ELEMENTOS DE MATEMÁTICA APLICADA: *PRINCÍPIOS, MÉTODOS E FINS*

Wilson Castro Ferreira Jr-IMECC-UNICAMP (2020)

CAPÍTULO I
PRINCÍPIOS DE REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA: *Modelos Matemáticos e Análise Dimensional*

"*Mathematical Models are Lies that help us see some Truth*". ~Lee A. Segel, Biomatemático

"*All Mathematical Models are wrong, however, some are useful but the only way to know which when and how they are useful is by using them, which seems totally tautological, although it is not!". " parafraseando e estendendo* .George Box, Estatístico.

I-Introdução: Representação Matemática e o Elogio à Sinplicidade

O tema genérico a ser tratado nesta seção é o conceito de **Modelo Matemático**, um tema raramente apresentado na literatura, mesmo de Matemática Aplicada.

Uma definição geral e preliminar deste conceito que abrange a maioria dos casos a serem estudados neste texto pode ser a seguinte:

> Um **Modelo Matemático** para um determinado **Fenômeno Natural**, é uma **Estrutura Matemática** associada a uma **Interpretação** que a identifica com um **Conjunto de Aspectos** ("traços") considerados relevantes e suficientes para a descrição do referido Fenômeno não matemático.

Uma Estrutura Matemática é constituida de um conjunto de Elementos dotada de operações e relações entre eles, por exemplo, os Números Naturais ($\mathbb{N}$) em que estão definidas a soma e o produto e os números reais ($\mathbb{R}$) em que esta definida uma Estrutura que consiste de operações algebricas (soma, produto) uma ordem e a topologia de convergencia. A demografia simples de populações consiste na observação dos seus respectivos tamanhos, os únicos "traços" que nos interessam descrever no caso (em que idade, sexo, peso, nacionalidade, grau de infecciosidade, etc. , etc., etc., não fazem parte) e os tamnhos podem ser representados por um número natural.

O "Conjunto de aspectos considerados relevantes para a descrição de um Fenômeno Natural" em qualquer circunstancia nunca poderá ser exaustivo e completo e deve ser necessariamente restrito. (Pode-se descrever muita coisa sobre uma população, mas não tudo!). Esta limitação não é apenas decorrente da linguagem utilizada nesta descrição (seja ela linguistica ou matemática), mas também devido à limitação intelectual humana.

Parafraseando Lee Segel, (que parafraseou Ernst Gombrich com respeito à arte) "*Um Modelo é apenas uma caricatura que enfatiza traços de interesse do objeto em observação*" ou ainda, "*Um Modelo Matemático é uma mentira que nos ajuda a entender parte da verdade*".

Portanto, uma das tarefas mais dificeis na construção de um Modelo Matemático é estabelecer quais informações são indispensáveis para produzir uma descrição desejável do Fenômeno, desprezando assim, explicita ou implicitamente toda a infinidade de outras informações, disponíveis ou não. (Segundo o matemático Mark Kac: "*É importante saber descartar corretamente as informações, ou seja, é importante saber como não lançar fora o bebê junto com a água do banho*").

Há duas maneiras metodológicas para proceder neste empreendimento que, caracteristicamente, é processado em várias etapas.

O primeiro método encara a questão de "*Cima para Baixo*" (Método "*Top-Down*", segundo Segel) incorporando deliberadamente todas as informações disponíveis e imagináveis do Fenômeno estudado a um super Modelo para, posteriormente, descartar as informações superfluas até que encontremos um Modelo minimalista e suficiente para os nossos propositos. Este processo é, obviamente, impossivel de ser estritamente realizado, se não por falta de conhecimento completo das informações sobre o Fenômeno, como também pelo enorme trabalho que envolveria a simplificação do mostrengo resultante.(A metodologia *Top-Down* poderia ser associado ao nome de Michelangelo a quem é atribuida a frase sobre sua escultura de David: "*A imagem já estava no bloco rustico de mármore que me foi entregue, a minha função foi apenas aquela de retirar as partes supérfluas*"). Em Matemática, Aplicada ou não, os Michelangelos são ainda mais raros do que na escultura !Todavia, é importante ressaltar que a metodologia de redução é indispensável para a simplificação de Modelos que, originalmente, não são completos, mas são excessivamente detalhistas para o objetivo em vista. Métodos de Redução serão abordados em um capítulo à parte e fazem parte essencial dos instrumentos matemáticos necessários para a construção de Modelos Matemáticos.

Resta-nos, portanto, a segunda alternativa que encara a tarefa de construção de um Modelo Matemático de "*Baixo para Cima*" (ou, "*Bottom-Up*", como dizia Segel). Neste caso, partimos de um Modelo drastica e deliberadamente simplificado (às vezes chamados de *"Toy Models*") em que se preserva apenas uma semelhança fundamental com o Fenômeno em vista, para, posteriormente, acrescentarmos, passo a passo, se necessário, informações ao Modelo original tornando-o sucessivamente mais representativo, até o ponto que seja satisfatório para os fins a que se destina. Esta atitude é construtiva e permite um maior controle sobre cada passo uma vez que se inicia com Modelos que, em tese, são matematicamente analisáveis e cujas discrepancias com a "Realidade" podem ser diagnosticadas, e resolvidas, com maior facilidade.

Modelos extremamente simples, tanto pela sua estrutura matemática elementar quanto pela descrição deliberadamente caricatural podem ser de grande utilidade para a compreensão do fenômeno estudado se elaborados com perspicacia e conhecimento do tema em questão. James Murray, um dos iniciadores da moderna Biomatemática (e autor de um de seus textos mais influentes- *Mathematical Biology*, Springer-1a. ed. 1989) argumentou de maneira convincente e com autoridade sobre este fato em uma memorável conferencia plenária da European Soc. for Theor. and Math. Biology-ESMTB em 2005 (Dresden, Alemanha), porteriormente publicada na forma de artigos. (Refer. de Leitura). Segundo ele:

"*95% or more of some phenomenon can be explained with very elementary mathematics, while adding more explanation of it requires an exponentially increasing amount of Mathematics which may not even be available*".

Neste ponto, é válido citar o famoso e antigo Principio de Parcimônia do monge inglês William Ockham (sec.XIII) expresso pela imponente frase em latim " *Pluralitas non est ponenda sine neccesitate*" que nos adverte sobre a importância de evitar a tentação em acrescentar complicações além do necessário. Em outras palavras, poderíamos dizer que a Natureza já é suficientemente complicada e não necessita de nossa ajuda voluntária neste sentido; o nosso papel é atuar exatamente no sentido oposto, ou nos depararemos rapidamente com uma barreira instransponivel.

Sendo assim, iniciaremos o estudo do tema deste capitulo com o exemplo mais simples possivel

de modelos matematicos.

I-1-As Estruturas Numéricas:

"What is man that can understand the concept of number, and what is number that man can understand it".
W.McCulloch

As estruturas matemáticas mais antigas e úteis nas aplicações foram, na verdade, originadas de sua própria utilidade prática cotidiana. Dentre todas as estruturas matemáticas utilizadas como Modelos Matemáticos, sem duvida alguma a Aritmética dos números naturais é a mais fundamental e presente em todas as civilizações humanas. O conceito de número natural é uma caracteristica cognitiva tão fundamental que é observada até mesmo no comportamento de alguns animais e aparentemente está impressa na fisiologia inata do homo sapiens (S.Dehaene, A.Nieder).

As estruturas matemáticas dos números naturais são utilizadas desde tempos imemoriais para a representação do conceito de **medida de tamanho** de Conjuntos (Cardinalidade), e a estrutura dos números reais para a medida de Comprimento e de Deslocamento linear.

A Aritmetica dos numeros naturais é a mais antiga e util dentre todas as estruturas matemáticas e a primeira aprendida nas escolas. (Matematicamente, a estrutura de $\mathbb{N}$ é o fundamento de todas as outras estruturas numéricas e de grande parte da Matemática. Segundo L.Kronecker: "Os números naturais foram dádivas divinas e perfeitas, o resto são construções, imperfeitas, dos homens").

O aprendizado da Aritmética na escola elementar se faz por intermedio de uma abstração inconsciente de processos concretos de contagem, digamos, de laranjas. As operações de soma e produto são interpretadas como manipulações especificas com "populações de laranjas" e se tornam de tal forma entranhadas que mal distinguimos o conceito de Modelo Matematico que se forma inconscientemente. De alguma forma, ainda misteriosa e intensamente estudada nos ultimos anos (Dehaene,Nieder), a criança percebe que o procedimento de contagem não se restringe aos objetos concretos utilizados para representa-la,(laranjas), mas pode ser abstraido na forma de uma estrutura matemática abstrata subjacente ao processo. Este salto de conceptualização é, certamente, um dos mais significativos na história da civilização e na Psicologia do aprendizado infantil, pois nos permite utilizar uma mesma estrutura abstrata para enumerar e ordenar objetos e situações que nunca foram, nem poderiam ser, mencionadas ou previstas durante o seu aprendizado. Em outros termos, com esta abstração, felizmente não precisamos aprender uma Aritmetica para laranjas, outra para bolinhas de gude, outra para dinheiro,...., e outra para contar quantas Aritmeticas já aprendemos. Além disso, também não necessitamos de um *manual de aplicação* da Aritmética, pois imediatamente *percebemos* as circunstancias em que podemos aplica-la.

A capacidade de síntese do Método de abstração se constitui na propria essencia da Matemática e tem suas raizes profundas nas atividades práticas mais corriqueiras.

A Análise Dimensional:

A construção de um Modelo Matemático **quantitativo** (isto é, baseado na estrutura de números) é um procedimento que depende de uma *escolha arbitrária*, mas indispensável, que fica a cargo do observador: a **Unidade** Padrão de tamanho. Por exemplo, um Lote (ou caixa) para a medida de Conjuntos, um Segmento de Reta para a medida de Comprimento linear, um Quadrado para a medida de área, Peso para a medida de massa, Periodo de oscilação de um pendulo (ou, batida do pulso, o movimento do sol, ou uma oscilação de um átomo de césio) para a medida de tempo e etc.. Além desta escolha arbitrária inicial da Unidade padrão, o processo de mensuração exige a descrição de um procedimento "pratico" para a comparação entre o objeto a ser medido e o objeto padrão. Estes dois fatos demonstram que a mesuração não é um processo estritamente matemático, mas é intimamente ligada ao fenômeno estudado e se encontra na fronteira entre as duas ciencias envolvidas, no caso da Biomatemática, entre a Matemática e a Biologia.

Explica-se assim, pelo menos parcialmente, porque este tema nunca é sequer mencionado em textos de Matematica. Entretanto, apesar de sua importância óbvia para a Matemática Aplicada, este tema nem sempre é se quer tratado em alguns textos do assunto e, frequentemente, tratado com menos ênfase e detalhes do que necessário. (Para uma notável excessão consulte C.C.Lin-L.A.Segel-*Mathematics Applied to Natural Sciences,* SIAM 1990).

A **Análise Dimensiona**l é o estudo do processo de mensuração e, especialmente, do efeito que a escolha arbitrária de unidades tem na constituição de um Modelo Matemático quantitativo. O seu estudo é um pre-requisito indispensável para o entendimento de qualquer ciência quantitativa e será o tema central do presente capitulo.

A Matematica utilizada na exposição da Análise Dimensional (Aritmética e elementos de Álgebra Linear) é considerada elementar e isto a torna, no julgamento de alguns, indigna de ser apresentada em textos mais sisudos. Entretanto, como veremos mais adiante, há uma série de resultados surpreendentes e profundos decorrentes de sua aplicação que por vezes se bastam para a compreensão de um Modelo Matemático. (Barenblatt, West, MacMahon).

Estruturas Matemáticas construidas diretamente a partir dos Números Reais, tais como Espaços Vetoriais R^n , Matrizes, Funções de variavel real e valores reais e etc., são amplamente utilizados na construção de Modelos Matemáticos para a representação dos mais diversos fenômenos naturais e sociais.

Dentre estas, certamente as **Funções** de variável e valores numéricos, constituem a mais importante classe de objetos matemáticos para a construção de Modelos Matemáticos, depois das estruturas numéricas.

I.2-Funções como Modelos Matemáticos

As funções são objetos matematicos cruciais na descrição de relações de causalidade e variação temporal cuja origem pode ser detectada nos trabalhos de Galileo.

Consideremos, com Galileo, a descrição da queda livre de um objeto solto do alto da torre de Pisa, utilizando para isso uma tabela de duas colunas sendo a primeira constituida da anotação dos tempos t_k de observação, (digamos, a cada batida de pulso) e a segunda constituida da respectiva altura x_k do objeto em cada um daqueles instantes. Esta tabela é uma descrição do fato consumado, tal como a História humana que frequentemente é apresentada na forma de um grande tabela de "efemérides" impossível de ser memorizada, dificil de ser visualizada em contexto e, portanto, com uma utilidade muito reduzida.

A grande ideia de Galileo foi buscar a representação desta enorme tabela de observações na forma de um **Algoritmo** que fosse capaz de produzir, "à pedido", qualquer valor da posição $x(t)$ do objeto uma vez apresentado o respectivo instante t de queda, e não apenas para os arbitrários intervalos de tempo de uma tabela. Assim, em lugar de uma tabela explícita, mas inadministrável e sem uma estrutura matemática subjacente, teríamos uma sintética "*máquina analítica*" representada pela sua famosa **Fórmula** $x = x_0 - \frac{1}{2}gt^2$. (O conceito de Algoritmo é mais antigo do que o conceito de Função e tem suas origens no século IX com o matemático iraquiano M. Al-Kwarismi de onde provem o termo..(Knuth, Ershov). O italiano Fibonacci utilizou exatamente esta ideia de Algoritmo no século XIII para representar uma tabela de numeros naturais que descreveriam o tamanho da população de uma criação "virtual" de coelhos. Com isto, Fibonacci inaugurou, com um "*Toy Model*", uma das áreas mais importantes da Biomatemática que será desenvolvida em outro capítulo. O conceito de Formula e Algoritmo foi mais tarde extraordinariamente expandido com o advento de operações limite do Calculo, especialmente as somas (séries).

Entretanto, apesar da extraordinária síntese e simplificação que a descrição funcional representa com relação às tabelas de dados, este fato não esgotaria as vantagens deste procedimento.

A grande vantagem oriunda da estratégia de Galileo é a possibilidade de definir e utilizar uma rica estrutura matemática no conjunto de funções o que foi proporcionado pela invenção do Calculo Diferencial e Integral no século seguinte. Ou seja, as funções não seriam apenas "máquinas de produzir tabelas, ou números", mas **objetos matemáticos** com identidade matemática pertencentes a uma estrutura matemática, na qual é possível definir operações (soma, produto, composição, derivação, integração e limites) que permitem aumentar enormemente a sua capacidade representativa. Esta é uma situação de todo análioga àquela que ocorreu com a invenção da Aritmética que transforma os números de símbolos inertes em elementos de uma estrutura matemática, com a qual é possivel representar diversos procedimentos. (Em especial, com esta estrutura é possivel representa-los e construi-los a partir de pequenos blocos; a expansão decimal).

É imprescindivel lembrar que invenção do Calculo foi, na verdade, motivada pelo objetivo de Newton em representar o exaustivo conjunto de observações astronômicas de Tycho Brahe (já drasticamente sintetizadas pelas "leis" de Johannes Kepler) por intermedio de funções caracterizadas, não apenas por Fórmulas algébricas elementares ("explícitas") à moda de Galileo, mas como soluções de equações diferenciais expressas com as operações do Calculo, o que expandiu consideravelmente a classe de funções disponíveis.

As grandes massas de dados ("*Big Data*") amplamente disponibilizadas pela moderna tecnologia informática para as mais diversas áreas do conhecimento instigou o ressurgimento de novos procedimentos que visam sintetiza-las compactamente e estruturalmente na forma de Funções. A Metodologia moderna não repete, todavia, exatamente o procedimento histório Brahe-Newton, pois lança mão de diversas teorias e técnicas matemáticas surgidas apenas no ultimo século. Este será o tema de um dos proximos capitulos destinado ao **Principio de Reconstrução** de Modelos, denominado pelo descritivo acrônimo DDM ("*Data Driven Models*"). (Kutz).

I.3-Operadores Lineares e outros objetos Matemáticos

A teoria Quântica segundo a versão inventada pelos físicos W.Heisenberg, P.Dirac e formalizada pelo matemático J. von Neumann nas primeiras décadas do século XX, dá um passo adiante no conceito de Modelos Matemáticos, quando introduz a estrutura de operadores lineares em espaços de Hilbert ("matrizes infinitas") para a representação de fenômenos físicos.

O conceito clássico e Newtoniano de funções também foi ampliado durante a primeira metade do século XX segundo a teoria de funções generalizadas, ou distribuições, sugerido por Paul Dirac dentre outros, desenvolvido por K.-O. Friedrichs, L.S.Sobolev e formalizado pelo russo I.M.Gelfand ("Funções Generalizadas", ed. MIR e pelo francês Laurent Schwartz ("Théorie des Distribuitions", Hermann, 1950).

No presente texto não abordaremos modelos matemáticos fundamentados na estrutura de operadores lineares e o conceito de função generalizada será mencionado de passagem no estudo de processos difusivos.

I- Modelos Matemáticos Quantitativos: *Conceito, Dimensionalização, Redução e Complexidade*

Em grande maioria dos casos, mas não todos, os Aspectos ("Traços Caricaturais") escolhidos para a descrição de um fenômeno, e que serão denominados **Parâmetros Descritivos** do Modelo, são representados matematicamente por intermédio de suas respectivas **Medidas**. Portanto, a representação matemática dos Parâmetros Descritivos é realizada por intermédio da mais importante estrutura matemática: *os* **Números Reais**, R. O estudo dos fundamentos que norteiam esta representação, isto é, a Mensuração, é o tema central da **Análise Dimensional**.

A **Análise Dimensional** contemporânea trata especificamente da maneira pela qual é possível atribuir Medidas Numéricas aos Parâmetros Descritivos que, em conjunto, determinam completamente as informações desejadas sobre o fenômeno estudado.

A origem das ideias que levaram à Análise Dimensional pode ser estabelecida mais explicitamente nos estudos sobre Mecânica e Elasticidade iniciados por Galileo Galilei (sec. XVII) embora a enorme sombra intelectual de Arquimedes (sec. IIIAC) seja claramente perceptível nos seus argumentos. A sistematização moderna de seus conceitos básicos foi iniciada pelo físico escocês James Clerk Maxwell (Sec.XIX) e, desde o sec.XX, se constitui em ferramenta indispensável para a Física, as Engenharias e, mais recentemente, para a aplicação da Matemática à Biologia. Apresentaremos a seguir alguns aspectos gerais e fundamentais da Teoria de Modelos Matemáticos Quantitativos que são intimamente ligados e dependentes dos conceitos da Análise Dimensional.

A **Mensuração** de um Parâmetro Descritivo que compõe um Modelo Matemático somente pode ser realizada por **comparação** a uma **unidade** padrão, arbitrariamente escolhida, que assim determina os valores numéricos da medida.

A mensuração de um Parâmetro Descritivo sempre pressupõe um procedimento experimental associado a ele, por intermédio do qual se estabelece a própria interpretação de seu significado. Esta dependência é raramente indicada na literatura, talvez por não se constituir em uma operação Matemática, o que se torna mais um motivo para ressaltá-la aqui.

A estipulação do conjunto suficiente de Parâmetros Descritivos para a representação de um Modelo e a escolha de suas respectivas unidades é uma **etapa inicial** e indispensável na construção de um Modelo. Denominaremos esta etapa **Dimensionalização** que se fundamenta completamente no conhecimento experimental especifico sobre o fenômeno. A inclusão ou descarte de itens no conjunto de Observações de um Modelo e, consequentemente, de seus Parâmetros Descritivos, é um processo de tentativa e erro que não visa uma solução final ótima, mas apenas uma maior ou menor conveniencia a depender dos objetivos do estudo. Este fato faz da Análise Dimensional um tópico essencial para entender as interfaces entre a Matemática e as suas diversas aplicações na forma de *Modelos Quantitativos*. Também torna-se imediatamente claro, mais uma vez, que a Análise Dimensional **não é** uma disciplina da *Matemática* (dita "*pura"*), já que não se esgota dentro dela, mas, sim da *Matemática* (dita) *Aplicada* (ou, "*Aplicanda*") especifica de alguma interface da Matemática com o seu "exterior".

A Análise Dimensional trata de assuntos que à primeira vista parecem óbvios por serem corriqueiros, mas progressivamente ela nos surpreende pelos resultados sutis e profundos que são decorrentes da formalização de principios simples que passam desapercebidos por quem se acostuma a operar com eles apenas automaticamente.

Portanto, o **Primeiro Ingrediente** na construção de um Modelo Matemático é o conjunto $\{P_1,\ldots,P_k\}$ de Parâmetros Descritivos, que deve ser inicialmente estipulado, assim como as suas interpretações extra-matemáticas, e as unidades que permitirão representa-los numericamente. Esta etapa inicial é apenas **descritiva** do fenômeno; resta tratar agora da segunda etapa, que é **Preditiva**.

O **Segundo Ingrediente** na construção de um Modelo Quantitativo consiste em estabelecer um conjunto finito de **Funções Matemáticas** de k variáveis reais e valores reais, $\varphi_j(\zeta_1,\ldots,\zeta_k)$, $1 \leq j \leq m$ ($\varphi_j : U_j \subset R^k \to R$) que determinarão uma interdependencia entre as possíveis medidas dos Parâmetros Descritivos na forma de um sistema de equações implícitas: $\varphi_j(p_1,\ldots,p_k) = 0$, $1 \leq j \leq m$.

Se alguns dentre os Parâmetros Descritivos apresentam especial interesse, as equações implícitas podem assumir uma forma explícita, que é mais frequente. Por exemplo, no caso $k > 1$, o Modelo implícito da forma $\varphi(p_1,\ldots,p_k) = 0$ pode, eventualmente, ser re-escrito em uma forma explícita: $x = \psi(t,p_3,\ldots,p_k)$ onde $p_1 = x$ e $p_2 = t$. Neste caso, $p_3,\ldots,p_k$, são denominados Parâmetros Constitutivos do Modelo, enquanto x é Parâmetro (ou, variável) Dependente, e t Parâmetro (ou,variável) Independente.

A determinação das Funções Matemáticas $\{\varphi_j\}_{1\leq j\leq m}$ é a parte essencialmente matemática no processo de construção de um Modelo Quantitativo.

Como já vimos, as expressões numéricas p_k dos respectivos Parâmetros Descritivos P_k dependem da **escolha** de unidades, que é um processo completamente arbitrário e não matemático.

Assim, é natural questionar se, para diferentes sistemas de unidades, as condições funcionais impostas ao conjunto de medidas $\{p_k\}$ se modificam, ou seja, se as Funções Matemáticas que definem o Modelo são vulneráveis a esta arbitrariedade. A resposta a esta questão não é demonstrável mas é tacitamente respondida com a **Hipótese Fundamental na Teoria de Modelos Matemáticos Quantitativos** (que é assumida tacitamente e quase nunca mencionada) a ser formulada da seguinte maneira:

> *As **Funções Matemáticas** φ_j que descrevem o Modelo Matemático na forma de equações $\varphi_j(p_1,\ldots,p_k) = 0, 1 \leq j \leq m$ **são invariantes** com relação ao sistema de unidades empregado para a mensuração dos parâmetros descritivos do Modelo.*

O conjunto de valores numéricos das medidas $p_1,\ldots,p_k$ pode variar enormemente (embora não de maneira totalmente arbitrária) com a modificação do sistema de unidades empregado para a sua mensuração. A Hipótese Fundamental elimina esta indeterminação aparente estabelecendo que as condições impostas pelas Equações permanecem iguais e independentes do sistema básico de unidades utilizado. Isto é, se p'_j são medidas dos mesmos respectivos Parâmetros Descritivos em outro sistema de unidades, então, necessariamente devemos ter: $\varphi_j(p'_1,\ldots,p'_k) = 0, 1 \leq j \leq m$.

A Hipótese Fundamental não é matematicamente demonstrável, pois não está totalmente inserida na Matemática, mas se apoia em argumentos e evidências exteriores à ela. Alguma reflexão sobre este assunto nos leva a *crer,* em geral, que uma dependencia destas funções com respeito às unidades seria algo mais estranho do que a própria Hipótese; simplesmente significaria que o conjunto de parâmetros descritivos do fenômeno não é completo e algo dependente do sistema de unidades está implícito e "escondido" na definição da função. O termo "Função Matemática" tem por objetivo exatamente enfatizar que estas funções são puramente numéricas e não tem conexão alguma com o sistema de unidades.

Tal como ocorre amplamente em Matemática Aplicada a única maneira de verificar a Hipótese Fundamental é consequencialista (ou seja, a posteriori, constatando-se a sua utilidade) e não pela sua justificação lógica dedutível de outras hipóteses. Em ouros termos, esta é uma aplicação típica do princípio em que "Os Fins Justificam os Meios", desprezado tanto em Matemática Pura (onde os "fins"-teoremas- é que são justificados pelos meios, i.e., axiomas e deduções-) quanto na Moral.(ref. Stanford Encycl. Philosophy-online-: "Consequentialism"). A própria Teoria de Modelos Matemáticos (assim como a Física) é completamente consequencialista em algum nível ou, parafraseando (e acrescentando) o estatístico George Box:"*All Mathematical Models are wrong, however, some are useful but the only way to know which when and how are useful is by using them, which seems totally tautological. However, it is not!".*

A determinação das *Funções Matemáticas* que representam um Modelo Quantitativo é uma etapa posterior à sua Dimensionalização e, em geral, realizada com a utilização da **Metodologia Newtoniana** em que estas Funções são obtidas como soluções de Equações Funcionais, (geralmente Diferenciais ou Integrais) "deduzidas" a partir de hipóteses sobre o fenômeno. Por esta razão, um Modelo "Newtoniano" é sempre identificado mais com as Equações Diferenciais que determinam as Funções definidoras do Modelo, do que com a própria Função.

A Metodologia Newtoniana tem dominado a Matemática Aplicada em quase todas as suas manifestações desde que Isaac Newton inventou o Cálculo Diferencial e Integral no século XVII para este mesmo objetivo.

É interessante ressaltar, todavia, a existência já mencionada, de outros métodos para a construção de Modelos Matemáticos, denominados "DMKD-Data Mining and Knowledge Discovery", e DMD ("Data Driven Models") em que as Funções Matemáticas que o definem são construídas a partir do arquivo de uma grande massa de Dados Numéricos experimentais ou observacionais sobre o fenômeno. Este tema será tratado em outro capítulo.

A **Complexidade** de um Modelo Matemático pode ser *provisoriamente* definida como sendo o número mínimo de Parâmetros necessários para descrevê-lo, o que se associa, de certa maneira, à um conceito de "complexidade" das Funções Matemáticas que deverão representa-lo. Interpretando uma função de duas variáveis $\varphi(x,y)$ como uma família infinita (e contínua) de funções de uma variável (x) , $\varphi_y(x)$, é imediatamente claro que, pelo menos em um sentido intuitivo, a "complexidade" de funções de duas variáveis é **muito maior** do que a "complexidade" de funções de apenas uma variável, $\psi(x)$. E, progressivamente, mantendo outras caracterísiticas iguais, quanto maior o número de variáveis, maior a ordem de complexidade de uma classe de funções.

Entretanto, a precariedade desta definição (provisória) é imediatamente aparente, a menos que seja demonstrada a unicidade do número de Parâmetros Descritivos e das Funções Matemáticas que descrevem o Modelo pois, caso contrário, a complexidade dependeria da representação e não seria uma propriedade intrínseca do Modelo Matemático.

A Análise Dimensional nos mostrará que é possível determinar um número "**mínimo efetivo**" de Parâmetros Descritivos, $\pi_1,\ldots,\pi_s$, $s \leq k$ (denominados Parâmetros Adimensionais) definidos por expressões algébricas elementares da forma $\pi_l = p_1^{n_1} \bullet\bullet\bullet p_k^{n_k}$ (onde $n_s \in Z$) de tal maneira que as Funções Matemáticas que representam o Modelo $\varphi_j(p_1,\ldots,p_k) = \Phi_j(\pi_1,\ldots,\pi_s)$ podem ser expressas em termos de Funções Matemáticas, $\Phi_j(\eta_1,\ldots,\eta_s)$ com um número $s \leq k$ (eventualmente muito menor) de variáveis. Isto significa que a complexidade do Modelo é efetivamente dependente do número de **Parâmetros Adimensionais**, s , que é bem determinado e frequentemente menor do que o número k de Parâmetros dimensionais. A descrição Adimensional é, portanto, considerada **Reduzida** no sentido de que a construção do Modelo nesta forma exige a obtenção de funções com um número de variáveis efetivamente menor. Este resultado, que será obtido com argumentações simples e manipulações elementares, tem um enorme impacto para a compreensão do conceito de Modelo Matemático e para o seu tratamento analítico e numérico adequado.

A obtenção do **Modelo Matemático Adimensional (Reduzido)** faz uso de duas hipóteses:

1) Liberdade que a escolha de unidades padrões nos confere e

2) da Invariancia da representação funcional com relação às unidades padrões dos parâmetros descritivos.

Embora a escolha inicial de unidades padrões seja completamente arbitrária, (e todas são, em princípio, lícitas), uma vez discriminados os Parâmetros Descritivos do Modelo, distinguimos facilmente que o proprio Modelo explicita **Unidades Intrínsecas** para todas as suas medidas. A utilização destas unidades intrínsecas (também denominadas, **Escalas Intrínsecas do** Modelo) é a chave do proceso de Adimensionalização e da obtenção de **Modelos Reduzidos.**

A Redução dimensional de um Modelo Matemático tem uma relação imediata com o 17^0 problema da lista de 23 problemas que David Hilbert propôs no Congresso Internacional de Matemática em Paris, 1900 como programa de pesquisa para a Matemática do século XX . A *grosso modo*, este problema pode ser enunciado da seguinte maneira: "*Dada uma função de muitas variáveis, em que situação é possivel representa-la como composição de funções com um número menor de variáveis* ?". Esta possibilidade indica vantagens óbvias como por exemplo, quando uma função originalmente determinada por uma Equação Diferencial Parcial (para funções de várias variáveis) possa ser determinada por uma, ou mais, Equações Diferenciais Ordinárias (para funções de uma variável). A solução geral deste problema foi obtida pelos matemáticos russos Andrei Kolmogorov e seu aluno Vladimir Arnold em 1954 , mas a sua implementação computacional é assunto em aberto [ref. A.N.Kolmogorov-Selected Works,...]). É importante ressaltar que este problema abstrato foi sugerido a Hilbert pelo trabalhos de um engenheiro, Maurice d'Ocagne que desenvolveu um método gráfico e prático, chamado Nomografia, para a representação de Modelos Matemáticos. Esta técnica foi amplamente utilizada até o surgimento recente dos computadores digitais.

A garantia da invariancia da Função Matemática que representa o Modelo com respeito a mudanças de unidades nos permite modificar, e eventualmente simplificar o problema sem perda de soluções, aplicando a ele um grupo especifico de Transformações, no caso, mudança linear de unidades (ref. G.Barenblatt). A generalização matemática desta estrategia originada na Análise Dimensional deu origem à teoria de Grupos de Transformações de Equações Diferenciais desenvolvida inicialmente por Sophus Lie que admite o uso de Grupos muito mais gerais de transformações que possibilitam simplificar equações diferenciais sem que suas soluções sejam modificadas. Esta classe de Métodos de Lie tem particular importancia para a obtenção de soluções explicitas de Equações Diferenciais em algumas áreas da Matemática Aplicada e será tratada na seção "Métodos Matemáticos- Grupos de Transformação e Invariancia" deste texto.(ref .L.V.Ovsiannikov-Group Transformations of Differential EquationsAcad.Press 1980, ...). A origem histórica desta idéia de Transformações de Equações se encontra nos trabalhos de Galois sobre equações polinomiais e no Algorítmo de Gauss para resolução de Sistemas de Equações Lineares.

O esclarecimento do processo de mensuração é portanto indispensável não somente para a compreensão dos Princípios Fundamentais da construção de Modelos Matemáticos Quantitativos, mas também para o desenvolvimento de diversos Métodos da Matemática Aplicada, tais como os Métodos de Redução, Métodos Assintóticos de Múltiplas Escalas, Métodos de Invariância e etc.

Apresentaremos a seguir as ideias e Métodos da Análise Dimensional por intermédio de alguns exemplos ilustrativos simples, mas relevantes, com o objetivo de esclarecer a exposição mais abstrata acima.

II-MODELOS GEOMÉTRICOS ELEMENTARES

A maneira mais didática para a exposição dos conceitos e a sistematização das técnicas da Análise Dimensional se faz por intermédio de exemplos concretos que são, de fato, a sua origem e finalidade e, que além disso, aproveita a intuição que adquirimos ao longo do tempo com a manipulação, ainda que ingênua, destas idéias.

Observemos inicialmente que qualquer Modelo Matemático *quantitativo* faz uso da estrutura de números reais para a representação dos valores de medidas em um sistema de **unidades** pre-estabelecidas; sem estas unidades a matematização numérica de um modelo é inviável.

A Geometria é a origem do conceito de números reais que surgiu na Matemática grega clássica com o objetivo de "medir" o comprimento (isto é, estabelecer uma ordem de tamanho) de segmentos de retas e, posteriormente para medir o comprimento de segmentos de curvas, e as extensões de áreas e volumes. Para isto, instituiu-se o conceito de unidade padrão de comprimento u que poderia ser **qualquer** segmento retilineo. Esta unidade seria então dividida em partes iguais (por construção de regua, compasso e semelhança de triângulos) de todas as ordens q produzindo sucessivamente sub-unidades u_q que poderiam ser menores do que qualquer comprimento. O processo de mensuração do comprimento de um segmento provem da associação de um numero racional $\frac{p}{q}$ cujo significado seria um um segmento obtido por **juxtaposição consecutiva** de p copias de subsegmentos u_q . Os gregos acreditavam que todos os comprimentos retilineos poderiam ser exatamente medidos com um dos segmentos representados por numeros racionais $\frac{p}{q}$.

A maior crise da história da Matemática (que,muitos seculos depois motivou a origem de uma de suas mais profundas teorias) eclodiu com a demonstração de que a hipotenusa de um simples triangulo retangulo com catetos unitarios era *incomensuravel* com esta unidade, ou seja, não haveria nenhum número racional que o representasse. (Em termos modernos, $\sqrt{2}$ é irracional!). A partir deste momento os numeros reais existiriam apenas como segmentos de reta; a sua representação decimal infinita somente foi instituida séculos mais tarde com a invenção do Calculo e dos conceitos de limite.

Observe que a unidade de área a é definida pelo quadrado com lados unitários u e as subunidades a_q por quadrados com lados dados por subdivisões u_q da unidade linear. A medida de uma área também se faz por **juxtaposições** (como um quebra-cabeça) de subunidades de área até que se esgote o recobrimento da figura. A quadratura do circulo de raio unitário seria equivalente à incomensurabilidade da hipotenusa e os catetos.

Consideremos agora o conjunto de todos os triangulos retângulos e o problema de determinar as suas áreas. Como um triangulo retangulo é completamente determinado por um cateto e por sua hipotenusa (verifique), estes serão os parâmetros descritivos do "fenômeno". (A cor do triangulo, sua localização no Universo e o material de que é feito são informações desacartadas). Portanto, o Modelo Matematico para este "fenômeno geométrico"pode ser funcionalmente representado na forma $A = f(c,h)$ em que A é o **numero** representa a área do retangulo, c o numero que representa o comprimento do cateto e h o numero que representa o comprimento da hipotenusa, todos eles medidos segundo uma mesma unidade qualquer, digamos u, que, em principio, nada tem a ver com este problema mas deve ser escolhida de principio.(São válidas, por exemplo a escolha do raio do átomo de hidrogenio, um Angstrom,ou um ano-luz, que é a distancia que a luz percorre durante um ano de viagem no vácuo, a polegada, que é o comprimento da articulação de um vaidoso rei inglês ou o metro representado por uma barra fortemente guardada em um museu distante de Paris que pouca gente já visitou).

Sob a hipotese de que esta função f não varia com a mudança de unidade de comprimento linear escolhida para mensurar o cateto, a hipotenusa e, consequentemtne a área do triangulo, (ou seja, não depende dela), podemos então, espertamente, escolher uma **unidade padrão intrinseca** do problema, por exemplo, o proprio cateto. Com esta unidade o numero que representa o comprimento do cateto será 1, e o numero que representa o comprimento da hipotenusa será $\frac{h}{c}$ enquanto que o numero que representa a media da área será $\frac{A}{c^2}$ de onde, teremos necessariamente:
$\frac{A}{c^2} = f(1, \frac{h}{c}) = g(\frac{h}{c})$, ou, $A = c^2 g(\frac{h}{c})$. Portanto, para descrevermos completamente este Modelo Matematico, em vez de uma função matemática de duas variaveis, $f(x,y)$, passamos a necessitar de uma função $g(z)$ de apenas uma variável, o que é um ganho analítico consideravel. Isto significa que o problema tem complexidade 1.

Consideremos agora uma perpendicular à hipotenusa passando pelo vertice dos dois catetos o que determina dois novos triangulos retangulos. Cada um destes compartilha um angulo agudo com o triangulo maior e, portanto ambos são semelhantes a ele e, consequentemente todos os tres semelhantes entre si. Isto significa que a razão entre os comprimentos da hipotenusa e o cateto tem o mesmo valor para todos eles, ou seja, $g(\frac{h}{c})$ é o mesmo para os tres triangulos. Identificando as hipotenusas dos tres triangulos, utilizando a respectiva formula e cancelando o valor comum de $g(\frac{h}{c})$, obtemos o Teorema de Pitágoras: $h^2 = c^2 + b^2$. (Verifique).

Consideremos agora o conjunto de todos os discos **planos**. Fundamentados em nossa experiencia geométrica do espaço, admitiremos que qualquer um deles é totalmente determinado pelo seu raio. Esta é uma hipótese Física e não matemática que, como veremos pode ser disputada em contextos distintos. Dada uma unidade qualquer de comprimento linear u , podemos então medir o comprimento R do raio (isto é o numero que representa a medida do raio na unidade u) e da circunferencia C (....) e, certamente, teríamos uma função $C = f(R)$, em que, por hipótese, a função f **não** depende da unidade escolhida. Portanto, tomando a unidade intrinseca de comprimento linear para este "fenômeno" como sendo o proprio raio (o famoso círculo de raio unitário!) teríamos: $\frac{C}{R} = f(1)$ ou seja, a razão entre os comprimentos de qualquer circunferencia e o seu raio é sempre constante independente da unidade escolhida para medi-los. Este número foi chamado por Euler de 2π e é dito "adimensional" (ou "puro") exatamente por ser invariante com relação à unidade de comprimento utilizada nas medidas do disco.

Voltando à determinação completa do disco unicamente pelo seu raio, observemos que a hipotese de "planitude" do espaço em que ele se encontra é essencial para este argumento, mas não necessariamente correto em geral. Por exemplo, o disco pode estar apoiado sobre a superficie terrestre! A razão entre comprimento da circunferencia e o raio para circulos sobre superficies ligeiramente encurvadas **dependerá também** desta curvatura e teremos sempre $\frac{C}{R} \leq 2\pi$ com a igualdade sendo verificada somente no caso dito plano. Na verdade, este pode ser o proprio critério de "planitude" do espaço!(Verifique).

III-O PÊNDULO DE GALILEO

"Mathematical Models cannot be replicas of Nature, but are powerful tools that help us understand its phenomena" Peter Kareiva-Entomologista

Um dos exemplos mais simples e didáticos para ilustrar os conceitos de Modelo Matematico e Análise Dimensional deve-se a Galileo e apresenta um dos fenômenos mais fundamentais da Mecânica, tanto sob o ponto de vista histórico como conceitual: o movimento oscilatorio de um pêndulo clássico.(G.Baker-J.Blackburn-*The Pendulum*, OxfordUP 2008). Este pêndulo é um dispositivo simples que consiste em uma partícula (cuja massa é considerada pontual e concentrada), sobre a qual é exercida uma força vertical constante, a gravidade, e, por outro lado, é sustentada por uma haste não extensível, dotada de massa desprezível, presa por sua extremidade superior a um vínculo fixo. Supõe-se ainda que este vínculo não oferece atrito de roçamento e o movimento plano do pêndulo não sofra atrito viscoso do ar. A oscilação se inicia quando a massa em repouso é liberada a partir de uma posição deslocada de seu ponto de equilibrio. O experimento, como se observa, resulta em uma oscilação periódica em um plano vertical entre duas posições extremas e simétricas com respeito ao ponto de equilibrio.

Observe que estamos tratando de um Modelo extremamente simplificado do fenômeno mas que gaurda ainda uma consideravel semelhança com a questão original.

Digamos que o período de oscilação do pêndulo seja a observação de principal interesse do experimento.

A construção do Modelo Matemático para este fenômeno será fundamentada na seguinte hipótese:

"*O período T de oscilação do pêndulo é a observação de interesse que se supõe completamente determinado pelo seguinte conjunto de Parâmetros Descritivos (ditos **constitutivos**) do dispositivo: massa (*m*), força gravitacional (aceleração da gravidade, g), comprimento da haste (*l*), amplitude da oscilação,(*A*)*".

Neste Modelo, assumimos deliberadamente que o Parâmetro Descritivo "Período de Oscilação" depende unicamente dos outros Parâmetros Descritivos, e esta hipótese é baseada inteiramente em argumentos físicos e experimentais. A hipótese assumida é uma "hipótese de trabalho" que será mais tarde justificada *a posteriore* ou, não, pela coerência entres seus resultados e as observações. (Isto é, "*Os Fins [resultados] justificarão, ou não, os meios[hipóteses]*")

Esta abordagem enfatiza apenas a determinação explícita do período de oscilação do pêndulo como dependente dos outros Parâmetros Descritivos (Constitutivos) e, não a descrição completa do seu movimento temporal que será tema de outro modelo dinâmico a ser tratado mais adiante. A escolha do período como "*Variável Dependente*" (ou "*incógnita*") em função dos outros Parâmetros Descritivos ("*conhecidos*") é um mero ponto de vista e traz um vício de linguagem, pois não provem de qualquer particularidade intrínseca do fenômeno. De qualquer maneira, seguindo a tradição, o Modelo será procurado explicitamente na forma de uma Função Matemática $\varphi(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4)$ de quatro variáveis, tal que $T = \varphi(m,l,g,A)$.

A definição dos conceitos elementares de Mecânica (posição, velocidade, aceleração, massa, força) nos levam a utilizar três tipos de medidas "*independentes*" , ou, "*básicas*", necessárias para a formulação de Modelos matematicos nesta disciplina: *Tempo*, *Comprimento* e *Massa*. A partir de suas unidades básicas, as próprias definições dos outros conceitos levarão às suas respectivas unidades. Por exemplo, a unidade (**composta**) de velocidade será determinada pelo movimento uniforme *ao longo* de uma unidade de comprimento *durante* uma unidade de tempo. Com isto, evita-se a definição de novas unidades, da mesma forma como utilizamos a unidade de comprimento para definir uma unidade (composta) de área construindo um quadrado de lados unitarios como padrão. Esta figura é mais "prática" em geral para a mensuraçãode áreas de figuras poliedricas do que, por exemplo o disco com raio unitário. Observe-se que a definição de uma unidade sempre requer a explicitação de um processo de mensuração (que é um procedimento concreto e não matemático) entre o objeto a ser medido e a unidade estipulada. Quando duas medidas não não são comparáveis (isto é, não é possivel medir uma em termos da outra) dizemos que tem **dimensões independentes**, como é o caso das medidas de comprimento e tempo. Com estas medidas padrões escolhidas a velocidade é uma medida com unidade composta. Entretanto, poderíamos utilizar o comprimento e a velocidade como dimensões básicas; neste caso o tempo seria uma medida composta.

Exercicio: Determine o processo de mensuração de velocidades e de tempo com unidades padrão de compriento e velocidade.

A próxima seção discorrerá com maiores detalhes sôbre os conceitos de unidade, dimensão e medida.

IV-UNIDADES, DIMENSÕES E MEDIDAS

IVa-A MEDIDA DO TEMPO: O Pulso do Tempo ou, o Tempo do Pulso.

"*Eu estava convicto de que sabia perfeitamente o que era o 'tempo', até quando alguem me perguntou seriamente sobre o seu significado*"- Santo Agostinho (Teólogo)

"*O tempo é a maneira pela qual a Natureza se organiza e impede que tudo aconteça simulaneamente*". (~Filosofia Medieval popularizada por Woody Allen)

A matematização do fenômeno mecânico representado pela oscilação de um pêndulo se inicia com a escolha de uma maneira de representar o *tempo* de oscilação, isto é, o tempo utilizado no seu percurso entre suas posições de maior amplitude.

Como o modelo mental (ingênuo) que a espécie humana desenvolveu sobre o conceito de *tempo* é representável por um contínuo, linear e ordenado, então, torna-se quase imediato que o objeto matemático natural para a sua representação abstrata é a Reta Real, ou seja, os Números Reais. A representação discreta do tempo tem sido argumentado ultimamente por alguns físicos como sendo a mais fidedigna, e por questões meramente práticas e computacionais a representação de tempo pelos números inteiros é um artificio frequente.

Para concretizar a representação continua, é necessário dispôr de uma **unidade de tempo**, que deve ser *acessível* (ou seja, "*regularmente repetitivo")*, para que se possa utiliza-lo comparativamente e, além disso, experimentalmente *fracionável*, para que possamos utiliza-lo na medida de qualquer período. (Nenhum destes requisitos é óbvio e isento de dificuldades conceituais ou praticas. Por exemplo, como é que se pode saber quando um padrão é "regularmente repetitivo" , sem aceleração, se não existe um padrão absoluto para confronta-lo? E, como fracionar unidades de tempo, como o periodo de oscilação do átomo de césio-133?).

Qualquer unidade de tempo deve ser necessariamente caracterizada por um processo Físico; não existe unidade absoluta ou abstrata de tempo obtida como resultado de uma pura construção mental! A unidade de tempo mais familiar é, claro, o "dia", representada pelo "tempo" necessário para que a Terra realize uma volta completa em torno de seu eixo de rotação mas, diversas outras unidades podem ser igualmente definidas.

A sub-unidade de tempo *segundo* é o período de tempo correspondente a $\frac{1}{86400}$ do dia solar médio ou, 9192621770 periodos da transição do átomo de césio-133.

Galileu, que foi um dos iniciadores da ciência moderna, ao estudar o movimento do enorme pêndulo preso ao teto da catedral de Pisa, utilizou o seu próprio pulso como padrão de tempo. É claro que o pulso de Galileo, (logo ele, que passou por tantos sobressaltos e chegou tão perto da fogueira da Inquisição), certamente não deve ter sido o mais estável (uniforme) dos padrões, mas era o que ele tinha naquela ocasião! Além disso, é difícil saber como Galileo poderia "fracionar" a unidade de tempo (pulso) e como medir multiplos muito grandes desta unidade sem parar para dormir?

Os relógios mecânicos construidos posteriormente a Galileo, por ironia, fazem uso exatamente da periodicidade oscilatória do pêndulo, e surgiram como consequência de seus trabalhos e os de Christiaan Huygens. A história "moderna" do desenvolvimento de métodos para a medida do tempo teve seu início com as navegações do século XV que exigiam um conhecimento preciso e consistente da medida de "tempo" nos diversos navios de uma frota em alto mar que permaneciam incomunicáveis entre si e sem contato com um "relógio" central em terra firme. O estudo aprofundado do conceito de medida do tempo, acabou por levar o matemático Henri Poincaré (...-1912) e o físico Albert Einstein (...-1957) a desenvolverem a Teoria de Relatividade no princípio do século XX, o que, convenhamos, não foi pouca coisa! (*Sobre este assunto, e muito mais, que ainda é tema de pesquisas fundamentais, um bom começo pode ser a referência: Peter L. Galison:- "Einstein's clocks, Poincarés maps: Empires of Time", New York: W.W. Norton, 2003*).

A primeira observação sobre o procedimento de mensuração do tempo se refere à liberdade (experimental) de escolha da unidade, que pode ser qualquer uma desde que satisfaça às condições de *acessibilidade* (repetitividade) e *fracionamento*. É importante observar que a unidade de tempo escolhida *não é um número*, mas um conceito totalmente dependente de sua definição experimental e, portanto, exterior à Matemática. A representação quantitativa (isto é, numérica) desta observação, surgirá somente quando for possível comparar, experimentalmente, qualquer *período de tempo* com a unidade padrão e suas frações; nisto consiste em suma a **Mensuração** do tempo e, consequentemente, da sua matematização.

Designando uma **unidade** de tempo pela letra T , **a medida de um período de tempo** nesta unidade (T) será representada por expressões *algébricas* do tipo xT , $x \in \Re^+$. Se, por exemplo, a unidade de tempo escolhida for o *segundo*, representada pelo símbolo $T = seg$, então $3,141516 seg$ representa *"três segundos inteiros, mais a fração* 141516×10^{-6} desta unidade.

Uma vez escolhida uma unidade de tempo T_0, qualquer outra unidade de tempo T_1 pode ser definida como *uma medida* em relação à primeira, $T_1 = a_1 T_0$, e vice-versa, $T_0 = (\frac{1}{a_1})T_1$, onde a_1 é um número real positivo. Portanto, *uma mesma medida* pode ser representada, em unidades diferentes da seguinte maneira: $x_0 T_0 = x_1 T_1$, onde a "*conversão de unidades*" é realizada por uma simples e natural operação algébrica:

$x_0 T_0 = x_1(a_1 T_0) = (x_1 a_1)T_0$, ou seja, $x_0 = a_1 x_1$, ou, $x_1 = \frac{1}{a_1}x_0$.

Observe que o sinal de igualdade na expressão "$x_0 T_0 = x_1 T_1$" **não é**, em princípio, uma igualdade matemática mas se refere ao fato de que ambos os termos correspondem a um mesmo período de tempo. Entretanto, como vimos acima, podemos tratar esta igualdade no sentido algébrico que facilitará os cálculos da modificação de medidas com respeito à mudança de unidades.

IVb-A MEDIDA DE COMPRIMENTO: *A crise histórica da Unidade de Comprimento*

A unidade de comprimento que parece ser um conceito tão simples e corriqueiro, também apresenta dificuldades surpreendentes se analisamos melhor a sua Mensuração como já vimos nos exemplos gemétricos tratados anteiormente. A origem do conceito de medida de comprimento confunde-se com a da Geometria Euclideana.

A Geometria Euclideana deve a sua origem a um Modelo Matemático cujo objetivo é representar a nossa concepção mental mais imediata do espaço ecológico ambiente (isto é, o "espaço como percepção") e, por isto mesmo, depende intimamente da cognição espacial da espécie humana. Como a concepção mental do espaço até o século XIX era considerada imutável e absoluta, assim também era considerada a Teoria matemática que a representava. A representação mental que os gregos clássicos registravam do espaço ambiente baseava-se nos conceitos de Ponto e de Reta que, segundo Euclides, tinha a sua manifestação concreta mais exata nas trajetórias de raios luminosos. Não por acaso, os Elementos de Euclides contem a Ótica como um de seus capítulos. E, para a representação quantitativa destas idéias, era necessário estabelecer o conceito de medida de comprimento de um segmento de reta e, portanto de unidade de comprimento.(Geo~Terra, Metros-Medida).

Apesar da sua origem nitidamente ecológica (isto é, relativa à percepção cognitiva do espaço pelo *homo sapiens*), a Geometria Euclideana, vem sendo apresentada em textos ao longo de séculos, apenas como uma Teoria Matematica axiomática como se ela precedesse à noção de espaço e, suas relações com o espaço físico são meramente citadas como Aplicações inevitáveis, o que inverte completamente a história do assunto e a sequencia mais natural de seu aprendizado! Raramente, ou quase nunca, a estreita dependencia da Teoria Matematica e a percepção cognitiva do espaço é analisada nestes textos. Como veremos em outro tópico, esta antiquíssima negligencia foi uma das razões para que as chamadas Geometrias não-Euclideanas levassem tanto tempo para serem desenvolvidas. Quando entendemos que o conceito de reta euclideano e suas propriedades axiomáticas são de fato, histórica e psicologicamente, baseadas na percepção experimental da trajetória de um raio de luz, imediatamente verificamos que outras Geometrias são igualmente possíveis, e até mesmo necessárias, e não meros exercícios de abstração. Esta observação foi feita por Poincaré no final do século XIX e utilizada por ele mesmo para desenvolver um modelo de Geometria Não-Euclideana (Hiperbólica) de que trataremos em outro capitulo.

Dentre vários resultados notáveis da Geometria Euclideana, um deles é estreitamente ligado ao conceito de medida: A conhecida expressão algébrica que relaciona as medidas dos comprimentos da hipotenusa e os comprimentos dos seus catetos em um triângulo retângulo (Teorema de Pitágoras). A impossibilidade de "*medir*" (isto é, representar univocamente) o comprimento da hipotenusa de um triangulo retângulo com catetos de medida unitária por intermédio de números racionais (que os gregos supunham serem os únicos números "reais") foi facilmente demonstrada por eles mesmos, e desencadeou uma das maiores crises da Matemática que atravessou séculos e somente foi resolvida no final do século XIX! O impasse poderia ser descrito como "*A incapacidade da estrutura de números (racionais) de representar a Medida de alguns segmentos de reta do Modelo Euclideano*", de onde vem o termo "**incomensurável**" utilizado em textos antigos para designar o comprimento da referida hipotenusa.

Um outro notável resultado que todos os textos de Geometria Elementar supoem ser da Teoria Matematica Euclideana, mas que, na verdade, é do Modelo Matematico Euclideano, pode ser enunciado das seguinte maneira: "*O valor numérico para a razão entre as medidas da circunferência e do diâmetro de um círculo plano é invariante, ou seja, independe da unidade de comprimento e do círculo considerado".* Muito mais tarde (sec.XVIII) mostrou-se que a circunferência era também "*incomensurável*" com a medida do diâmetro, ou seja, não representável por um número racional para um diâmetro unitário. Os matemáticos da antiguidade, que, suspeitavam, mas não conheciam este resultado, calcularam esta razão invariante com vários graus de aproximação, que mais tarde foi designado por Euler com o símbolo π".

A invariância da relação entre estas duas medidas foi detectada experimentalmente pelos babilônicos, e certamente por todas as civilizações que conheciam a roda. Em Geometria Euclideana o seu enunciado surge como um "*teorema*" representado pela fórmula $C = \pi d$.

Veremos logo abaixo que este resultado é decorrente da Análise Dimensional do Modelo Matemático Euclideano construído para a representação do espaço plano. O que raramente se ressalta é o fato de que este "teorema" depende completamente da "planitude" do disco no qual se mede o círculo. É fácil ver intuitivamente que em superfícies não planas (isto é, com curvatura não nula, como uma esfera) a razão medida da circunferência/diâmetro do círculo é sempre menor e atinge seu máximo na superfície plana. Mais uma vez, se a definição geométrica de π tivesse sido estudada segundo a sua interpretação "ecológica", isto é, como resultante de um Modelo e não de propriedades intrínsecas do espaço, talvez o conceito de curvatura como medida da discrepância local da "planitude" tivesse entrado para a Matemática antes de Gauss. A demonstração que o número π também é irracional, teve que esperar o desenvolvimento da Análise no século XVIII e foi obtida, não de forma trivial, por J.H. Lambert (1728-1777). Esta "ignorância" poupou os gregos do escândalo que o número π acrescentaria ao assombro da irracionalidade do $\sqrt{2}$, embora Aristóteles também já desconfiasse desta ’anomalia’. (ref. R.Remmert-"What is π?", pg.123-153, in H.-D.Ebbinghaus&al.-Numbers, Springer1991.

A importância da percepção cognitiva do espaço ecológico e suas enormes variações dependentes da espécie em estudo e do ambiente em que se processa foi ressaltada de maneira apropriada somente na metade do século XX pelos estudos do importante biólogo Jakob von Uexküll (....-....). Contemporâneamente este tema é uma ampla área de pesquisa . (ref. J.von Uexküll, R.Wehner, K.von Frisch, C.Gallistel,.....). Segundo von Uexküll a Geometria ecológica de um organismo depende de seus interesses e, portanto, da forma como ele percebe cognitivamente o espaço ambiente. Cada espécie desenvolve sua "Geometria Clássica".

De maneira lúdica e simples o assunto foi ilustrado por um despretensioso livro infantil escrito pelo Reverendo Edwin A. Abbott -*Flatland* em 1884 e hoje considerado um texto ícone da Geometria por alguns geômetras proeminentes da atualidade.

A percepção do conceito de reta como um objeto linearmente ordenado também nos indica a razoabilidade de que sua representação quantitativa se faça por intermédio da estrutura de Números Reais.

Um procedimento análogo ao utilisado para a introdução da unidade de tempo se repete agora para se estabelecer a Mensuração da haste do pêndulo, inciando-se com a escolha de uma (arbitrária) Unidade de comprimento.

Assumimos tacitamente (o que parece ser óbvio!) que a unidade de tempo não pode ser utilizada para a medida de comprimento, ou, como se diz, as "*dimensões*" de tempo e comprimento são *independentes*.

Digamos que, genericamente, uma unidade de comprimento seja designada por L; neste caso, a haste terá respectivamente medida lL, onde $l \in \Re^{+}$.

Uma vez escolhida a unidade padrão de comprimento L o deslocamento do peso do pêndulo com respeito à posição de equilibrio pode também ser quantificado por uma medida de comprimento ao longo do círculo, que designaremos por AL, utilizando a mesma unidade de comprimento para esta mensuração. Em outras palavras, a mensuração de todos os comprimentos de segmentos de reta em um Modelo deve sempre se referir a uma única (seja qual for) unidade. Observe que L é simplesmente um símbolo (não um número) que denota uma determinada unidade que deve ser experimentalmente especificada.

> O conceito de linha/curva como resultado da deformação não elástica de um segmento de reta nos leva ao conceito de medida de comprimento das mesmas por um processo limite, inaugurado por Eudoxus e aperfeiçoado por Arquimedes. Uma curva/linha que admite a possibilidade de mensuração de seu comprimento é denominada "Retificável", um tema que foi objeto de extenso estudo em Matemática.

Consideremos agora a questão de quantificação do conceito de **velocidade linear** de movimentação da partícula suspensa ao longo da curva circular. O conceito Físico de velocidade é definido pelo comprimento percorrido *uniformemente* em uma unidade de tempo. Utilizando as unidades de tempo e comprimento já introduzidas, digamos T e L, definimos uma "*unidade composta de velocidade*" a ser designada por: $V = LT^{-1} = \frac{L}{T}$, que representa (simbolicamente) a velocidade unitário com que em uma unidade de tempo $1T$ o espaço percorrido será : $1T\frac{L}{T} = 1L$, ou seja, a velocidade yLT^{-1} significará o percurso do comprimento yL em um tempo de medida $1T$.

Analogamente, é possivel, em seguida, atribuir uma unidade ao conceito Físico de Aceleração, (variação de velocidade com o tempo), que será representada na forma simbólica:
$A = (LT^{-1})T^{-1} = LT^{-2}$, (e representa a variação de uma unidade de velocidade LT^{-1}em uma

unidade de tempo T). Assim, a aceleração com medida zLT^{-2} significará a variação da velocidade $z(LT^{-1})$ em uma unidade de tempo T. Assim, as unidades de velocidade e de aceleração serão denominadas *compostas* pois dependem das unidades básicas de tempo e comprimento.

Digamos agora que novas unidades de tempo e comprimento sejam consideradas: $T_1 = aT$ e $L_1 = bL$. Neste caso a nova unidade (composta) de velocidade será respectivamente $V_1 = L_1 T_1^{-1}$ que, medida com relação à anterior é dada por : $V_1 = (bL)(aT)^{-1} = \frac{b}{a}LT^{-1} = \frac{b}{a}V$, e a nova unidade de aceleração será $A_1 = L_1 T_1^{-2} = (aL)(bT)^{-2} = \frac{b}{a^2}A$.

Este exemplo mostra claramente que a relação entre unidades compostas pode ser facilmente obtida por simples manipulações algébricas e dependem diretamente da definição de seu significado experimental.

Exercício:

A medida da aceleração da gravidade g, (isto é, a aceleração experimentada por um corpo submetido à atração da Terra na sua superfície), tem dimensão $[g] = LT^{-2}$, e, na unidade $A = cmseg^{-2}$ mede $g = 980A$. Utilizando a representação algébrica, obtenha esta medida nas seguintes unidades compostas de aceleração A_1=$L_1 T_1^{-2}$, onde $L_1 = 13cm$, $T_1 = 10^{-5}seg$, e genericamente na unidade composta $A_* = L_* T_*^{-2}$, onde $L_* = \lambda cm$, $T_* = \theta seg$.

IVc-AS MEDIDAS DE MASSA E DE FORÇA: Os Fundamentos da Mecânica de Newton

A próxima medida a ser introduzida no Modelo Matemático do pêndulo se refere ao conceito de massa cuja unidade é independente das unidades de tempo e comprimento. Na Mecânica Clássica a massa de uma partícula é definida pela "Segunda lei de Newton" como o fator de proporcionalidade (inércia) entre a força aplicada a uma partícula e a aceleração decorrente desta influência.

Se M for uma unidade de massa, mM for a medida de massa de uma partícula, e a aceleração desenvolvida por ela tiver a medida aLT^{-2}, então a segunda lei de Newton afirma que a medida da força F responsável por esta aceleração deve ser $F = (mM)(aLT^{-2}) = maMLT^{-2}$, ou seja, a unidade composta de Força neste sistema de unidades "básicas" $\{M, L, T\}$ é MLT^{-2}. Este símbolo mostra como a medida de uma Força varia com a variação das unidades básicas $\{M, L, T\}$. Assim, em um novo sistema com unidades $\{M_1 = \delta M, L_1 = \beta L, T_1 = \gamma T\}$ a mesma força que no sistema $\{M, L, T\}$ tem medida ma, isto é, $F = maMLT^{-2}$, no novo sistema será medida por
$F = ma\frac{1}{\delta}M_1\frac{1}{\beta}L_1(\frac{1}{\gamma}T_1)^{-2} = \left(\frac{ma\gamma^2}{\delta\beta}\right)M_1L_1T_1^{-2}$.

Um outro sistema de unidades básicas e independentes para a Mecânica, pode ser constituida das unidades de Comprimento, Tempo e de Força, dito sistema $\{F, T, L\}$. Alguns sistemas de unidades estabelecem uma base constituida pelas dimensões de força, comprimento e tempo $\{F_1, L_1, T_1\}$, o que nos levaria a definir (ainda com a segunda lei de Newton) uma unidade (agora composta) de massa $M_1 = F_1 L_1^{-1} T_1^{-2}$. Fica claro portanto, que o conceito de sistema de unidades básicas é arbitrário desde que elas sejam independentes. É claro que um sistema $\{L_1, T_1, V_1\}$ não é nem independente e nem suficiente para descrever um Modelo Mecânico.

A Mecânica faz uso de diversos outros conceitos como, por exemplo, Pressão (razão da força aplicada em uma superfície e sua área), Trabalho/Energia (produto de uma força e o seu deslocamento), Potencia (trabalho por unidade de tempo) que são mensurados por unidades compostas. Na verdade, poderíamos definir a Mecânica como a Ciência que trata apenas de medidas em unidades compostas das unidades básicas $\{M, L, T\}$.

Exercício:

1-Determinar as unidades compostas de Pressão(P), Energia(E) e Potência (W) a partir do conjunto (genérico) de unidades básicas : $\{M, L, T\}$. e de um outro conjunto $\{M_1 = \delta M, L_1 = bL, T_1 = cT.$,

2-Obtenha as unidades derivadas das unidades básicas para as seguintes medidas:

1)Área, Volume, Pressão, Densidade de Massa, Trabalho, Potencia.

OBSERVAÇÕES:

1-Estabelecido um sistemas básico de unidades, digamos, $\{M_1, L_1, T_1\}$, todas as medidas no sistema devem ser feitas em unidades da forma $C_1 = M_1^\alpha \, L_1^\beta \, T_1^\gamma$, onde $(\alpha, \beta, \gamma) \in Z^3$.

2-A medida de um parâmetro obtido da soma de duas medidas somente é definida se forem referentes à mesma unidade, básica ou composta. Isto é, apenas medidas de mesmas unidades são somadas.

3-A medida de um parâmetro obtido do produto (divisão) de duas medidas referentes a unidades U_1 e U_2é medido pela unidade $U_3 = U_1 U_2$(respectivamente, $U_3 = \frac{U_1}{U_2}$.

4-Diz-se que a unidade $C_1 = M^\alpha \, L^\beta \, T^\gamma$, ou uma medida $z_1 C_1$, tem dimensão (α, β, γ), ou M^α $L^\beta \, T^\gamma$ e denota-se o fato por (notação de Maxwell) $[C_1] = [z_1 C_1] = M^\alpha \, L^\beta \, T^\gamma$.O conjunto de unidades compostas da forma $\{M_1^\alpha \, L_1^\beta \, T_1^\gamma, (\alpha, \beta, \gamma) \in Z^3\}$ é chamado sistema gerado pela base $\{M_1$, L_1, $T_1\}$.

5-Dizemos que o número real z_1 é o valor da medida $z_1 C_1$.Quando desejamos especificar a "dimensão" de uma maneira genérica sem que as unidades básicas, designamos os símbolos das dimensões na forma $\{M, L, T\}$ para denotarmos apenas aquelas independentes.Assim, o conjunto de dimensões compostas da forma $\{M^\alpha \, L^\beta T^\gamma, (\alpha, \beta, \gamma) \in Z^3\}$ é chamado sistema gerado pela base de dimensões $\{M, L, T\}$

6-Dizemos que a base é completa para o modelo se todas as unidades para medidas necessárias na sua descrição puderem ser representadas por suas dimensões compostas na forma $M_1^\alpha \, L_1^\beta$ $T_1^\gamma, (\alpha, \beta, \gamma) \in Z^3$.

Por exemplo, $[F] = MLT^{-2} = (1, 1, -2)$.

V-TRANSFORMAÇÃO DOS VALORES DAS MEDIDAS COM MUDANÇA DE UNIDADES

Como as unidades básicas são arbitrárias é comum que as transformemos homoteticamente (isto é, substituido por fatores delas) mesmo que não modifiquemos as dimensões básicas, por exemplo, em vez de $\{kg, cm, seg\}$ podemos tomar $\{g, km, hora\}$ ou na verdade, qualquer tripla do tipo $\{akg, bcm, cseg\}$, onde a, b, c são números reais não nulos e positivos.

Analisemos agora a forma como se transformam as unidades compostas e os valores de suas respectivas medidas quando modificamos os valores das unidades básicas , sem alterar o conjunto de dimensões.

Tomemos então um novo conjunto de unidades básicas $\{aM_1 = M_2, b\,L_1 = L_2, cT_1 = T_2\}$, onde a, b, c são números reais não nulos, positivos. Consideremos agora uma medida $z_1 C_1$,com valor $z_1$na dimensão composta $C = M^\alpha \, L^\beta \, T^\gamma$ gerada pela base $\{M_1, L_1, T_1\}$. Então a mesma (!) medida $z_2 C_2$ assumirá o valor z_2 na base $\{M_2, L_2, T_2\}$, e devemos ter $z_1 C_1 = z_2 C_2$.

Desta igualdade vem: $z_1 C_1 = z_1 \left(M_1^\alpha L_1^\beta T_1^\gamma\right) = z_2 \left(M_2^\alpha L_2^\beta T_2^\gamma\right) = z_2 (aM_1)^\alpha \, (bL_1)^\beta$ $(cT_1)^\gamma = z_2 (a)^\alpha \, (b)^\beta \, (c)^\gamma \left(M_1^\alpha L_1^\beta T_1^\gamma\right)$, de onde concluimos que $z_1 = z_2 (a)^\alpha \, (b)^\beta \, (c)^\gamma$. Esta é a forma de transformações do valor da medida de uma dimensão composta entre duas bases de mesma dimensões relacionadas pelas unidades básicas na forma : $aM_1 = M_2$, $b\,L_1 = L_2$, $cT_1 = T_2$.

Na prática , conhecendo-se os princípios, o processo de mudança de unidades se reduz a uma simples aritmética/álgebra. Consideremos, por exemplo, uma força no sistema $\{ M_1 = g$, $L_1 = cm, T_1 = seg\}$ (chamado CGS em mecânica) que tem valor 15, ou seja, sua medida é $15(g)^1 (cm)^1 (seg)^{-2}, f_1 = 15$. A mesma força no sistema $\{M_2 = kg = 10^3 g, L_2 = m = 10^2 cm, T_2 = \min \; = 10^2 cm\}$ terá uma medida $f_2 (kg)(m)(\min)^{-2}$. Assim, $15(10^{-3} kg)^1 (10^{-2} m)^1 (\frac{1}{60} \min)^{-2} = 15 \times 36 \times 10^{-1} (kg)(m)(\min)^{-2}$, de onde vem que $f_2 = 54$.

RESULTADO BÁSICO:

Em uma mudança de unidades básicas como acima, uma dimensão composta C tem a sua unidade modificada da seguinte maneira $C_2 = \left(M_2^\alpha L_2^\beta T_2^\gamma\right) = (aM_1)^\alpha \, (bL_1)^\beta \, (cT_1)^\gamma = (a)^\alpha \, (b)^\beta$

$(c)^{\gamma}\left(M_1^{\alpha}L_1^{\beta}T_1^{\gamma}\right) = (a)^{\alpha}\ (b)^{\beta}\ (c)^{\gamma}C_1$ ou seja, o fator $(a)^{\alpha}\ (b)^{\beta}\ (c)^{\gamma}$ ocorre, de certa forma, do lado "oposto" ao da transformação da medida, $z_1 = z_2(a)^{\alpha}\ (b)^{\beta}\ (c)^{\gamma}$, o que é natural, pois se uma unidade é maior o valor da mesma medida deve ser proporcionalmente menor, e vice-versa. (Pense nisto!).

.

VI-DIMENSÕES DE PARÂMETROS

Consideremos agora um segundo Modelo Mecânico Clássico e também pedagogicamente útil pela sua simplicidade. O fenômeno a ser observado consiste em um sistema Mecânico formado por uma massa pontual que desliza linearmente sobre uma superfície sem atrito de roçamento, mas que sofre a ação de um atrito viscoso (como que mergulhado em líquido) proporcional em valor, e na direção oposta ao movimento. Suponhamos ainda que esta massa esteja presa a uma mola que na outra extremidade está afixada em um ponto fixo (parede) de tal forma que considerando a origem como sendo o ponto em que esta mola não tenha qualquer deformação. Assim, um deslocamente desta posição provocará uma força de restauração da mola sobre a massa proporcional e na dreção contrária a este deslocamento. Se estas são todas as forças que atuam no dispositivo, podemos utilizar a Mecânica de Newton e escrever: $m\frac{d^2x}{dt^2} = -c\frac{dx}{dt} - kx$, onde $x(t)$ é o deslocamento da massa a partir da posição de equilibrio no instante t. A equação acima determina uma condição sobre o movimento, mas não o determina completamente pois, para isto, é necessário que sejam especificadas a posição e a velocidade inicial da partícula, $x(0) = x_0$ e $\frac{dx}{dt}(0) = v_0$. (A necessidade e a suficiencia da especificação destes dois parametros para a descrição completa da trajetória $x(t)$ pode ser argumentada fisicamente, mas também matematicamente. Para isto suponha que a trajetoria seja descrita por uma formula de Taylor: $x(t) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{k!}x^{(k)}(0)t^k$. Portanto, para descreve-la é necessário e suficiente conhecer todas as derivadas $x^{(k)}(0)$. Mas, utilizando a equação e os dois valores iniciais, $x^{(0)}(0) = x_0$ e $x^{(1)}(0) = v_0$ e derivando sucessivamente a equação e, posteriormente fazendo $t = 0$ obtemos sucessivamente todos os valores $x^{(k)}(0)$ para $k \geq 2$.)

Com este modelo completo, observamos que a posição x da massa depende necessariamente dos seguintes parâmetros: $x = \varphi(t, m, c, k, x_0, v_0)$.

A dimensão de um termo em uma equação é facilmente obtida considerando-se o princípio de que igualdade e soma de valores de medidas somente são possiveis quando se referem à mesma unidade. Isto é, não se igualam e nem se somam valores de medidas de referentes a unidades distintas.

Assim , por exemplo, a derivada $\frac{dx}{dt}$ sendo o limite de uma razão entre diferenças de comprimento, (portanto, um comprimento), e um período de tempo, $\frac{dx}{dt} = \lim \frac{x(T+\delta)-x(t)}{\delta}$,é natural que a sua dimensão seja LT^{-1}. Por outro lado, a segunda derivada pode ser pensada tanto como uma razão da primeira com relação ao tempo quanto a razão entre uma variação de comprimento e o quadrado de uma variação de tempo: $\frac{d^2x}{dt^2} = \lim \frac{x(t+2\delta)-2x(t)+x(t+\delta)}{\delta^2}$ o que nos dá a dimensão LT^{-2}.Portanto, $[\ m\ \frac{d^2x}{dt^2}] = MLT^{-2}$ que é a dimensão da força, que deve ser a mesma dimensão de todos os outros termos da equação $[m\frac{d^2x}{dt^2}] = MLT^{-2} = [c\frac{dx}{dt}] = [c][\frac{dx}{dt}] = [k][x]$. Daí tiramos $[c] = MT^{-1}$, e $[k] = MT^{-2}$.

VII-UNIDADES INTRÍNSECAS E PARÂMETROS ADIMENSIONAIS

"*My friend Johnny used to say: 'With four parameters I can fit an elephant, and with five I can make him wiggle his trunk'* ". Enrico Fermi (Físico, dirigindo-se a um candidato a doutorado cujo Modelo tinha uma infinidade de parâmeteros, e referindo-se ao matemático John von Neumann)

Observamos no ítem anterior que, fazendo uso dos parâmetros originais do modelo (m, c, k, x_0, v_0) , podemos obter outros parâmetros com as dimensões básicas, de massa ,

$M = [m] = [\frac{c^2}{k}]$, de comprimento, $L = [x_0] = [v_0(\frac{m}{k})^{\frac{1}{2}}] = [v_0\frac{c}{k}] = [v_0\frac{m}{c}]$, e do tempo, $T = [\frac{c}{k}] = [(\frac{m}{k})^{\frac{1}{2}}] = [\frac{m}{c}]$.

As medidas destes parâmetros podem ser interpretadas e tomadas como **UNIDADES INTRÍNSECAS** do modelo. Assim, por exemplo, $m_1 = \frac{c^2}{k}$ pode ser interpretado e tomado como uma unidade de massa, e tem tudo a ver com o modelo matemático, ao contrário das unidades das dimensões básicas utilisadas inicialmente para a formulação do modelo, que são arbitrárias e podem ser totalmente inconvenientes para o modelo uma vez que não têm, em princípio, nada a ver com o fenômeno a ser tratado.

Observe-se, por exemplo, que as unidades de comprimento poderiam ser tomadas tanto da ordem de anos luz (comprimento percorrido pela luz durante um ano!!), como da ordem de angstroms, (~raio de um átomo de hidrogenio). Não há qualquer impedimento teórico nestas escolhas, mas é fácil ver que unidades excessivamente grandes ou pequenas de comprimento (comparadas com as medidas do fenômeno específico estudado) acarretarão a necessidade de empregar números reais muito grandes ou muito pequenos para representar a medidas do modelo, o que é obviamente um inconveniente.

Estes parâmetros cujas medidas dependem apenas das unidades básicas, por outro lado, são de natureza intrínseca do modelo e é natural considera-los como alternativa razoável como unidades para a descrição do modelo. Na verdade, a sua escolha como unidades básicas não tem apenas uma vantagem notacional, mas, como veremos mais adiante, os seus valores têm também um significado intrínseco no que diz respeito a aspectos qualitativos do modelo. As **Unidades Intrínsecas** de um modelo são também denominadas de suas **ESCALAS INTRÍNSECAS**.

A utilização de unidades intrínsecas na formulação de um modelo matemático resultará no aparecimento dos chamados **parâmetros adimensionais** como por exemplo $\epsilon = \frac{mk}{c^2} = \frac{m}{\frac{c^2}{k}}$ obtidos simplesmente da razão entre dois parâmetros com mesma dimensão, no caso, de massa (M). Neste caso, temos $[\epsilon] = M^0L^0T^0$, o que significa em particular que qualquer que seja o conjunto de unidades das dimensões básicas, o valor da medida de ϵ não se modificará, ou seja ϵ é invariante com as unidades.

Esta propriedade dos parâmetros adimensionais é de grande importância pois, como já observamos, a dependencia das medidas com relação às unidades arbitrárias as torna também arbitrários e sem um significado intrínseco. (O valor numérico da medida m de massa, que na unidade M vale m, pode assumir qualquer valor muito grande , ou muito pequeno, $m\lambda$ desde que tomemos uma unidade $M_0 = \frac{1}{\lambda}M$).

Portanto, é obviamente interesante escrever um modelo matemático em termos de parâmetros e variáveis adimensionais de tal maneira que qualquer escolha (mesmo inconveniente) de unidades básicas não afetaria o resultado final.

Para determinarmos os parâmetros adimensionais independentes de um modelo a partir dos parâmteros originais (m,c,k,x_0,v_0) basta obtermos expoentes $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\lambda$, para os quais $[m^\alpha c^\beta k^\gamma x_0^\delta v_0^\lambda] = M^\alpha(MT^{-1})^\beta(MT^{-2})^\gamma(L)^\delta(LT^{-1})^\lambda = M^{\alpha+\beta+\gamma}L^{\delta+\lambda}T^{-\beta-2\gamma-\lambda} = M^0L^0T^0$, ou seja, que satisfaçam o sistema de equações lineares homogêneas: $\alpha+\beta+\gamma = 0,\ \delta+\lambda = 0, -\beta-2\gamma-\lambda = 0$. Este sistema é constituido de 3 equações (número de dimensões da base) com 5 incognitas (número de parâmetros do modelo) o que nos fornecerá duas soluções independentes. Neste exemplo,portanto, teremos exatamente dois parâmetros adimensionais independentes. Observe que qualquer multiplo $h(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\lambda)$de uma solução ($\alpha,\beta,\gamma,\delta,\lambda$) do sistema significará meramente um outro parâmetro adimensional $(m^\alpha c^\beta k^\gamma x_0^\delta v_0^\lambda)^h$ que é uma simples potencia do anterior. O Princípio de Similaridade seguinte nos mostra como este número de parâmetros adimensionais é uma informação importante sobre o Modelo Matemático e representa um conceiot de complexidade do Modelo.

VIII-PRINCÍPIO DE SIMILARIDADE DIMENSIONAL

Como vimos no parágrafo anterior, todo modelo matemático pode ser descrito equivalentemente por parâmetros adimensionais em número igual à diferença entre o número de parâmetros dimensionais e o número de dimensões da base de unidades. E mais, isto pode ser obtido simplesmente pela escolha de unidades intrínsecas da base construidas com os parâmetros dimensionais do modelo.

Uma demonstração formal deste princípio somente é possível com a hipótese de invariância do modelo com o sistema de unidades, o que é fisicamente argumentável mas nem sempre mais convincente do que a própria asserção do princípio. Por este motivo, tomaremos a propriedade de Similaridade como um "Princípio" e não como um "Teorema " deduzido do Princípio de Invariancia. O(A) leitor(a) interessada deve consultar os excelentes livros de Lin-Segel e Barenblatt no ítem "Teorema Pi de Buckinham ".

Para esclarecer melhor este Princípio analisaremos o modelo acima onde os procedimentos são claros e representam exatamente or argumentos da demonstração.

Observe que a constituição deste modelo é representado em R^7, isto é, por 7 "variáveis" (reais) (x,t,m,c,k,x_0,v_0). (A distinção entre variável dependente (x) , variável independente (t) e parâmetros (m,c,k,x_0,v_0) é meramente convencional e não tem base intrínseca. É comum também distinguir variáveis independentes t, variáveis dependentes x, parâmetros constitutivos ,m,c,k e parâmetros "eventuais" x_0,v_0).

A formulação de um Modelo Matemático consiste essencialmente de três etapas:

1-Estabelecimento de um sistema básico de dimensões/unidades

2-Discriminação de todas as variáveis descritivas que determinam o Modelo e suas dimensões,

3-Descrição da Função Matemática que determine quais os valores das variáveis descritivas são simultaneamente admissíveis (correlação funcional entre suas medidas) , em geral, o que se considera como sendo o próprio modelo.

As duas primeiras etapas são em geral executadas implicitamente e usualmente destaca-se apenas a terceira etapa que consiste na maior parte das vezes de equações diferenciais/integrais e condições iniciais e de fronteira. De qualquer forma, seja por que método for, a terceira etapa consiste em determinar uma função Φ que estabelece os estados admissíveis do sistema por meio de uma equação implícita $\Psi(x,t,m,c,k,x_0,v_0) = 0$. Esta formulação geral tem a vantagem de não distinguir um papel especial a priori para nenhuma variável que ocorre quando "resolvemos " a equação implícita e escrevemos, por exemplo, $x = \psi(t,m,c,k,x_0,v_0)$.

Entretanto, é importante frisar que as duas primeiras etapas envolvem hipóteses fundamentais sobre o problema a ser tratado: é nesta etapa que se decide, à priori, quais influencias serão consideradas e, portanto, o sistema de unidades básicas e os variáveis descritivas suficientes para caracterizar o sistema! Nesta etapa é possível retirar conclusões fundamentais e às vezes surpreendemente específicas sobre a Função Ψ (ou ψ) que descreverá o Modelo Analítico. Exemplos destas circunstancias já foram apresentadas e serão apresentados mais abaixo.

Voltemos ao modelo mecânico. Este modelo pode ser completamente descrito por uma Função matemática que relaciona as medidas entre todas as variáveis descritivas do Modelo $x = \psi(t,m,c,k,x_0,v_0)$, isto é, 6 variáveis dimensionais cujas medidas dependem das unidades básicas escolhidas.

Como a base de unidades tem três dimensões independentes, $\{M,L,T\}$, concluimos pelo exposto acima que poderemos escrever o modelo adimensional na forma $\eta = \varphi(\tau,\epsilon,\mu)$, onde η será variável adimensional dependente, τ a variável adimensional independente e ϵ,μ dois parâmetros adimensionais.

Tomemos, por exemplo, como **unidades intrínsecas** de comprimento $x_0 = L_1$, de tempo $\frac{m}{c} = T_1$ e de massa m. Portanto, a função incógnita (variável dependente) passará a ter seus valores medidos adimensionalmente por $\eta = \frac{x}{L_1} = \frac{x}{x_0}$ e a variável (independente) tempo por

$\tau = \frac{t}{T_1} = \frac{t}{\frac{m}{c}} = \frac{ct}{m}$. Para escrevermos a equação nestas novas variáveis basta reescrevermos o problema original da seguinte maneira autoexplicativa e conceitualmente simples, desde que observada com cuidado: (não há necessidade, e nem é recomendável, usar o teoremas de derivação composta-regra da cadeia)

$$\frac{m}{m}\frac{L_1 d^2\left(\frac{x}{L_1}\right)}{(T_1)^2 d\left(\frac{t}{T_1}\right)^2} + c\frac{L_1 d\left(\frac{x}{L_1}\right)}{T_1 d\left(\frac{t}{T_1}\right)} + kL_1\left(\frac{x}{L_1}\right) = 0,$$

$$L_1\left(\frac{x(0)}{L_1}\right) = x_0$$

$$\frac{L_1 d\left(\frac{x}{L_1}\right)}{T_1 d\left(\frac{t}{T_1}\right)} \mid_{t=0} = v_0$$

Recolhendo as novas variáveis e fazendo-se as simplificações obvias temos:

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \frac{d\eta}{d\tau} + \epsilon\eta = 0$$

$$.\eta(0) = 1$$

$$\frac{d\eta}{d\tau}(0) = \mu$$

onde , $\epsilon = \left(\frac{km}{c^2}\right)$, e $\mu = \frac{mv_0}{cx_0}$.

Portanto, (como já sabíamos) , este modelo, que foi modificado com a mera utilização (apropriada) de operações algébricas elementares, tem a sua descrição completa reduzida a uma Função Matemática $\eta(\tau,\epsilon,\mu)$ de (apenas) três variáveis (dois parâmetros adimensionais).

É claro que o Modelo Matematico representado por uma função de três variáveis $\eta(\tau,\epsilon,\mu)$ é muito mais simples do que uma função $x = \psi(t,m,c,k,x_0,v_0)$ de 6 variáveis! A Complexidade deste Modelo portanto, pode ser considerda como de nível 3.

OBSERVAÇÕES

1-A representação reduzida do Modelo Matemático tem um significado prático crucial para o experimentalista (físico e numérico). Nestes casos, o estudo computacional ou experimental de um Modelo Matemático exige a consideração de pelo menos tres valores (pequeno, medio e grande) para cada variável descritiva. Para o Modelo Adimensional isto significa $3^2 = 9$ simulações (ou experimentos), o que se compara extraordinariamente bem com os $3^5 = 243$ necessarios para o Modelo dimensional original.

A explicação deste fato é simples: em todos os experimentos (físicos e numéricos) em que os cinco parâmetros se agrupam com valores $\epsilon = \left(\frac{km}{c^2}\right)$, e $\mu = \frac{mv_0}{cx_0}$ iguais, obtem-se essencialmente o mesmo resultado qualitativo, já que as funções que descrevem os modelos dimensional e adimensional diferem apenas por fatores numéricos.

2-Dizemos que dois modelos dimensionais com parâmetros (m,c,k,x_0,v_0) e (m',c',k',x_0',v_0')são similares se os parâmetros adimensionais $\epsilon = \left(\frac{km}{c^2}\right) = \epsilon' = \left(\frac{k'm'}{c'^2}\right)$, e $\mu = \frac{mv_0}{cx_0} = \mu' = \frac{m'v_0'}{c'x_0'}$, são iguais. Observe que a possibilidade de variação dos parâmetros dimensionais é ainda enorme sob a restrição de que mantenham os mesmos valores dos parâmetros adimensionais.Para todos estes modelos dimensionais, o mesmo modelo adimensional é exatamente o mesmo.

3-O acréscimo de mais variaveis (parâmetros) na descrição do modelo (mantendo as dimensões básicas de unidade, L,M,T) significa um aumento da complexidade do modelo.

Este princípio é muito importante na construção de modelos físicos miniaturizados (os protótipos) de sistemas de grande porte. Por exemplo, se o modelo original tem um x_0 da ordem de quilometros, podemos construir um pequeno protótipo com x_0 da ordem de centímetros que terá o mesmo comportamento qualitativo **desde que** modifiquemos os outros parâmetros dimensionais de tal maneira que ϵ, e μpermaneçam com o mesmos valores. Ao contrário do que usualmente se crê, a construção de um pequeno protótipo que não modifique os outros parâmetros apropriadamente, não se comportará da mesma forma que o sistema original.Esta foi a causa da queda de muitos aviões,

rompimento de barragens e desabamentos de pontes construidos com base em experimentos com pequenos modelos que não foram adequadamente adimensionalizados.

IX-MÉTODOS DE SIMILARIDADE

Um Modelo Matemático quantitativo é representado por uma Função Matemática de valores reais que impões uma relação entre todas as medidas numéricas constantes do Modelo. Por exemplo, no caso do sistema Mecânico Massa-Mola-Viscosidade, $\Phi(x,t,m,c,k,x_0,v_0) = 0$, em que a Função Matemática $\Phi(\xi_1,\xi_1,\xi_3,\xi_4,,\xi_5,\xi_6,,\xi_7) = \Phi$ tem 7 variáveis, ou seja, $\Phi : U \subset R^7 \to R$.

O Método de Similaridade tem por objetivo representar a Função Matemática Φ como composição de Funções Matemáticas definidas com menor número de variáveis; uma questão muito relacionada ao problema de Hilbert-Kolmogorov-Arnold que por sua vez foi sugerido pelo Método Nomográfico de representação de modelos matematicos desenvolvido pelo engenheiro Maurice d'Ocagne no principio do século XX. Hoje o Método Nomografico caiu em desuso substituido pelo desenvlvimento dos computadores digitais.

O argumento do Princípio de Similaridade acima exposto, mostra que é possível reduzir a representação do Modelo Matemático, originalmente descrito por $\Phi(x,t,m,c,k,x_0,v_0) = \psi(\eta,\tau,\epsilon,\mu) = \psi(\frac{x}{x_0},\frac{ct}{m},\frac{km}{c^2},\frac{mv_0}{cx_0})$, onde $\psi : V \subset R^4 \to 0$ é uma Função Matemática de APENAS quatro variáveis, que, uma vez conhecida produz imediatamente a função original $\Phi(x,t,m,c,k,x_0,v_0)$ de sete variáveis pela composição com 4 funções Matemáticas elementares conhecidas: $\psi_1(\zeta_1,\zeta_2) = \frac{\zeta_1}{\zeta_2}$, $\psi_2(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3) = \frac{\zeta_1\zeta_2}{\zeta_3}$, $\psi_3(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3) = \frac{\zeta_1\zeta_2}{(\zeta_3)^2}$ e $\psi_4(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4) = \frac{\zeta_1\zeta_2}{\zeta_3\zeta_4}$.

É interessante comparar a extrema complexidade de um problema Matemático puro desta natureza quando formulado sem qualquer referencia à sua origem e a simplicidade dos argumentos e manipulações aritméticas que caracterizam os **Métodos de Similaridade**.

Voltemos agora ao Modelo Matemático, $T = \psi(m,g,l,A)$ do pêndulo de massa m suspensa por uma haste de comprimento l sob ação da gravidade g que realiza um movimento oscilatório de amplitude A sem resistencia e com período T.

As dimensões dos parâmetros relacionados são:$[A] = [l] = L$, $[m] = M$, $[T_0] = T$,$[g] = LT^{-2}$. Utilizando as *unidades intrinsecas* de massa m , de comprimento l e, de tempo $T_0 = \sqrt{\frac{l}{g}}$, o modelo matemático $T = \psi(m,g,l,A)$ passa a ser escrito na seguinte forma $\frac{T}{\sqrt{\frac{l}{g}}} = \psi(1,1,1,\frac{A}{l}) = \varphi(\frac{A}{l})$.

Portanto, a representação do Modelo passa de uma Função Matemática de 4 variáveis a um Modelo Matemático reduzido que utiliza uma função de uma única variável $\varphi(\zeta)$.

Isto significa que para pendulos com a mesma razão $\frac{A}{l} = \epsilon_1$ o período de oscilação será dado pela função $T_0 = \varphi(\frac{A}{l})\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Portanto, o Modelo Matemático geral deste fenômeno pode ser *experimentalmente* obtido simplesmente pelo registro dos períodos de oscilação de um mesmo pêndulo para diversos valores de $\frac{A}{l}$, isto é, tomando-se seguidos valores de A_k o que produz uma série de dados pontuais da função de uma variável $\varphi(\zeta_k) = \frac{T_k}{\sqrt{\frac{l}{g}}}$, para $\zeta_k = \frac{A_k}{l}$. (Compare com o "experimentalista força-bruta " que teria que fazer $3^5 = 243$ experimentos e obteria apenas alguns pontos esparsos e nenhuma relação funcional).

Se admitirmos que a função φ é contínua, os movimentos pendulares de pequena amplitude, isto é, tais que $\frac{A}{l} << 1$, serão todos bem descritos por: $T_0 \simeq \varphi(0)\sqrt{\frac{l}{g}}$. É interessante observar que $\varphi(0) = \sqrt{\pi}$, resultado este que a Análise Dimensional **não** produz, mas que pode ser facilmente obtido resolvendo-se o Modelo linearizado (que aproxima o Modelo completo para oscilações de pequena amplitude, isto é, $\frac{A}{l} << 1$) e descrito por uma simples equação diferencial ordinária linear de segunda ordem.

Exercício:

Supondo que a função matemática φ é continuamente diferenciável, obtenha uma segunda aproximação para o período: $T_0 \simeq \left(\varphi(0) + \varphi'(0)\frac{A}{l}\right)\sqrt{\frac{l}{g}}$, calculando $\varphi'(0)$ usando uma expansão no parâmetro $\frac{A}{l} = \epsilon_1$ após adimensionalizar adequadamente o modelo diferencial da dinâmica do pêndulo:
$m\frac{d^2(l\theta)}{dt^2} = -mg\,sen(\theta)$,(segunda lei de Newton tangencial) , $l\theta(0) = A$, $\frac{d\theta}{dt}(0) = 0$ (condições iniciais).

Passaremos agora a apresentar exemplos didáticos fundamentais para a Biomatemática e cujos estudos mais detalhados serão temas de capitulos seguintes.

X-A DINÂMICA DE POPULAÇÕES

Xa-O MODELO MALTHUSIANO PARA DINÂMICA DE POPULAÇÕES

O conceito de População Biológica se refere, em geral, a uma grande quantidade de indivíduos sendo que o primeiro, e mais importante, aspecto que se deseja mensurar sobre ela é, naturalmente, o seu "*tamanho*". À primeira vista, e ingenuamente, não parece haver dúvidas de que esta informação pode ser imediatamente obtida pela contagem (censo) "*cabeça por cabeça"* (o que exige a identificação de cada um dos seus indivíduos) e a representação do resultado final por um Número Natural, $\mathbb{N}$. Entretanto, para grandes populações (como 10^6 (insetos sociais), 10^8(demografia-epidemiologia),10^{10}(células-imunologia-neurobiologia) e etc.) fica também imediatamente claro que a especificação do número exato de indivíduos da população a cada instante é certamente um excesso de informação, não apenas indisponível na prática mas, felizmente, desnecessária para a maioria dos estudos.

O procedimento que logo de início descarta este excesso de informação, pois evita a necessidade de identificação individual de seus componentes, consiste em medir o "tamanho" de uma grande população fazendo uso de unidades formadas por grandes"**lotes**" de N_0 indivíduos por exemplo, $N_0 = 10^8$ indivíduos no caso de demografia. Desta forma, o tamanho da população brasileira, por exemplo, pode ser representada em um intervalo de tempo razoável (séculos) na forma xN, onde $0 \leq x \leq 10$ é um número racional.

Para realizar este procedimento, basta separar a população total em subpopulações, aproximadamente, do mesmo tamanho (que pode ser feito por amostras sem necessidade de uma "individualização") pois, *pequeno*s erros relativos são toleráveis. (Por exemplo, erros de 1000 indivíduos resultarão em erros da ordem de 10^{-5} em uma medida com unidade $N_0 = 10^{-8}$. Contagens de populações de micro-organismos ou celulares são feitas com amostras em gôtas sob escrutínio de um microscópio manejado por aluna/os de pós-graduação!).

A variação temporal desta população em unidades de tempo da ordem de dias, que é uma unidade de tempo pequena para estudos demográficos e epidemiológicos, será "infinitesimal". Assim, o segundo (e não menos importante) bônus desta representação é o gráfico da sua evolução em um período de tempo $0 \leq t \leq 1000$ (por exemplo) é facilmente visualizada como uma curva contínua, e não um aglomerado de pontos. Na verdade, o gráfico de qualquer função matemática é visualmente representada por um número equivalente de pontos discretos, nunca por uma curva "contínua".

Portanto, as unidades a serem utilizadas para a descrição do tamanho de uma grande população serão sempre tomadas como grandes "lotes" de indivíduos de tal forma que numericamente ela possa ser descrita por números racionais com variações temporais pequenas em unidades de tempo adequadas. Esta abordagem é que torna *plausível* a representação de um Modelo Matemático para a dinâmica temporal de uma grande população por intermédio de *funções diferenciáveis* definidas na reta e com valores reais e, com isto, permite a utilização do vasto arsenal de Métodos Matemáticos da Análise Matemática em seu estudo, especialmente das Equações Diferenciais.

O Modelo Mathusiano para descrever a dinâmica de uma população sob o ponto de vista de mortalidade (e que será analisado com maiores detalhes no capitulo 2) dispõe, inicialmente, de dois parâmetros de observação de interesse: n (tamanho da população) e t (tempo), o que exige a escolha de um sistema de unidades $\{N, T\}$.

Entretanto verifica-se, por observação, que é impossível estabelecer um Modelo Matemático que relacione as medidas destes dois parâmetros na forma $\Phi(n,t) = 0$, pois isto não levaria em conta nenhuma informação biológica que representasse de alguma forma uma medida da "mortalidade" caracteristica da população estudada, assim como a sua óbvia dependencia com relação ao seu valor inicial. Para remediar esta deficiencia conceitual do modelo proposto, o Modelo de Malthus acrescenta então um Parâmetro Descritivo k definido como a taxa de mortalidade per capita que se supõe constante com o tempo e tem a sua determinação experimental definida como $k = -\frac{1}{n(t)}\frac{dn}{dt}$. Com isto, verifica-se que a medida do parâmetro k tem que necessariamente assumir a dimensão T^{-1} para que a dimensão seja mantida dos dois lados da equação. Portanto, o Modelo Malthusiano explícito pode ser representado matematicamente na forma $n = \varphi(t, n_0, k)$, e a função φ é então obtida da equação diferencial $-\frac{1}{\varphi(t)}\frac{d\varphi}{dt}, \varphi(0) = n_0$. É claro que este Modelo, matematicamente trivial, toma a forma $n = \varphi(t, n_0, k) = n_0 e^{-kt}$.

Como a medida do parâmetro k^{-1} tem a dimensão de tempo (isto é, varia de forma diretamente proporcional com a unidade do tempo) e n_0 obviamente tem dimensão de população, adotaremos as unidades **intrínsecas** para a medida de população como sendo n_0 e, de tempo como sendo k^{-1} . Com isto, verificamos imediatamente que $\eta = \varphi(\tau, 1, 1) = \varphi^*(\tau) = e^{-\tau}$ é o **Modelo Malthusiano Reduzido/Adimensional** para $\eta = \frac{n}{n_0}$ e $\tau = \frac{t}{k^{-1}} = kt$.

Um experimentalista ou analista numérico "*puro*" que desejasse "*plotar*" um gráfico da Função Matemática $n = \varphi(t, n_0, k)$ que representa o Modelo Malthusiano, teria que registrar/calcular o valor numérico de φ para, digamos, p valores de $0 = t_1 <\ldots< t_p = T$ e vários valores de n_0 e k. Se n_0 e k fossem, conservativamente escolhidos apenas com valores (pequeno, médio e grande) o resultado experimental (trabalhosamente registrado ou, calculado) constaria de $3 \cdot 3 = 9$ gráficos obtidos com 9 experiências/computações. Por outro lado, um experimentalista/analista numérico versado em Análise Dimensional realizaria apenas **uma única** experiência/computação para descrever (discretamente) a Função Matemática Reduzida (Adimensional) φ^*, e representaria muito melhor a Função dimensional na forma: $\varphi(t, n_0, k) = n_0\varphi^*(kt)$.

Uma leitura panorâmica dos itens seguintes é indicada como uma primeira abordagem. A apresentação detalhada destes importantes temas será parte fundamental da matéria tratada no capítulo "Principio de Difusão".

Xb-PRIMEIRO PROBLEMA FUNDAMENTAL DE DIFUSÃO

Os Modelos Matemáticos de Difusão estão dentre os mais fundamentais da Matemática Aplicada e são particularmente importantes para a descrição de inúmeros fenômenos da Biologia de Populações continuamente distribuidas no espaço. Além disso, a estrutura matemática deste Modelo é representada por uma Equação Diferencial Parcial cujas soluções desempenham papéis fundamentais também como Método em toda a Análise Matemática.

Consideremos o Modelo clássico de difusão em uma dimensão espacial sem fronteiras finitas partindo de uma condição inicial pontual, o que pode ser visualisado como a dinâmica de difusão molecular de N_0 moles de corante químico, ou como a dispersão difusiva ("aleatória") de N_0 indivíduos, colocados na origem no instante $t = 0$. Este Modelo Matemático pode ser representado pelo seguinte problema diferencial com respeito à função densidade $\rho(x,t)$:

$\frac{\partial\rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}$, $\rho(x,0) = N_0\delta(x)$, para $x \in (-\infty,+\infty)$, e $t > 0$.

A fronteira infinita significará neste caso que não há fluxo nem matéria em distancias "muito grandes", ou seja, $\lim\limits_{|x|\to\infty} -D\frac{\partial\rho}{\partial x}(x,t) = 0$, e $\lim\limits_{|x|\to\infty} \rho(x,t) = 0$.

A condição inicial $\rho(x,0) = N_0\delta(x)$ é simbólica e não determina de fato a função densidade no instante $t = 0$. Aqui o delta de Dirac δ não é considerado uma função no sentido clássico, mas no sentido generalizado (distribuição) que pode ser também interpretada com o seguinte significado: No limite para $t \downarrow 0$ a densidade $\rho(x,t)$ (definida apenas para $t > 0$) comporta-se como uma sequencia de Dirac :

1-$\rho(x,t) \geq 0$, 2-$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(x,t)dx = 1$, e 3-$\lim\limits_{t\downarrow 0} \int\limits_{-a}^{a} \rho(x,t)dx = 1, \forall a > 0$.(Visualize esta descrição).

As unidades básicas e de dimensões independentes para a quantificação deste problema serão das por $\{N,L,T\}$ onde N é a dimensão da medida de populações (moleculas ou individuos), L é comprimento e T é o tempo. A solução do problema é uma função $\rho(x,t,D,N_0)$ e as dimensões dos parâmetros são : $[N_0] = N$, $[x] = L$, $[t] = T$, $[\rho] = NL^{-1}$, $[D] = L^2T^{-1}$. Observamos assim que há apenas dois parâmetros adimensionais independentes, já que temos 5 medidas (ρ,x,t,D,N_0) e três dimensões de base $\{N,L,T\}$. Podemos facilmente obter os dois representantes adimensionais que neste caso tomaremos como $\frac{\rho\sqrt{Dt}}{N_0}$ e $\frac{x}{\sqrt{Dt}}$. (Verifique). Portanto, pelo "Princípio de Similaridade", um parâmetro deve ser função do outro, ou seja, devemos ter $\frac{\rho\sqrt{Dt}}{N_0} = \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right)$ para alguma função real de uma variável real $\varphi(\zeta)$. Esta conclusão simples, além de facilitar enormemente a tarefa de construir o modelo matemático (pois agora devemos obter uma função de uma variável $\varphi(\zeta)$ e não de duas $\rho(x,t)$), já nos fornece um resultado de grande importancia: $\rho(x,t) = \frac{N_0}{\sqrt{Dt}}\varphi\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right)$.Por exemplo, com base neste resultado podemos concluir o seguinte:

1-A densidade na origem cai com o tempo na forma $\rho(x,t) = \frac{N_0}{\sqrt{Dt}}c$ onde $c = \varphi(0)$.

2-A observação da densidade em um único ponto qualquer não na origem, digamos, x_0 nos fornecerá a função $\rho(x,t)$ ao longo de todo o espaço em todo instante para quaisquer valores dos parâmetros N_0 e D.Claro, pois isto nos daria a função $\varphi(\zeta) = \rho(x_0, \frac{x_0^2}{D\zeta^2})\frac{\zeta}{N_0 x_0}$.

Portanto, em princípio, basta uma única experimentação/simulação e a observação em apenas um ponto ao longo do tempo para determinarmos completamente o modelo matemático.

3-Pelas condições de fronteira concluimos que $\varphi(\zeta) \to 0$, e $\varphi'(\zeta) \to 0$ quando $|\ \zeta\ | \to \infty$.

4-Digamos que $\varphi(\epsilon) = \delta$ seja a menor densidade detectável. Para os pontos que "viajam " como $x = \epsilon\sqrt{Dt}$ a densidade será dada por $\rho(x,t) = \frac{N_0}{\sqrt{Dt}}\varphi(\epsilon) = \frac{N_0\epsilon}{x}\varphi(\epsilon)$ e, portanto, além destes pontos e posteriormente ao instante $t_0 = \frac{N_0^2}{D}$ não haverá quantidade detectavel de individuos desta população.

5-Para um problema em duas (três) dimensões, observamos que a segunda variável adimensional permanece identica,$\frac{x}{\sqrt{Dt}}$, mas a primeira variável adimensional deve ser modificada para $\frac{\rho(Dt)}{N_0}$, $\left(\text{respectivamente } \frac{\rho(Dt)^{\frac{3}{2}}}{N_0}\right)$, uma vez que a densidade agora tem dimensão $[\rho] = NL^{-2}$, (respect. $[\rho] = NL^{-3}$).

Generalizando, observamos que em dimensão n qualquer, a solução do problema fundamental, sendo isotrópica e, portanto com simetria esférica, terá a seguinte forma funcional $\rho(x,t) = \frac{N_0}{(Dt)^{\frac{n}{2}}}\varphi_n\left(\frac{r}{\sqrt{Dt}}\right)$. Veremos mais abaixo que a função φ_n é a mesma para qualquer dimensão.

6-E, enfim, como a função $\rho(x,t)$ é solução da equação diferencial, calculando as derivadas necessárias segundo a expressão $\rho(x,t) = \frac{N_0}{\sqrt{Dt}}\varphi\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right)$e substituindo-as mecanicamente na equação $\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{-1}{2}\frac{N_0}{\sqrt{D}\,t^{\frac{3}{2}}}\varphi\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right) + \frac{-1}{2}\frac{N_0 x}{\sqrt{Dt}\sqrt{D}\,t^{\frac{3}{2}}}\varphi'\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right) = D\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} = D\frac{N_0}{\sqrt{Dt}}\frac{1}{Dt}\varphi''\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right)$

, após cancelamentos de termos e lembrando que $\zeta = \frac{x}{\sqrt{Dt}}$, obtemos a seguinte equação diferencial ordinária para $\varphi(\zeta)$:

$2\varphi''(\zeta) + \zeta\varphi'(\zeta) + \varphi(\zeta) = 0$, que integrada uma vez nos dá: $\varphi'(\zeta) + \frac{\zeta}{2}\varphi(\zeta) = c_0 = 0$, pela conclusão 3) acima. Multiplicando pelo fator integrante $\exp(\frac{\zeta^2}{4})$ reescrevemos: $\left(\varphi\exp(\frac{\zeta^2}{4})\right)' = 0$ e, finalmente,

$\varphi(\zeta) = c\exp(\frac{-\zeta^2}{4})$, ou, como queríamos

$\rho(x,t) = c\frac{N_0}{\sqrt{Dt}}\exp(\frac{-x^2}{4Dt})$.

Para determinarmos a constante c , ou lembramos (como um matematico aplicado deria fazer) que o modelo não admite morte nem nascimento e não apresenta fluxos no infinito e, portanto $\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x,t)dx = N_0$ constante para todo t. Argumentando como um matemático “puro ” calculamos a variação da população total com a expressão

$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x,t)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\rho(x,t)dx = \frac{\partial\rho}{\partial x}(\infty,t) - \frac{\partial\rho}{\partial x}(-\infty,t) = 0$ e concluimos o mesmo.

Portanto, integrando a expressão acima temos:

$N_0 = \int_{-\infty}^{\infty} c\frac{N_0}{\sqrt{Dt}}\exp(\frac{-x^2}{4Dt}).dx = 2N_0 c\int_{-\infty}^{\infty}\exp(\frac{-x^2}{4Dt}).d\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)x = 2N_0 c\sqrt{\pi}$, e finalmente

$\rho(x,t) = \frac{N_0}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp(\frac{-x^2}{4Dt})$.

Consideremos agora o problema n –dimensional com $n \geq 1$.Como já vimos a forma funcional da solução neste caso será $\rho(x,t) = \frac{N_0}{(Dt)^{\frac{n}{2}}}\varphi_n\left(\frac{r}{\sqrt{Dt}}\right)$.

Como a equação de difusão com simetria esférica é dada por $\frac{\partial\rho}{\partial t} = D(\frac{n-1}{r}\frac{\partial\rho}{\partial r} + \frac{\partial^2\rho}{\partial r^2})$, podemos facilmente repetir o argumento acima e obteremos o seguinte importante resultado:

Exercício:

Mostre que a solução fundamental do problema de difusão em dimensão n é dada por:

$\rho(x,t) = \frac{N_0}{(Dt)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(\frac{-\|x\|^2}{4Dt}\right) = \frac{N_0}{(Dt)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(\frac{-r^2}{4Dt}\right)$.

Xc-SEGUNDO PROBLEMA FUNDAMENTAL DE DIFUSÃO

Consideremos agora o seguinte problema unidimensional de difusão: Um tubo longo de secção circular estreita é conectado em uma de suas extremidades (a “finita”) a um reservatório suficientemente grande para que a difusão de moléculas (ou indivíduos) no tubo não afete a concentração constante ρ_0 mantida internamente nele. Inicialmente o tubo não contem a substancia a ser difundida e a conexão com o reservatório, em $x = 0$, somente é liberada no instante $t = 0$. Suponhamos que o tubo é um meio propício a um processo de difusão, cujo coeficiente tomaremos como D. Como o tubo é longo e estreito, consideraremos um problema unidimensional semi-infinito, em $[0,\infty]$.Portanto, o Modelo Matemático para este processo é escrito da seguinte forma:

$\frac{\partial\rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}$, $\rho(x,0) = 0$ $x > 0$,(condição inicial), $\rho(0,t) = \rho_0$, $\rho(\infty,t) = 0$, $\frac{\partial\rho}{\partial x}(\infty,t) = 0$

(condições de fronteira, finita e infinita).

A base de dimensões para a quantificação do problema é $\{N, L, T\}$ e as variáveis descritivas dimensionais são 5 : (ρ, x, t, ρ_0, D). Portanto, como no caso anterior teremos apenas duas variáveis adimensionais independentes, que tomaremos agora como $\frac{\rho}{\rho_0}$ e $\frac{x}{\sqrt{Dt}}$ de onde tiramos que : $\rho = \rho_0 \phi(\frac{x}{\sqrt{Dt}})$. Repetindo o argumento acima, temos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\rho_0 x}{\sqrt{D}\, t^{\frac{3}{2}}}\phi'(\frac{x}{\sqrt{Dt}}) = D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = D\rho_0 \frac{1}{Dt}\phi''(\frac{x}{\sqrt{Dt}})$$

de onde tiramos a EDO para $\phi(\zeta)$: $\phi''(\zeta) + \frac{\zeta}{2}\phi'(\zeta) = 0$. Multiplicando pelo fator integrante e integrando temos:

$\phi(\zeta) = c_0 + c\int_0^{\zeta} \exp(-\frac{s^2}{4})ds$. Portanto, $\rho(x,t) = \rho_0\left(c_0 + c\int_0^{\frac{x}{\sqrt{Dt}}} \exp(-\frac{s^2}{4})ds \right)$, mas como $\rho(x,0) = 0$ temos

$0 = c_0 + c\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, e como $\rho(0,t) = \rho_0$, concluimos finalmente que :

$$\rho(x,t) = \rho_0\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{Dt}}} \exp(-\frac{s^2}{4})ds \right).$$

A importância destas soluções, especialmente a primeira, extravasa para inúmeras outras questões de Análise de Métodos Matemáticos que serão abordados ao longo de todo este texto.

É importante ressaltar como a argumentação dimensional empregada nos itens acima não apenas esclarece a estrutura do Modelo Matemático em questão, mas também o simplifica consideravelemente possibilitando a obtenção de suas soluções explicitas de maneira elementar. Convido aos/às leitores/as compararem a exposição acima com o tratamento que usualmente se dá a esta questão em textos de Análise e de Métodos Matemáticos em que se emprega a elegante, poderosa, mas sofisticada e por vezes obscura, Teoria de Fourier. O Método de Fourier será também abordado neste texto em capítulo posterior, mas sob uma perspectiva distinta daquela empregada pela Análise Matemática usual.

X d-"LEI" DE AÇÃO DE MASSAS- Smoluchowski

Tal como acontece com diversas teorias da Física e Química, a *Lei de Ação de Massas* não é "Lei" no sentido exato e inexoravel do termo, mas sim um Modelo Matemático para a descrição de diversos fenômenos, e que pode ser muito util, mas nunca acima de qualquer suspeita. Proposto pelos noruegueses Guldberg (quimico) e Waage(matematico) no século XIX, esta "Lei" ganhou jurisprudencia e tornou-se matéria de fé em Química e posteriormente em Biologia Matemática com sua aplicação por A.Lotka (quimico-matematico) e V.Volterra(matematico) à Dinâmica de Populações.

O objetivo do Modelo de Ação de Massas é estabelecer uma descrição para a taxa de colisões entre *pequenos* objetos , que consideraremos todos de uma mesma de forma esférica, *homogeneamente* distribuídos no espaço e realizando movimentos microscópicos aleatórios que, macroscopicamente, serão descritos como um processo de *Difusão*. Um processo de difusão é genericamente definido como uma dinâmica na classe de dinâmicas de distribuições populacionais, $\rho(x,t) = \rho_t(x)$, caracterizadas por serem monotônicamente *homogenizadoras*, independente da sua causas. O movimento aleatório microscópico é uma das causas mais frequentemente alegadas para isso. Em Físico-Quimica de reações moleculares supõe-se que a agitação térmica seja a origem física deste movimento aleatorio, o Movimento Browniano. (Berg[1984]). O químico-matemático polonês Marian von Smoluchowski(...-1912) foi o primeiro a dar um tratamento matemático à fundamentação da "Lei de Ação de Massas". (Ulam[1958], Levich[...]).).

Em Biologia, o movimento aleatorio microscópico que resulta em um processo macroscópico de difusão é resultante de um comportamento de busca incessante que os organismos executam quando eles não dispoem de fortes indícios da localização de seu objeto de desejo (ou, caso dispuserem destes indicios, não saibam ou não queiram utiliza-los). O processo de busca por movimentos aleatórios é o de execução mais simples pois não exige nenhuma das múltiplas e sofisticadas etapas necessárias em uma busca "inteligente": 1)Coleta de informações, 2)Arquivamento, 3) Recuperação destas, 4)Análise e 5)Decisão. Mesmo em buscas "inteligentes" que leva em conta informações locais, a coleta preliminar destas informações, é necessariamente executada sob ignorancia da localização dos objetos procurados, e, portanto, ela somente tem sentido se for feita aleatoriamente. Ou seja, a pesquisa aleatoria é sempre executada em todas as circunstancias, como um fim em si mesma ou como um meio. Além disso, como a busca completamente aleatória pode ser rapidamente executada, sem vacilações, ela permite vasculhar uma grande área em muito pouco tempo, e, portanto, pode ser altamente eficiente quando comparada sob certas circunstâncias com a propria busca inteligente que é naturalmente mais demorada. E este tempo de busca é essencial tratando-se de nutrientes. (Ou, como diz o ditado popular:"*De tanto pensar, morreu um burro*").

Movimentos aleatorios não tão microscópicos, tais como os "Caminhos de Lévy" em que o organismo realiza alguns raros mas longos "vôos" , não são exatamente o cenário previsto para a validade do Modelo de Ação de Massas e tem sido pouco estudado sob este aspecto. (Viswanathan[...]).

O modelo da Ação de Massas tem por objetivo determinar a taxa de colisões que deve ocorrer em uma população de particulas/organismos (individuos) que realizam um movimento microscopico aleatorio. Uma hipotese implicita deste modelo é de que a dimensão espacial dos individuos da população seja suficientemente pequena para que não ocorram interações à distancia, (sejam de atração, repulsão ou percepção), que possam interferir e influenciar no movimento aleatório de dois individuos proximos. Uma maneira de contornar esta questão é supor que cada individuo seja considerado como envolto por uma "auréola" que passa assim a ser a sua dimensão efetiva; quando duas "auréloas" se superpõem, consideramos então que uma colisão de fato já ocorreu. Sendo a difusão um processo dinâmico homogenizador que é, espera-se que uma população sem interferencia externa atinja um estado limite em pouco tempo. Neste estado de equilibrio macroscópico (isto é, com densidade invariante no espaço) o movimento microscopico continua ativo, inclusive para manter a estacionaridade macroscopica.

Preparado o cenário a ser discutido, consideremos uma população de ("pequenos") indivíduos de dimensão r homogeneamente distribuídos segundo uma densidade constante ρ e, microscopicamente executando movimentos completamente aleatórios e independentementes. Assim, discriminando um indivíduo qualquer dentre eles e fixando as coordenadas espaciais neste elemento, os movimentos relativos dos outros indivíduos serão também aleatórios e de intensidade D. Consideremos agora a "taxa de colisão" que este indivíduo estacionário recebe, ou seja, o número de indivíduos que colidem com o mesmo por unidade de tempo, e que será designada por C , cuja dimensão deverá ser $[C] = NT^{-1}$, onde N é o símbolo da dimensão de população.

A hipotese Física fundamental é que para um cenário semelhante, C dependerá somente dos valores dos seguintes parâmetros: a densidade, ρ, o raio de interação r, e a intensidade do processo de difusão que é medido por D, ou seja, $C = \varphi(\rho, r, D)$ em que φ é uma função matemática "pura", i.e., que independe de quaisquer outras dimensões físicas. Sendo $[D] = L^2T^{-1}$ e $[\rho] = NL^{-3}$, utilizaremos as unidades intrinsecas: $L_0 = r$, $T_0 = r^2D^{-1}$, e $N_0 = \rho r^3$, de onde a adimensionalisação da relação suposta nos dá:

$$\frac{C}{(\rho r^3)(r^2D^{-1})^{-1}} = \varphi(1,1,1)$$

e de onde vem que

$$C = c_0 \rho r D$$

sendo $c_0 = \varphi(1,1,1)$ uma constante matemática, adimensional. Esta formula singela mas carregada de significado foi obtida por Marjan Smoluchowski no início do século XX fazendo uso da equação de difusão e sua solução radial, assim como argumentos físico-quimicos sutis. (V.Levich-Physico-Chemical Hydrodynamics, 1962). A taxa total de colisões c em toda a população é obtida multiplicando-se C pelo numero total de individuos. Em uma região grande, mas finita de dimensão l teremos $N_* = \rho l^3$ individuos, o que nos dará $c = (c_0 l^3 r)D\rho^2 = c_* D\rho^2$, ou então o numero de colisões por unidade de volume: $c^* = (c_0^* r)D\rho^2$.

Consideremos agora duas populações A e B, de individuos pefeitamente misturados entre si, que se movimentam igualmente na escala microscópica na forma aleatória com coeficiente de Difusão D. De acordo com o que foi visto, um individuo $a \in A$ estacionário, sofre uma taxa de colisões de indivíduos da população B que pode ser descrita pela seguinte fórmula $c_A = (c_0 r D)\rho_B$. Considerando agora as duas populações ao mesmo tempo em um recipiente finito de dimensão l_0, com $\rho_A l^3$ indivíduos da especie A, a taxa de colisão total entre elementos de A e elementos de B poderá ser expressa como: $\rho_A l^3 c = (c_0 l^3 r D)\rho_A \rho_B = \kappa D \rho_A \rho_B$.

Finalmente, esta última forma representa de maneira até mais detalhada o que é conhecido como a "Lei" de ação de massas geralmente expressa da forma:

> "*A taxa de colisões entre duas populações submetidas a um movimento aleatório microscópico de mesma itensidade D, e uniformemente distribuidas em uma região, é proporcional ao produto das suas respectivas concentrações $\rho_A \rho_B$ e proporcional tambem ao coeficiente de difusão D*".

O Modelo de Ação de Massas tem vários aspectos ainda pouco estudados. Por exemplo,

1)Tratando-se de duas populações biológicas distintas, A e B que realizam realizam movimentos Brownianos independentes e de intensidades diferentes, D_a e D_b, é claro que fixada a atenção em um elemento de uma delas podemos considerar que a outra população realiza uma Movimento Browniano relativo. Entretanto, não é imediatamente claro qual seria o parâmetro efetivo $D_{eff} = \varphi(D_a, D_b)$ deste movimento relativo.

2-O Modelo de Ação de Massas é utilizado sob a hipotese implicita de que os individuos das duas populações realizam movimentos microscópicos aleatórios independentes e que a distribuição de cada espécie é, pelo menos localmente, estabilizada pelo mesmo processo de difusão. Se a distribuição (densidade) dos indivíduos for localmente variável em uma escala quase microscópica, ou se estiverem submetidos a um processo de transporte deterministico (convecção) não está claro que este Modelo seja igualmente válido. Um estudo clássico da influencia de transporte v em movimentos de difusão é o chamado "Problema de Taylor" da dinâmica de fluidos que tem por objetivo obter um coeficiente efetivo de difusão $D_{eff} = \varphi(D, v)$. (Levich[1962], Caflisch[...], Evans/Neu[...]).Tais variações são também analisadas em textos de Termodinâmica Irreversivel. (de Groot[1962])..

3-Havendo comportamentos "inteligentes" da presa e/ou do predador, os seus movimentos microscopicos não podem ser considerados independentes. O Modelo de Ação de Massas terá que necessariamente levar este fato em conta, pois um comportamento inteligente é "caro" e evolui somente se houver vantagens de adpatação. E, neste caso, comportamento inteligente significa (respectivamente) uma maior ou menor taxa de "colisões".

4-Movimentos Aleatorios não Brownianos, por exemplo, "Caminhos de Lévy", caracterizados pela ocorrencia de "vôos" raros mas de longo alcance, também não fazem parte do cenário típico do Modelo Clássico de Ação de Massas. (Viswanathan[..], Nathan[...]).

X-e-TEMPO DE BUSCA POR MOVIMENTO ALEATÓRIO

Consideremos um indivíduo que assume uma estrategia de busca executando apenas um movimento aleatório de intensidade D, independente de qualquer informação, em um meio constituido de "presas" fixas a uma densidade ρ. Se a cada encontro uma presa é retirada, é razoavel indagar sobre o tempo médio que ele levará para consumi-las todas. Para analisarmos este processo consideremos a dinâmica de retirada das presas que pelo modelo de ação de massas será a equação Malthusiana: $\frac{dn}{dt} = -\kappa Dn$. O tempo médio de "sobrevivencia" de uma presa será $\frac{1}{\kappa D}$ e a probabilidade de uma em particular ser capturada em um intervalo de temo t é $p(t) = 1 - e^{-\kappa Dt}$.

Este argumento utiliza a teoria que será desenvolvida no capitulo destinado ao Principio de Malthus.

Exercicios:

1-Obtenha o tempo médio de encontro da primeira presa por este proceso de busca.

2-Analise a dependência deste tempo médio considerando a dimensão do espaço como uma variável.

Sabe-se, depois de tediosos calculos matematicos que um movimento aleatório torna-se um método de busca cada vez menos eficiente com o aumento da dimensão e este fato é de grande importancia na busca de informações "encriptadas" em espaços de alta dimensão.

Processos biologicos que dependem de encontros "furtivos" (isto é, decorrentes de movimentos aleatórios) utilizam a estrategia de apenas recorrer a eles em dimensão reduzida. Por exemplo, uma molecula de feromonio que deve encontrar um receptor "escorrega" por um filamento unicdimensional até encontrar um poro. J.Murray-Nonlinear Differential equations in Biology, Oxford UP 1974. M.Delbruck - Dimension Reduction in Diffusion....

BIBLIOGRAFIA:

Textos:

G.I.Barenblatt-Scaling Phenomena in Fluid Dynamics, Cambridge Univ. Press 1994

T.McMahon_J.T.Bonner-On Size and Life, W.H.Freeman-Sci. American 1983

S.Mahajan-Street-Fighting Mathematics: The art of educated guessing and opportunistic problem solving, MIT Press 2012

Geoffrey West-Scale-The Universal Laws of Life, Growth, and Death in Organisms, Cities and Companies, Penguin 2017

Leitura Auxiliar:

James D. Murray- Simple Models explain 95% of the phnomena.....

Referências:

R.McN.Alexander-Estimation of speeds of dinosaurs, Nature (1976), 129-130.

R.McN.Alexander-Optima for Animals, Princeton Univ.Press 1996.

Aristoteles- "Sobre o Movimento"

R.Banks-Towing Icebergs, Falling Dominoes and other Adventures in Applied Mahtematics, PUP2013

G.I.Barenblatt-Similarity, Self-Similarity and Intermediate Asymptotics, Plenum 1979

G.I.Barenblatt-Scaling Phenomena in Fluid Dynamics, Cambridge Univ. Press 1994

G.I.Barenblatt-Dimensional Analysis, G. Breach 1987

G.I.Barenblatt-Self-Similar Intermediate Asymptotics for Nonlinear Degenerate Parabolic Free-Boundary Problems that Occur in Image

Processing, Proc.Nat.Acad.Sci. USA 98(23), 12878-81, 2001

G.I.Barenblatt-V.M.Entov-V.M.Ryzhik-Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks, Kluwer1990

M. Batty-The New Science of Cities, MIT Press 2014

G.D.Birkhoff-Hydrodynamics: A Study in Logic, Fact and Similarity, Princeton Univ. Press/Dover

G.Bluman-S.Kumei-Symmetries and Differential Equations, Springer 1989

J.T.Bonner-Why Size Matters-From Bacteria to Blue Whales,Princeton Univ. Press 2006

J.L.Borges-Conto- O Cartografo que fez uma mapa perfeito-Ref- E.S. de Decca-Jornal da Unicamp : 02-08 junho 2008, pg.08.

D.Brockmann-L.Hufnagel-T.Geisel-The Scaling Laws of Human Travel, Nature 439(26Jan2006), 462-465.

J.H.Brown-G.B.West-editors-Scaling in Biology, Oxford U.Press 2000.

L.Carroll-Euclid and his Modern Rivals, BNoble
J.Case-Book Review-SIAM News 2005-7-11- ~Poincaré&Einstein-J. Rigden- Two Theories of Relativity-All but Identical in Substance,
Paul Colinvaux-Why big fierce animals are rare, PUP 1970
Stanislas Dehaene-The Number Sense-How the Mind Creates Mathematics, Oxford UP 1996- ultima ed. 2011
T.Deisboeck-Morphological Instability and Tumour Invasion-arXiv2006 (Harvard University-Complex Systems in Biology)
Max Delbrück-
M. Denny-Limits to running speed in dogs, horses and humans, J.Exp.Biol. 211 (2008), 3836-3848
S.R.de Groot-P.Mazur-Non-Equilibrium Thermodynamics, North-Holland 1962
Maurice d'Ocagne- *Traité de nomographie*, Gauthier-Villars. Paris, 1899; 2ª edição, 1921.
F.Dyson-A meeting with Enrico Fermi, Nature 427 (2004)- doi:10.1038/427297a
F.Frenkel-A. de Pace-Visual Strategies-A Practical Guide for Scientists and Engineers, Yale UP 2012
Harald Fritzsch-The Creation of Matter, BB 1984
Galileo Galilei-Dialogues Concerning Two New Sciences, -1637-Trad.
J.Gillooly-J.HBrown-G.B.West-V.M.Savage-E.L.Charnov-Effects of Size and Temperature on Metabolic Rate, Science, vol. 293, (2001),
2248-2251
P.Goldreich-S.Mahajan-S.Phinney-Order-of-Magnitude Physics: Understanding the World with Dimensional Analysis, Educated
Guesswork and White Lies,122pg.- MIT Online 2010.
N.Goldenfeld-O.Martin-Y.Oono-Intermediate asymptotics and renormalization group theory, J. Scient. Comp. 4 1989 355-372
J.Gordon-Strutures: Why Things dont Fall Dawn,
J.Harte-Consider a Spherical Cow, 1988
J.Harte-Consider a Cylindrical Cow,
W.Jetz-C.Carbone-J.Fulford-J.H.Brown-The Scaling of Animal Space Use, Science 306(08Oct2004), 266-268
J.Jun-J.W.Pepper-V.M.Savage-J.F.Gillooly-J.H.Brown-Allometric scaling of ant foraging trail networks, Evol.Ecol 5 (2003): 297-303
J.B.Keller-A Theory of Competitive Running, Physics Today 26 1973, 42-46.
A.N.Kolmogorov-Selected Works....
A.Kossovsky-Benford's Law in Forensic Fraud, WSP 2014
B.Kuipers-Qualitative Reasoning-Modeling and Simulating with Incomplete Knowledge, MIT 2004
B.Lautrup-Tsunami Physics, pp.Feb.2005
B.Lautrup-Physics of Continuous Matter, IoP Press 2005.
M.Levy-Why a Cat always land on his feet, Princeton UP
Rogerio C. de Cerqueira Leite-O etanol e a solidão das vaquinhas brasileiras, Folha de São Paulo (quando RCCL tiha 76 anos).
C.C.Lin-L.A.Segel-Mathematics Applied to Natural Sciences, SIAM 1990
P.Lockhart-Measurements, HarvUP2012
J.D.Logan-Similarity Solution to a Heat Exchange Problem, SIAM Rev. 40(4), (1998), 918-921.
L.Mahadevan- artigos diversos- v. HomePage-Harvard Univ.-
L.Mahadevan&M.Bandi-A pendulum in a flowing soap film, Phys.Fl. 25 (2013), 041702
L.Mahadevan & J.Kim-The Hydrodynamics of Writing with Ink, Pr.Roy.Soc. 107, 2011, 264501
S.Mahajan-Street-Fighting Mathematics: The art of educated guessing and opportunistic problem solving, MIT Press 2012
T.McMahon-Rowing:A Similarity Analysis, Science Mag. 173 july 1971, 349-351
T.McMahon_J.T.Bonner-On Size and Life, W.H.Freeman-Sci. American 1983.
T.M.McMahon-Scaling Physiological Time, pg. 131-163, Lect on Appl.Math.-AMS-vol 13, 1980.

T.M.McMahon-Muscles Reflex and Locomotion, Princeton Univ.Press 1984.

B.Mandelbrojt-The Fractal Geometry of Nature, WHFreeman 1982

J.Mazur-The Motion Paradox: The 2500 years old puzzle behind the Mysteries of Time and Space, Dutton 2007

J.C.Maxwell-A Treatise on Electricity and Magnetism, 1873

Andreas Nieder-A Brain for Numbers-The Biology of the Number Instinct, MIT Press 2019

P.J.Nahin-In praise of simple Physics-The Science and Mathematics of Everyday Questions, PUP2016

K.J.Niklas-Plant Allometry-The Scaling of Form and Process, Univ. of Chicago Press 1994.

L.V.Ovsiannikov-Group Analysis and Differential Equations, Academic Press 1982

T.J.Pedley-ed.-Scale Effects in animal locomotion, Academic Press 1977.

R.Phillips-R.Milo-A feeling for the numbers in biology, PNAS 106(51), (2009), 21465-21471

Platão-Parmenides-Zeno

B.E.Pobedrya-D.V.Georgievskii-On the Proof of the Pi-Theorem in Dimension Theory, Russ.J.Math.Phys. 13(4), 2006, 431-37.

H.Poincaré-La Science et l'Hypothese, 1902-Science and Hypothesis, Dover 1952- Ciencia e Hipótese, UnB 1987

James F. Price-Lectures on Dimensional Analysis of Models and Data Sets-Similarity Solutions and Scalling Analysis-<online>- Woods

Hole Ocean.Inst. 2006.

E.Purcell-Life at Low Reynolds Number, Am.Journal of Physics 45, 1977, 3-11

L.Raleigh-The Principle of Similitude, Nature 95 (1915) 66-68

V.M.Savage-J.Gillooly-J.HBrown-G.B.West-E.L.Charnov-Effects of Body Size and Temperature on Population Growth, Am.Natur.

163(3), (2004), e–

V.M.Savage-J.Gillooly-W.H.Woodruff-G.B.West-A.P.Allen-B.J.Enquist-J.HBrown-The predominance of quarter-power scaling in

biology, Funct.Ecol. 18 (2004), 257-282.

K. Schmidt-Nielsen-Scaling:Why is Animal Size so Important?, Cambridge UP 1984.

L.Sedov-Similarity and Dimensional Methods in Mechanics, J.Wiley 1971.

R.Strichartz-Evaluating Integrals by Self-Similarity, AmMathMonthly 104(4), 2000, 316-326.

T.P.Smith-How Big is Big and How Small is Small-The Size of everything and Why, OUP2014

C.Swarz-Back of the Envelope Physics, J.Hopkins Univ Press 2003

A.A. Sonin-The Physical Basis of Dimensional Analysis- MIT Open Course Ware-OCW-Fluid Dynamics-Lectures online

I.Stewart-Counting the Pyramid Builders, Sci.Am. Sept. 1998, 76-78.

G.I.Taylor-The formation of blast wave by very intense explosion, Proc.Roy.Soc. A 201 (1950), 159-186.

J.C.Taylor-F.Kersen-Huygen's Legacy:The Golden Age of the Pendulum Clock, Fromanteel 2004

D'Arcy W.Thompson-On Growth and Form, Cambridge UP 1917.

E. Van den Eijnden-Lectures online: Introduction to Math Modelling-Dimensional Analysis and Scaling, New York Univ.-online

S.Vogel-Comparative Biomechanics, Princeton UPress 2003

K. von Tritz-The discovery of incomensurability, Ann Math 46(1954), 242-264.

Jakob von Uexküll-Dos Animais e dos Homens: Digressões pelos seus mundos próprios. Doutrina do Significado.(trad.) Lisboa, 1982.

R.Wehner-

L.Weinstein_J.Adam-Guesstimation: Solving world's problems in the back of a cocktail napkin, Princeton UP 2008.

L.Weinstein-Guesstimation 2.0, Princeton UP 2008.

D.Weintraub-How old is the Universe? PUP2010

Weisberg, M. - Simulations and Similarity: Using Models to Understand theWorld, Oxford UP 2013

V.Weiskopf-Search for Simplicity: Mountains, waterwaves and leaking ceilings, Am.J.Phys. 54(2) 1986, 110-111.

B.J..West-Beyond the Principle of Similitude, J.Appl.Phys. 60 (1981) 1989-97.

Geoffrey West-Scale-The Universal Laws of Life, Growth, and Death in Organisms, Cities and Companies, Penguin 2017

G.B.West-J.H.Brown-B.J.Enquist-A General Model for the Origin of Allometric Scaling Laws in Biology, Science 276 (04 April 1997), 122-126.

A.B.Herman-V.M.Savage-G.B.West-A Quantitative Theory of Solid Tumor Grwoth, Metabolic Rate and Vascularization, PLoS One 6 (2011)

G.B.West-J.H.Brown-B.J.Enquist-Growth models based on first principles or phenomenology?, Funct.Ecol. 18 (2004), 188-196.

G.B.West-J.H.Brown-B.J.Enquist-A general model for structure and allometry of plant vascular systems, Nature, (1999), (400), 664-667.

G.B.West-J.H.Brown-B.J.Enquist-The Fourth Dimension of Life:Fractal Geometry and Allometric Scaling of Organisms, Science 284 (1999), 1677-1679.

H.Whitney-The Mathematics of Physical Quantities: I-Am.Math.Monthly(1968), 113-, II- AMM(1968), 227-

H.S.Wu-Estimation- chap. 10-Numbers in Elementary School, AMS 2011

Ya.B.Zeldovich-Yu.P.Raizer-Physics of Shock Waves and High Temperature Hydrodynamics, A.Press 1966

Ya.Zeldovich&al.-The Almighty Diffusion, WSP1989.

G.K.Zipf-Human Behavior and the Principle of Least Effort, Addison-Wesley 1949

Anotações:

Harald Fritzsch- The Creation of Matter BB 1984

pg.165:" Decay of a Proton: A proton lives for at least 10^{30} years...How this figure was arrived at since the earth is only about 5 billion years old? The thing is...we do not observe just one, but many protons...a block of iron is composed of about 10^{30} protons and 10^{30} neutrons....The reason of the existence of human life is proof that proton enjoy a long life..Our body contais about 10^{28} protons...If...the human body could not resist.".

Richard Feynman -(~Physics World -Book Review - V.Vedral-Decoding Reality-25Jan2011)