MODELOS MATEMÁTICOS- CAP. II B - *Princípio de Malthus: Variações*

Wilson Castro Ferreira Jr.-IMECC–Unicamp- 2020

IV-VARIAÇÕES SOBRE O MODELO MALTHUSIANO: *Relaxamento da Homogeneidade e Independência*

1-Interação Indireta: Resgate da Doutrina de Malthus- Verhulst-Tragédia dos Comuns-Hardin-Ostrom-Lotka-Volterra,Nowak&-MetodoGeom

2-Heterogeneidade:Maturidade Retardada em Modelo Discreto- Fibonacci-Euler-Equações Recirsivas-Método F.Geradoras/Momentos

3-Heterogeneidade:Maturidade Retardada em Modelo Continuo-Diferencial-Lotka-Oscil&Caos-(Ref-Nelson-Mikhailov/Forys)

4-Heterogeneidade e Independencia-Modelo Efetivo- Método Assint. de Multiplas Escalas-Média Harmônica

5-Heterogeneidade e Acoplamento Dirigido (Cadeias)-Método de Fourier/Oper.-Método F.Geradoras

6-Heterogeneidade e Acoplamento Mutuo (Difusivo)-Grafos-Metodos Oper/Fourier/F.Ger-(Gunawardena-

7-Heterogeneidade-Processos Sociais(Young)

8-Influencia Externa- Metodo Oper-Método Assint.Condensação/Lagrange

9-Influencia Externa Estocástica-Langevin

10-Influencia Externa (?) Estocastica-Modelo de Lapicque-Neuronio Carga&Descarga-Peskin-Knight-Dayan-

11-Pequenas Populações:Modelos Probabilisticos-Mutação e Decisão: DelbruckLuria-Kirman.. -Metodo F.Ger.

12-Pequenas Populações: Modelos Probabilisticos: Eq. Kolmogorov-Fokker-Planck- Metodo F.Geradoras

.

O Modelo Malthusiano é uma pedra angular a partir do qual, seguindo os Princípios de Comenius e de Ockham, procede-se com o relaxamento parcimonioso, progressivo e argumentativo das restrições impostas pelas hipóteses de Homogeneidade e Independencia que o caracterizam, resultando deste procedimento Modelos Matemáticos mais inclusivos e representativos de uma gama ampliada de fenômenos biológicos.

.

IV.1-INTERAÇÃO INDIRETA UNIFORME:

Resgate da Doutrina de Malthus, o Modelo (Malthus-) Verhulst e a Tragédia dos Comuns

"A*ssuming then, my postulata as granted, I say, that the power of population is indefinitely greater than the power in the Earth to produce subsistence for man. Population when unchecked, increases in a geometrical ratio.* **Subsistence increases only in arithmetical ratio**". (Th.R.Malthus "*Population: The first Essay*", London, june 7, 1798, Chap.I, pg. 5)

A ressalva sobre a lenta (Aritmética) produção de meios de subsistencia que Malthus tão bem enfatizou logo no início de seu trabalho ("S*ubsistence increases only in arithmetical ratio*") foi amplamente ignorada em detrimento do aspecto mais espetacular do crescimento Geométrico (exponencial) da população. Esta flagrante injustiça intelectual com relação ao exposto na sua Doutrina foi ideologicamente explorada *ad nauseam* ao longo da história e suas previsões catastróficas imputadas a uma má fé do seu autor.

Sob o ponto de vista cientifico e pedagógico a identificação pura e simples da "Doutrina Malthusiana" com a equação diferencial $\frac{dN}{dt} = \nu N$, e sua solução exponencial $N(t) = N_0 e^{\nu t}$, eliminou uma excelente oportunidade para abordar diversos aspectos interessantes e profundos sugeridos neste trabalho, o que somente veio a ocorrer muito mais tarde.

Nesta seção a Doutrina de Malthus será apresentada matematicamente em sua versão original que leva em conta a ressalva sobre as taxas distintas de **reprodução** populacional a **produção** de nutrientes.

Inicialmente, observa-se que sendo o transcurso do tempo representado discretamente em periodos regulares, a expressão "*Arithmetical ratio*" utilizada por Malthus significa,de acordo com a linguagem da época, que denotando $R(k)$ por medida da quantidade de recursos de subsistencia no instante k então $R(k) = R_0 + \lambda k$, ou seja, ela é representada por uma "*progressão aritmética*", enquanto que a população $P(k) = \gamma^k P_0$ é uma "*progressão geométrica*". Em um modelo diferencial com o tempo registrado continuamente a produção "*aritmética*" de recursos toma a forma: $R(t) = R_0 + \lambda t$.

Embora Malthus não tenha argumentado explicitamente a respeito da pprodução "aritmética" de recursos, a hipótese de uma **taxa** média constante para produção de nutrientes em uma região e durante um longo período de tempo é plausível porque toda a matéria orgânica, de uma forma ou de outra, provem da ação solar (fotossíntese) cujos raios, a menos de variações sazonais, incidem anualmente em intensidade regular sobre a Terra. Portanto, se a unidade de tempo k for de um ano, esta hipótese significa que a quantidade total λ de alimentos produzida a cada ano (taxa de produção anual) é constante ao longo de décadas.De fato, todos os nutrientes orgânicos na Terra são originarios da fotossíntese realizada por plantas e fitoplânctons no oceano: $Luz\ solar + 12H_2O + 6CO_2 \Rightarrow 6O_2 + 6H_2O + C_6H_{12}O_6$ (Glicose).v. P.Nelson)

A análise dos aspectos biológicos intrínsecos ao modelo Malthusiano, enfatiza duas características cruciais da população:

> **1-Homogeneidade** dos indivíduos quanto à sua fertilidade e/ou morbidade, uma vez que, independente de qualquer quantidade de individuos desta espécie que são acrescentados ou retirados desta (grande) população, o valor de $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}$ permanece constante.
>
> **2-Isolamento Social (Não Interação entre Indivíduos)**-Em decorrência de um argumento semelhante ao empregado no item 1) não há infulência de um indivíduo sobre outro no que diz respeito à sua capacidade reprodutiva ou chance de óbito.

Observemos que em Dinâmica Populacional o individuo é representado pelo seu "átomo" reprodutivo. Isto é, no caso de uma população de bacterias que se reproduzem assexuadamente, o individuo ("átomo") é uma bacteria, enquanto que no caso de uma população humana (ou de qualquer espécie cuja reprodução é sexuada) o "átomo" da população é o "casal" representado por um indivíduo do sexo feminino sob a hipótese tácita de equilibrio entre as populações dos dois sexos.

A reprodução biológica exige um grande investimento de nutrientes e somente pode ocorrer caso o suprimento de recursos disponiveis para um organismo apresente um saldo mínimo com respeito ao fluxo necessário para a manutenção de sua sobrevivência basal. Se a taxa de fornecimento de nutrientes for menor do que o requerimento basal, a sua chance de óbito aumenta e a sua fertilidade diminui ou cessa totalmente. Em resumo, é biologicamente plausível a hipótese de que a taxa de reprodução per capita $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r$ desta população seja uma função monotônica (mas com saturação, i.e., uma curva logistica) do "*excesso de oferta de nutriente*", isto é, $r = \varphi(\lambda - \alpha N)$, onde α é a taxa de consumo basal de nutrientes de cada organismo e λ a taxa temporal de produção total de nutrientes.(Isso não significa, necessariamente, que $\varphi(0) = 0$, mas podemos redefinir o consumo basal como sendo exatamente este valor. O estudo sobre a dependencia da fertilidade e mortalidade individual com respeito à disponibilidade de nutrientes é um tema à parte e de importância óbvia.

(Sobre a abordagem populacional deste tema consulte David Pimentel-R.Hopfenberg-*Human Population Numbers as a Function of Food Supply*, -pp online 2001, e sob o ponto de vista individual consulte o seguinte artigo e suas referencias, A.Bose &al.-*Phenotypic traits and resource quality as factors affecting male reproductive success in a toadfish*, Behavioural Ecology 29(2), 2018, 496-507 e G.West- *Scales*, 2019, ...holandês...??).

Seguindo a severa e sábia admoestação do frei William de Ockham representaremos as argumentações biológicas acima por intermédio da função matemática monotônica mais simples possivel e conveniente, $r = r_0(\lambda - \alpha N)$, onde r_0 é uma constante de proporcionalidade. Esta hipótese pode ser argumentada matematicamente com base em uma aproximação linear de uma função monotônica (desconhecida, mas suposta diferenciável) para valores não muito grandes de população, um cenário em que o efeito de saturação não se faz notar.

(O conselho de William Ockham, corroborado pelo filósofo Ludwig Wittgenstein para que uma representação matemática seja sempre parcimoniosa pode ser expressa na forma mais direta: "S*e não souber o que dizer (ou como se justificar biologicamente), cale a boc*a. Diga apenas aquilo que fo possivel argumentar").

Portanto, o Modelo simples resultante de uma representação matemática da Doutrina do Rev. Malthus toma a seguinte forma:

$$\frac{dN}{dt} = r(N)N = r_0(\lambda - \alpha N)N = \lambda r_0(1 - \frac{N}{K})N$$

que, na literatura em geral é conhecida como representante do Modelo de Verhulst.

(Na verdade, o modelo do matemático belga Pierre F.Verhulst(1804-1849) foi apresentado em um artigo de 1845 na Academia de Ciencias da Bélgica com um objetivo declarado: Escrever uma equação diferencial que alegadamente representaria uma dinâmica populacional e exibisse um efeito de saturamento. Após tentar várias expressões matemáticas, êle optou pela quadrática, sem qualquer argumentação biológica e simplesmente pelo fato de que ela cumpria o seu objetivo de tranquilizar a assustada realeza européia com a "anunciada explosão Malthusiana". Considerando que argumentos biológicos suficientes para justificar este modelo diferencial já se encontravam claramente expostos no livro de Malthus, é injusto atribuir tal modelo a Verhulst e não ao próprio Malthus. A propósito, Verhulst era considerado um matemático competente que nunca abandonou de fato a sua especialidade, mas que ganhou sua fama imortal com a reprercursão deste simples trabalho).

É fácil verificar que para $N < K$ a população cresce ($\frac{dN}{dt} > 0$) , pois $r_0(1 - \frac{N}{K}) > 0$ e para $N > K$ a população decresce, o que significa que $K = \frac{\lambda}{\alpha}$ é o valor de **saturação** para o crescimento da população, também denominado "**Capacidade de Suporte**" do meio ambiente, (um termo devido ao biólogo Raymond Pearl(1879-1940)) que representa o tamanho da população para a qual a capacidade de produção de recursos da região geográfica é exatamente igual à necessidade **basal** total da população, $\lambda = \alpha K$. Nesta população a taxa de produção de nutrientes é suficiente apenas para a manutenção da população. Observa-se que o proprio modelo não permite crescimento ilimitado da população (efeito de saturação) e, portanto, a hipótese linear para a função de reprodução φ faz-se razoavel se K não for muito grande.

A classe de modelos que exibem uma saturação populacional após crescimento monotônico, (exatamente os modelos procurados por Verhulst), é importante para a Biomatemática, especialmente o modelo acima que apresenta a expressão analitica mais simples dentre eles e permite uma interpretação biológica clara em termos de seus parâmetros constitutivos, r_0, λ, K.

É importante observar que este modelo não pressupõe explicitamente uma interação direta entre individuos da população. Uma interação todavia existe, mas é indireta e decorre do fato de todos participarem de um mesmo recurso finito, uns em detrimento de outros. Neste caso, como não há discriminação biológica entre os participantes, o modelo supõe que todos eles tem acesso e capacidade iguais ("democráticas") de exploração dos recursos. Expandindo a expressão $r_0(1 - \frac{N}{K})N$ obtemos um termo de mortalidade de segundo grau em N (isto é, $-\alpha N^2$) que é explicitamente relacionado a um efeito de interação, pois a taxa per capita de mortalidade para este termo ($\frac{1}{N}(-\alpha N^2 = \alpha N)$ varia (linearmente) com o tamanho da população!

O Modelo não discrimina termos lineares de reprodução (ν) ou mortalidade(μ), (isto é, $r_0\lambda = \nu - \mu$), mas seria razoável considerar que todo o termo $r_0\lambda$ é associado à fertilidade, enquanto $-\alpha N$ se refere à mortalidade, ambos *per capita*.

É interessante observar também que, qualquer que seja o método de interação entre indivíduos, ele deve depender essencialmente de interações binárias (muito mais provaveis do que interações tríplices, isto é, de três ao mesmo tempo, ou de quatro, e etc). Supondo que todas as interações binárias sejam igualmente possiveis, sem preferencias, e com resultados iguais, é razoável supor que ocorram a uma taxa proporcional ao numeros de pares possiveis, ou seja, da ordem do quadrado do número de individuos da população.

A questão de exploração simultânea de recursos comuns por várias populações tem importância no planejamento econômico e social de recursos naturais. Este problema foi discutido e várias de suas consequências analisadas pelo ecólogo Garrett Hardin em um histórico e influente artigo "*The Tragedy of Commons*" Science 1968 que é leitura obrigatória em Ecologia. Consulte também Simon Levin-A *Fragile Dominion:Complexity and Commons*, Perseus 1998 e artigos (em geral não matematicos) da publicação aberta (online) *Ecology&Society*. O problema da pesca em alto mar foi analisado também com base nestes argumentos por Donald Ludwig, cujo trabalho influenciou na convenção de um tratado mundial de pesca da baleia em 1976.(Ref. C.Clark-*Mathematical Bioeconomics*, 1990, D.Ludwig- artigos). Este tema envolve naturalmente a necessidade de considerar comportamentos sociais que determinam as decisões sobre a ação dos indivíduos que são agentes da exploração de recursos, assim como seus aspectos econômicos o que torna o seu estudo importante, multidisciplinar e progressivamente mais complexo.Para uma referencia inicial sobre o aspecto de psicologia social envolvido nesta importante questão, consulte: ....S.Levine-J.Tennenbaum&al.-*The logic of Universalization guides moral judgement*-PNAS, 20Oct. 2020.).

Exercicios:

0-Leia o artigo de Garret Hardin e algumas referencias posteriores sobre o tema "*Tragedy of Commons*". Consulte o texto de Simon Levin e visite a página deste importante autor. Consulte também o artigo de Luwig-Walter e Holling no primeiro número da revista (online-acesso livre) Ecology and Society de 1997. Faça um resumo comentado de aproximadamente 20 linhas sobre o tema.

1-Considere n populações com tamanhos N_k que subsistem com a exploração peculiar de um portfolio de recursos com taxas de consumo basal distintas. Adapte o argumento acima para obter um sistema de n equações diferenciais para as funções $N_k(t)$ que represente este Modelo de Malthus-Verhulst com Saturação. (Sistemas deste tipo tem sido empregados por Martin Nowak para a descrição de competições e evolução de populações. Ref: M.Nowak-*Evolutionary Dynamics*, Harvard UP 2010)

2-Obtenha uma solução explicita em termos de funções elementares para a equação diferencial de Riccatti $\frac{du}{dt} = au + bu^2$ dividindo por u^2 e escrevendo uma equação linear para $v = \frac{1}{u}$ que pode ser resolvida explicitamente.

3-Escreva o Modelo de Malthus-Verhulst na forma adimensional e explique o resultado.

4-Considere um conjunto de indivíduos P_0 "fundadores" de uma população no instante $t = 0$ cuja dinâmica é regida por um Modelo de Malthus-Verhulst. Considere que para a dinâmica da população resultante o termo $-\alpha N$ designa a mortalidade per capita da população. Determine o tempo médio de sobrevivencia da população fundadora desta dinâmica. (Sugestão: Considere a subpopulação $P(t)$ dos "fundadores", $P(0) = P_0$ e verifique que $\frac{dP}{dt} = -\alpha NP$. Refaça o argumento utilizado para determinar o tempo médio de sobrevivencia do Modelo de Malthus para esta subpopulação, mas observe que para isto ser´´a necessário dispor da função $N(t)$ que estabelece a população total -deles e de seus descendentes- em que eles "vivem").

5a-Faça um esboço geométrico para a dinâmica da equação que descreve o Modelo de Malthus-Verhulst intepretando $N(t)$ como uma trajetória que se move com velocidade $\frac{dN}{dt}$ sobre a reta coordenada horizontal (chamada reta de fase) segundo um campo de velocidades pre-estabelecido sobre a reta (chamada espaço de fase). Este campo de velocidades é determinado pelo gráfico cartesiano da função $F(N) = r_0(1 - \frac{N}{K})N$ representado acima da reta de fase e a velocidade do ponto ocupando a posição N é dada pelo valor de $F(N)$: Para a direita se positivo e para a esquerda se for negativo com intensidades respectivas. Observe que há duas posições estacionárias (isto é, posições onde a velocidade é nula) e que uma delas (a origem) é repulsiva (isto é, as velocidades em posições proximas tendem a afastar as trajetorias da origem, dita instável) e a outra ($N = k$) é atrativa (i.e., as velocidades em posições proximas tendem a dirigir as trajetorias de volta à posição estacionária original, dita estável).

5b-Com base nesta dinâmica na reta de fase faça um esboço dos gráficos cartesiano das curvas $N(t)$ ($(t, N(t))$) observando que o *formato* da curva depende do ponto de partida $N(0) > 0$. Determine quais delas são "logísticas" isto é, tem forma de "S" enquanto que as outras tem forma de "C".

Se uma população com esta dinâmica inicia com $N(0) = N_0 < K$ determine o tempo $t(N)$ que ela leva para atingir os valores $N > N_0$.

Mostre que ela leva um tempo infinito para atingir $N = K$ e, portanto, jamas atingirá um valor $N > K$. Explique!

5c-Analise uma dinâmica na reta determinada por um campo de velocidades da forma $\frac{dn}{dt} = -\cos n\left(\sqrt[4]{1-\cos n,}\right)$ determine as posições estacionárias atrativas e repulsivas e mostre que o tempo de percurso até a origem de uma trajetoria que se inicia em seu campo de atração é finito.

6a-Mostre que a dinâmica "Caricatura de Malthus" $\frac{dN}{dt} = F(N)$ onde o grafico cartesiano da função $F(N)$ consiste de uma reta $y = r_0 N$ para $0 \leq N \leq K$ e outra reta $y = -\gamma N + (r_0 + \gamma)K$ para $N \geqq K$, também produz uma dinâmica de saturação como o Modelo de Malthus, mas é linear por pedaços, o que pode ser uma vantagem na hora de obter uma solução explicita, mesmo que por pedaços. Analise esta questão. (Ideia inventada por Joseph B. Keller e seu aluno John Rinzel para analisar ondas em sistemas neurais na década de 1970).

6b-Analise o modelo ainda mais caricatural em que $F(N) = a > 0$ para $N < K$ e $F(N) = b < 0$ para $N > K$ e $F(K) = 0$. Mostre que este modelo exibe um efeito de saturação, e portanto é da classe de Malthus-Verhulst, mas que não é mais parcimonioso do que o modelo quadratico comparando o numero de parâmetros necessários para defini-los adimensionalmente.

7-Considere uma população cuja mortalidade se dá na forma (não Malthusiana) chamada dinâmica de Monod-Holling II : $\frac{dN}{dt} = -\mu\frac{N}{A+N}, N(0) = N_0$. (Segundo o bioquímico Jacques L. Monod (1910-1976) e o ecólogo Crawford S.Holling(1920-2019)). Mostre que o tempo de vida média dos indivíduos desta população depende do valor inicial N_0 o que significa uma interferência mútua entre eles. Observe que a taxa de mortalidade per capita deste modelo, $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}$ é decrescente com a densidade populacional, ao contrário do modelo Malthusiano. O que se pode concluir deste fato que, neste caso, a interação entre seus indivíduos, é (em suma) prejudicial.

Aspectos negativos da interação foram enfatizados por entusiastas da Teoria Evolutiva e identificados como um processo **competitivo** de Seleção Natural em que os "mais fortes" prevaleceriam populacionalmente com a extinção dos "mais fracos". Entretanto, aspectos **cooperativos** que favorecem o desenvolvimento de uma população como um todo foram apontados ideologicamente e ecologicamente pelo principe russo revolucionário Peter Kropotkin ("*Mutual Aid- A Factor in Evolution Theory*", 1902) e desenvolvidos, também ideologicamente, pelo ecólogo quaker W.C.Allee (1885-1955) em "*Cooperation among Animals, with Human Implications*" (1951) e vários outros durante o século XX. O chamado Efeito Allee será tema de uma das seções do Capítulo III (Principios de Interação) e o fenômeno de Cooperação será especificamente tratado nos Capítulos Fins sobre Matemática Biológica, Morfogênese, "Quorum Sensing" e Dinâmica Coletiva.(Th Seeley, D.Sumpter, D.Gordon, L.Dugatkin).

.

O Modelo de Compartilhamento de Recursos: A Tragédia dos Comuns e a Tragédia das Revisões

Conforme o direito britânico e seus descendentes, qualquer recurso que é disponivel livremente a todos individuos de uma comunidade (como, por exemplo, o ar que se respira, a água de rios e fontes, raios solares, peixes do oceano, e etc) são considerados "Recursos/Bens Comuns" ("*Commons*"). Suponhamos que exista um Recurso orgânico que se reproduza "aritmeticamente" proporcionalmente ao fornecimento constante de energia solar na Terra.

Está claro que se a (taxa de) retirada total do Recurso pelas duas populações se mantiver abaixo da reposição do mesmo, haverá sempre disponibilidade para todos os co-participantes. A regulamentação legal de um teto de taxa de extração para cada co-participante de um Recurso de forma que este não se extinga é, em geral, resultado de longas negociações e tratados. (A pesca da Baleia é um dos exemplos tipicos. v. S.Levin.).

Entretanto, imagine que uma das populações participantes do tratado desconfie que a outra esteja burlando o acordo e, portanto, decida também fazer o mesmo para auferir a maior quantidade de recursos antes que eles se extingam. Esta atitude provocará um desequilibrio que certamente levará à extinção do Recurso e se ele for o único das populações envolvidas, todas elas serão também extintas. A ocorrencia deste cenário foi denominada "*Tragédia dos Comuns*" pelo ecólogo Garrett Hardin em um artigo na revista Science em 1967 que ganhou uma enorme notoriedade e deu origem a vários trabalhos que objetivam organizar a administração de recursos comuns. Dentre estes, destaca-se o trabalho de Elinor Ostrom (1933-2012) a quem foi atribuido o premio Nobel de Economia em 2009. (E. Ostrom- *Governing the Commons - The evolution of institutions for collective ac*tion, Cambridge Univ.Press 1990).

E**xercici**o:

> Analise a questão de sobrevivencia de duas populações que utilizam um único Recurso Comum. Se uma das populações burlar consistentemente um "acordo"de compartilhamento, analise os cenários que levam à extinção populacional de ambas.

Nesta era de revisões históricas o argumento irrefutavel de Hardin foi imerso em outras considerações alheias ao tema ecológico que intencionavam uma tentativa de "cancelamento intelectual" do já falecido autor. A acusação que lhe é imputada se refere ao fato de que uma das soluções óbvias para o problema dos *Comuns*, consiste na possibilidade (ou quase certeza) de que em um acordo sobre exploração de Recursos Comuns pares com maior força política excluiriam o acesso de algumas populações mais fracas aos recursos em disputa. Esta é uma questão politica e econômica importante, mas que não faz parte do problema ecológico específico e a sua ocorrencia não pode ser imputada a quem a descobre ou analisa. A solução ideal da questão ampla não existe, mas o assunto pode ser melhor discutido desde que o fenômeno sócio-ecológico seja bem entendido.

Uma referencia particularmente intreressante que trata da questão dos Recursos Comuns sob o ponto de vista da Psicologia Social de uma maneira científica é o recente e interessante artigo: S.Levine-J.Tennenbaum &al-*The logic of Universalization guides moral judgement,* Proc.Nat.Acad.Sci. USA, 10Oct2020.

Esta questão sob o ponto de vista da Teoria Dinâmica dos Jogos tem sido amplamente estudada pela escola vienense de Karl Sigmund, Martin Nowak e outros (. (M.Nowak-*Evolutionary Dynamics*, Harvard UP, K.Sigmund-*The Calculus of Selfishness*, Princeton UP))e Herbert Ginits-*Game Theory Evolvin*g, Princeton UP 2000).

.

IV.2-VARIAÇÕES: HETEROGENEIDADE por MATURIDADE RETARDADA- Modelo Discreto de Fibonacci-Euler

A apresentação do modelo de Fibonacci como um mero "Quebra-Cabeça" referindo-se pitorescamente a uma população de coelhos, e não como um sisudo "Modelo Matemático", certamente foi uma das razões para que os importantes argumentos utilizados na sua formulação passassem desapercebidos durante cinco séculos. Ainda hoje, este problema é comumente apresentado em textos elementares apenas como uma inócua curiosidade de almanaque o que induz o/a leitor/a a um descaso infeliz da questão que elimina uma excelente oportunidade para a compreensão de alguns princípios fundamentais de dinâmica populacional.

Somente em 1748/60, Leonhard Euler (descobre e) generaliza os argumentos de Fibonacci introduzindo o conceito de "faixas etárias" que refina naturalmente o conceito de maturidade para diversos graus e os representa como estados biológicos (idade) dos individuos do qual dependerão, não apenas a sua fertilidade, mas também a suceptibilidade à morte. Com isto, Euler propôs um Modelo Demográfico que ainda hoje é amplamente empregado.(Caswell[2000]). O Modelo de Euler, assim como o Modelo de Fibonacci, representam o tempo discretamente, o que é sugerido pelo fato de que o censo de populações humanas (ou ecológica) é sempre registrado em intervalos regulares de tempo.

O modelo de Euler é amplamente empregado com multiplas variações nos textos de Caswell[2000] e Keyfitz.).

Exercicios:Extensões do Modelo de Fibonacci

1-Considere a seguinte modificação natural do Modelo de Fibonacci: A população é constituida de "casais" (o que pode ser interpretado como o número de fêmeas da população supondo-se que haja um equilibrio entre as populações dos dois sexos regulamentado de alguma forma pela biologia reprodutiva da espécie). Considere que em cada periodo entre dois "censos", k e $k+1$, a reprodução obedeça a uma taxa α ,isto é, se $M(k)$ for o numero de casais maduro no censo k então eles produzirão $\alpha M(k)$ casais no censo $k+1$. Suponha também que ocorra uma mortalidade que será a uma taxa de μ_1 para os imaturos e μ_2 para os casais maduros. Por exemplo, se $M(k)$ for o número de casais maduros no censo k, então, a proporção destes que sobreviverão para o proximo censo $k+1$ será de $(1-\mu_2)$.

a)Escreva, argumentando, um Modelo recursivo para esta população

b)Escreva a solução desta recursão em termos de funções elementares. (Sugestão: Estude a seção no texto Bassanezi-Ferreira 1988- relativo a equações de recursão e o Método Operacional para resolve-las explicitamente)

c)Analise a possibilidade de crescimento expoencial desta população, ou de extinção (isto é, de $\lim_{k\to\infty} P(k) = 0$).

2-Modelo de Plantas anuais. Considere uma espécie de plantas que a cada ano k tem $P(k)$ exemplares durante a primavera.Estas plantas produzirão durante o verão seguinte $sP(k)$ sementes que serão lançadas ao solo durante o outono, quando as plantas secarão. Estas sementes lançadas hibernarão durante o inverno e apenas uma fração f_1 delas sobreviverá e destas apenas uma fração g_1 germinará produzindo plantas na proxima primavera no ano $k+1$.(Neste caso, as sementes que não germinaram morrem).

a)Escreva um modelo para a dinãmica da população $P(k)$ destas plantas na primavera do ano k.

b)Generalize o Modelo para sementes que tem a capacidade de hibernar dois invernos seguidos (com mortalidades especificas para o primeiro e segundo inverno) para germinarem apenas no segundo ano seguinte (com taxa especifica).Neste caso, dentre as sementes que não germinaram no primeiro inverno, algumas morrem e outras hibernarão no proximo inverno.

c)Escreva um modelo com muitas hibernações.

O**bservação**: A hibernação alongada (isto é, a não germinação de todas as sementes na primeira primavera seguinte) é uma "estrategia" de sobrevivencia para épocas de estiagem que certamente ocorrerão durante alguns anos e que poderiam levar à extinção da espécie que não "guardasse" sementes para o proximo ano.

3-Considere diversos "graus de maturidade" de uma população de "casais" generalizando o Modelo de Fibonacci onde $P(k)$ é esta população. Neste caso considere, digamos 100 "faixas etárias" de maturação cada uma com duração de um ano e com taxas ("frações") especificas de mortalidade e reprodutibilidade.

a)-Escreva um Modelo recursivo para a dinâmica desta População que, a proposito é semelhante ao Modelo de Euler de 1760.

b-Escreva a solução elementar desta recursão em termos de funções elementares.(Considere, "ingenuamente", que a obtenção de raizes de polinômios seja uma tarefa elementar e simples!).

c)-Convencido/a de que a obtenção dos valores de raizes de polinomios de grau superior não é tarefa simples, reduza suas ambições e Analise teoricamente apenas a possibilidade de explosão populacional e de extinção em termos matemáticos com a informação da localização destas raizes com relação ao disco unitario no plano complexo. (Consulte Bassanezi-Ferreira a respeito e o Método de Mikhailov).

d)É historicamente interessante registrar que, embora o artigo de Euler tenha sido publicado nos Anais da Academia de Ciências de Berlin e precedido à publicação do livro de Malthus por 40 anos, o seu impacto foi quase nulo, tanto que o proprio Darwin, somente faz referencia rápida a este trabalho em um ligeiro comentário na pg.428 da 5a. edição do "Origin of Species" .

Darwin revisou infatigavelmente o seu famoso texto inúmeras vezes desde sua publicação inicial em 1859 até a sexta edição de 1876 e não sendo muito afeito à Matemática (isto, por palavras dele próprio!- [autobiografia]) é possível que a referência ao artigo de Euler tenha sido resultado de alguma de suas muitas correspondencias, alguma delas, talvez originárias de matemáticos. Esta é uma boa questão histórica para ser resolvida analisando o enorme arquivo de correspondencia de Darwin.(Darwin[...]).Verifique a correção desta afirmação histórica com subsidios a favor ou contra ela.

e)É de se ressaltar que àquela época o conceito (pelo menos implícito) de Modelo Matemático que descreve hipóteses e conclusões em linguagem matemática era já bem conhecido como consequência das bem sucedidas e inúmeras aplicações do Cálculo de Newton e Leibniz , notadamente à Mecânica (Celeste ou Terrestre), em cuja arte Leonhard Euler foi um mestre insuperável. Assim, não seria por falta de bons exemplos a imitar que Malthus deixou de formular um Modelo mais preciso para a sua teoria. De qualquer forma, desde o princípio do século XIX o crescimento geométrico, ou exponencial, de uma população tornou-se sinônimo de um processo "Malthusiano".

IV.3-VARIAÇÕES- Heterogeneidade- *Maturidade Retardada em Modelo Contínuo de Lotka*

Como já foi discutido, uma das dificuldades para aplicação do Modelo de Malthus a certas populações consiste no fato de que a sua expressão diferencial $\frac{dP}{dt}(t) = (\nu - \mu)P(t)$ estabelece que a taxa total de nascimentos no instante t , ou seja, $\nu P(t)$, é considerada como proveniente de todos os individuos presentes na população neste exato momento. Entretanto, em algumas populações, um processo de maturidade razoavelmente longo deve ser levado em conta, de tal forma que um indivíduo recém nascido somente ingressará na população fértil após um período de tempo. Digamos que este período seja representado por $T > 0$. Então, a taxa de natalidade no instante t deve se referir à população que já estava presente no instante $t - T$ e que não pereceu durante o período $[t - T, t]$, ou seja, $e^{-\mu T}P(t - T)$. Por outro lado, a mortalidade (malthusiana) no instante t depende exatamente de quantos individuos existem no instante t ("para morrer, basta estar vivo"). Levando em consideração estes argumentos podemos re-escrever o Modelo Malthusiano com Maturação da seguinte maneira:

$$\frac{dP(t)}{dt} = -\mu P(t) + \nu e^{-\mu T}P(t - T) = -\mu P(t) + \nu^* P(t - T).$$

Esta equação,sob o ponto de vista simbólico, é apenas uma pequena variação da equação original, o nos induz a crer que uma solução explícita dela seja também facilmente obtida em termos de uma função elementar. Infelizmente, tal conclusão está muito longe de ser correta. De fato, é possível prever a dificuldade inerente a este Modelo com um argumento matemático formal muito simples. Observemos que a função incognita $P(t)$ no modelo de Malthus é submetida a uma operação funcional linear obtida da soma de duas operações lineares: derivação de primeira ordem $\left(\frac{d}{dt}\right)$ e o produto por um número $(-k)$: $L = \left(\frac{d}{dt}\right) + (-k)$. Esta simples equação de Malthus original, $(\frac{d}{dt} - k)N = 0$ é por isso denominada de equação diferencial ordinária de primeira ordem.

Por outro lado, no Modelo Malthusiano com Maturidade a função incognita é submetida a uma operação linear obtida da soma de *três* operações lineares: derivação de primeira ordem $\left(\frac{d}{dt}\right)$, produto por um número (μ) e uma "ingênua" operação de "**deslocamento**" (E). Esta operação E é definida operacionalmente da seguinte maneira: aplicada a uma função qualquer f e calculada em t é: $(Ef)(t) = f(t-T))$. Apesar de sua simples aparencia, ela não é tão inócua neste contexto. E, para avaliarmos isto, basta lembrarmos que o Teorema de Expansão de Taylor nos dá a seguinte expressão:

$$(Ef)(t) = f(t-T) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(-T)^k}{k!}\right)\left(\frac{d}{dt}\right)^k f(t)$$

o que, para nosso espanto é uma operação diferencial de ordem *infinita*!

Equações em que a função incognita comparece calculada em intervalos de tempos distintos (mas fixos) são chamadas na literatura em inglês de "Equações com Retardamento" ou, sob influencia da terminologia russa de "Equações com desvio de argumento". (Ref. MacDonald, Erneux, Nelson) e serão tratadas em outros contextos com maior detalhe.

Portanto a Equação Malthusiana com Maturidade é uma equação diferencial ordinária de ordem INFINITA, e não poderá ser tratada matematicamente com apenas uma ligeira modificação da teoria empregada no estudo da equação diferencial original, embora resulte de uma pequena variação do Modelo de Malthus. Este fato ilustra de maneira exemplar que a aplicação do principio de Occam é indispensável para o exercício relevante da Matemática Aplicada.

O estudo da equação diferencial com retardamento será feito no capítulo sobre Modelos Fisiológicos, quando este fenômeno tem presença quase inevitável e produz efeitos surpreendentes tais como oscilações e comportamento caótico, impensáveis em um simples modelo Malthusiano.

IV.4-VARIAÇÕES: Heterogeneidade Paralela Não Acoplada: *Modelos Efetivos & Média Harmônica*

Em praticamente todas as situações, a amostra de material radioativo analiusada quanto ao seu decaimento não é formada de uma substância pura, mas consiste de uma mistura de substancias que decaem de maneira ligeiramente distinta tanto temporal quanto ao subproduto. (Este fato é análogo a uma possível variação de mortalidade em subpopulações de uma população biológica). É natural então indagar sobre o efeito que tais variações podem causar quando consideramos toda a amostra como uma única substancia. Podemos identificar esta classe de heterogeneidade designando-a *paralela e independente*, pois cada substancia procede como se fosse isolada das outras.

É claro que se soubermos a composição das "impurezas" da amostra o problema se resume em simplesmente calcular o resultado para cada uma delas. Entretanto, na maioria dos casos é conhecida apenas a existencia e uma avaliação quantitativa das impurezas e o problema consiste em fazer o melhor possivel com esta informação parcial com relação à determinação de seu efeito no processo dinâmico. A influencia de "pequenas" variações de parâmetros constitutivos no resultado final de um Modelo Matemático é tratada no Capítulo sobre Métodos Assintóticos e Principios Probabilisticos em particular a Análise de Sensitividade que se refere à uma estimativa de erro relativo da medida de interesse com respeito à variação do parâmtero constitutivo. Por exemplo, considerando-se o tempo médio de sobrevivencia $T(\mu)$ como sendo a medida de interesse sobre o Modelo e o parâmetro constitutivo de contrôle μ, a sensitividade relativa de T com relação a pequenas variações de μ é determinada pela aproximação linear representado no Cálculo pela derivada da seguinte maneira: $\Delta T(\mu_0) = T(\mu_0+\delta) - T(\mu_0) \sim \frac{1}{T(\mu_0)}\frac{\partial T}{\partial \mu}(\mu_0)\delta$, o que neste caso, é dada por $\frac{1}{\left(\frac{1}{\mu_0}\right)}\left(\frac{-1}{\mu_0^2}\right)\delta = \frac{-1}{\mu_0}\delta$. Este resultado demonstra uma maior sensitividade com respeito a pequenas variações em coeficientes μ_0 pequenos. Em outros casos interessa-nos analisar a sensitividade *logaritmizada*, em que tanto a medida de interesse quanto a medida do parâmetro é feita na escala logaritmica. No exemplo acima ela seria definida pela expressão: $\frac{\partial \log T}{\partial \log \mu} = -1$.(H.Caswell-Matrix Population Models, Sinauer 2020).

Entretanto, interessa-nos, em particular e muito mais, determinar um *novo* Modelo simplificado, denominado "**Modelo Matemático Efetivo**" que tenha características análogas ao Modelo original, mas cujos parâmetros constituivos sejam constantes e calculados como "médias" dos valores do parâmetro constitutivo variável e cuja solução represente também uma boa aproximação da solução do Modelo original. Os Métodos Matemáticos especificamente adequados para a representação do efeito de pequenas heterogeneidades (conhecidas apenas quanto às suas médias) por intermédio do conceito de Modelo Efetivo são denomindos "***Métodos de Homogeneizaçã***o" e constarão como temas importantes do Capítulo sobre Métodos Assintóticos. A construção de Modelos reduzidos no sentido "Efetivo" é tema importante do capítulo "Princípios (gerais) de Redução". Por enquanto, o assunto será introduzido com exemplos simples nos Exercicios abaixo.

Exercícios:

1-Considere uma População (não homogênea segundo a dinâmica Malthusiana), com $N(t)$ indivíduos no instante t constituida de subpopulações homogêneas, $N_k(t)$, $N(t) = \sum_k N_k(t)$, cujas dinâmicas são descritas pelos Modelos Malthusianos : $\frac{dN_k}{dt} = -\mu_k N_k$. Mostre que o tempo de vida médio da população total é $\tau = \sum \tau_k = \sum \frac{N_k(0)}{N(0)}\frac{1}{\mu_k}$. Conclua que uma "*homogeneização*" (este é o termo técnico utilizado para designar estes procedimentos) da população total segundo o Modelo Malthusiano deve utilizar a constante de Malthus $\mu_{eff} = \left(\frac{N_k(0)}{N(0)}\frac{1}{\mu_k}\right)^{-1}$ obtida pela ***média harmônica*** das constantes das subpopulações. O modelo Malthusiano $\frac{dN_{eff}}{dt} = -\mu_{eff} N_{eff}$, é chamado "Modelo Efetivo".

2-Analise a aproximação das soluções do modelo efetivo com respeito à sua solução exata: $N(t) = \sum N_k(0)e^{-\mu_k t}$ e as condições para que seja uma boa aproximação.

3*-Considere uma população contínua que seja distribuida continuamente segundo uma característica x na forma $N(t,x)$ onde

$\int_{x_1}^{x_2} N(t,x)dx$="Numero de indivíduos com característica $x_1 \leq x \leq x_2$ no instante t" e suponha que a mortalidade Malthusiana varie na forma $\mu(\varepsilon x)$ lentamente (isto é, $\left|\frac{d\mu(s)}{ds}\right| \approx 1$ e, $0 < \varepsilon \ll 1$, (bem pequeno). Obtenha o Modelo Efetivo para esta população.

IV.5-VARIAÇÕES: Heterogeneidade- *Cadeias Sequencialmente Acopladas de Decaimento-*

A heterogeneidade no problema de decaimento é uma questão inevitável no estudo de transmutação nuclear quando sabemos que toda substância se transmuta em outra substancia que tem carateristicas distintas da anterior e daí por diante, como uma cadeia. Portanto, para analisar a dinâmica de decaimento de uma amostra inicial, mesmo que pura, será necessário considerar que ao longo do tempo, várias outras substâncias em série estarão presentes e, portanto, o problema é de fato heterogêneo.

Em muitos casos a transmutação que nos interessa é apenas aquela referente a uma substancia inicial e outra final que é produzida não diretamente, mas após vários estágios intermediários muito rápidos, cujos detalhes não nos interessam conhecer. Assim, é natural procurar por um modelo simplificado que "homogeinize" a etapa intermediaria no sentido de que o processo entre as etapas inicial e final possa ser "aproximadamente" descrito com um "**Modelo Efetivo**" que se refira, simplificadamente, apenas a estes dois estágios de interesse. O Método matemático que produz este Modelo Efetivo é usualmente denominado de **"Homogeneização"** e tem por objetivo reduzir o modelo com uma perda de acuracidade em troca de um enorme ganho de "realismo" porque nem sempre os etagios intermediarios são completamente conhecidos e/ou de interesse.

O decaimento espontâneo (i.e., uma transformação sem causa aparente, mas com resultado previsível) é um dos fenômenos mais universais e descreve a dinâmica de todas as estruturas, físicas, químicas e biológicas. Até mesmo os protons, uma das estruturas mais estáveis do Universo, que tem meia vida de 10^{30} anos, também decaem! (E, é bom lembrar que a idade da terra é estimada em $5 \cdot 10^9$anos!) (H.Fritzsch).

Reações químicas em que uma molécula "*espontaneamente*" se transforma em uma ou mais moleculas de diferentes espécies são denominadas "*reações autocataliticas*" e podem ser representadas por modelos matemáticos semelhantes ao do decaimento radioativo, isto é Malthusiano.(Observemos que em reações químicas ocorrem apenas modificações das *associações* de átomos que são preservados no processo, ao contrario das reações nucleares em que os átomos são transmutados).(Bialek, Nelson, Phillips).

Consideremos então um modelo que contemple toda uma série de transmutações (ou de reações autocataliticas) representado esquematicamente na forma

$$\ldots \to A_{-1} \overset{\mu_{-1}}{\to} A_0 \overset{\mu_0}{\to} A_1 \overset{\mu_1}{\to} \ldots\ldots\ldots \overset{\mu_{N-1}}{\to} A_N \to \ldots$$

e descrito pelo seguinte sistema de equações diferencias (malthusianas) acopladas:

$$\frac{dA_k}{dt} = \mu_{k-1}A_{k-1} - \mu_k A_k \quad (*)$$

De acordo com a interpretação do modelo Malthusiano, os parâmetros $\frac{1}{\mu_k}$ indicam o tempo médio de permanencia de átomos (moleculas) na categoria A_k.

Escrevendo o vetor de dimensão infinita $X = (\ldots, A_{-1}, A_0, A_1, \ldots\ldots, A_k, A_{k+1}, \ldots\ldots)^t$ o sistema (infinito) de equações diferenciais acima pode ser sucintamente descrito na forma:

$$\frac{dX}{dt} = MX$$

onde M é uma matriz infinita, bidiagonal.

A rigor este sistema é infinito, mas se o tempo de reação de algumas das etapas, digamos $\frac{1}{\mu_0}$ e $\frac{1}{\mu_{N+1}}$, forem incomparavelmente maiores do que outras intermediárias, ($\frac{1}{\mu_k}$, $1 \leq k \leq N$) podemos escolher observar o fenômeno em uma escala de tempo pequena comparada com $\frac{1}{\mu_0}$ e $\frac{1}{\mu_{N+1}}$ quando as duas extremidades permanecerão praticamente estáveis. Com isto, o sistema $(*)$ deverá se referir apenas aos termos $1 < k < N$, suplementados pelas seguintes equações das extremidades:

$$\frac{dA_1}{dt} = -\mu_1 A_1$$

$$\frac{dA_N}{dt} = \mu_{N+1} A_{N+1}$$

e a equação matricial $\frac{dX}{dt} = \overline{M}X$ se referirá a um vetor em R^N e a matriz $\overline{M}$ será bidiagonal de ordem $N \times N$.

Exercícios:

a-Descreva as Matrizes M e $\overline{M}$ para sistemas de reações autocataliticas, respectivamente, dos casos finito e infinito.

b-Considere um processo de decaimento radioativo de uma amostra de Carbono 14 .O C_{14} é um isótopo instável com um excesso de dois neutrons no núcleo com relação ao Carbono 12, C_{12}, que tem seis protons e seis neutrons e que é nuclearmente muito mais estável e mais comum. Apesar desta diferença nuclear, eles são quimicamente identicos e, portanto, são utilizados sem distinção em processos bioquímicos de organismos vivos. O elemento carbono é um dos constituintes fundamentais no metabolismo dos organismos, junto com hidrogênio, oxigenio, fósforo, e outros. O C_{14} da biosfera (Terra e sua atmosfera), é produzido a uma taxa que pode ser considerada constante como resultado do bombardeio de raios cósmicos sobre os átomos de nitrogênio abundantes na alta atmosfera. Uma amostra típica de C_{14} , um mol, (14g), contem uma população em torno de 10^{25} átomos. O processo de decaimento de um átomo C_{14} consiste em transmutar-se espontaneamente, "sem essa nem aquela", de volta ao átomo de nitrogenio, ou seja, de maneira totalmente "aleatória", o que significa ser imprevisível determinar (pratica e mesmo teoricamente) quando isto ocorrerá com um átomo individual. Entretanto, observa-se que em uma grande população deles o processo coletivo se dá tal de acordo com o Modelo de Rutherford, ou seja, Malthusianamente: Se $C(t)$ for a população de Carbono 14 no instante t, então, $\frac{dC}{dt} = -\mu C$, onde k é a constante de decaimento.

Em Físico-Química a tradição histórica ainda domina, razão porque é mais comum utilizar o conceito de "meia-vida" , $T_{1/2}$, para caracterizar esta dinâmica, e que é definido da seguinte maneira: "A Meia vida do C_{14} é o tempo (característico desta substancia) necessário para que uma amostra (qualquer) dela se reduza à sua metade por conta do decaimento radioativo".

1-Mostre que esta é uma boa definição, ou seja, que não depende do tamanho da amostra, e relacione o parâmetro "meia vida" $T_{1/2}$ de C_{14} com a sua "vida média" μ^{-1}.

2-Obtenha a "meia vida" do C_{14} na literatura e determine a sua constante μ de decaimento e a sua vida média em horas.

3-Considere a dinâmica do sistema de Carbono 14 total da biosfera, $C(t)$, produzido a uma taxa constante pelo processo já descrito e continuamente em decaimento. Mostre que esta dinâmica pode ser descrita na forma $\frac{dC}{dt} = p - \mu C$, e mostre que um equilíbrio é atingido.

4-Com base neste equilíbrio,(que depois de milhões de anos de 'vida' da Terra, para todos os efeitos já deve ter sido atingido!), cujo valor você pode, e deve, descobrir qual seja na literatura, determine a sua taxa de produção p na alta atmosfera.

Neste equilíbrio participam também todos os seres vivos, já que estão em contínuo intercâmbio com a matéria orgânica do ambiente. Após a morte de um organismo, este intercambio é interrompido, enquanto a concentração de C_{14} em seus restos mortais continua decaindo. Portanto, analisando a concentração c_0 de C_{14} de restos arqueológicos de matéria orgânica, pode-se avaliar o tempo T decorrido desde sua morte.

5-Descreva como medir o tempo com a concentração c_0, ou seja, obtenha a função $T(c_0)$.

É necessário ressaltar que o conceito de "tempo médio de vida, ou de sobrevivência, ou de permanência" dos indivíduos em uma população em extinção, $\frac{1}{\mu}$, é diferente do conceito de "tempo de meia-vida" , este último utilizado no modelo de decaimento radioativo, cujo significado é :"periodo de tempo necessário para que ocorra o decaimento da metade da 'população' ". Relacione os dois conceitos.

.

IV.6-VARIAÇÕES: Heterogeneidade-Compartimentos Multiplamente Acoplados-*A*

Face Primeira da Difusão

Processos de Difusão são Modelos Matemáticos para a descrição de fenômenos macroscópicos fundamentais em Dinâmica de Populações distribuidas e se encontram nos mais variados campos da ciência. A Teoria e os Métodos matemáticos desenvolvidos para a sua representação e análise são fundamento para uma ampla parte da Matemática contemporânea originados pontualmente com a publicação do tratado de Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) "*Théorie Analytique de la Chaleur*" em 1822, certamente um dos textos mais citados da literatura matemática.

Em muitos contextos, mas não todos, Processos de Difusão são notoriamente associados a comportamentos microscopicos aleatórios e esta será a abordagem pela qual introduziremos o presente modelo com base na interpretação probabilistica do Modelo de Malthus.

A motivação que nos levará a um modelo microscopico probabilistico para a Difusão tem origem em um fenômeno chamado Movimento Browniano. Este fenômeno foi descoberto por Robert Brown quando experimentava a sua curiosidade com a novidade tecnológica do século XVII, observando ao microscópio a movimentação frenética e aparentemente sem propósito de partículas de pólen suspensas em água. Este fenômeno foi encarado como um mistério de locomoção biológica por mais de dois séculos até que Albert Einstein (1879-1955 e o polonês Marian Smoluchowski (1872-1917), que a princípio não conheciam o trabalho de Brown, apresentaram modelos matemáticos que previam movimentos microscópicos desta natureza desde que a teoria atômica da matéria, que não era unanimidade naquela época, fosse levada a sério. Um trabalho experimental exaustivo realizado em seguida por Jean B. Perrin (1870-1942) comprovou sem qualquer sombra de dúvida os resultados de Einstein-Smoluchowski e com isso, estabeleceu a teoria atômica da matéria, não apenas como uma boa hipótese de trabalho, mas como a descrição microscópica correta da natureza. (ref. Haw, Frey, Einstein,Ulam). A explicação fenomenológica de Einstein-Smoluchowski para o movimento irregular de partículas microscopicas em suspensão em um fluido baseia-se na variação (imprevisível) da taxa de colisões das moleculas do fluido que se movem por agitação térmica, com as particulas de pólen, ligeiramente maiores.

Por outro lado, e ao contrário do aspecto **involuntário** do fenômeno físico observado em partículas inanimadas, microorganismos (e mesmo organismos superiores como o *homo sapiens*) quando em procura de nutrientes em uma região do espaço no qual não há qualquer informação sobre a localização de suas fontes, realizam **deliberadamente** um movimento aleatório em tudo semelhante ao Movimento Browniano. Isto significa que o comportamento básico de procura empregado por organismos (inteligentes e, muito inteligentes!) é a estrategia de "varredura" por movimentos aleatorios rápidos que vasculha uma região de razoavel extensão em pouco tempo, em vez de "perderem tempo com planejamento racional" às escuras. Possivelmente daí é que se origina o dito popular "*De tanto pensar morreu um burro*" (talvez de fome), o que justificaria a ubiquidade do movimento aleatório microscópico na natureza. (Berg, Gordon,Seeley, Sci. Am...)

Analisaremos este processo em um Modelo especulativo ("Toy Model") unidimensional representado por um tubo (seccionalmente uniforme) onde estão localizados os indivíduos de uma grande população que realizam movimentos espaciais ***individuais e independentes*** (isto é, sem choques e influencia entre eles) na projeção longitudinal do tubo. Consideremos que este tubo seja *virtualmente fatiado* em seções regulares que se constituirão em compartimentos contiguos cujas populações estejam submetidas a uma *dinâmica Malthusiana* em que os fenômenos de "mortalidade e reprodução" são substituidos por "movimento à direita ou à esquerda" com a mesma densidade de probabilidade $\mu = \nu$. Assim, se $P(t)$ for a população de particulas neste compartimento no instante t, a sua população interior perderá individuos segundo uma dinâmica Malthusiana com a taxa $-2\mu P$, sendo $\mu P(t)$ para cada lado. Ao mesmo tempo, este mesmo compartimento receberá individuos provenientes dos compartimentos contiguos, à sua direita e à sua esquerda, devido ao mesmo motivo.

Consideremos agora que o tubo completo seja *virtualmente fatiado* em N compartimentos adjacentes, (com populações $P_k(t)$, $0 \leq k \leq N$) ,de tal maneira que cada *compartimento* P_k tenha um *vizinho* à esquerda (P_{k-1}) e outro à direita (P_{k+1}), que receberão os individuos que escapam dela (P_k), enquanto que a propria recebe aqueles que escaparam das suas vizinhas. (As fatias no começo, P_0, e do fim, P_N, terão apenas vizinhas, respectivamente, à direita e à esquerda) segundo o esquema gráfico:

$$\cdots\cdots\cdots \underset{\mu}{\overset{\mu}{\leftrightarrows}} P_{k-1} \underset{\mu}{\overset{\mu}{\leftrightarrows}} P_k \underset{\mu}{\overset{\mu}{\leftrightarrows}} P_{k+1} \underset{\mu}{\overset{\mu}{\leftrightarrows}}\cdots\cdots$$

Desta forma, podemos escrever um Modelo de Dinâmica Populacional para o conjunto de compartimentos P_k $(0 < k < N)$ constituido de N Modelos Malthusianos acoplados:

$$\frac{dP_k}{dt} = -2\mu P_k + \mu P_{k-1} + \mu P_{k+1} \ (*)$$

Digamos, em particular, que o tubo esteja obstruido nas suas duas extremidades. Neste caso, teremos as seguintes equações para os compartimentos extremos que completarão o sistema:

$$\frac{dP_0}{dt} = -\mu P_0 + \mu P_1$$
$$\frac{dP_N}{dt} = -\mu P_N + \mu P_{N-1}$$

Esta hipótese obstrutiva sobre as fronteiras do tubo denomina-se, por motivos obvios, "*Fronteira Reflexiva*" e, por motivos históricos também de "*Condição de Neumann*" (~Carl Neumann, matematico alemão do seculo XIX). Neste caso os compartimentos extremos têm conexões apenas com uma vizinha e está fechada na face final.

Uma outra condição de fronteira de interesse que pode ser imposta à esquerda ou à direita, denomina-se, por motivos óbvios, "Fronteira Absorvente" e, por motivos históricos "Condição de Dirichlet" (~P.L.Dirichlet, matematico alemão, seculo XIX), que, por exemplo, se for à esquerda toma a seguinte forma:

$$\frac{dP_0}{dt} = -2\mu P_0 + \mu P_1$$

ou seja, P_0 perde indivíduos para a lateral esquerda ("O resto do universo") e para a lateral direita (P_1), e recebe da lateral direita.

As condições de Reflexão ou Absorção podem ser impostas em cada extremidade, dependendo do caso a ser estudado, ou seja, quatro situações.

Em qualquer caso, o sistema de Equações diferenciais ordinárias que representa estes Modelos pode ser escrito na forma vetorial-matricial de maneira formalmente muito simples e apropriada para o seu estudo representando simultaneamente todas as populações dos compartimentos em um instante qualquer por um vetor $X(t) = (P_0(t), P_1(t), \ldots, P_N(t))^T$. Em todas as quatro possibilidades de condições de fronteira nas extremidades, o Modelo resultante poderá ser genericamente representado na seguinte forma matricial

$$\frac{dX}{dt} = SX$$

onde S será uma matriz **simétrica** (tridiagonal) facilmente determinada a partir da descrição acima.

Exercicios:

1-Escreva a matriz S para as quatro situações indicadas e determine se, de fato, ela é sempre simétrica.

2-Considere um sistema periodico, isto é, de tal forma que uma extremidade é conectada à outra. Neste caso o compartimento P_0 terá P_N à sua esquerda e P_N terá P_0 à sua direita. Mostre que ainda assim podemos escrever o modelo na forma $\frac{dX}{dt} = SX$, com S simétrica.

Modificando ligeiramente a maneira de se escrever o sistema $(*)$ podemos entender melhor diversos aspectos deste Modelo, em particular a razão pela qual ele representa de farto um **P*rocesso de Difusão*** caracterizado por ser uma ***Dinâmica homogenizadora***.

Rearranjando os termos da direita de $(*)$ temos:

$$\frac{dP_k}{dt} = \mu(P_{k-1} - P_k) + \mu(P_{k+1} - P_k)$$

Observa-se que nos dois termos à direita temos uma comparação de populações entre os compartimentos laterais (P_{k-1}, e P_{k+1}) e o compartimento central (P_k).

Com isto verificamos que, por exemplo, $(P_{k-1} - P_k)$ será positivo se $P_k \leq P_{k-1}$ ou seja, se o compartimento à esquerda tiver mais indivíduos do que o compartimento central, P_k. Portanto, como termo positivo da equação diferencial que contribui para o calculo de $\frac{dP_k}{dt}$, isto significa que nesta interface à esquerda haverá um "fluxo líquido" (no sentido contábil) do compartimento que tem mais individuos, no caso P_{k-1}, para o compartimento que tem menos, P_k. Obviamente isto não significa que não haverá intercambio entre os dois compartimentos, apenas que no "*final das contas*" quem tem menos ganha e quem tem mais perde. Repetindo-se o mesmo argumento para o caso em que o sinal for contrário, isto é, se $(P_{k-1} - P_k) < 0$, e também para o outo termo de comparação $(P_{k+1} - P_k)$ concluimos que o Processo de Difusão descrito pelo modelo acima tem um efeito ("Robin Hood") homogeneizador para a distribuição de populações ao longo do tubo, produzindo um "fluxo líquido" de onde tem mais para onde tem menos. (Mais uma vez, observe que este é o efeito final, porque "microscopicamente" há individuos se movimentando para a direita e para a esquerda em todo o tempo).

Embora esta tenha sido uma conclusão sobre o comportamento do Modelo de Difusão acima apresentado, podemos utilizar esta propriedade "*homogeneizadora dinâmica*" como a propria caracterização fundamental de qualquer processo que se denomine "*Difusão*" ou, do proprio conceito de "*Difusão*".

Re-escrevendo também o sistema $(*)$ de uma nova maneira

$$\frac{dP_k}{dt} = \mu(P_{k+1} - 2P_k + P_k) = \mu[(P_{k+1} - P_k) - (P_k - P_{k-1})]$$

verificamos que o termo à direita da equação é uma diferença de segunda ordem, (diferença da diferença) que usualmente denotamos pelo operador de diferença Δ^2.(Em alguns textos o operador de diferença de primeira ordem é representado na forma de um "*gradiente*", ∇, de onde, $\Delta^2 = \nabla^2$). Assim, se interpretarmos $P_0, P_1, \ldots\ldots, P_N$ como uma sequencia P, podemos escrever o sistema acima na forma:

$$\frac{dP}{dt} = \mu\Delta^2 P$$

Esta representação tem um significado importante porque sinaliza uma maneira de estabelecer uma conexão entre o modelo espacialmentte discreto (apresentado acima) e um modelo contínuo descrito por uma equação diferencial parcial de difusão, que terá a forma: $\frac{\partial\rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}$ para a função de distribuição $\rho(x,t)$. (ref. Bassanezi-Ferreira 1988).

Uma terceira e importante maneira de entender o efeito homogenizador deste Modelo é facilmente obtida rearranjando os termos à direita em $(*)$ da seguinte forma:

$$\frac{dP_k}{dt} = 2\mu\left(\frac{P_{k-1} + P_{k+1}}{2} - P_k\right)$$

Neste caso se vê claramente que há uma comparação entre o valor do k-ésimo compartimento e a **média** (aritmética) dos valores dos compartimentos adjacentes e a equação tende a ajustar estes valores pois, se P_k for menor do que a média o termo será positivo e a dinâmica indica um crescimento no seu valor ($\frac{dP_k}{dt} > 0$). Por outro lado, se o valor de P_k for maior do que a média de seus vizinhos, teremos $\left(\frac{P_{k-1}+P_{k+1}}{2} - P_k\right) < 0$ e, portanto a dinâmica do sistema indica um decréscimo de $P_k(t)$, pois, $\left(\frac{dP_k}{dt} < 0\right)$.

Com esta interpretação confirmamos mais uma vez que um processo difusivo tem sempre a tendencia de homogenizar os valores do sistema, ou seja, uniformiza-lo.

Na verdade, esta é a definição geral de um processo difusivo.

Modelo de Difusão em Grafos-Redes Conectadas

Os argumentos acima podem ser aplicados "*ipsis litteris*" a sistemas multiconectados onde os compartimentos com populações P_k estão localizados nos vértices de uma rede (grafo) e as conexões (lados) são as interfaces.

.

Exercicios:

Desenhe um gráfico com 5 componentes e conexões multiplas e estabeleça um Modelo de Difusão para este caso representando- na forma vetorial-matricial.

Anteriormente mostramos que o Modelo Populacional Malthusiano pode ser encarado como uma grande quantidade de experimentos individuais, simultâneos e independentes e, portanto, passível de ser interpretado como um processo probabilistico para cada particula individualmente. É natural portanto que estendamos o mesmo argumento para este modelo de Difusão. Por exemplo, podemos interpretar o parâmetro $\frac{1}{\mu}$ como o tempo médio de permanencia de uma particula em qualquer um dos compartimentos.

Exercícios:

1-Determine a probabilidade de que uma particula do compartimento P_k se transfira para o compartimento adjacente P_{k+1} (ou para P_{k-1}) durante o intervalo de tempo de comprimento T.

2-Considere um sistema finito de compartimentos, $P_k(t),\, 0 \leq k \leq 2m+1$, conectados segundo um modelo de Difusão, sendo que as extremidade à esquerda de P_0 e à direita de P_{2m+1} sejam absorventes. Supondo que no instante zero, exista apenas um único indivíduo e este ocupa o compartimento central, P_m, qual a probabilidade deste indivíduo se perder por uma das extremidades até o instante t ?

Ou seja, qual o tempo médio de permanência deste individuo no sistema?

Extremidades Infinitas:

Se,

1) A sequencia de compartimentos acoplados é muito grande,

2) Os individuos se encontram inicialmente apenas em compartimentos centrais,

3) Nas extremidades seja válida a condição de absorção (nula) e

4) O tempo de observação seja em uma escala tal que uma proporção

muito pequena de individuos possa alcançar as extremidades (isto é, o efeito das extremidades não seja sentido na região e no periodo de tempo de observação),

é razoável considerar um sistema infinito de compartimentos, o que pode, eventualmente, simplificar o tratamento matemático do problema.

Neste caso, um sistema infinito de compartimentos $\{P_k\}$ conectados linearmente mantem constante sua população, ou seja, $P_0(0) = \sum_{-\infty}^{+\infty} P_k(t)$ é constante o que, em particular significa que $\lim_{k \to \pm\infty} P_k(t) = 0$.

Argumentos semelhantes podem ser utilizados com apenas uma ou outra extremidade infinita.

Exercício:

a-Mostre que a quantidade total de particulas é mantida no modelo de Difusão infinito,e também naqueles em que as condições laterais são de reflexão (Neumann) ou periódica.

b-Mostre que se pelo menos uma das condições laterais é de Absorção (Dirichlet), então a quantidade total de particulas do sistema decresce exponencialmente.

Consideremos agora que no instante $t = 0$ uma "grande" população de N_0 particulas seja colocada no compartimento central $k = 0$, ($P_0(0) = N_0$) enquanto todos os outros compartimentos estão vazios; $P_k(0) = 0$, $k \neq 0$. Iniciando-se o processo de difusão no sistema de compartimentos, o valor de $P_k(t)$ será determinado pelas equações $(*)$ para $t > 0$. Este proceso de difusão sendo constituido por vários processos de Poisson acoplados, pode, ele mesmo, ser considerado como uma grande quantidade de experimentos, simultâneos, para cada uma das particulas.

Assim, definindo

" $p_k(t)$=*A Probabilidade de que uma particula que inicia sua trajetória no compartimento central* $k = 0$ *no instante* $t = 0$ *esteja no* k*-ésimo compartimento no instante* t"

podemos calcular esta probabilidade utilizando sua definição frequentista na forma: $p_k(t) = \frac{P_k(t)}{P_0(0)}$.

Este calculo pode ser realizado por vários Métodos (Função Geradora, Metodo Fourier, Método de Green/Operacional e etc.) que serão apresentados em outro capítulo.

Naturalmente um modelo matematico em tudo semelhante ao que foi apresentado acima pode ser utilizado para a descrição da difusão do calor ao longo de uma barra transversalmente homogênea, repartindo-a virtualmente em fatias finas adjacentes e supondo que a "lei de Newton-Fourier" para a condução de calor se aplique em cada interface.

.

IV.8-VARIAÇÕES: Influência Externa Determinística-*Método Operacional de Green-Laplace*

Populações, biológicas ou não, em geral não são isoladas e estão sujeitas a influencias externas nas formas de imigração e emigração. Analisemos uma modificação do modelo de Malthus onde este este processo ocorre e pode ser representado matematicamente pelo modelo auto explicativo: $\frac{dP}{dt} = rP + f(t)$. A função $f(t)$ representa um "fluxo" com a dimensão de variação populacional, ($NT^{-1} = [\frac{dP}{dt}]$), de imigração quando positiva e, de emigração quando negativa, já que é uma parcela do calculo de $\frac{dP}{dt}$, e $r = \nu - \mu$. Observe-se que este termo, $f(t)$, é completamente independente do estado do sistema (isto é, de $P(t)$), daí, o conceito de que representa "influencias exteriores".

Uma expressão explícita (em termos operacionais) para o calculo de $P(t)$, chamada *Fórmula de Green*, pode ser escrita para esta equação e tem um papel importante em diversas questões de Matematica Aplicada, razão pela qual apresentaremos um método para a sua obtenção que pode ser facilmente generalizado para situações muito mais complexas.

Analisando o problema matematicamente, verificamos que a função incognita $P(t)$ é submetida a uma operação linear da forma $L = \frac{d}{dt} - r$ (onde $L\varphi = \frac{d\varphi}{dt} - r\varphi$) . Uma das maneiras genéricas de resolver a equação $Lu = f$, é a obtenção de um operador A que seja inverso à direita de L, de tal forma que, aplicada à função dada f, nos dê a solução $u = Af$ pois, $L(Af) = f$. Esta é apenas uma visão global do problema que deve ser suplementada por técnicas especificas para a chegarmos ao resultado desejado. Para isto, observemos inicialmente que são conhecidas as inversas à direita tanto para ao operador derivação (isto é, o operador integral via Teorema Fundamental do Cálculo) como para a multiplicação por um número r. Mas para que esta informação tenha alguma utilidade no presente contexto é necessário "fatorar" o operador L como "composição" destes operadores; a sua expressão original como soma delas, $L = \frac{d}{dt} - r$, não serve para este proposito. A modificação apropriada do operador L será obtida lançando mão de um procedimento simples, mas astuto, que faz uso de uma propriedade fundamental : $\frac{d}{dt}(e^{-rt}) = -r(e^{-rt})$, isto é, a atuação de $\frac{d}{dt}$ em uma função exponencial se resume a uma simples multiplicação algebrica ou, em outras palavras, as funções exponenciais são *auto-funções* do operador linear $\frac{d}{dt}$. Com isto, a regra de Leibniz para derivação de produto de funções, $\left(\frac{d}{dt}\right)(e^{-rt}\varphi) = e^{-rt}(L\varphi)$, produz imediatamente a expressão operacional: $L = e^{rt}\left(\frac{d}{dt}\right)e^{-rt}$.

> Atenção: esta igualdade é "operacional" e significa que L tem o mesmo efeito que aplicar sucessivamente as *operações funcionais* na seguinte ***ordem***: 1)Multiplicação pela função e^{-rt}, 2)Derivação ,$\frac{d}{dt}$,(do resultado da operação anterior), 3)Multiplicação (do resultado da operação anterior) pela função e^{rt}. (Faça algumas experiencias para se familiarizar com o significado operacional desta expressão).

Escrevendo agora a equação original na forma $Lu = e^{rt}\left(\frac{d}{dt}\right)e^{-rt}\,u = f$, podemos inverte-la (à direita) da seguinte maneira ("sucessivamente de fora para dentro: método cebola"):

$\left(\frac{d}{dt}\right)e^{-rt}\,u = e^{-rt}f,\;\; e^{-rt}\,u = u(0) + \int_0^t (e^{-rs}f(s))ds$, e finalmente, $u = e^{rt}u(0) + e^{rt}\int_0^t (e^{-rs}f(s))ds$, de onde tiramos a Fórmula de Green:

$$P(t) = e^{rt}P(0) + \int_0^t (e^{r(t-s)}f(s))ds$$

A função $e^{r(t-s)} = G(t,s)$ é denominada "Função de Green" (em homenagem a George Green (1793-1841)), mas também tem outros nomes significativos: "Função de Memória", "Função de Influencia", "Propagadora" , "Função de Causalidade" e etc., que atestam a sua multipla ocorrencia e importancia.

Observemos que a primeira parte da solução, $e^{rt}P(0)$, é a solução da equação Malthusiana original (dita, equação homogênea sem influencia externa) e, portanto, o termo integral se refere inteiramente à contribuição da influencia externa. De fato, este termo pode ser visto como uma soma destas influencias, $f(s)ds$, ao longo do intervalo $[0,t]$, onde o efeito no instante t é resultado da "soma continua" das influencias exercidas "no passado" $f(s)$ $(0 \leq s \leq t)$ intermediada pela função de Green, $G(t,s) = e^{r(t-s)}$, como um fator de ponderação. Esta interpretação explica a utilização dos termos, "função de influencia" ,"memória", "propagação" e etc. Em termos populacionais, o termo (operador) $e^{r(t-s)}$ multiplicado (aplicado) a uma população (no caso $f(s)ds$) produz os seus descendentes vivos depois de um período de tempo $(t-s)$ de acordo com o proprio modelo de Malthus. Verificamos assim, que esta expressão teria sido obtida por uma simples argumentação de "contabilidade demográfica":

"*A População no instante t é igual à soma da expansão malthusiana da população inicial no período $[0,t]$, $e^{rt}P(0)$, com a expansões malthusianas durante os respectivos períodos $[s,t]$ das subpopulações que foram continuamente acrescentadas nos instantes s, $e^{r(t-s)}f(s)ds$, (se $f(s) > 0$) e subtraindo ainda as expansões das subpopulações que foram continuamente retiradas nos instantes s, $e^{r(t-s)}f(s)ds$, (se $f(s) < 0$)*".

Exercícios:

1a-Considere uma população Malthusiana que inicia sua história com $P_0 = P(0)$ individuos (vivos!) "colonizadores" submetida a uma taxa especifica de mortalidade μ e de natalidade ν. Determine o número total de nascimentos $N(t)$ e o de óbitos $M(t)$ durante o período $[0,t]$ nesta população.

1b-Mostre que a subpopulação de sobreviventes dentre os indivíduos colonizadores P_0 no instante t é $e^{-\mu t}P(0)$ e que, em geral, os sobreviventes no futuro $t+T$ da população $P(t)$ existente no instante t é $e^{-\mu T}P(t)$, e que os não sobreviventes são $(1-e^{-\mu T})P(t)$.

2-Considere uma população malthusiana com ***altíssima*** taxa de mortalidade, sem procriação. Argumente, matematica e demograficamente, porque um sistema com estas características é denominado como de "*Memória Curta*". Se este sistema for alimentado por uma fonte externa $f(t)$ de valor limitado, ($|f(t)| \leq M$) mostre que o "grosso" da população $P(t) = e^{-\mu t}P(0) + \int_0^t (e^{-\mu(t-s)}f(s))ds$, para t distante da origem é descrito pela expressão: $P(t) \approx \frac{1}{\mu}f(t)$ a menos de erro exponencialmente pequeno. (Sugestão: Como $1 \lll \mu$, valores da forma $e^{-\mu t}P(0)$ são exponencialmente pequenos e na integral apenas a parte proxima de t (isto é, para $s \sim t$) o integrando $e^{-\mu(t-s)}f(s)$ efetivamente contribui. Diz-se que os valores da integral estão "condensados" na extremidade t. Com esta argumentação substitui-se a função $f(s)$ por sua expansão de Taylor nas proximidades de t: $f(s) = f(t) + (s-t)f'(t) + o(s-t)^2$ e avaliamos que apenas o termo $f(t)$ terá contribuição não exponencialmente pequena). Esta argumentação faz parte de um conjunto de técnicas matemáticas importantes denominados "Métodos Assintóticos" a serem tratados com maiores detalhes em outro capítulo.

3-Obtenha uma expressão "Fatorada" para o operador $\left(\frac{d}{dt} + \mu(t)\right)$ onde $\mu(t)$ é uma função de t, e com isso , obtenha uma fórmula de Green para o Modelo Malthusiano com influencia externa : $\frac{dN}{dt} = -\mu(t)N + f(t)$

.

IV.9-VARIAÇÕES: Interação Neuronal- *Modelo "Integrate and Fire" de Lapicque para a Dinâmica de uma População Neuronal*

O Neurônio é uma célula extremamente complexa em seus aspectos fisiológicos de natureza químico-física. Entretanto, considerando-se o neurônio como um individuo de uma população, verifica-se que a essencia de sua participação no conjunto pode ser "caricaturizada" de maneira radicalmente simplificada, mas ainda relevante para o estudo de diversos aspectos da Neurologia. (Isto é, "s*em jogar fora o nenê junto com a água do banho*", como dizia Mark Kac). Este Modelo foi idealizado por L.E.Lapicque(1866-1952) em 1907 e, recentemente, tem sido utilizado em muitos Modelos Matemáticos para a representação da Dinâmica de uma População Neuronal (J.P.Keener-J.Sneyd-Mathematical Physiology, Springer 1998, Peter Dayan-Theoretical Neuroscience, Cambridge UP2012, Ch.S.Peskin-Lecture on Mathematical Aspects of Heart Physiology, Courant Inst. 1975)

O Neurônio de Lapicque será definido por um aspecto biológico denominado "carga" medido por um parâmetro $0 \leq \xi \leq 1$ (fisiologicamente associado a uma concentração de íons de Cálcio em um neurônio biológico) podendo apresentar três "*estados dinâmicos*" . O estado de um neurônio determina a sua capacidade de interação com outros neurônios segundo as seguintes regras que procuram mimetizar caricatamente as três etapas essenciais da dinâmica da célula:

1-**Estado Refratário** ("*Integrate*"): Quando $0 \leq \xi < 1$. Neste caso ocorre uma dinâmica Malthusiana de recarregamento $\frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{T}\xi$, e representa uma absorção progressiva de íons do meio em que está imerso. No estado refratário um neurônio não recebe influencia e nem transmite influencia para outros neurônios. A dinâmica refratária é acrescentada da condição de que, atingindo plena carga, $\xi = 1$, o neurônio se estabiliza e passa ao Estado Reativo estacionário descrito em seguida

2-**Estado Excitável**: Quando $\xi = 1$, o estado dinâmico do neurônio se mantem constante caso **todos os outros** neurônios conectados a ele estejam em estado Refratário ou também Excitável. Este é o único estado em que o Neuronio pode receber influencia de outro neurônio ao qual ele esteja conectado como estabelece a proxima regra:

3-**Estado de Descarga** ("*Firing*"):Este é o único estado de um Neuronio em que ele pode influenciar outro neurônio e isto ocorre com outros neurônios em estado reativo que estejam conectados a ele, no que passam também ao estado de Descarga. O Estado de Descarga é é uma dinâmica Malthusiana, $\frac{d\xi}{dt} = -\frac{1}{\tau}$ em escala de tempo muito mais curta do que a Recarga (i.e., $\tau << T$) e considerada instantânea em alguns modelos e que leva o Neurônio de volta a um Estado refratário com carga $\xi = 0$.

4-**Influência Estocástica**: O Estado de Descarga também pode ocorrer na subpopulação de Neuronios Excitável mesmo que suas conexões estejam inertes e se dá segundo um modelo Malthusiano-Poisson (coletivo-individual).

Observe-se que neste Modelo a dinâmica Malthusiana deterministica comparece de duas formas distitntas; uma delas intrinsecamente e outra com respeito a uma subpopulação de neuronios. A dinâmica Malthusiana populacional de descarga pode ser "individualizada", mas neste caso, probabilisticamente segundo o Modelo de Poisson, conforme vimos acima.

A Neurobiologia de um sistema é descrita pela Dinâmica de uma grande população de Neuronios, heterogênea segundo os estados dinâmicos individuais, e cujos indivíduos interagem entre si conforme as regras de Lapicque. Uma população Neuronal de Lapicque pode ser representada discretamente ou continuamente. A construção do Modelo contínuo exige a representação matemática da população neuronal heterogênea que é Tema do próximo capítulo.(B.W.Knight&L.Sirovich, Dayan).

Um Modelo Caricatural discreto de um população neuronal de Lapicque pode ser representado pela estrutura de um Autômato Celular , tema que será discutido no capitulo sobre Principios Discretos Computacionais.

IV.10-VARIAÇÕES: Influência Externa Estocástica- *Modelo de Langevin e a "Redução em Média" da Dinâmica Populacional*

Um modelo de Mortalidade Malthusiano $\frac{dN}{dt} = -\mu N$ é frequentemente perturbado por **pequenas** retiradas e acréscimos de indivíduos (descrita por uma taxa, respectivamente negativa ou positiva $\xi(t)$ gerada por efeitos externos sobre o qual pouco se conhece, exceto algumas informações estatisticas. O Modelo resultante $\frac{dN}{dt} = -\mu N + \xi$, pode ser resolvido por intermedio de uma Fórmula integral de Green (Método de Green) se a função $\xi(t)$ for conhecida na sua descrição clássica, isto é, ponto a ponto. Entretanto, em muitos casos a descrição desta influencia externa $\xi(t)$ é apenas conhecida de maneira incompleta. Portanto, neste caso a descrição clássica da função $N(t)$,também está fora de questão. Apesar disso, resta a possibilidade de obter alguma informação, ainda que também incompleta (sob o ponto de vista clássico) para a função $N(t)$, mas ainda assim útil. A abordagem desta questão é originalmente devida ao físico francês Paul Langevin(1872-1946) no começo do século XX que pretendia modelar o mesmo Movimento Browniano estudado ao mesmo tempo por Albert Einstein e por Marian Smoluchowskii sob pontos de vistas totalmente distintos. A abordagem de Langevin procura descrever a dinâmica de uma pequena particula (de tamanho quase macroscopico) em consequencia da ação de choques aleatórios de uma ("*nuvem*") de moléculas microscópicas que, por sua vez, realizam movimentos aleatórios devido a uma agitação térmica. O objetivo deste modelo é utilizar um conceitos de "**descrição em média** *de uma função*" de tal maneira que, tal tipo de informação (não clássica) da dinâmica $N(t)$ pudesse ser calculada a partir de uma informação (apenas) em média disponível sobre a influência externa $\xi(t)$ . . Curiosamente, um trabalho matemático semelhante, mas com motivações totalmente diversos destes, foi desenvolvido na mesma época por Louis Bachelier sob orientação de Henri Poincaré e tratava especificamente das variações da Bolsa de Paris.(M.Haw, S.Brush, H.Berg,...).

A apresentação dos argumentos e técnicas que levam à formulação desta importante classe de Modelos Matemáticos é um dos temas abordados no capítulo sobre Princípios Probabilísticos.

.

BIBLIOGRAFIA:

M.Abramowitz-I.Stegun-ed.-*Handbook of Mathematical Functions-Formulas,Graphs and Mathematical Tables*, NBS 1964-online

D.Aldous-Stochastic Models and Phylogenetic Trees-From Yule to Today, Stat.Sci. 2001

W.C.Allee-Animal Aggregations, U.Chicago Press 1939.

W.C.Allee-Cooperation Among Animals, H.Schumann 1951.

E.Amaldi-Radioactivity: A Pragmatic pillar of probabilistic Conceptions, pp.1-28 in Proc.Int.School Phys. E.Fermi-Corso 72–Problemi dei

Fondamenti della Fisica-ed. G. Toraldo di Francia, North-Holland 1979.

N.Arley-Introduction to Stochastic Processes and Cosmic Radiation, J.Wiley 1948

N.Bacaer-Short History of Mathematical Population Dynamics, Springer 2011 <OL>

A.L. Barabasi-Burst, 2010 - Nature 435, 2005

H.C. von Baeyer-Information-The new Language of Science, Harvard Univ.Press 2003.

Th. Bayes-An Essay towards solving a problem in the doctrine of chances,Phil.Trans.Royal Soc., 53, 370-418, (1763)

H.Bateman-The Probability Variations in the Distribution of Particles, Phil.Mag. 20 (1910), 698-704.

J.Beekman-Two Stochastic Processes, Halsted 1974.

H.Berg-Random Walks in Biology, Princeton UP 1993.

E.Borel-Le Hasard, 1924

E.Borel-Radioactivité Probabilité et Determinism, Oeuvres vol. 4, 1972, pg. 2189-2196.

K.E.Boulding-Foreword to Malthus' Essay, U.Michigan 1959

B.Brecht-*Galileo, A Play*, Grove 1966

J.Browne-Darwin's Origin of Species, 2 vol.

S.G.Brush-Randomness and Irreversibility, AHES 5 1968, 1-36, 12, 1974, 1-80.

S.G.Brush-

P.Buhlmann-Toward Causation and External Validity, Proc.Nat.Acad.Sci(pnas)2020

D.Calvetti-E.Somersalo-An Introduction to Scientific Bayesian Computing, Springer-Verlag 2008.

S.Chandrasekhar-*Newton's Principia for the Common Reader*. Oxford UPress, 1995.

J.E.Cohen-How many People can Earth Support, Norton 1995

J.E.Cohen-Population Growth and Earth's Human Carrying Capacity, Science (269), 1995, 341-

J.M.Cushing-Integrodifferential Equations and Delay Models in Population Dynamics, Springer Lect.Notes Biomath. 20 1977-SIAM

1998

H.Caswell-Matrix Population Models, 3rd. Ed. Sinauer, 2005.

H.Cramer-Historical review of Filip Lundberg's works on risk theory, pg. 1288-1294 in Collected Works of Harald Cramer.

Charles Darwin-The Origin of Species and the Descent of Man, 1859 (The Modern Library-Random House s/d)

L.Curtis-Concepts of Exponential Law prior to 1900, A.J.Ph. 46(9), 1978, 896-

O.Darrigol-....History of Electrodynamics....., Oxford UP

O.Darrigol-World of Flows- History of Fuid Dynamics....

M.Delbrück-Statistical Fluctuations and Autocatalytic Reactions, J.Chem. Phys. 1940

J.Diamond-

O.Diekmann-An Invitation to Structured (Meta) Population Models, Springer Verlag Lect BioMath. 96, 1993, pg.162-175.

O.Diekmannn-H.Tiemme-Mathematical Biology....Springer-Verlag

K. Doya &al. editors-Bayesian Brain, MIT Press 2007.

E.B.Dynkin-Random Walks, in "Mathematical Conversations", ed. E.B.Dynkin-V.A.Ouspensky, Dover 2006.

E.B.Dynkin-A.V.Yushkevich-Markov Processes, Plenum

N.Eldredge- Entrevista Revista Pesquisa da Fapesp- "Sobre a capacidade de suporte da Terra"

T.Erneux-Delay Differential Equations, Springer

L.Euler-"Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain- Acad.Sci Berlin 1760- trad. Theor.Popul.Biol. 1:307-314, 1970, & pg. 83-91 in Smith-Keyfitz(1977)-

Leonhardi Euleri-Opera Omnia -ser.I vol 7- pg. 345-352

L.Euler-Introductio Analysin Infinitorum, 1748- trad. inglês– Springer-Verlag

G.T.Fechner-KollektivemassLehre, 1897

W.Feller-An Introduction to Probability Theory and its Applications, 2 vol. J.Wiley 1966

W.Feller-On the Integral of Renewal Theory, Ann.Math.Stat. 12 (1941), 243-267, pg. 131-156, in Smith-Keyfitz(1977).

W.Feller-On the logistic law of growth and its empirical verification in biology, Acta Biotheor. 5, (1940): 51-66

E.A.Fellmann-Leonhard Euler (Biography)-Birkhauser 2007

W.C.Ferreira Jr.-Dinâmica de Populações: De íons a sapiens, online- Revista ComCiência

W.C.Ferreira Jr.-The Multiple Faces of Diffusion, 2011

WCFerreira Jr.-O Silêncio dos Conformistas, Conf. Enc.Biomat I, 2017 e 2018-prelo.

R.P.Feynman-The Concept of Physical Law, MIT Press

L.Fibonacci-Liber abbaci di Leonardo Pisano, 1202 (online)

Ph.Flajolet-R.Sedgewick-Analytic Combinatorics, Cambridge UP, 2009

H. von Foerster-Some remarks on changing populations, The Kinetics of Cell Proliferation, pg. 382-407, 1959.

H.Fritzsch-The Creation of Matter, BB 1984 (pg. 165-The decay of the proton)

Galileo Galilei-Dialogo,Fiorenza 1632 (trad. Dialogue Concerning the Two Chief World Systems, UnivCalif.Press1967)

C.W.Gardiner-Handbook of Stochastic Methods for Physics,Chemistry and Natural Sciences, Springer 1985

M. Gellman-The Quark and the Jaguar, Norton 1985.pg.132

N.Gershenfeld-Mathematical Methods for Information Technology, MIT Press

G.Gigerenzer-P.M.Todd-editors-Simple Heuristics that make Us Smart, Oxford Univ.Press 1999.

P.Glimcher-Decision, Uncertainty and the Brain, MIT Press 2004.

R.Graham-D.Knuth-O.Patashnik-Matemática Concreta: Fundamentos para a Teoria de Computação, Livr.Tecno-Cientifica 1988

John Graunt-Natural and Political Observations Mentioned in a Following Index and Made upon the Bills of Mortality, 1662-pg. 12-20 in Smith-Keyfitz(1977).

R.Gregory-Eye and the Brain-The Psychology of Seeing, Princeton UP 2015

K.P.Hadeler-Pair Formation in Age-Structured Populations, Acta Appl.Math. 14, (!989), 91-102.

E. Halley-An Estimation of the Degree of Mortality of Mankind, PhilTr RS,1693.

W.D.Hamilton-The Moulding of genes by Natural Selection, J.ThBiol 12 (1966), 12-45.

I.Hacking-The Emergence of Probability,

G.Hardin-The Tragedy of Commons, Science 1968

G.Hardin-Living within Limits, Oxford U.P.1993

S. Herbert-Darwin Malthus and Natural Selection, J.Hist.Biol. 4 (1971) 209-217

S. Herculano-Houzel S (2009) The human brain in numbers: a linearly scaled-up primate brain. Frontiers of Hum Neurosci 3:31

E.Hopf- On causality, statistics and probability, J. of Math. and Physics, vol 13, 1934.1763

F.Hoppensteadt-Mathematical Theories of Populations, SIAM 1972

David H. Hubel-Eye, Brain and Vision, Sci. Am. 1988

M.Kac-Lectures on Probabilistic Methods, 1958

D.Kahneman-D.Slovic-A.Tversky-Judgement under uncertainty: Heuristics and Biases, Cambridge Univ. Press 1982.

J.P.Keener-J.Sneyd-Mathematical Physiology, 2 vol. Springer 2008.

J.B.Keller-Mortality rate versus age, Th.Pop.Biol. 65 (2004) pg.113.

N.KEYFITZ - H.Caswell- Applied Mathematical Demography, 3rd Ed._SV2005

B.KEYFITZ-N.KEYFITZ-The McKendrick Partial Differential Equation and its Uses in Epidemiology and Population Study, Math.Comp.Mod. (1997):26, 1-9.

N.Keyfitz-Reconciliation of Population Models:Matrix, Integral and partial fraction, JRStat.Soc. A, 130, 1967, 61-83

N.Keyfitz-World Population and Ageing, UChicago Press 1990.

N.Keyfitz-J.Beekman-Demography through Examples, Springer 1984.

M.Kline-Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford UP 1970

E.V.Koonin-A.Novozhilov-G.Karev-The Biological Applications of Birth&Death Processes, Briefings in Bioinform. 7(1), 2010, 70-85.

M.Kot-Elements of Mathematical Ecology, Cambridge U.Press 2001

H.Kragh-The Origin of Radioactivity: From solvable problem to unsolved Non Problem, Arch.Hist.ExactSci. 50(3-4), 1997, 331-358.

Peter Kropotkin-Mutual Aid:A Factor of Evolution, 1902

K.Lange-Applied Probability, Springer Verlag 2010

P.H.Leslie-On the use of matrices in certain population mathematics, Biometrika, 33 :183-212, 1945.

R.Lewontin-D.Cohen-................PNAS 1959

C.C.Lin-L.A.Segel-Mathematics Applied to Natural Sciences, SIAM 1990

A.J.Lotka-Elements of Physical Biology, 1924, Dover 1956.

D.LUDWIG-Stochastic Population Theories, Springer-Verlag Lect. Notes in Biomath. 3, 1974

D.LUDWIG-The Distribution of Population Survival Times, Am.Nat.147, (1996), 506-520.

S.Luria-M.Delbruck-Mutation of Bacteria, Genetics 28 (1943), 491-511

DJC McKay-Information Theory, Inference and Learning Algorithms, Cambride Univ. Press 2003.

N.N.MacDonald-Biological delay systems, Cambridge U.P. 1990 -(Time lags in Biological Models SVLectBiomath 27, 1978).

Thomas Robert Malthus- Population: The First Essay, London 1798

R.M.May-When two and two do not make four: nonlinear phenomena in ecology, Proc.R.S.London B 228(1986), 241-66.

R.M.May-Stability and Complexity in Model Ecosystems, Princeton U.P. 1974.

E.Mayr-The Growth of Biological Thoght, Harvard U.Press 1982

A.G.McKendrick-Applications of mathematics to medical problems. Proc.Edinburgh Math.Soc., 44: 98-130, 1926

George A. Miller-The Magical Number Seven, Plus or minus Two: Some Limits on Our Capacity for Processing Information, Psych.Rev. 63(1956), 81-97: "My problem, ladies and gentleman is that I have been persecuted by an integer"

J.Monod-Le hasard et la necessité, Ed. du Seuil 1970-(trad. Chance and Necessity:An Essay on the Natural Philosopy of Modern Biology- Vintage 1971)

J.Monod-The Growth of Bacterial Culture, Ann.Rev. Microbiol. 1949, 3, 371-394.

P.W.Nelson-A.Perelson-

J. Pearl-D.Mackenzie-The Book of Why: The New Science of Causation and Effect, Basic Books 2018

A.Perelson-P.W.Nelson-.... HIV Virus Dynamics.....SIAM Rev 1999

A.S.Perelson-P.W.Nelson-The Mathematics of HIV Infection, in J.Sneyd-ed-An Introduction to Mathematics of Biology, AMS 2001

Charles S.Peskin-Mathematical Aspects of Heart Physiology, Lect. Courant Inst.-NYU 1978- AMS2008

Physics Web-Bismuth break half-life.....online: http://physicsweb.org/article/news/7/716

PhysicsWeb- Carbon clock could show the wrong time, 10 May 2001-online: http://physicsweb.org/article/news/5/5/7/1J. von Plato-.......

David Pimentel-R.Hopfenberg-Human Population Numbers as a Function of Food Supply, -pp online 2001

E.Pitacco-&al. editors-Modelling Longevity for Pensions, Oxford UP 2009

S.D.Poisson-La proportion des Naissances des Filles et des Garçons, Memoire de l'Acad. des Science, 08 février 1829.

https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=mdp.39015011958983;view=1up;seq=489

G.Polya-Patterns of Plausible Inference, Princeton Univ. Press 1968.

Th.Porter-A Statistical survey of Gases: Maxwell's Social Physics, Hist.Studies in the Phys.Sci. 12(1) 1980, 77-116

L.Redniss-Radioactive–Marie and Pierre Curie; A Tale of Love and Fallout, 2010

E.Renshaw-Modelling Biological Populations in Space and Time, Cambridge U.P., 1991.

E.Renshaw-Stochastic Population Processes, Oxford UP 2011

M.Rose-The Evolution of Ageing since Darwin, J.Gen. 87(4) 2008

W.Rundell-Determining the birth function for an age structure population, Math Popul Studies, 1: 337-395, 1989.

P.Samuelson-Resolving a historical confusion in population analysis, Human Biology, 48: 559-580, 1976 & pg.109-129 in Smith&Keyfitz(1977).

S.Schweber-The Origin of Origins, J.of the Hist Biol 10 (1977), 229-310.

Scientific American–The Mind's Eye, Readings from Sci. Am. 1986

Scientific American- Image, Object Illusion, Readings from Sci. Am. 1974

A.Shapiro-ed.-The Oxford Handbook of Visual Illusion, Oxford UP 2017

D.Smith-N.Keyfitz-editors-Mathematical Demography-Selected Papers, Springer Verlag 1977.

J.Sneyd-ed-An Introduction to Mathematics of Biology, AMS 2001

J.Sung-J.Yu-Population System Control Springer 1988- rev. J.Cohen SIAM Review 1990

J.Sung-&al-Population System Control_Math.Comp.Mod. 11(1988) 11-16.

L.Szilard-Ageing Process, Proc.Nat.Acad,Sci., USA 1959

S.Ulam-Marian Smoluchowski and the Theory of Probability in Physics, Am.J.Phys. 25 (1957), 475-481.

J. van Brackel-Radioactivity as Probability , Arch.Hist.Exact Sci. 31 (1985), 369-385.

N. van Kampen-Stochastic Methods in Physics and Chemistry,North-Holland 1985.

J. von Plato-Creating Modern Probability-Mathematical Physics Perspective, Cambridge UP 1994

P. Vorzimmer-Darwin Malthus and Natural Selesction, J.Hist.Ideas 30 (1969), 527-542.

Howard Wainer-Picturing the Uncertain World-How to understand, Communicate and Control Uncertainty through Graphical Display, PrincetonUP 2009

Howard Wainer-Graphic Discovery, Princeton UP 2005

A.R.Wallace-Contribution to the Theory of Natural Selesction, 1870.

N.Wax-editor-Selected papers on Noise and Stochastic Processes, Dover 1954

E.Widiger-ed.-The Five Factor Model, Oxford Univ.Press 2014

R.M.Young-Malthus and the Evolutionist'-Common Context, pg. 23-55 in -Darwin's Metaphor, R.M.Young-ed. CUP1985.

R.Zwanzig-....Verhulst logistic Equation......_PNAS

.

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

V-APÊNDICES:

I-O EFEITO KANIZSA, A METODOLOGIA ANALÍTICA DE GALILEO, E SUA

EXTENSÃO NEWTONIANA:

***Redução e Síntese**: Uma Curva Suave em lugar de uma Enorme Tabela Discreta (Kanizsa), sua Representação Cartesiana Funcional (Galileo) e sua Caracterização como Solução de uma Equação Diferencial (Newton)*

"E*u tenho uma maior admiração por aquele que, pela primeira vez, imaginou e construiu um instrumento musical que seria um tosco protótipo da harpa, do que pelos admiráveis artesãos que aperfeiçoaram este instrumento até a forma graciosa e a sonoridade perfeita que hoje o caracteriz*a". Galileo

A Metodologia de Galileo que busca sintetizar (e generalizar) funcionalmente a correspodencia de uma Tabela de dados experimentais deu início a uma revolução científica quando a sua perspicácia (e conhecimentos de Geometria Elementar) detectou (aproximadamente) as propriedades de uma parábola nas imagens de trajetórias de balas de canhão que ele exaustivamente analisou. (G.Galilei-Dialogo). Daí, à uma formulação analitica para esta trajetória foi um pequeno passo em vista da recentemente desenvolvida Geometria Analitica de Renée Descartes . (Uma coincidencia que não pode passar despercebida).

Entretanto, se a ideia de Galileo era brilhante, por outro lado, a sua implementação era difícil, mesmo com a Geometria Analitica de Descartes, pois não havia um procedimento padrão para caracterizar a função que bem representasse uma Tabela de dados. Além disso não havia ainda uma "biblioteca de funções" suficientemente grande que permitisse encontrar esta representante, visto que as funções disponiveis à época eram apenas as Elementares Algébricas, i.e., obtidas como resultado de uma sequencia finita de operações de soma, produto, composição e potencias racionais aplicadas às funções básicas {funções constantes e função identidade}.

Com a invenção do Cálculo Diferencial a "biblioteca de funções" aumentou consideravelmente pois incluiria a operação (transcendental) de soma infinita (além das operações algébricas) e, não menos importante, disponibilizou o emprego da Metodologia Newtoniana que caracteriza uma função de uma maneira extremamente sintética em termos da solução de uma equação diferencial. (Compare a expressão aritmética da função exponencial, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$, com a sua ultra-sintética descrição diferencial, $\frac{df}{dx} = f, f(0) = 1$).

A Metodologia Newtoniana para a Matemática Aplicada se constitui, portanto, de duas partes:

1)Os Principios que permitem "encriptar" uma função representativa de um Modelo Matematico na forma de solução de uma Equação Diferencial e,

2) Os Métodos analiticos que são instrumentos necessários para a "abertura destes códigos", ou seja, os métodos de resolução de equações diferenciais.

(O Presente texto está organizado segundo esta Metodologia Newtoniana).

Os Modelos Matemáticos da Mecânica Newtoniana formulados a partir do século XVIII são expressos na forma funcional, cujas funções são definidas como soluções de equações diferenciais. A Metodologia Newtoniana para a construção de Modelos Matemáticos tornou-se o paradigma predominante da Matemática Aplicada devido à sua capacidade de síntese que estava imersa na Teoria do Cálculo Diferencial e Integral inventado por Newton e Leibniz. É natural portanto que a aplicação desta metodologia na formulação de um modelo demográfico fosse encarado como indispensável.

Entretanto, para que isto fosse possível o modelo matemático adequado para representar "o tamanho N" da população em cada instante t, $N(t)$, teria que ser uma função contínua e diferenciável. Ora, mas diriam os apressados da objetividade, esta pretensão é um rematado contra-senso já que, notoriamente (!), a função $N(t)$ varia aos saltos,"de um em um" e, portanto, é irremediavelmente descontínua.

Na verdade, esta é uma objeção pertinente e bem fundamentada o que a faz merecer uma abordagem séria e cuidadosa muito embora na maioria das vezes os textos usuais de Matemática Aplicada apelem para um silêncio conformista da audiencia.(WCFerreiraJ-Conferencia/Artigo: O Silêncio dos Conformistas, 2018).

A argumentação mais simples e direta que sugere a transição do discreto para o contínuo (e para a suavidade do diferenciável) na representação de uma Dinâmica Populacional tem um fundamento essencialmente cognitivo e também é relevante para diversos outros contextos semelhantes na Matemática Aplicada.

Iniciemos pela observação inequívoca de que em toda a Matemática, dispomos apenas de representações gráficas descontínuas de funções (quaisquer que sejam elas) e, somente por uma ilusão de ótica (efeito Kanizsa) é que mentalmente completamos algumas sequencias pontilhadas por linhas (imaginárias) "contínuas e suaves". Ou seja, a continuidade e a suavidade é apenas uma construção mental que decorre de uma estratégia inata do cérebro humano para fazer sentido dos sinais que a retina lhe envia associando-os a memórias (imagens mentais) de elementos mais organizados, ou estruturados. O cérebro é patentemente incapaz de discriminar uma grande quantidade de informações não estruturadas (segundo George Miller[1956], 7 ± 2) e, por esta razão, a (enorme quantidade de) informação contida em um gráfico pontilhado tem que ser "reduzida" para ser "entendida", isto é, memorizada por intermedio de algumas de suas caracteristicas mais proeminentes. De fato, a representação gráfica-visual de uma tabela numérica foi uma das técnicas mais importantes inventadas pela ciência em geral, uma vez que, com isto, toda esta capacidade de percepção visual/mental torna-se disponível. É difícil imaginar que o extraordinário desenvolvimento da ciência nos últimos séculos, especialmente da Matemática, pudesse prescindir desta singular sinergia entre símbolos e representação visual.Uma outra maneira de organizar uma grande quantidade de dados "desconexos" como, por exemplo, uma série aleatória de dígitos (CPF,Telefone e etc.) é associa-los à uma simples melodia que tem estrutura e, portanto, é de mais fácil memorização, ainda que a associação seja completamente desprovida de sentido. A associação de um gráfico pontilhado a uma curva contínua é apenas uma das estratégias que a mente utiliza para "reduzir" uma grande massa de informações a um tamanho que pode ser "arquivado" e classificado segundo algumas poucas caracteristicas(Sci.Am. [1974],[1986], Hubel[1988],Gregory[2015],Shapiro[2017], Widiger[2014]).

Naturalmente, para que esta suavização de descontinuidades seja possível, é necessário que o conjunto de pontos não apresente "grandes" espaços interstícios e que, de fato, ele disponha de alguma estrutura propícia e não completamente aleatória. Para minimizar a dispersão dos pontos, ou seja, para promover uma "aglutinação" dos pontos do gráfico, usualmente lançamos mão da liberdade de escolha de unidades para as medidas das variáveis numéricas Tempo e População. Por exemplo, um aumento da unidade Tempo resulta em uma compressão linear do gráfico no sentido horizontal. Efeito semelhante na ordenada vertical é obtido com a modificação da unidade de População. Estas deformações do grafico não modificam aspectos topologicos que representam informações essenciais como região de crescimento e de curvaturas (isto é, os sinais da primeira e segunda derivadas). Enfim, na representação gráfica, a forma "rígida" da curva resultante não é essencial, apenas suas propriedades topológicas: monotonicidade, curvatura e etc.

Como as duas dimensões (Tempo e População), a principio, nada tem a ver uma com a outra, isto é, são independentes, não há absolutamente nenhuma razão para que tenham unidades transformadas pelo mesmo fator e este fato será utilizado em várias situações para enfatizar aspectos distintos do Modelo Matemático.

Um gráfico pontilhado pode, portanto, após compressão apropriada nas duas direções, fazer com que os pontos de gráficos discretos se aproximem o suficiente para que virtualmente descrevam uma curva contínua. Obviamente isto não a torna uma função matemática contínua, apenas faz com que, para efeito cognitivo, seu gráfico se apresente como um traço contínuo e assim favoreça psicologicamente esta interpretação.

De qualquer forma, é bom ressaltar que a hipótese de que um gráfico discreto possa ser bem representado por uma curva contínua e suave é uma hipótese (ou, "wishful thinking") fundamental para a construção do Modelo Matemático diferencial. A adequação do Modelo Matemático resultante desta hipótese somente poderá ser verificada a posteriori , nunca "demonstrada" a priori. Um conjunto de pontos completamente aleatórios dificilmente poderá ser associado a alguma estrutura simples que o represente razoavelmente. Mesmo assim, veremos que há casos em que isto é possível.(....[..]).

É interessante citar a possibilidade de generalizar estas ideias com a utilização de escalas não lineares cujas "lentes de observação" se modificam segundo as regiões e de acordo com a conveniencia do objetivo descritivo do Modelo matemático. A escala (não linear) logaritma é talvez o exemplo mais comum desta estratégia.Os Métodos Assintóticos também lançam mão desta estatégia com frequencia.(Lin-Segel[1990], Segel[BullMathBiol1989]).

A compressão vertical do gráfico de uma dinâmica populacional somente pode ser realizada se tratamos de grandes populações, por exemplo, da ordem de 10^9 , como as populações do Brasil, de um grande formigueiro [Gordon[1999]), do número de células do sistema imunológico ou de neurônios [Herculano-Houzel-2009] e etc..(O numero de Avogadro é da ordem de 10^{23}). Assim se a unidade empregada for $P_0 = 10^7$ (isto é, um "lote" de 10 milhões de individuos) estas populações biológicas passam a ser descritas com valores $0 \leq n \leq 100$.

A compressão horizontal, por sua vez, pode, por exemplo, aglutinar 200 pontos para a representação discreta de uma dinâmica demográfica de 100 anos com censos semestrais. A dinâmica populacional de um formigueiro, por outro lado, se analisada em um período de 5 anos (Gordon[1999]) com dados semanais apresenta um total da ordem de 250 pontos. A dinâmica imunológica é mais rápida e um período de 1 mês, pode ser regstrada discretamente em intervalos de tres horas o que também exige uma ordem de 250 pontos.

A modificação linear de escalas, ou de unidades, funciona como uma lente regulável que pode, por um lado, focalizar pequenos detalhes locais, tal como um microscópio,(reduzindo o campo de observação), ou, por outro, possibilitar a percepção da estrutura geométrico-topológica do "todo" global com o afastamento do ponto de vista do observador, que aglutina pequenas variações ("borragem") ,reduzindo, neste processo, a quantidade de informação. A construção de imagens contínuas pela iluminação de (invisíveis) pixels e a superposição de imagens em um filme cinematográfico são exemplos comuns e práticos desta técnica.

O problema de redução de informações, todavia, não é apenas uma estrategia psicológica humana. Hoje em dia, qualquer área científica (Social ou da Natureza) é inundada por uma massa avassaladora de informações, de tal monta que se torna patentemente impossível enfrenta-la com os métodos computacionais ou analíticos tradicionais. Em vista disso, os chamados Métodos Matemáticos de Redução, que tem por finalidade exatamente reduzir e organizar apropriadamente enormes arquivos de informações, tem sido rapidamente desenvolvidos nas últimas décadas tornando-se uma classe especial de métodos da Matemática Aplicada Contemporânea. Um dos métodos mais efetivos e interessantes para este fim faz uso de um processo (artificial) de difusão (um operador de difusão) que de fato associa conjuntos discretos a figuras (gráficos) matematicamente suaves.(WCFerreira Jr.[2018b]).Estes Métodos serão tratados em capítulo a parte.(Kutz[2015],.....).

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX-

II-A Metodologia de SÍNTESE FUNCIONAL DE DADOS EXPERIMENTAIS: Galileo-Newton-Kanizsa

A Estética e a Associação (Mnemônica) como Economia de Informação

> *"The ability to describe underlying patterns from data has been called the fourth paradigm of scientific discovery. [However, according to Kanizsa, that is exactly what our cognitive senses authomatically do all the time since immemorial eras. Besides, people forget to point out that Galileo, Kepler, Huygens, Euler and Rutherford have done just that centuries ago]". Primeira parte. J.G. Hey Anthony &al;Report Microsoft Res., Redmond WA 2009. Segunda parte parafrase anônima.*