Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada

Prova 1 da disciplina Biomatemática I (MT 624)
Prof. Dr. Wilson Castro Ferreira Júnior

Estudante: Fábio H. Carvalho (RA 232926)

Exercício 1: Determine o processo de mensuração de velocidade e de tempo com unidades padrão de comprimento e velocidade.

Solução: Consideremos L e V as unidades padrão de comprimento e velocidade, respectivamente. Como, por definição,

$$V = LT^{-1},$$

onde T é o tempo necessário para que o móvel com velocidade V percorra o comprimento L de acordo com a perspectiva do observador, podemos definir $T = LV^{-1}$ como a unidade padrão de medida do tempo. Assim, se um segundo móvel percorre o mesmo comprimento L em um tempo t podemos escrever

$$t = xT$$

onde x é um número real positivo ($0 < x < 1$, se o tempo de observação t é menor que a unidade T; $x = 1$ se o tempo é igual ao padrão estabelecido; e $x > 1$ se t é maior que T).

Neste caso, a velocidade v observada no percurso deste segundo móvel é

$$v = Lt^{-1} = L(xT)^{-1} = x^{-1}LT^{-1} = x^{-1}V.$$

Exercício 2: A medida da aceleração da gravidade g, (isto é, a a aceleração experimentada por um corpo submetido à atração da Terra na sua superfície), tem dimensão $[g] = LT^{-2}$, e, na medida $A = cm\ seg^{-2}$ mede $g = 980A$. Utilizando a representação algébrica, obtenha esta medida nas seguintes unidades compostas de aceleração $A_1 = L_1 T_1^{-2}$, onde $L_1 = 13cm$, $T_1 = 10^{-5}seg$, e genericamente na unidade composta $A_* = L_* T_*^{-2}$, onde $L_* = \lambda\ cm$, $T_* = \theta\ seg$.

Solução: De $A_1 = L_1 T_1^{-2} = 13 \times (10^{-5})^{-2} = 13 \times 10^{10} cm\ seg^{-2} = 13 \times 10^{10} A$ segue $A = 13^{-1} \times 10^{-10} A_1$. Portanto,

$$g = 980A = 980 \times 13^{-1} \times 10^{-10} A_1.$$

Analogamente, se $A_* = L_* T_*^{-2}$, é tal que $L_* = \lambda\ cm$, $T_* = \theta\ seg$, então $A_* = \lambda \times \theta^{-2} cm\ seg^{-2} = \lambda \times \theta^{-2} A$, e, logo,

$$A = \lambda^{-1} \times \theta^2 A_*.$$

Além disso,

$$g = 980A = 980 \times \lambda^{-1} \times \theta^2 A_*.$$

Exercício 3:
1 - Determinar as unidades compostas de Pressão (P), Energia (E) e Potência (W) a partir do conjunto (genérico) de unidades básicas: $\{M, L, T\}$, e de um outro conjunto $\{M_1 = \delta\ M,\ L_1 = b\ L,\ T_1 = c\ T\}$.
2 - Obtenha as unidades derivadas das unidades básicas para as seguintes medidas: 1) Área, Volume, Pressão, Densidade de Massa, Trabalho, Potência.

Solução:

1 - Por definição, pressão é a razão entre a força e a medida da área em que esta atua. Portanto, se M, L e T são as unidades básicas de massa, comprimento e tempo, respectivamente, temos $F = MLT^{-2}$ e, de $A = L^2$, segue

$$P = FA^{-1} = MLT^{-2}(L^2)^{-1} = ML^{-1}T^{-2}.$$

Caso sejam $M_1 = \delta M,\ L_1 = b\ L$, e $T_1 = c\ T$ temos:

$$P = \delta^{-1}M_1 \times \left(b^{-1}L_1\right)^{-1} \times \left(c^{-1}T_1\right)^{-2} = (\delta)^{-1}bc^2M_1L_1^{-1}T_1^{-2}.$$

Considerando a equação da energia cinética $E = 2^{-1}MV^2$, em que V é a velocidade, temos, em termos das unidades básicas,

$$E = 2^{-1}ML^2T^{-2},$$

e, considerando as unidades genéricas $M_1 = \delta M,\ L_1 = b\ L$, e $T_1 = c\ T$ temos:

$$E = 2^{-1}\delta^{-1}M_1\left(b^{-1}L_1\right)^2\left(c^{-1}T_1\right)^{-2} = (2\delta b^2)^{-1}c^2M_1L_1^2T_1^{-2}.$$

Finalmente, como potência é a razão entre energia e tempo temos nas unidades padrão

$$W = ET^{-1} = 2^{-1}ML^2T^{-3},$$

e, segundo as unidades genéricas,

$$W = (2\delta b^2)^{-1}c^2M_1L_1^2T_1^{-2} \times \left(c^{-1}T_1\right)^{-1} = (2\delta b^2)^{-1}c^3M_1L_1^2T_1^{-3}.$$

2 - Como utilizamos na parte 1, a unidade básica de área A é tal que $A = L^2$. Analogamente, $V = L^3$ é a unidade básica de volume.

Novamente como vimos em 1, $P = ML^{-1}T^{-2}$ é a unidade de pressão em termo das unidades básicas.

Como a densidade de massa é a razão entre massa e volume, $\rho = ML^{-3}$ é a unidade de densidade de massa em termo das unidades básicas.

Temos ainda que $T = ML^2T^{-2}$ e $W = ML^2T^{-3}$ são, respectivamente, a unidade de trabalho (T) e unidade de potência (W) em termo das unidades básicas.

Exercício 4: Supondo que a função matemática φ é continuamente diferenciável, obtenha uma segunda aproximação para o período: $T_0 \simeq \left(\varphi(0) + \varphi'(0)\dfrac{A}{l}\right)\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, calculando $\varphi'(0)$ usando uma expansão do parâmetro $\dfrac{A}{l} = \epsilon_1$ após adimensionalizar adequadamente o modelo diferencial da dinâmica do pêndulo: $m\dfrac{d^2(l\theta)}{dt^2} = -mg\ sen(\theta)$, (segunda lei de Newton tangencial), $l\theta(0) = A$, $\dfrac{d\theta}{dt}(0) = 0$ (condições iniciais).

Solução: Consideremos a equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$m\frac{d^2(l\theta)}{dt^2} = -mg\ sen(\theta).$$

Se consideramos as condições iniciais do pêndulo $l\theta_0 = A$, $\dfrac{d\theta}{dt}(0) = 0$ então, para pequenas oscilações de θ, como $sen(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots$, podemos considerar $sen(\theta) = \frac{A}{l} \approx \theta$, o que implica

$$\frac{d^2(l\theta)}{dt^2} = -g\theta,$$

isto é, $l\dfrac{d^2(\theta)}{dt^2} + g\theta = 0$, cuja solução geral é $\theta(t) = C_1 cos\left(t\sqrt{\dfrac{g}{l}}\right) + C_2 sen\left(t\sqrt{\dfrac{g}{l}}\right)$ e, das condições iniciais, segue imediatamente $C_2 = 0$ e $C_1 = \dfrac{A}{l}$.

Portanto, $\theta(t)=\dfrac{A}{l}cos\left(t\sqrt{\dfrac{g}{l}}\right)$, e o período é $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

Utilizaremos agora que, para h suficientemente pequeno

$$\theta(t) = \frac{\theta(t+h) - \theta(t-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2),$$

ou seja, que $\theta(t)$ pode ser aproximada pela fórmula de diferença centrada $\dfrac{\theta(t+h) - \theta(t-h)}{2h}$ cujo erro de aproximação é da ordem de h ao quadrado.

Temos:

$$\begin{aligned}\frac{\theta(t+h) - \theta(t-h)}{2h} &= \frac{A}{2lh}\left[cos\sqrt{\frac{g}{l}}(t+h) - cos\sqrt{\frac{g}{l}}(t-h)\right]\\ &= \frac{A}{2lh}\left[-2sen\sqrt{\frac{g}{l}}tsen\sqrt{\frac{g}{l}}h\right]\end{aligned}$$

Como h é suficientemente pequeno, podemos escrever $\theta(t) = \dfrac{A}{l}cos\left(t\sqrt{\dfrac{g}{l}}\right) \approx -\dfrac{A}{l}\sqrt{\dfrac{g}{l}}sen\left(t\sqrt{\dfrac{g}{l}}\right)$.

Assim, $\dfrac{A}{l}cos\left(t\sqrt{\dfrac{g}{l}}\right)+\dfrac{A}{l}\sqrt{\dfrac{g}{l}}sen\left(t\sqrt{\dfrac{g}{l}}\right) \approx 0$ e a aproximação do período $T = \varphi\left(\dfrac{A}{l}\right)\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ é

$$T_0 \approx \left(\varphi(0) + \varphi'(0)\frac{A}{l}\right)\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Exercício 5: Mostre que a a solução fundamental do problema de difusão em dimensão n é dada por:

$$\rho(x,t) \;=\; \frac{N_0}{(Dt)^{n/2}}\, exp\left(-\frac{||x||^2}{4Dt}\right) = \frac{N_0}{(Dt)^{n/2}}\, exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right) \qquad (0.1)$$

Solução: Consideremos a solução do problema difusivo n-dimensional conforme obtida nas Notas de Aula para $(n \leq 1)$ é

$$\rho(r,t) = \frac{N_0}{(Dt)^{n/2}}\varphi_n\left(\frac{r}{\sqrt{Dt}}\right),$$

em que a função φ satisfaz o "Princípio de Similaridade",

juntamente com a equação de difusão com simetria esférica também presente nas Notas de Aula

$$\frac{\partial\ \rho(r,t)}{\partial\ t} = D\left(\frac{n-1}{r}\frac{\partial\ \rho(r,t)}{\partial\ r} + \frac{\partial^2\ \rho(r,t)}{\partial\ r^2}\right).$$

Da primeira equação segue

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\ \rho(r,t)}{\partial\ t} &= -\frac{n}{2}\frac{N_0}{D^{n/2}\ t^{n/2+1}}\ \varphi_n\left(\frac{r}{\sqrt{Dt}}\right) + \frac{N_0}{D^{n/2}\ t^{n/2}}\ \varphi_n'\left(\frac{r}{\sqrt{Dt}}\right)\frac{r}{\sqrt{D}}\left(-\frac{1}{2}\right)\ t^{-3/2} \\
&= D\left(\frac{n-1}{r}\frac{\partial\ \rho(r,t)}{\partial\ r} + \frac{\partial^2\ \rho(r,t)}{\partial\ r^2}\right) \\
&= D\left[\frac{n-1}{r}\frac{N_0}{D^{n/2}\ t^{n/2}}\varphi_n'\left(\frac{r}{\sqrt{Dt}}\right)\frac{1}{\sqrt{D\ t}} + \frac{N_0}{D^{n/2}\ t^{n/2}}\varphi_n''\left(\frac{r}{\sqrt{Dt}}\right)\frac{1}{D\ t}\right]
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$D\left(\frac{n-1}{r}\frac{\partial\ \rho(r,t)}{\partial\ r} + \frac{\partial^2\ \rho(r,t)}{\partial\ r^2}\right) =$$

$$= D\left[\frac{n-1}{r}\frac{N_0}{D^{n/2}\ t^{n/2}}\varphi_n'\left(\frac{r}{\sqrt{Dt}}\right)\frac{1}{\sqrt{D\ t}} + \frac{N_0}{D^{n/2}\ t^{n/2}}\varphi_n''\left(\frac{r}{\sqrt{Dt}}\right)\frac{1}{D\ t}\right].$$

Agora, derivando em relação a r esta última equação, obtemos

$$-\frac{n}{2}\frac{1}{D^{n/2}\ t^{n/2+1}}\ \varphi_n\left(\frac{r}{\sqrt{Dt}}\right) - \frac{1}{2}\frac{r}{D^{n/2+1/2}\ t^{n/2+3/2}}\varphi_n'\left(\frac{r}{\sqrt{Dt}}\right) =$$

$$= D\frac{n-1}{r\ D^{n/2+1/2}\ t^{n/2+1/2}}\varphi_n'\left(\frac{r}{\sqrt{Dt}}\right) + \frac{D}{D^{n/2+1}\ t^{n/2+1}}\varphi_n''\left(\frac{r}{\sqrt{Dt}}\right),$$

que multiplicada por $r^{n+2}D^{-1}$ em ambos os membros resulta em

$$-\frac{n}{2}\frac{r^{n+2}}{D^{n/2+1}\ t^{n/2+1}}\ \varphi_n\left(\frac{r}{\sqrt{Dt}}\right) - \frac{1}{2}\frac{r^{n+3}}{D^{n/2+3/2}\ t^{n/2+3/2}}\varphi_n'\left(\frac{r}{\sqrt{Dt}}\right) =$$

$$= (n-1)\frac{r^{n+1}}{D^{n/2+1/2}\ t^{n/2+1/2}}\varphi_n'\left(\frac{r}{\sqrt{Dt}}\right) + \frac{r^{n+2}}{D^{n/2+1}\ t^{n/2+1}}\varphi_n''\left(\frac{r}{\sqrt{Dt}}\right).$$

Agora, fazendo $\zeta = \dfrac{r}{\sqrt{D\ t}}$, segue

$$-\frac{n}{2}\zeta^{n+2}\varphi_n(\zeta) - \frac{1}{2}\zeta^{n+3}\varphi_n'(\zeta) = (n-1)\zeta^{n+1}\varphi_n'(\zeta) + \zeta^{n+2}\varphi_n''(\zeta),$$

a qual podemos multiplicar por $2\zeta^{-3}$ obtendo

$$n\zeta^{n-1}\varphi_n(\zeta) + \zeta^n\varphi_n'(\zeta) + 2(n-1)\zeta^{n-2}\varphi_n'(\zeta) + 2\zeta^{n-1}\varphi_n''(\zeta) = 0.$$

Portanto,

$$\frac{d}{d\zeta}\Big(\zeta^n\varphi_n(\zeta) + 2\zeta^{n-1}\varphi_n'(\zeta)\Big) = 0$$

o que significa que

$$\zeta^n\varphi_n(\zeta) + 2\zeta^{n-1}\varphi_n'(\zeta) = K = cte,$$

onde $K = 0$ na fronteira.

Logo, supondo $\zeta \neq 0$, podemos escrever $\dfrac{\zeta}{2}\varphi_n(\zeta) + \varphi_n'(\zeta) = 0$ e, ainda, $\dfrac{\zeta}{2}e^{\left(\zeta^2/4\right)}\varphi_n(\zeta) + e^{\left(\zeta^2/4\right)}\varphi_n'(\zeta) = 0$, isto é, $\dfrac{d}{d\zeta}e^{\left(\zeta^2/4\right)}\varphi_n(\zeta) = 0$. Então, podemos escrever

$$\varphi_n(\zeta) = ce^{-\left(\zeta^2/4\right)}.$$

Isto é, $\varphi_n(\zeta) = ce^{-\left[r^2/(4Dt)\right]}$.

Então,

$$\rho(x,t) = \frac{N_0}{(Dt)^{n/2}}\ exp\left(-\frac{||x||^2}{4Dt}\right) = \frac{N_0}{(Dt)^{n/2}}\ exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right).$$