PROVA 02: MS680-MT624- II Sem 2020

POSTADA: 22 de Dezembro de 2020 (Terça-feira)
RECEBIMENTO: 03 de Janeiro de 2021 (Domingo)
ATENÇÃO:

ESCOLHA (apenas) 06 DENTRE AS 12+1 QUESTÕES DA LISTA ABAIXO.

1-As Questões devem ser encaradas como oportunidades para demonstrar conhecimento não como perguntas.

Precisão e **Concisão** serão qualidades avaliadas.

2-A **Redação** de cada Prova deve apresentar a forma de um depoimento **pessoal** distinto.Caso ocorram, todas as cópias envolvidas serão invalidadas.

3-Cada Questão resolvida deve ser precedida de seu respectivo Enunciado Original completo.

4-A Resolução deve ser **digitalizada** em um **único documento pdf** (*Manuscritos* **NÃO** serão aceitos!)

5-O documento pdf da Resolução deve ser enviado no **Anexo** de uma mensagem com título "**PROVA 02**" para o endereço eletrônico: *wilson@unicamp.br*

6-**Antes** das 24hs do dia 03 de janeiro. (Sugestão: Não deixe para a última hora e evite ser responsabilizado por acidentes)

1-Questão 1- A Psicologia da Matematização: *Ockham(sec.13)&Kanizsa(sec.20), Galileo(sec.17)&Newton(sec.17-18)*

1a-Descreva o "*Efeito de Completamento (Interpolação) Visual*" ("*Efeito Kanizsa*") em poucas linhas e exemplifique-o com o famoso triângulo de Kanizsa e especialmente com a visualização de *formas* sugeridas por uma sequência de pontos.

1b-Argumente com base no "*Efeito Kanizsa*" sobre a motivação cognitiva da representação contínua para dinâmicas de grandes populações. Como se explica evolutivamente a preferência cognitiva da espécie humana por registrar *informações discretas* em termos (reduzidos) como "*formas geométricas*"?

1c-Descreva a Metodologia funcional de Galileo e justifique-a em termos do que foi discutido em 1a-b.

1d-Descreva o grande aperfeiçoamento da Metodologia de Galileo realizada por

Newton. (Sugestão: Biblioteca de funções)

1e-Descreva o "*Principio de Parcimônia de Ockham*" e discuta a sua conexão com a cognição humana, especialmente com o item 1b.

1f-Exemplifique os itens 1b-c com dados de mortalidade da COVID19 em 2020 para uma grande comunidade durante aproximadamente 1 ano.

Questão 2- *Escala Logaritmica na Aproximação Assintótica: Princípio Sensorial ("Lei") de Weber-Fechner(sec.19)*

2a-Descreva o "*Princípio Sensorial ("Lei") de Weber-Fechner*" para a percepção visual, auditiva, táctil, olfativa e de cardinalidade.

2b-Argumente com base no "Princípio de Weber-Fechner" sobre a conveniência cognitiva da escala logaritmica para variáveis com "grandes" valores.

2c-Aplique a escala logaritmica para o registro numérico da população do exemplo citado no item 1f acima e caracterize os periodos de tempo em que o comportamento é linear (Malthusiano).

2c-Mostre que, para duas sequencias de numeros positivos, $\{a_k \to \infty\}$ e $\{b_k \to \infty\}$, então valem as seguintes implicações para a

aproximação assintótica em escala logaritmica

$$\log a_k - \log b_k \to 0 \Leftrightarrow \log \frac{a_k}{b_k} \to 0 \Leftrightarrow \frac{a_k}{b_k} \to 1$$

2d-Mostre que a aproximação assintótica na escala logaritmica não implica necessariamente na aproximação assintótica em escala normal (isto é, $a_k - b_k \to 0$) , mas vale a implicação inversa. (Sugestão: Analise a igualdade $a_k - b_k = a_k(1 - \frac{a_k}{b_k})$ e observe que $a_k - b_k \to 0 \Leftrightarrow \frac{a_k}{b_k}$ se aproxima de 1 com um erro de $o(\frac{1}{a_k})$, isto é, de "ordem menor do que $\frac{1}{a_k}$". Assim, para sequencias que convergem para ∞ é mais interessante analisar a aproximação assintótica logaritmica, pois ela é mais abrangente e tem um fundo cognitivo. Além disso, para dois" *trens* em alta velocidade uma aproximação na escala simples é extremamente perigosa"!)

Questão 3-*Linearização Logaritmica Assintótica*

-Definições:

1-Diz-se que um Modelo Populacional, $P : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, é **Malthusiano** se para algum A e γ, se tem $\frac{P(k)}{Ae^{\gamma k}} = 1$ para todo k, ou, equivalentemente, se $P(k) = Ae^{\gamma k}$.

2-Diz-se que um Modelo Populacional é **Assintoticamente Malthusiano** se para algum A e γ, se tem $\frac{P(k)}{Ae^{\gamma k}} \to 1$, para $k \to \infty$, ou, equivalentemente, $P(k) = Ae^{\gamma k}(1 + \varepsilon(k))$ para $\varepsilon(k) \underset{k\to\infty}{\to} 0.$

3-Diz-se que uma função $P : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, é **Assintoticamente Linearizada na escala logaritmica** se $\lim_{k\to\infty} \{\log|P(k)| - (\alpha + \gamma k)\} = 0$ para algum α, γ.

4-Diz-se que uma Relação funcional $V = f(X)$ pode ser **Linearizada** (exatamente) se existirem funções inversiveis $v = \psi(V)$ e $x = \varphi(X)$ de tal forma que $v = ax + b$. em algum dominio.

5–Diz-se que uma Relação funcional $v = f(x)$ pode ser **Linearizada assintótica e localmente** nas vizinhanças de $x = 0$ se $v = a + bx + o(x)$ paral algum a, b. (Obs-Segundo Leibniz, uma função $h(x)$ é dita um infinitésimo de ordem menor do que x, e escreve-se, $o(x)$ se for possivel representá-la na forma $h(x) = x\,\varepsilon(x)$, onde, $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$..

3a-Considere uma Tabela de dados demográficos representada pela função $P : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, cuja população quando medida na escala logaritmica na forma $p(k) = \log P(k)$, exibe um gráfico aproximadamente linear (isto é, $p(k) = (\alpha + \beta k) + \varepsilon$, com $\varepsilon \approx 0$ para alguma faixa de valores de k). Mostre como esta Dinâmica Populacional pode ser considerada aproximadamente Malthusiana nesta faixa de valores de k.

3b-Descreva o Método Numérico de Gauss ("mínimos quadrados") comumente utilizado para determinar a reta que "melhor aproxima" uma Tabela de dados e descreva como este Método pode ser utilizado para a formulação de um Modelo Malthusiano.

3c-Considere uma População medida na escala logarítmica $\log P(k) = p(k)$. Mostre que uma aproximação linear **assintótica** na escala logaritmica de uma população (isto é, $\log P(k) - (\gamma k + \beta) \to 0$,para $k \to \infty$) **não** implica em um Modelo Malthusiano, mas *apena*s um Modelo Assintoticamente Malthusiano. (Sugestão: veja o proximo exercicio).

3d-Mostre **quando** uma população $P(k)$ descrita pelo Modelo de Fibonacci é Malthusiana e **quando** ela é *apenas* assintoticamente Malthusiana.(Sugestão: Analise as possiveis soluções a depender das condições iniciais).

3e-Considere uma função "racional bilinear" $V = \frac{AX}{CX+D}$. Mostre que é possivel "linearizar exatamente" a relação entre as variaveis V e X tomando transformações $v = \frac{1}{V}$ e $x = \frac{1}{X}$, de tal forma que entre as "novas variáveis" resulte uma relação funcional de primeiro grau ($v = a + bx$) ("*linear*).

3f-Mostre que qualquer função diferenciável nas vizinhanças da origem pode ser localmente linearizada e vice-versa.

Questão4: *Tempo Médio (Aritmético) de Sobrevivência*

4a-Defina Média Aritmética Ponderada $M_A(a_1, \ldots, a_N)$ para uma sequência de dados numéricos $a_k > 0$. Discuta a razão de se dizer que uma Média Aritmética A é **uma única** informação numérica **populacional** que substitui (reduzindo) um conjunto (Tabela) de **várias** informações numéricas **individuais**, a_k. Argumente com base nesta distinção sobre a (usual) insensatez de se afirmar que um **casal** brasileiro tem em média, por exemplo, $1,44$ filhos.

4b-Segundo um Teorema de Kolmogorov-Nagumo(1933) todas as "Médias" sobre uma sequência de dados numéricos $a_k > 0$ (conceito que pode ser facilmente definido por algumas poucas propriedades bem caracteristicas) são da forma $M_\phi(a_1, \ldots, a_N) = \phi^{-1}(M_A(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_N))$ onde ϕ é uma função real estritamente convexa inversível e M_A é uma Média Aritmética. Mostre a veracidade desta afirmação com respeito às médias, *Aritmética*, *Harmônica*, *Geométrica* e *Quadrática*.

4c-Interprete o Método de Quadrados Mínimos de Gauss em termos de uma Média Quadrática.

4d-Dada uma sequência de números positivos a $= \{a_k\}$ obtenha, argumentando geometricamente, uma relação de ordem entre suas Médias Aritmética,$M_A(a)$, Harmônica,$M_h(a)$, Geométrica, $M_g(a)$ e Quadrática, $M_2(a)$. (Utilize uma sequencia de apenas dois números para seus argumentos).

4e-Mostre que, a depender da escolha da média de Kolmogorov-Nagumo, pode-se dizer que a média de filhos de um casal brasileiro pode ser qualquer número real entre $m = \min\{a_k\}$ e $M = \max\{a_k\}$ onde a_k ="$Número\ de\ casais\ com\ k\ filhos$" .

Questão 5 : T*empo Médio (Aritmético) de Sobrevivência de uma Populaç*ão

D**efiniçã**o: Dado um Modelo populacional especificamente de mortalidade $N(t)$ tal que $\frac{dN}{dt} < 0$ e $\lim_{t\to\infty} N(t) = 0$, diz-se que o valor (finito ou infinito) da integral $\left(\frac{1}{N_0}\int_0^{\infty} -t\frac{dN}{dt}dt\right)$ é denominado Tempo Médio (Aritmético) de Sobrevivência da População.

5a-**Argumente** sobre a motivação para que a expressão $\left(\frac{1}{N_0}\int_0^{\infty} -t\frac{dN}{dt}dt = \frac{1}{N_0}\int_0^{N_0} tdN\right)$, que se refere a uma dinâmica $N(t)$ decrescente de uma (Grande) população (sem natalidade e migração) inicialmente com $N(0) = N_0$ indivíduos, possa **ser interpretada** como o tempo médio (aritmético) de sobrevivencia desta população.

5b-**Calcule** o Tempo Médio (Aritmetico) de sobrevivência de uma população Malthusiana (isto é, descrita segundo o Modelo Newtoniano $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = -\mu$, $N(0) = N_0$) e mostre que este valor **independe** de N_0. **Discuta** o significado biológico deste resultado.

5c-**Calcule** o tempo médio (aritmético) de sobrevivência de uma população cuja dinâmica de Mortalidade é descrita por uma função quase-polinomial $N(t) = q(t)e^{-\mu t}$, onde $q(t) = N_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k t^k$ é um polinômio e $\mu > 0$.(Sugestão:Calcule explicitamente as integrais $I(n) = \int_0^{\infty} t^n e^{-\mu t}dt$ recursivamente em n e utilizando integrações por partes)

5d-O mesmo para $N(t) = \frac{N_0}{t+1}$.

Questão 6: Mortalidade por Predação Periférica e *Efeito de Rebanho Egoista*: (Dois "amigos" em um campo de cerrado e uma onça esfomeada. Um deles, para e toma seu tempo para amarrar bem o calçado. O outro, apressado, lhe repreende:"*Vamos correr logo que a onça é mais rápida do que nós*!". O Amigo (da onça): "*Eu não preciso correr mais do que a onça, eu preciso correr mais do que você*!".Ditado caboclo: "*Mingau quente, se come pelas beiradas*".

Considere uma população distribuida uniformemente em uma região delimitada no plano descrita por uma função diferenciável $N(t)$ cuja mortalidade é causada unicamente por uma predação "*periféric*a" da forma $p(N) = -\mu\sqrt{N}$, caracterizada matematicamente segundo a Metodologia Newtoniana pela equação diferencial: $\frac{dN}{dt} = -\mu\sqrt{N}$. (A justificativa da função de mortalidade na forma $p(N) = -\mu\sqrt{N}$ para predação "periférica" se deve ao fato de que um grupo uniformemente distribuido em uma região delimitada do plano é predado apenas na fronteira, cuja extensão tem medida da ordem da dimensão linear da região, enquanto que a área, que é proporcional à população, é da ordem do quadrado da medida linear e, portanto, a fronteira é da ordem de $N^{\frac{1}{2}}$. O formato da região pode ser considerado aproximadamente um disco(2D) ou uma esfera(3D) porque estas são as formas que apresentam menor extensão de fronteira para um mesmo conteudo populacional.(Por exemplo, sapos na beira da lagoa diante da ameaça de cobras, ou rebanho de ovelhas diante de lobos).

Definição: Diz-se que uma Dinâmica de mortalidade apresenta o "***Efeito de Rebanho Egoista***"(*)quando a mortalidade especifica ("per capita" $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = f(N)$) **diminui** com o aumento do tamanho do grupo, em outros termos, um individuo se sente particularmente mais "protegido" em um grupo maior; por isso ele se junta aos *vencedores*.. (*)Termo introduzido por W.Hamilton no antológico artigo: -*The Selfish Herd*, J.Theor.Biol 1970).

6a-Argumente como o conceito de "*Efeito Rebanho Egoista*" pode ser interpretado em termos do Tempo Médio de Sobrevivencia.

6b-Mostre que não há "*Efeito Rebanho Egoista*" em uma população cuja mortalidade é unicamente Malthusiana.

6c-Descreva uma Dinâmica Adimensional de mortalidade por predação periférica para um grupo populacional que ocupa uma região delimitada do espaço físico **tridimensional**. (Por exemplo, um cardume de Sardinhas e Baleias) e verifique se esta dinâmica apresenta um "*Efeito Rebanho Egoista*" e é dizimada em tempo finito.

6d-Considere uma população com predação per capita tipo Holling II: $p(N) = \frac{A}{B+N}$. Adimensionalize a equação e verifique se ocorre um "Efeito Rebanho" nesta dinâmica.

6e-Discuta o comportamento individual das presas em termos de uma proteção por agrupamento com base na percepção de cardinalidade segundo a "L*ei de Weber-Fechn*er" .

Questão 7-

7a–**Utilizando o Método Operacional** explicado no texto, obtenha uma expressão explícita (em termos de integrais) da solução da Equação de (Euler-Malthus) Verhulst $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r(t) - \lambda(t)N$, onde $r(t)$ e $\lambda(t)$ são funções reais positivas.

(Sugestão: Utilize a transformação linearizadora $m = \frac{1}{N}$ seguida pelo Método Operacional).

7b-Apresente um cenário biológico que indique a utilização desta equação como Modelo Matemático para uma Dinâmica Populacional.

7c-Considere uma população cujo tamanho $N(t)$ é regulado pelo chamado Modelo de Euler-Verhulst, $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r - \lambda N$ (isto é, com taxa de natalidade Malthusiana (per capita) r e mortalidade (per capita) λN, $r, \lambda > 0$ constantes) que se inicia com uma população "**colonizadora**" de $N_0 = N(0)$ indivíduos. Considere a decrescente população $n(t)$ dos indivíduos colonizadores ($n(0) = N_0$) submetidos à taxa de mortalidade ambiente.(Os descendentes de colonizadores não são colonizadores mas fazem parte da população ambiente!). Obtenha uma expressão para a dinâmica desta população $n(t)$ de colonizadores e mostre que o tempo médio de sobrevivência neste caso, apresenta uma dependencia do tamanho da população inicial N_0, indicando um fenômeno interativo no processo de mortalidade.

Questão 8-*Sistemas Malthusianos com Acoplamento Sequencial* ($\ldots A_1 \overset{\mu_1}{\to} A_2 \overset{\mu_2}{\to} A_3 \ldots\ldots\ldots A_n \overset{\mu_n}{\to} A_{n+1} \ldots.$)

Considere um sistema de compartimentos sequencialmente acoplados com dinâmicas Malthusianas.

8a-Supondo uma sequencia com N compartimentos,$1 \leq k \leq N$ com $\mu_N = 0$, escreva o Modelo deste sistema na forma de Equações Diferenciais Ordinárias (acopladas) $\frac{dA}{dt} = DA = MA$, e Operacional $(D - M)A = 0$ identificando a matriz **numérica** M, e a matriz **operacional** $m(D) = D - A.\ (\frac{d}{dt} \equiv D)$

8b-Se $N = 3$ e $\mu_k = \mu > 0$ obtenha as expressões analiticas elementares para as soluções $A(t) = (A_1, A_2, A_3)^t = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$, resolvendo antes as equações desacopladas $\det m(D)x = 0$. (Refer. Bassanezi-Ferreira).

8c- Mostre que, em geral, $A_k(t) \to 0$ exponencialmente, como $t^2 e^{-\mu t}$, isto é, $\lim_{t\to\infty} \frac{A_k(t)}{t^2 e^{-\mu t}} = c \neq 0$.

8d-Determine o tempo médio (aritmético) que estas particulas/organismos permanecem no sistema de compartimentos se inicialmente todas elas estão no primeiro no primeiro compartimento $A_1(0) = 1, A_k(0) = 0, k > 1$.

8e-Determine a relação entre o tempo médio (aritmético) de permanência destas partículas/organismos no sistema em termos da sua distribuição inicial, $A_k(0) = A_{k0}$.

Questão 9- *Modelos Efetivos*

9a-Considere uma população de individuos não interativos formada por uma mistura de subpopulações Malthusianas (homogênas e não interativas) A_k , sendo T_k seu respectivo tempo médio (aritmético) de sobrevivencia. Considere agora a população total $A(t) = \sum A_k(t)$ que obviamente decresce. Mostre que o tempo médio (aritmético) de sobrevivência da população misturada A é dado pela Média (aritmtética) ponderada de T_k.

9b-Considere agora uma descrição da dinâmica de uma população "Malthusianamente heterogênea" por um "Modelo Malthusiano Efetivo" , isto é, da forma $\frac{dA}{dt} = -\mu A$. Argumente sobre o fato de que neste caso a "melhor escolha" para o coeficiente μ do Modelo diferencial seria a **média harmônica** dos coeficientes μ_k.

9c-Analise a mesma questão supondo que a população total é formada por N subpopulações sequencialmente acopladas na forma ($A_1 \overset{\mu_1}{\to} A_2 \overset{\mu_2}{\to} A_3 \ldots\ldots\ldots A_{N-1} \overset{\mu_{N-1}}{\to} A_N$), $\mu_N = 0$.

Questão 10-*Sistemas Malthusianos com Acoplamentos Multilaterais (Difusivos)*

Considere um sistema de N compartimentos $\{A_k\}_{1\leq k\leq N}$ conectados sequencialmente e simetricamente por dinâmicas Malthusianas bilaterais como no seguinte esquema

$$A_0 \underset{\mu_0}{\overset{\mu}{\leftrightarrows}} A_1 \overset{\mu}{\leftrightarrow} A_2 \overset{\mu}{\leftrightarrow} A_3 \overset{\mu}{\leftrightarrow} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \overset{\mu}{\leftrightarrow} A_{N-1} \overset{\mu}{\leftrightarrow} A_N \overset{\mu_N}{\leftrightarrow} A_{N+1}$$

10a-Mostre que um compartimento interior A_k , $2 \leq k \leq N-1$, é regido pela seguinte equação: $\frac{dA_k}{dt} = -2\mu A_k + \mu A_{k-1} + \mu A_{k+1}$.

10b-Obtenha a dinâmica do compartimento A_N que está obstruído à direita (isto é, não perde nem ganha população de A_{N+1}). Diz-se também que é reflexivo, ou que $\mu_N = 0$.

10c-Obtenha a dinâmica do compartimento A_1 que somente perde indivíduos para o compartimento A_0 e não recebe nada do mesmo, isto é, $\mu_0 = 0$, Interprete este fato como a existência de um "deserto" em A_0.

10d-Escreva a dinâmica de todo o sistema acoplado na forma matricial $\frac{dA}{dt} = SA$, $A = (A_1, \ldots, A_N)^t$ e mostre que a matriz S é simétrica e tridiagonal.

10d-Mostre que $n(t) = \sum_{k=1}^{k=N} A_k$ é monotonicamente decrescente, isto é, $\frac{dn}{dt} < 0$.

(Sugestão: $\frac{dn}{dt} = \frac{d}{dt}\langle A, 1\rangle = \left\langle \frac{dA}{dt}, 1 \right\rangle = \langle SA, 1\rangle < 0$).

10f-Na verdade, mostre que $n(t)$ é exponencialmente decrescente, isto é, existe $\lambda > 0$ tal que $\lim_{t\to\infty} \frac{n(t)}{e^{-\lambda t}} = c > 0$.

10g-Utilize o Método de Fourier para mostrar que a solução geral do sistema acima pode ser escrito na forma: $A(t) = \sum_{k=1}^{k=N} c_k e^{\lambda_k t}$, verificando como determinar algebricamente os coeficientes c_k e os parâmetros λ_k e mostrando que $\lambda_k < 0,\ 1 \le k \le N$.

10h-Argumente sobre a propriedade "homogeneizadora" desta dinâmica no sentido de que todos $A_k(t)$ convergem para uma média.

Obs: O Método de Fourier resolve completamente o Sistema de EDOs utilizando combinações lineares de soluções básicas $e^{\lambda t} v$ para o Sistema, onde λ é autovalor da matriz simétrica S e v o seu autovetor correspondente, $Sv = \lambda v$. Lembre-se do Teorema Espectral para matrizes simétricas que garante a expansão de qualquer vetor u na forma , $u = \sum a_k v^{(k)}$ onde $v^{(k)}$ é base ortonormal de autovetores de S.

Questão 11-*Acoplamento Difusivo de Dinâmicas Malthusianas*

Considere um Grafo com 4 vértices,3 localizados nas quinas de um triângulo e 1 deles , A_0, no seu centro. Cada vértice A_k das quinas é conectado bilateralmente aos seus dois adjacentes, A_{k-1} e A_{k+1} e todos, da mesma forma, ao centro A_0 por uma dinâmica Malthusiana com o mesmo parâmetro μ em todas as direções.

11a-Escreva a dinâmica do sistema $A = (A_1, A_2, A_3, A_0)^t$ na forma matricial, $\frac{dA}{dt} = SA$

11b-Mostre que S é simétrica e tem autovalor nulo com autovetor $1 = (1, \ldots, 1)$.

11c-Mostre que $n(t) = \sum_{k=0}^{k=4} A_k(t)$ é constante e que $\lim_{t\to\infty} A(t) = n(0)(1, \ldots, 1)$.

Questão 12-

12a-Mostre que em uma dinâmica Malthusiana com parâmetros μ, ν constantes a **operação funcional** "*Multiplicação d*e $N(t)$ por $e^{-\mu T}$" produz um resultado (função) que representa " O número de sobreviventes dos individuos $N(t)$ após um intervalo de tempo T" . Inteprete analogamente as operações funcionais "*Multiplicação po*r $(1 - e^{-\mu T})$ " e "*Multiplicação po*r $e^{\nu T}$ ".

12b-Interprete probabilisticamente a operação sobre uma dinâmica Malthusiana $N(t)$ definida pela operação funcional resultante da multiplicação por $\frac{(1-e^{-\mu T})}{N(t)}$

12c-Considere uma população estruturada em duas faixas etárias, como no problema de Fibonacci, uma delas imatura, $A_1(t)$ com dinâmica contínua de mortalidade Malthusiana e outra reprodutiva, $A_2(t)$, com dinâmica contínua de mortalidade e reprodutividade também Malthusiana.

A**rgumente *convincentemente*** sobre o significado da expressão de cada termo e parâmetro do Modelo Matemático para a Dinâmica desta população expresso segundo o sistema de Equações Diferenciais Ordinárias com retardamento:

$$\frac{dA_1(t)}{dt} = \nu A_2(t) - \mu_1 A_1(t) - e^{-\mu_1 T_0}\nu A_2(t - T_0)$$
$$\frac{dA_2(t)}{dt} = e^{-\mu_1 T_0}\nu A_2(t - T_0) - \mu_2 A_2(t)$$

12d-Suponha que T_0 seja "*muito pequeno*" comparado com as outras unidades intrínsecas de tempo ($\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\mu_k}$) do Modelo Malthusiano com retardamento e substitua a expressão $A_2(t - T_0)$ por sua aproximação de Taylor:
$A_2(t - T_0) = A_2(t) - T_0 A_2^{/}(t) + \frac{T_0^2}{2} A_2^{//}(t)$ obtendo um sistema de equações diferenciais ordinárias (não retardadas).

12e-Utilize o Método Operacional e reescreva o Sistema de EDO obtido anteriormente na forma matricial operacional $P(D)\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$ e obtenha expressões elementares gerais para as funções $A_j(t)$ soluções do Sistema.

QUESTÃO EXTRA 1: *Hipótese(Gauss-Legendre ~1796)-Teorema(Hadamard-de la Vallé-Poussin 1896) sobre a densidade dos Números Primos*

A-Considere o Teorema de Distribuição Assintótica (da densidade da População) de Números Primos em $\mathbb{N}$, descrita pela função $\rho(n) = \frac{\pi(n)}{n}$, onde $\pi(n) = \#\{$N*úmeros primos* $p \leq n\}$ em termos de uma *linearização logarítmica assintótica* utilizando uma Tabela de Números Primos (encontrada, por exemplo, no valioso M.Abramowitz&I.Stegun-*Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Table*s -online).(Sugestão: Como é fácil ver pela tabela que $\frac{1}{\rho(n)} = \frac{n}{\pi(n)} \to \infty$ mais "lentamente" do que $n \to \infty$ re-escale a variável "independente" n "logaritmizando-a" e analise o gráfico de $\frac{1}{\rho(n)}$ em função de $\log n$).

B-Interprete a questão em termos do Princípio Sensorial ("*Lei*") de *Weber-Fechner*.