{C_R} f(z,r)\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{(R\,e^{i\theta})^{1-r}(1-R\,e^{i\theta})^r}{(1+R\,e^{i\theta})^3} iR\,e^{i\theta}\mathrm{d}\theta$$

ou ainda na seguinte forma

$$\int_{C_R} f(z,r)\,\mathrm{d}z = iR^{-1} \int_0^{2\pi} \frac{(e^{i\theta})^{1-r}\left(\frac{1}{R} - e^{i\theta}\right)^r}{\left(\frac{1}{R} + e^{i\theta}\right)^3} e^{i\theta}\mathrm{d}\theta.$$

Para a integral sobre C_1, utilizamos a parametrização

$$z - 1 = \epsilon e^{i\theta} \qquad \longrightarrow \qquad \mathrm{d}z = i\epsilon e^{i\theta}\mathrm{d}\theta$$

que substituída na integral fornece

$$\int_{C_1} f(z,r)\,\mathrm{d}z = i\epsilon^{1+r} \int_{\pi}^{-\pi} \frac{(1+\epsilon e^{i\theta})^{1-r}\left(-e^{i\theta}\right)^r}{\left(2+\epsilon e^{i\theta}\right)^3} e^{i\theta}\mathrm{d}\theta.$$

Por outro lado, para a integral em L_1 temos $z = x\,e^{2i\pi}$ de onde segue, já simplificando

$$\int_{L_1} f(x,r)\,\mathrm{d}x = e^{-2i\pi r} \int_{1-\epsilon}^{\epsilon} \frac{x^{1-r}(1-x)^r}{(1+x)^3}\mathrm{d}x.$$

Em analogia à integral sobre C_1, podemos escrever para a integral sobre C_0, a partir da parametrização

$$z = \epsilon e^{i\theta} \qquad \longrightarrow \qquad \mathrm{d}z = i\epsilon e^{i\theta}\mathrm{d}\theta$$

a seguinte igualdade

$$\int_{C_0} f(z,r)\,\mathrm{d}z = i\epsilon^{2-r}\int_{2\pi}^{0}\frac{(e^{i\theta})^{1-r}(1-\epsilon e^{i\theta})^r}{(1+\epsilon e^{i\theta})^3}e^{i\theta}\mathrm{d}\theta.$$

Por fim, agora em analogia à integral sobre L_1, a integral sobre L_2 é dada por

$$\int_{L_2} f(x,r)\,\mathrm{d}x = \int_{\epsilon}^{1-\epsilon}\frac{x^{1-r}(1-x)^r}{(1+x)^3}\mathrm{d}x.$$

Antes de passarmos ao cálculo do resíduo, pois não depende nem de R nem de ϵ, vamos considerar nas integrais anteriores os limites $R \to \infty$ e $\epsilon \to 0$, de modo que tenhamos, já rearrajando

$$J_0 = \left(1 - e^{-2i\pi r}\right)\int_0^1 \frac{x^{1-r}(1-x)^r}{(1+x)^3}\mathrm{d}x.$$

Passemos ao cálculo do resíduo. Note que $z = -1$ é um polo de ordem três, assim, devemos calcular o seguinte limite

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z,r) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left\{(z+1)^3\frac{z^{1-r}(1-z)^r}{(1+z)^3}\right\}$$

ou ainda, simplificando, na forma

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z,r) = \frac{1}{2} \lim_{z\to -1} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[z^{1-r}(1-z)^r\right].$$

Então, calculando as derivadas primeira e segunda e o limite, podemos escrever

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z,r) = r(1-r)\,2^{r-3}\,e^{-i\pi r}.$$

Assim, uma vez conhecido J_0 como a soma das integrais e J_0 como a soma (neste caso, somente um) dos resídios, temos

$$\left(1-e^{-2i\pi r}\right)\int_0^1 \frac{x^{1-r}(1-x)^r}{(1+x)^3}\mathrm{d}x = 2\pi i\, r(1-r)\,2^{r-3}\,e^{-i\pi r}$$

que, a partir da relação de Euler envolvendo o seno em termos das exponenciais, fornece

$$\int_0^1 \frac{x^{1-r}(1-x)^r}{(1+x)^3}\mathrm{d}x = \pi\,2^{r-3}\frac{r(1-r)}{\operatorname{sen}\pi r}$$

que é o resultado desejado. $\square$

Do lar 29. *Utilizando o resultado do* Exercício 9 *discuta os casos $r=0$ e $r=1$.*

Do lar 30. *Seja $-1 < r < 2$. Em analogia ao* Exercício 9, *mostre o seguinte resultado*

$$\int_0^1 \frac{x^{1-r}(1-x)^r}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi r}[2^{r-1}(2-r)-1].$$

Discuta os casos $r=0$ e $r=1$.

REF. E. Capelas de Oliveira, *Métodos Analíticos de Integração*, Editora Livraria da Física, São Paulo, (2010).

23 abril 21