# PROVA 02: MS680-MT624- II Sem 2020: **COMENTÁRIOS**

POSTADA: 22 de Dezembro de 2020 (Terça-feira)
RECEBIMENTO: 03 de Janeiro de 2021 (Domingo)
ATENÇÃO:

ESCOLHA (apenas) 06 DENTRE AS 12+1 QUESTÕES DA LISTA ABAIXO.

1-As Questões devem ser encaradas como oportunidades para demonstrar conhecimento não como perguntas.

Precisão e Concisão serão qualidades avaliadas.

2-A Redação de cada Prova deve apresentar a forma de um depoimento pessoal distinto.Caso ocorram, todas as cópias envolvidas serão invalidadas.

3-Cada Questão resolvida deve ser precedida de seu respectivo Enunciado Original completo.

4-A Resolução deve ser digitalizada em um único documento pdf ( Manuscritos NÃO serão aceitos!)

5-O documento pdf da Resolução deve ser enviado no Anexo de uma mensagem com título "PROVA 02" para o endereço eletrônico: wilson@unicamp.br

6-Antes das 24hs do dia 03 de janeiro. (Sugestão: Não deixe para a última hora e evite ser responsabilizado por acidentes)

**COMENTÁRIO GERAL:**

**1**-Conforme esclarecido no preâmbulo desta e da primeira Prova, as Questões devem ser encaradas como "**Oportunidades**" para demonstrar conhecimento sobre os **assuntos temas** da **disciplina (**Mod Mat-MS680/MT624**)**. Em outras palavras, cada questão deve ser **trabalhada e discutida** no contexto da **Disciplina**, ou seja, não há "Resposta" definitiva gabaritável para cada uma delas.

Mais uma vez: o "conhecimento" que interessa expor nestas provas refere-se à disciplina de **Modelos Matematicos** e não, por exemplo, demonstrações de manipulações detalhadas e especificas de Calculo, a menos que sejam estritamente essenciais para a discussão. Por exemplo, muito/as se estenderam demasiadamente nas minúcias do calculo das integrais da questão 5c) (que são, ou deveriam ser, de conhecimento de qualquer estudante de Calculo Elementar) quando o tema principal a ser discutido era a ideia de "TEMPO MÉDIO DE SOBREVIVENCIA".

Por outro lado, na maioria das provas, a questão 5a) que trata da argumentação (amplamente exposta nas Notas) sobre o conceito fundamental de TEMPO MÉDIO DE

SOBREVIVENCIA não foi discutida, o que prejudicou a elaboração das questões seguintes. EM SUMA, INTERESSA MUITO MAIS AS IDEIAS DO QUE o desenvolvimento exaustivo de "truques" e manipulações matematicas que podem ser abreviadamente indicadas.

**2-**As **referências** devem ser de preferencia sempre constituidas de **fontes fundamentais** ("*nós*") da literatura ou de trabalhos de autoridades estabelecidas no assunto. Referencias a trabalhos de mestrado, doutorado, artigos expositivos semi-populares escritos por amadores encontrados a esmo no Oceano da internet não são confiáveis e raramente úteis como referencias. Em suma, o tempo gasto em procura-los e tentar compreendê-los não vale o esforço e pode ser até contraproducente. Como dizia um importante matemático: "*Leiam os mestres do assunto*" sendo, portanto, indispensável saber quem são eles/as.

**3-ALERTA:**

Questões sobre *TEMPO MÉDIO DE SOBREVIVENCIA e sobre o conceito de MÉDIA*, serão repetidamente abordadas na 3a prova e exame, assim como *MÉTODOS OPERACIONAIS*, DE *FOURIER* E DE *LINEARIZAÇÃO LOGARITMICA ASSINTOTICA* serão definitivamente necessários para a realização das Próximas Provas.

**xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx**

**1-Questão 1-** A Psicologia da Matematização: *Ockham(sec.13)&Kanizsa(sec.20), Galileo(sec.17)&Newton(sec.17-18)*

1a-Descreva o "*Efeito de Completamento (Interpolação) Visual*" ("*Efeito Kanizsa*") em poucas linhas e exemplifique-o com o famoso triângulo de Kanizsa e especialmente com a visualização de *formas* sugeridas por uma sequência de pontos.

1b-Argumente com base no "*Efeito Kanizsa*" sobre a motivação cognitiva da representação contínua para dinâmicas de grandes populações. Como se explica evolutivamente a preferência cognitiva da espécie humana por registrar *informações discretas* em termos (reduzidos) como "*formas geométricas*"?

1c-Descreva a Metodologia funcional de Galileo e justifique-a em termos do que foi discutido em 1a-b.

1d-Descreva o grande aperfeiçoamento da Metodologia de Galileo realizada por Newton. (Sugestão: Biblioteca de funções)

1e-Descreva o "*Principio de Parcimônia de Ockham*" e discuta a sua conexão com a cognição humana, especialmente com o item 1b.

1f-Exemplifique os itens 1b-c com dados de mortalidade da COVID19 em 2020 para uma grande comunidade durante aproximadamente 1 ano.

**COMENTARIO:**

Nesta questão muito/as se entusiasmaram com a ilusão de ótica (que é um tema interessante mas não o cerne desta questão) e perderam o foco no argumento sobre a substituição de um grafico de dados discretos por uma curva suave que é uma estrategia mnemônica, portanto redutiva, da cognição (visual) humana. A evolução biológica deste procedimento se explica pelo fato de que ele produz informações reduzidas, mas cruciais e suficientes para muitas situações (não todas!), da vida real. A eventual imprecisão deste procedimento compensa pela rapidez de discriminação entre cenários, o que lhe confere uma capacidade de sobrevivencia decorrente de decisões sobre a captura de alimento ou como evitar de se tornar um alimento. (A discussão sobre o aspecto evolutivo não era imprescindivel para responder a esta questão, mas aspirantes ao estudo sério da Biologia Teórica/Matemática devem buscar com empenho um conhecimento sobre as ideias fundamentais da Teoria de Evolução, a começar pela leitura de trechos do livro de Darwin; Origem das espécies. Mas, cuidado, há muita "bobagem" sendo escrita a respeito desta teoria e os textos fundamentais da literatura devem ser sempre os escolhidos.Buscas a esmo na internet é receita quase certa para cair na enorme rede de idiotices que existe nela.).

O Principio de Ockham (como alguns/mas pouco/as alunos/as indicaram) não é uma "verdade inquestionável" mas uma "boa prática" metodológica. Pois, decidindo por um modelo matemático complicado (isto é, com muitos parâmetros e suposições) para descrever um determinado fenômeno, você estará na obrigação intelectual de justificar a escolha e significado de cada um destes parâmetros e suposições. Portanto, é óbvio que o seu controle (conhecimento) da situação tende a ser muito melhor, em geral, com a utilização de um modelo mais simples para a descrição do mesmo fenômeno. A negligencia do Principio de Ockham é um caminho direto ao pedantismo e à obscuridade, pragas que, infelizmente, grassam soltas e juntas em meios acadêmicos.

**Questão 2-** *Escala Logaritmica na Aproximação Assintótica: Princípio Sensorial ("Lei") de Weber-Fechner(sec.19)*

2a-Descreva o "*Princípio Sensorial ("Lei") de Weber-Fechner*" para a percepção visual, auditiva, táctil, olfativa e de cardinalidade.

2b-Argumente com base no "Princípio de Weber-Fechner" sobre a conveniência cognitiva da escala logaritmica para variáveis com "grandes" valores.

2c-Aplique a escala logaritmica para o registro numérico da população do exemplo citado no item 1f acima e caracterize os periodos de tempo em que o comportamento é linear (Malthusiano).

2c-Mostre que, para duas sequencias de numeros positivos, $\{a_k \to \infty\}$ e $\{b_k \to \infty\}$, então valem as seguintes implicações para a

aproximação assintótica em escala logaritmica

$$\log a_k - \log b_k \to 0 \Leftrightarrow \log \tfrac{a_k}{b_k} \to 0 \Leftrightarrow \tfrac{a_k}{b_k} \to 1$$

2d-Mostre que a aproximação assintótica na escala logaritmica não implica necessariamente na aproximação assintótica em escala normal (isto é, $a_k - b_k \to 0$) , mas vale a implicação inversa. (Sugestão: Analise a igualdade $a_k - b_k = a_k(1 - \frac{a_k}{b_k})$ e observe que $a_k - b_k \to 0 \Leftrightarrow$ $\frac{a_k}{b_k}$ se aproxima de $1$ com um erro de $o(\frac{1}{a_k})$, isto é, de "ordem menor do que $\frac{1}{a_k}$". Assim, para sequencias que convergem para $\infty$ é mais interessante analisar a aproximação assintótica logaritmica, pois ela é mais abrangente e tem um fundo cognitivo. Além disso, para dois" *trens* em alta velocidade uma aproximação na escala simples é extremamente perigosa"!)

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

**COMENTÁRIO**:

O conceito de "percepção limiar" que é fundamental para entender o Principio de

Weber-Fechner foi pouco citado; o ponto crucial desta ideia pode ser apreciada com a estória do "*cozimento de um sapo vivo*" (apesar do fundo "politicamente incorreto" dela). Isto é, uma pequena variação $\Delta S$ da intensidade de um estímulo somente é **perceptivel** e origina uma *resposta* se a sua variação logarítmica, isto é, $\frac{\Delta S}{S} \approx \Delta(\log S)$ , (onde $S$ é a intensidade do estimulo de **fundo**) for acima de um valor limiar $k$, caracteristico do sistema (visual,olfativo,tactil, contagem...etc.) e do indivíduo. A intensidade da resposta depende deste **excedente** que, em geral, se supõe proporcional a ele.

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

**Questão 3-***Linearização Logaritmica Assintótica*

**-Definições**:

1-Diz-se que um Modelo Populacional, $P : \mathbb{N} \to \mathbb{C},$ é **Malthusiano** se para algum $A$ e $\gamma,$ se tem $\frac{P(k)}{Ae^{\gamma k}} = 1$ para todo $k,$ ou, equivalentemente, se $P(k) = Ae^{\gamma k}$.

2-Diz-se que um Modelo Populacional é **Assintoticamente Malthusiano** se para algum $A$ e $\gamma,$ se tem $\frac{P(k)}{Ae^{\gamma k}} \to 1$, para $k \to \infty$, ou, equivalentemente, $P(k) = Ae^{\gamma k}(1 + \varepsilon(k))$ para $\varepsilon(k) \underset{k\to\infty}{\to} 0.$

3-Diz-se que uma função $P : \mathbb{N} \to \mathbb{C},$ é **Assintoticamente Linearizada na escala logaritmica** se $\lim\limits_{k\to\infty} \{\log|P(k)| - (\alpha + \gamma k)\} = 0$ para algum $\alpha, \gamma.$

4-Diz-se que uma Relação funcional $V = f(X)$ pode ser **Linearizada** (exatamente) se existirem funções inversiveis $v = \psi(V)$ e $x = \varphi(X)$ de tal forma que $v = ax + b$. em algum dominio.

5–Diz-se que uma Relação funcional $v = f(x)$ pode ser **Linearizada assintótica e localment**e nas vizinhanças de $x = 0$ se $v = a + bx + o(x)$ paral algum $a, b$. (Obs-Segundo Leibniz, uma função $h(x)$ é dita um infinitésimo de ordem menor do que $x,$ e escreve-se, $o(x)$ se for possivel representá-la na forma $h(x) = x\, \varepsilon(x)$ , onde, $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$..

3a-Considere uma Tabela de dados demográficos representada pela função $P : \mathbb{N} \to \mathbb{C},$ cuja população quando medida na escala logaritmica na forma $p(k) = \log P(k)$, exibe um gráfico aproximadamente linear (isto é, $p(k) = (\alpha + \beta k) + \varepsilon$ , com $\varepsilon \approx 0$ para alguma faixa de valores de $k$). Mostre como esta Dinâmica Populacional pode ser considerada aproximadamente Malthusiana nesta faixa de valores de $k$.

3b-Descreva o Método Numérico de Gauss ("mínimos quadrados") comumente utilizado para determinar a reta que "melhor aproxima" uma Tabela de dados e descreva como este Método pode ser utilizado para a formulação de um Modelo Malthusiano.

3c-Considere uma População medida na escala logarítmica $\log P(k) = p(k)$. Mostre que uma aproximação linear **assintótica** na escala logaritmica de uma população (isto é, $\log P(k) - (\gamma k + \beta) \to 0$,para $k \to \infty$) **não** implica em um Modelo Malthusiano, mas *apena*s um Modelo Assintoticamente Malthusiano. (Sugestão: veja o proximo exercicio).

3d-Mostre **quando** uma população $P(k)$ descrita pelo Modelo de Fibonacci é Malthusiana e **quando** ela é *apenas* assintoticamente Malthusiana.(Sugestão: Analise as possiveis soluções a depender das condições iniciais).

3e-Considere uma função "racional bilinear" $V = \frac{AX}{CX+D}$ . Mostre que é possivel "linearizar exatamente" a relação entre as variaveis $V$ e $X$ tomando transformações $v = \frac{1}{V}$ e $x = \frac{1}{X}$ , de tal forma que entre as "novas variáveis" resulte uma relação funcional de primeiro grau ($v = a + bx$) ("*linear*).

3f-Mostre que qualquer função diferenciável nas vizinhanças da origem pode ser localmente linearizada e vice-versa.

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

**COMENTÁRIO:**

O conceito de equivalencia assintotica entre duas funções nas proximidades de um limite está exposto nas Notas e desempenha um papel essencial na simplificação de representações funcionais em vizinhanças de pontos importantes. Na verdade, embora este aspecto não seja enfatizado nos livros de Cáculo, ele está na base da invenção da Análise Matemática, pois o principal exempo de equivalencia assintótica é o o proprio conceito de derivada segundo Leibniz, que é equivalente ao de Newton, mas que enfatiza a possibilidade de aproximar assintoticamente uma função por uma reta nas vizinhanças do ponto estudado. O outro exemplo importante, e que nos diz respeito aqui, é a equivalencia assintotica de funções na escala logarítmica para vizinhanças do infinito e, especialmente útil quando a função estudada é assintoticamente equivalente a uma função de primeira ordem (linear), como no caso de Leibniz!

O Método de Linearização assintótica é particularmente útil quando, na escala logaritmica, o gráfico da função analisada se aproxima de uma **reta** nas vizinhanças do infinito. Isto porque porque (*cognitivamente*) a reta é a única "curva" que admite sua percepção **visual** segura (via efeito Kanizsa) em um grafico pontilhado e, uma vez suspeitada, é facilmente obtida analitica/numericamente com o Método de Gauss.

A discriminação analítica de qualquer outra classe de curvas pela análise visual do gráfico de pontos esparsos pode ser extremamente enganosa, talvez com a excessão do círculo completo. Mas, por exemplo, distinguir "no ôlho" entre uma parte de um circulo, ou uma hiperbole de uma parabola ou de uma exponencial é muito difícil, e mais ainda em se tratando de curvas genéricas. Esta é a razão de buscar linearizar aproximadamente um grafico com uma transformação, (utilizando especialmente a logaritmica no infinito), e se resignar a descrever apenas intervalos reduzidos do dominio da variável, especialmente regiões limite (descrição assintotica) onde, felizmente, em muiitos casos se concentram as informações mais interessantes sobre a função.

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

**Questão4:** *Tempo Médio (Aritmético) de Sobrevivência*

4a-Defina Média Aritmética Ponderada $M_A(a_1,\ldots,a_N)$ para uma sequência de dados numéricos $a_k > 0$. Discuta a razão de se dizer que uma Média Aritmética $A$ é **uma única** informação numérica **populacional** que substitui (reduzindo) um conjunto (Tabela) de **várias** informações numéricas **individuais**, $a_k$. Argumente com base nesta distinção sobre a (usual) insensatez de se afirmar que um **casal** brasileiro tem em média, por exemplo, $1,44$ filhos.

4b-Segundo um Teorema de Kolmogorov-Nagumo(1933) todas as "Médias" sobre uma sequência de dados numéricos $a_k > 0$ (conceito que pode ser facilmente definido por algumas poucas propriedades bem caracteristicas) são da forma $M_\phi(a_1,\ldots,a_N) = \phi^{-1}(M_A(\phi(a_1),\ldots,\phi(a_N))$ onde $\phi$ é uma função real estritamente convexa inversível e $M_A$ é uma Média Aritmética. Mostre a veracidade desta afirmação com respeito às médias, *Aritmética*, *Harmônica*, *Geométrica* e *Quadrática*.

4c-Interprete o Método de Quadrados Mínimos de Gauss em termos de uma Média Quadrática.

4d-Dada uma sequência de números positivos a $= \{a_k\}$ obtenha, argumentando geometricamente, uma relação de ordem entre suas Médias Aritmética,$M_A(a)$, Harmônica,$M_h(a)$, Geométrica, $M_g(a)$ e Quadrática, $M_2(a)$. (Utilize uma sequencia de apenas dois números para seus argumentos).

4e-Mostre que, a depender da escolha da média de Kolmogorov-Nagumo, pode-se dizer que a média de filhos de um casal brasileiro pode ser qualquer número real entre $m = \min\{a_k\}$ e $M = \max\{a_k\}$ onde $a_k =$"*Número de casais com k filhos*".

**COMENTÁRIO:**

Obviamente o intuito desta questão é motivar a discussão sobre o conceito geral de média que é importante em Matematica Aplicada e segue na linha do efeito de Kanizsa cuja ideia básica é reduzir uma massa de informações (impossivel de ser utilizada em seu detalhismo bruto) reduzindo-a deliberadamente (e conscientemente) a uma única informação (portanto, imcompleta)!. (Ou, segundo Mark Kac: "J*ogue a agua de banho for*a, m*as preserve o beb*ê!"). O Teorema de Kolmogorov-Nagumo unifica a apresentação de uma classe de "médias" . A citação das mais conhecidas (aritmetica (mãe de todas), geométrica, harmônica e quadratica) ilustra esta síntese e indica a sua enorme generalização.

A referencia ao Metodo de Gauss (que se supõe bem conhecido a estas alturas) era simplesmente para detectar que o seu critério de otimização é baseado em uma média quadratica de erros e não baseada (como poderia ser !), em uma media harmônica, geométrica, etc.(A quadratica é utilizada simplesmente porque é analiticamente a mais tratável). Muitos/as alunos/as desenvolveram "ad nauseam" a derivação do Método de Gauss, o que não era necessário, nem solicitado, nem desejável.

As questões 4d e 4e foram discutidas por varios/as alunos/as com uma extensa apresentação de métodos geométricos da Grécia Antiga (obviamente retiradas da internet) que tem algum interesse histórico, mas são completamente estranhos à matematica contemporanea que utiliza fundamentalmente o conceito de função e não relações entre triângulos.

Para melhor abordar esta questão, construa o gráfico da função $\varphi$ e de sua inversa $\varphi^{-1}$ (que caracterizam, segundo Kolmogorov-Nagumo, a média estudada em cada caso) e interprete graficamente o conceito de média entre dois numeros. A partir daí torna-se claro tanto o seu significado geométrico quanto as desigualdades mencionadas (sem o emaranhado de triângulos da geometria grega!!).

**Questão 5 :** T*empo Médio (Aritmético) de Sobrevivência de uma Popula*ção

D**efiniçã**o: Dado um Modelo populacional especificamente de mortalidade $N(t)$ tal que $\frac{dN}{dt} < 0$ e $\lim\limits_{t\to\infty} N(t) = 0$, diz-se que o valor (finito ou infinito) da integral $\left( \frac{1}{N_0} \int_0^\infty -t \frac{dN}{dt} dt \right)$ é denominado Tempo Médio (Aritmético) de Sobrevivência da População.

5a-**Argumente** sobre a motivação para que a expressão $\left(\frac{1}{N_0}\int_0^{\infty} -t\frac{dN}{dt}dt = \frac{1}{N_0}\int_0^{N_0} tdN\right)$, que se refere a uma dinâmica $N(t)$ decrescente de uma (Grande) população (sem natalidade e migração) inicialmente com $N(0) = N_0$ indivíduos, possa **ser interpretada** como o tempo médio (aritmético) de sobrevivencia desta população.

5b-**Calcule** o Tempo Médio (Aritmetico) de sobrevivência de uma população Malthusiana (isto é, descrita segundo o Modelo Newtoniano $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = -\mu,\ N(0) = N_0$) e mostre que este valor **independe** de $N_0$. **Discuta** o significado biológico deste resultado.

5c-**Calcule** o tempo médio (aritmético) de sobrevivência de uma população cuja dinâmica de Mortalidade é descrita por uma função quase-polinomial $N(t) = q(t)e^{-\mu t}$, onde $q(t) = N_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k t^k$ é um polinômio e $\mu > 0$.(Sugestão:Calcule explicitamente as integrais $I(n) = \int_0^{\infty} t^n e^{-\mu t}dt$ recursivamente em $n$ e utilizando integrações por partes)

5d-O mesmo para $N(t) = \frac{N_0}{t+1}$.

**COMENTÁRIO:**

A Questão 5a é clara quando pede "**ARGUMENTE sobre a Motivação**" da definição de Tempo Médio de Sobrevivência para as integrais $\frac{1}{N_0}\int_0^{\infty} t\frac{-dN}{dt}dt = \frac{1}{N_0}\int_{N_0}^{0} tdN$. A grande maioria simplesmente aceitou conformadamente a definição e não apresentou sequer uma razão para considerar a expressão integral com o sentido que se pretendia dela. Ou seja, o conceito de Média Aritmética ponderada do tempo de sobrevivencia , que é fundamental, foi ignorado!!! E esta argumentação está presente e enfatizada nas Notas, o que me leva a crer que elas não foram lidas com atenção pela maioria.

**Sugestão**: Leiam pela primeira vez, ou de novo, as Notas, meditem e trabalhem sobre este tema que é central na disciplina.

Uma vez entendido o conceito, é possivel aplica-lo conscientemente (e não apenas mecanicamente) em vários outros contextos.

**Questão 6**: Mortalidade por Predação Periférica e *Efeito de Rebanho Egoista*: (Dois "amigos" em um campo de cerrado e uma onça esfomeada. Um deles, para e toma seu tempo para amarrar bem o calçado. O outro, apressado, lhe repreende:"*Vamos correr logo que a onça é mais rápida do que nós*!". O Amigo (da onça): "*Eu não preciso correr mais do que a onça, eu preciso correr mais do que você*!".Ditado caboclo: "*Mingau quente, se come pelas beiradas*".

Considere uma população distribuida uniformemente em uma região delimitada no plano descrita por uma função diferenciável $N(t)$ cuja mortalidade é causada unicamente por uma predação "*periférica*" da forma $p(N) = -\mu\sqrt{N}$, caracterizada matematicamente segundo a Metodologia Newtoniana pela equação diferencial: $\frac{dN}{dt} = -\mu\sqrt{N}$. (A justificativa da função de mortalidade na forma $p(N) = -\mu\sqrt{N}$ para predação "periférica" se deve ao fato de que um grupo uniformemente distribuido em uma região delimitada do plano é predado apenas na fronteira, cuja extensão tem medida da ordem da dimensão linear da região, enquanto que a área, que é proporcional à população, é da ordem do quadrado da medida linear e, portanto, a fronteira é da ordem de $N^{\frac{1}{2}}$. O formato da região pode ser considerado aproximadamente um disco(2D) ou uma esfera(3D) porque estas são as formas que apresentam menor extensão de fronteira para um mesmo conteudo populacional.(Por exemplo, sapos na beira da lagoa diante da ameaça de cobras, ou rebanho de ovelhas diante de lobos).

D**efinição**: Diz-se que uma Dinâmica de mortalidade apresenta o "**E*feito de Rebanho Egoista***"(*)quando a mortalidade especifica ("per capita" $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = f(N)$) **diminui** com o aumento do tamanho do grupo, em outros termos, um individuo se sente particularmente mais "protegido" em um grupo maior; por isso ele se junta aos *vencedores*.. (*)Termo introduzido por W.Hamilton no antológico artigo: -*The Selfish Herd*, J.Theor.Biol 1970).

6a-Argumente como o conceito de "*Efeito Rebanho Egoista*" pode ser interpretado em termos do Tempo Médio de Sobrevivencia.

6b-Mostre que não há "*Efeito Rebanho Egoista*" em uma população cuja mortalidade é unicamente Malthusiana.

6c-Descreva uma Dinâmica Adimensional de mortalidade por predação periférica para um grupo populacional que ocupa uma região delimitada do espaço físico **tridimensional**. (Por exemplo, um cardume de Sardinhas e Baleias) e verifique se esta dinâmica apresenta um "*Efeito Rebanho Egoista*" e é dizimada em tempo finito.

6d-Considere uma população com predação per capita tipo Holling II: $p(N) = \frac{A}{B+N}$. Adimensionalize a equação e verifique se ocorre um "Efeito Rebanho" nesta dinâmica.

6e-Discuta o comportamento individual das presas em termos de uma proteção por agrupamento com base na percepção de cardinalidade segundo a "L*ei de Weber-Fechne*r"

.

**COMENTÁRIO:**

A questão 6a foi pouco comentada exatamente pela deficiencia no entendimento do conceito de *Tempo Médio de Sobrevivencia*. Observe que a evolução favoreceu os individuos que exibiam o comportamento de refugio em grupos em detrimento dos que vagavam solitarios. Este é o argumento evolutivo e não o argumento de que "os individuos SABEM que estão mais protegidos em grupos". Ou seja o "aprendizado" aqui é evolutivo e não individual e intelectual! Em outros termos, a evolução atua sobre o Tempo Médio de Sobrevivencia que e ´um conceito populacional e não exatamente na "Taxa de Predação" (ou medo de predação) que é uma percepção cognitiva implausivel para ser atribuida a indivíduos intelectualmente simples.

*O exemplo do companheiro que se convida para uma caminhada até o ponto de ônibus com o objetivo de aumentar sua proteção contra assaltantes não se encaixa nesta classe de fenômenos. Neste caso urbano, o efeito, se houver, é modificar o comportamento do bandido que, ao contrário de predadores citados, são desencorajados pelo aumento de "presas".*

6c-Um grupo esférico tem uma quantidade de presas $N$ proporcional ao seu volume que é proporcional ao cubo de seu raio $r$ (isto é, $r \propto N^{\frac{1}{3}}$) enquanto que o numero de individuos na periferia da esfera é proporcional à sua superficie $S$. Como a superficie da esfera é proporcional ao quadrado do seu raio ( $S \propto r^2$) concluimos que a presas "disponiveis" são em numero proporcional a $N^{\frac{2}{3}}$). Portanto, é plausivel considerar que a taxa de predação neste contexto seja considerada proporcional a $N^{\frac{2}{3}}$, ou seja, $\frac{dN}{dt} = -\mu N^{\frac{2}{3}}$. Analisando esta equação verifica-se que tal população é dizimada em tempo finito $T_*$ que depende de $N_0$ e

$\mu$ . Como, dimensionalmente $[\mu]P^{\frac{2}{3}} = T^{-1}P$, temos, $[\mu] = T^{-1}P^{\frac{1}{3}}$ e, portanto, $T_* = c\mu^{-1}N_0^{\frac{1}{3}}$ , onde $c$ é um número matemático adimensional. Resolvendo a equação, $\frac{dt}{dN} = \frac{-1}{\mu}N^{-\frac{2}{3}}$, com $N(0) = N_0$ obtemos $N = \frac{\mu}{3}\left(\frac{3N_0^{\frac{1}{3}}}{\mu} - t\right)^3$, o que nos dá $c = 3$.

Observe que o comportamento de um individuo em busca de proteção de grupo é otimizado se ele percebe que sua inclusão modifica ´pouco a cardinalidade do grupo e, daí, a aplicação do Principio de Weber-Fechner na sua versão de "percepção de cardinalidade". Neste caso vale a´máxima de Woody Allen: "*Eu não me interesso em fazer parte de um clube que me aceite como sócio*".

**Questão 7**-

7a–**Utilizando o Método Operacional** explicado no texto, obtenha uma expressão explícita (em termos de integrais) da solução da Equação de (Euler-Malthus) Verhulst $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r(t) - \lambda(t)N$ , onde $r(t)$ e $\lambda(t)$ são funções reais positivas.

(Sugestão: Utilize a transformação linearizadora $m = \frac{1}{N}$ seguida pelo Método Operacional).

7b-Apresente um cenário biológico que indique a utilização desta equação como Modelo Matemático para uma Dinâmica Populacional.

7c-Considere uma população cujo tamanho $N(t)$ é regulado pelo chamado Modelo de Euler-Verhulst, $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r - \lambda N$ (isto é, com taxa de natalidade Malthusiana (per capita) $r$ e mortalidade (per capita) $\lambda N$ , $r, \lambda > 0$ constantes) que se inicia com uma população "**colonizadora**" de $N_0 = N(0)$ indivíduos. Considere a decrescente população $n(t)$ dos indivíduos colonizadores ($n(0) = N_0$) submetidos à taxa de mortalidade ambiente.(Os descendentes de colonizadores não são colonizadores mas fazem parte da população ambiente!). Obtenha uma expressão para a dinâmica desta população $n(t)$ de colonizadores e mostre que o tempo médio de sobrevivência neste caso, apresenta uma dependencia do tamanho da população inicial $N_0$, indicando um fenômeno interativo no processo de mortalidade.

**COMENTÁRIO**:

-O "Método do fator integrante", o "Método de variação das constantes de Lagrange" e outros truques matemáticos "ad hoc" resolvem esta equação elementar. Mas a resolução analitica desta equação simples não é o que se pede na questão. A insistencia é que fosse utilizado o Método Operacional (apresentado nas Notas e referenciado ao texto Bassanezi-Ferreira colocado à disposição no Moodle) motivada no fato de que ele é representante de uma ideia matemática muito mais abrangente (de álgebra de operadores) que pode ser utilizada em contextos muito mais gerais com significados interessantes. O conformismo/conservadorismo de muitos/as levou-os/(as) à utilização dos Métodos do Fator e de Lagrange inutilizando o objetivo da questão e eliminando a validade da solução. Atenção para o enunciado da questão nas proximas provas!!!!!!!!!!!

-Analogamente, a questão 7c não foi lida com atenção, em geral. Observe que a questão trata da mortalidade da população especifica de **colonizadores** $n(t)$ que vive entre a população gerada por eles e incluindo eles mesmos, $N(t)$. Portanto, o primeiro passo é descobrir a expressão de $N((t)$ resolvendo a equação de Malthus-Verhulst correspondente. Depois considera-se a mortalidade da população de colonizadores da forma: $\frac{dn}{dt} = -\lambda N(t)n$ ,

$n(0) = N_0$. É com relação a esta população que se deve analisar o Tempo Médio de Sobrevivencia: $\frac{1}{N_0}\int_0^\infty -t\frac{dn}{dt}dt$ e verificar se ele depende (e como) ou não do tamanho do grupo inicial $N_0$.

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

**Questão 8**-S*istemas Malthusianos com Acoplamento Sequencia*l ( $\ldots A_1 \overset{\mu_1}{\to} A_2 \overset{\mu_2}{\to} A_3 \ldots\ldots\ldots A_n \overset{\mu_n}{\to} A_{n+1}\ldots.$)

Considere um sistema de compartimentos sequencialmente acoplados com dinâmicas Malthusianas.

8a-Supondo uma sequencia com $N$ compartimentos,$1 \leq k \leq N$ com $\mu_N = 0$ , escreva o Modelo deste sistema na forma de Equações Diferenciais Ordinárias (acopladas) $\frac{dA}{dt} = DA = MA$ , e Operacional $(D - M)A = 0$ identificando a matriz **numérica** $M$, e a matriz **operacional** $m(D) = D - A$. ( $\frac{d}{dt} \equiv D$)

8b-Se $N = 3$ e $\mu_k = \mu > 0$ obtenha as expressões analiticas elementares para as soluções $A(t) = (A_1, A_2, A_3)^t = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$, resolvendo antes as equações desacopladas $\det m(D)x = 0$. (Refer. Bassanezi-Ferreira).

8c- Mostre que, em geral, $A_k(t) \to 0$ exponencialmente, como $t^2e^{-\mu t}$, isto é, $\lim_{t\to\infty} \frac{A_k(t)}{t^2e^{-\mu t}} = c \neq 0$.

8d-Determine o tempo médio (aritmético) que estas particulas/organismos permanecem no sistema de compartimentos se inicialmente todas elas estão no primeiro no primeiro compartimento $A_1(0) = 1, A_k(0) = 0, k > 1$.

8e-Determine a relação entre o tempo médio (aritmético) de permanência destas partículas/organismos no sistema em termos da sua distribuição inicial, $A_k(0) = A_{k0}$.

**COMENTÁRIO:**

Novamente o conceito original de tempo médio de sobreviviencia é essencial para a discussão da questão!!!

**Questão 9**- *Modelos Efetivos*

9a-Considere uma população de individuos não interativos formada por uma mistura de subpopulações Malthusianas (homogênas e não interativas) $A_k$ , sendo $T_k$ seu respectivo tempo médio (aritmético) de sobrevivencia. Considere agora a população total $A(t) = \sum A_k(t)$ que obviamente decresce. Mostre que o tempo médio (aritmético) de sobrevivência da população misturada $A$ é dado pela Média (aritmtética) ponderada de $T_k$.

9b-Considere agora uma descrição da dinâmica de uma população "Malthusianamente heterogênea" por um "Modelo Malthusiano Efetivo" , isto é, da forma $\frac{dA}{dt} = -\mu A$. Argumente sobre o fato de que neste caso a "melhor escolha" para o coeficiente $\mu$ do Modelo diferencial seria a **média harmônica** dos coeficientes $\mu_k$.

9c-Analise a mesma questão supondo que a população total é formada por $N$

subpopulações sequencialmente acopladas na forma ( $A_1 \overset{\mu_1}{\to} A_2 \overset{\mu_2}{\to} A_3 \ldots\ldots\ldots A_{N-1} \overset{\mu_{N-1}}{\to} A_N$), $\mu_N = 0$.

**COMENTÁRIO:**

Novamente o conceito original de tempo médio de sobreviviencia é essencial para a discussão da questão!!!

O Método de Fourier também é parte essencial da analise desta questão. A resolução do sistema de equação por truques e manipulações não faz parte da questão. Mais uma vez ATENÇÃO para o enunciado da questão e discuta a utilização do que está sendo solicitado. Uma resposta final numérico/analitica **não é** o objetivo da questão, mas sim a demonstração de conhecimento das **ideias e dos Métodos indicados** no seu enunciado.

**Questão 10-***Sistemas Malthusianos com Acoplamentos Multilaterais (Difusivos)*

Considere um sistema de $N$ compartimentos $\{A_k\}_{1 \le k \le N}$ conectados sequencialmente e simetricamente por dinâmicas Malthusianas bilaterais como no seguinte esquema

$$A_0 \underset{\mu_0}{\overset{\mu}{\leftrightarrows}} \mathrm{A}_1 \overset{\mu}{\leftrightarrow} \mathrm{A}_2 \overset{\mu}{\leftrightarrow} \mathrm{A}_3 \overset{\mu}{\leftrightarrow} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \overset{\mu}{\leftrightarrow} \mathrm{A}_{N-1} \overset{\mu}{\leftrightarrow} \mathrm{A}_N \overset{\mu_N}{\leftrightarrow} \mathrm{A}_{N+1}$$

10a-Mostre que um compartimento interior $A_k$ , $2 \le k \le N-1$, é regido pela seguinte equação: $\frac{dA_k}{dt} = -2\mu A_k + \mu A_{k-1} + \mu A_{k+1}$ .

10b-Obtenha a dinâmica do compartimento $A_N$ que está obstruído à direita (isto é, não perde nem ganha população de $A_{N+1}$). Diz-se também que é reflexivo, ou que $\mu_N = 0$.

10c-Obtenha a dinâmica do compartimento $A_1$ que somente perde indivíduos para o compartimento $A_0$ e não recebe nada do mesmo, isto é, $\mu_0 = 0$, Interprete este fato como a existência de um "deserto" em $A_0$.

10d-Escreva a dinâmica de todo o sistema acoplado na forma matricial $\frac{dA}{dt} = SA$, $A = (A_1, \ldots., A_N)^t$ e mostre que a matriz $S$ é simétrica e tridiagonal.

10d-Mostre que $n(t) = \sum_{k=1}^{k=N} A_k$ é monotonicamente decrescente, isto é, $\frac{dn}{dt} < 0$.

(Sugestão: $\frac{dn}{dt} = \frac{d}{dt}\langle A, 1\rangle = \left\langle \frac{dA}{dt}, 1\right\rangle = \langle SA, 1\rangle < 0$ ).

10f-Na verdade, mostre que $n(t)$ é exponencialmente decrescente, isto é, existe $\lambda > 0$ tal que $\lim_{t\to\infty} \frac{n(t)}{e^{-\lambda t}} = c > 0$.

10g-Utilize o Método de Fourier para mostrar que a solução geral do sistema acima pode ser escrito na forma: $A(t) = \sum_{k=1}^{k=N} c_k e^{\lambda_k t}$, verificando como determinar algebricamente os coeficientes $c_k$ e os parâmetros $\lambda_k$ e mostrando que $\lambda_k < 0$, $1 \le k \le N$.

10h-Argumente sobre a propriedade "homogeneizadora" desta dinâmica no sentido de que todos $A_k(t)$ convergem para uma média.

Obs: O Método de Fourier resolve completamente o Sistema de EDOs utilizando combinações lineares de soluções básicas $e^{\lambda t}v$ para o Sistema, onde $\lambda$ é autovalor da matriz simétrica $S$ e $v$ o seu autovetor correspondente, $Sv = \lambda v$. Lembre-se do Teorema Espectral para matrizes simétricas que garante a expansão de qualquer vetor $u$ na forma , $u = \sum a_k v^{(k)}$ onde $v^{(k)}$ é base ortonormal de autovetores de $S$.

**Questão 11-***Acoplamento Difusivo de Dinâmicas Malthusianas*

Considere um Grafo com 4 vértices,3 localizados nas quinas de um triângulo e 1 deles , $A_0$, no seu centro. Cada vértice $A_k$ das quinas é conectado bilateralmente aos seus dois adjacentes, $A_{k-1}$ e $A_{k+1}$ e todos, da mesma forma, ao centro $A_0$ por uma dinâmica Malthusiana com o mesmo parâmetro $\mu$ em todas as direções.

11a-Escreva a dinâmica do sistema $A = (A_1, A_2, A_3, A_0)^t$ na forma matricial, $\frac{dA}{dt} = SA$

11b-Mostre que $S$ é simétrica e tem autovalor nulo com autovetor $1 = (1, \ldots, 1)$.

11c-Mostre que $n(t) = \sum_{k=0}^{k=4} A_k(t)$ é constante e que $\lim_{t\to\infty} A(t) = n(0)(1, \ldots, 1)$.

**COMENTÁRIO:**

Sistemas de populações (compartimentais) acoplados em todas as direções (difusivos) e a aplicação do Método de Fourier serão abordados em provas seguintes.

**Questão 12-**

12a-Mostre que em uma dinâmica Malthusiana com parâmetros $\mu, \nu$ constantes a **operação funcional** "M*ultiplicação d*e $N(t)$ por $e^{-\mu T}$" produz um resultado (função) que representa " O número de sobreviventes dos individuos $N(t)$ após um intervalo de tempo $T$" . Inteprete analogamente as operações funcionais "*Multiplicação po*r $(1 - e^{-\mu T})$ " e "*Multiplicação po*r $e^{\nu T}$ ".

12b-Interprete probabilisticamente a operação sobre uma dinâmica Malthusiana $N(t)$ definida pela operação funcional resultante da multiplicação por $\frac{(1-e^{-\mu T})}{N(t)}$

12c-Considere uma população estruturada em duas faixas etárias, como no problema de Fibonacci, uma delas imatura, $A_1(t)$ com dinâmica contínua de mortalidade Malthusiana e outra reprodutiva, $A_2(t)$ , com dinâmica contínua de mortalidade e reprodutividade também Malthusiana.

A**rgumente *convincentemente*** sobre o significado da expressão de cada termo e parâmetro do Modelo Matemático para a Dinâmica desta população expresso segundo o sistema de Equações Diferenciais Ordinárias com retardamento:

$$\frac{dA_1(t)}{dt} = \nu A_2(t) - \mu_1 A_1(t) - e^{-\mu_1 T_0} \nu A_2(t - T_0)$$
$$\frac{dA_2(t)}{dt} = e^{-\mu_1 T_0} \nu A_2(t - T_0) - \mu_2 A_2(t)$$

12d-Suponha que $T_0$ seja "*muito pequeno*" comparado com as outras unidades intrínsecas de tempo ($\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\mu_k}$) do Modelo Malthusiano com retardamento e substitua a expressão $A_2(t - T_0)$ por sua aproximação de Taylor:

$A_2(t - T_0) = A_2(t) - T_0 A_2^{/}(t) + \frac{T_0^2}{2} A_2^{//}(t)$ obtendo um sistema de equações diferenciais ordinárias (não retardadas).

12e-Utilize o Método Operacional e reescreva o Sistema de EDO obtido anteriormente na forma matricial operacional $P(D)\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$ e obtenha expressões elementares gerais para as funções $A_j(t)$ soluções do Sistema.

**COMENTÁRIO**:

Praticamente ninguem abordou esta questão que, portanto, pode voltar a aparecer. O Método Operacional está descrito na referencia Bassanezi-Ferreira (Cópia disponivel no Moodle).

**QUESTÃO EXTRA** 1: *Hipótese(Gauss-Legendre ~1796)-Teorema(Hadamard-de la Vallé-Poussin 1896) sobre a densidade dos Números Primos*

A-Considere o Teorema de Distribuição Assintótica (da densidade da População) de Números Primos em $\mathbb{N}$, descrita pela função $\rho(n) = \frac{\pi(n)}{n}$, onde $\pi(n) = \#\{$N*úmeros primos* $p \leq n\}$ em termos de uma *linearização logarítmica assintótica* utilizando uma Tabela de Números Primos (encontrada, por exemplo, no valioso M.Abramowitz&I.Stegun-*Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* -online).(Sugestão: Como é fácil ver pela tabela que $\frac{1}{\rho(n)} = \frac{n}{\pi(n)} \to \infty$ mais "lentamente" do que $n \to \infty$ re-escale a variável "independente" $n$ "logaritmizando-a" e analise o gráfico de $\frac{1}{\rho(n)}$ em função de $\log n$ ).

B-Interprete a questão em termos do Princípio Sensorial ("*Lei*") de *Weber-Fechner*.

**COMENTÁRIO**:

Esta questão, como indica claramente o seu enunciado, é para ser tratada em termos dos conceitos desta disciplina (como seria natural!) ou seja, tratando os numeros primos como uma **população**, a sua descrição por uma **função densidade**, a utilização da **linearização logaritmica** e considerando o Principio de **Weber-Fechner**. A descrição matemática pura do assunto não tem qualquer interesse neste contexto, ainda que seja um tema fundamental da Matemática!

A exposição de tabelas explicitas de numeros primos é completamente dispensável e até indesejável para esta questão, apenas o grafico assintotica é de interesse.

Como esta questão é raramente (se) abordada nestes termos na literatura matemática, as exposições sobre o assunto na internet pouco ajudam pois os tratamentos usuais não interessam.