

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada

Prova 2 da disciplina Biomatemática I (MT 624)
Prof. Dr. Wilson Castro Ferreira Júnior

Estudante: Fábio H. Carvalho (RA 232926)

Questão 1 - A Psicologia da Matematização: Ockham(sec.13) & Kanizsa(sec.20), Galileo(sec.17) & Newton(sec.17-18)

1a-Descreva o "Efeito de Completamento (Interpolação) Visual"("Efeito Kanizsa") em poucas linhas e exemplifique-o com o famoso triângulo de Kanizsa e especialmente com a visualização de formas sugeridas por uma sequência de pontos.

1b-Argumente com base no "Efeito Kanizsa"sobre a motivação cognitiva da representação contínua para dinâmicas de grandes populações. Como se explica evolutivamente a preferência cognitiva da espécie humana por registrar informações discretas em termos (reduzidos) como "formas geométricas"?

1c-Descreva a Metodologia funcional de Galileo e justifique-a em termos do que foi discutido em 1a-b.

1d-Descreva o grande aperfeiçoamento da Metodologia de Galileo realizada por Newton. (Sugestão: Biblioteca de funções)

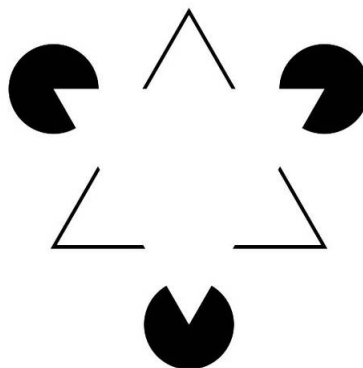
1e-Descreva o "Princípio de Parcimônia de Ockham"e discuta a sua conexão com a cognição humana, especialmente com o item 1b.

1f-Exemplifique os itens 1b-c com dados de mortalidade da COVID19 em 2020 para uma grande comunidade durante aproximadamente 1 ano.

Resolução:

1a - O "Efeito de Completamento (Interpolação) Visual"ou "Efeito Kanizsa"é o fenômeno visual que consiste tanto na observação de completamento entre os fragmentos visíveis de uma forma ou contorno, transformando um conjunto de pontos discretos e/ou traços separados em segmentos e/ou curvas, quanto na observação de contornos inexistentes que são estimulados ao olho humano a partir de elementos visuais estrategicamente posicionados. Este efeito é exemplificado pelo triângulo de Kanizsa, apresentado primeiramente pelo psicólogo italiano de origem eslava Gaetano Kanizsa que pode ser visto na figura abaixo.

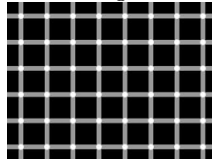
Figura 1: triângulo de Kanizsa.



Fonte: Weisstein, Eric W. "Kanizsa Triangle."From MathWorld–A Wolfram Web Resource.
<https://mathworld.wolfram.com/KanizsaTriangle.html>

Na Ilusão de Grade de Hermann, os pontos brancos no centro de cada quadrado parecem mudar de branco para cinza.

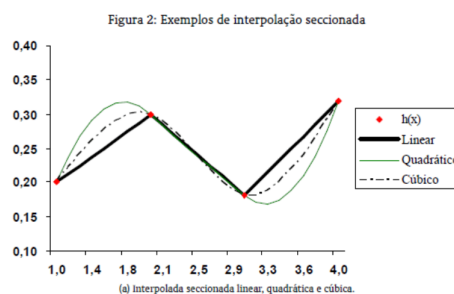
Figura 2: ilusão de grade de Hermann.



Fonte: <https://www.verywellmind.com/optical-illusions-4020333>

Na figura a seguir estão alguns casos simples de interpolação. Após, uma sequência de imagens que exploram o efeito de contraste de pontos pretos em fundo branco em geral para criar a sensação de movimento ou para transmitir a desconfortável sensação de enxergar o que não existe.

Figura 3: interpolação polinomial



Fonte:

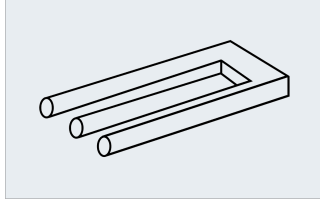
https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0034-71402009000400004

Figura 4: um dálmata entre seixos



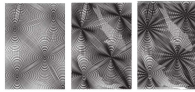
Fonte: <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rstb.2005.1662>

Figura 5: o tridente impossível



Fonte: <https://visme.co/blog/best-optical-illusions/>

Figura 6: peixes nadam



Fonte:

http://www.iit.unal.edu.co/revista-actio/revistas/actio1-2017/actio1-2017_article9.html

Figura 7: a chuva



Fonte:

http://www.iit.unal.edu.co/revista-actio/revistas/actio1-2017/actio1-2017_article9.html

1b O Efeito Kanizsa e outros fenômenos similares nos dão indícios de que os mecanismos cerebrais relacionados à visão tem uma tendência a identificar padrões mais presentes e "corrigir" o que é observado de acordo com esses padrões. Assim, por exemplo, ao apresentar em um gráfico um conjunto de pontos discretos é possível que observadores distintos tirem conclusões distintas daquele conjunto de pontos, de acordo com os padrões que cada um deles está mais acostumado a enxergar. Ao utilizar-se de formas geométricas (barras, setores circulares, etc) além da possibilidade de haver um resumo conciso de (em algumas vezes) muitas informações discretas ainda há a diminuição de chance de dispersão das informações (ou ainda de uma "falsificação" produzida pela mente) em relação ao caso que a apresentação pudesse se dar através de um conjunto de pontos, por exemplo.

1c O Método de Galileu consiste, de modo conciso, em três princípios básicos.

A observação, princípio através do qual, com o auxílio de um modelo aprimorado de telescópio, passou a fazer anotações a respeito dos movimentos dos corpos celestes, por exemplo. Evidentemente não foi o primeiro a fazê-lo, mas após uma longa hegemonia do pensamento aristotélico nas ciências naturais, em geral, e na astronomia, em particular, as observação de Galileu geraram notável avanço (e quase incontornáveis polêmica) levando-o a descobertas tais como das montanhas e crateras da lua, das "luas" de Júpiter (em direção oposta ao modelo proposto por Ptolomeu), das manchas solares, por exemplo.

A experimentação, princípio através do qual estudou o movimento de corpos em queda livre e de esferas rolando em planos inclinados, por exemplo, utilizado até os dias atuais nas mais diversas áreas científicas.

A "matematização", isto é, a busca por equações e modelos matemáticos que melhor interpretem os fenômenos observados ou experimentados.

1d O Método de Newton inverte a ordem (nem sempre implícita) do desenvolvimento da ciência por Galileu, colocando muitas vezes a "matematização" antes da observação/experimentação. Evidentemente há exceções, como nos trabalhos a respeito da natureza da luz e dos fenômenos de reflexão e refração, muitos pesquisadores da História das Ciências relatam provas e vestígios de profundos experimentos, mas mesmo nesses trabalhos se verifica a profunda busca por equações. Por outro lado, ao reunir e aperfeiçoar muitos dos trabalhos de seus antecessores, além do pioneirismo em várias outras descobertas, no que seria um dos trabalhos científicos de maior impacto em todos os tempos, o seu "Principia Mathematica", Newton utilizou com maestria a Análise Matemática mas sem deixar de lado o uso do método indutivo, o lançamento e verificação de hipóteses e a experimentação.

1e Em síntese, o Princípio da Parcimônia de Ockham estabelece que se há duas hipóteses válidas para um mesmo fenômeno e se não há meio de diferenciar uma da outra então a que vale é a mais simples. Assim, o fato da visão humana às vezes preencher espaços, modificar tonalidades e cores e/ou completar conjunto discretos formando curvas ou regiões contínuas se coloca em conformidade com o Princípio de Ockham.

1f Na lamentável epidemia da COVID 19 que se abateu sobre o planeta em 2020, e continua se alastrando e levando vidas em 2021, os dados de mortes diárias apresentados em várias plataformas noticiosas ou científicas são apresentados ao público leigo, na grande maioria das vezes através de curvas contínuas. Abaixo os dados recolhidos no dia 03 de janeiro, as 10h05, na plataforma Google, relativos às mortes diárias ocorridas no Brasil no período entre 13 de março de 2020 e 02 de janeiro de 2021.

Está visível no gráfico a informação de que no último dia do período perdemos (pelo menos, já que é provável que exista subnotificação) 314 grave crise

Figura 8: mortes por COVID 19 no Brasil.



Fonte: JHU CSSE COVID-19 Data

vidas por conta da grave crise respiratória que se alastra pelo país. Já no primeiro dia do ano de 2021 foram 462 mortes. No entanto, há uma curva contínua "entre os pontos $(1/1/2021, 462)$ e $(2/1/2021, 314)$ " motivada exatamente pela possibilidade de confusão visual caso a informação fosse prestada a partir de pontos isolados.

Questão 3 - Linearização Logarítmica Assintótica

-Definições:

1-Diz-se que um Modelo Populacional, $P : N \rightarrow C$, é **Malthusiano** se para algum A e γ , se tem $\frac{P(k)}{Ae^{\gamma k}} = 1$ para todo k , ou, equivalentemente, se $P(k) = Ae^{\gamma k}$.

2-Diz-se que um Modelo Populacional é **Assintoticamente Malthusiano** se para algum A e γ , se tem $\frac{P(k)}{Ae^{\gamma k}} \rightarrow 1$, para $k \rightarrow \infty$, ou, equivalentemente, $P(k) = Ae^{\gamma k}(1 + \epsilon(k))$ para $\epsilon(k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

3-Diz-se que uma função $P : N \rightarrow C$, é Assintoticamente Linearizada na escala logarítmica se $\lim_{k \rightarrow \infty} \{\log |P(k)| - (\alpha + \gamma k)\} = 0$ para algum α, γ .

4-Diz-se que uma Relação funcional $V = f(X)$ pode ser **Linearizada** (exatamente) se existirem funções inversíveis $v = \psi(V)$ e $x = \varphi(X)$ de tal forma que $v = ax + b$ em algum domínio.

5-Diz-se que uma Relação funcional $v = f(x)$ pode ser **Linearizada assintótica e localmente** nas vizinhanças de $x = 0$ se $v = a + bx + o(x)$ para algum a, b . (Obs-Segundo Leibniz, uma função $h(x)$ é dita um infinitésimo de ordem menor do que x , e escreve-se, $o(x)$ se for possível representá-la na forma $h(x) = x\epsilon(x)$, onde $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$).

3a Considere uma Tabela de dados demográficos representada pela função $P : N \rightarrow C$, cuja população quando medida na escala logarítmica na forma $p(k) = \ln P(k)$, exibe um gráfico aproximadamente linear (isto é, $p(k) = (\alpha + \beta k) + \varepsilon$, com $\varepsilon \approx 0$ para alguma faixa de valores de k). Mostre como esta Dinâmica Populacional pode ser considerada aproximadamente Malthusiana nesta faixa de valores de k .

3b Descreva o Método Numérico de Gauss ("mínimos quadrados") comumente utilizado para determinar a reta que "melhor aproxima" uma Tabela de dados e descreva como este Método pode ser utilizado para a formulação de um Modelo Malthusiano.

3c Considere uma População medida na escala logarítmica $p(k) = \ln P(k)$. Mostre que uma aproximação linear assintótica na escala logarítmica de uma população (isto é, $\ln P(k) - (\gamma k + \beta) \rightarrow 0$, para $k \rightarrow \infty$) não implica em um Modelo Malthusiano, mas apenas um Modelo Assintoticamente Malthusiano. (Sugestão: veja o próximo exercício).

3d Mostre quando uma população $P(k)$ descrita pelo Modelo de Fibonacci é Malthusiana e quando ela é apenas assintoticamente Malthusiana. (Sugestão: Analise as possíveis soluções a depender das condições iniciais).

3e Considere uma função "racional bilinear" $V = \frac{AX}{CX + D}$. Mostre que é possível "linearizar exatamente" a relação entre as variáveis V e X tomando transformações $v = \frac{1}{V}$ e $x = \frac{1}{X}$, de tal forma que entre as "novas variáveis" resulte uma relação funcional de primeiro grau ($v = a + bx$) ("linear").

3f Mostre que qualquer função diferenciável nas vizinhanças da origem pode ser localmente linearizada e vice-versa.

Resolução:

3a Consideremos uma população como no enunciado do problema, com comportamento aproximadamente linear na escala logarítmica. Assim temos $p(k) = \ln P(k) = \alpha + \beta k + \epsilon$ o que implica $P(k) = e^\alpha e^{\beta k} e^\epsilon$. Portanto, se fizermos $\beta = \gamma$ e $e^\alpha = A$ segue imediatamente que $\frac{P(k)}{Ae^{\gamma k}} = \frac{e^\alpha e^{\beta k} e^\epsilon}{e^\alpha e^{\beta k}} = e^\epsilon$. Como $e^\epsilon = 1 + \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2!} + \frac{\epsilon^3}{3!} + \dots$ podemos escrever $e^\epsilon = 1 + o(\epsilon)$ e, para a faixa de valores k para os quais $\epsilon \approx 0$, podemos afirmar que $\frac{P(k)}{Ae^{\gamma k}} = 1$ e que, nessa faixa de valores de k , o modelo populacional é aproximadamente Malthusiano.

3b Consideremos fixado em R^2 o conjunto de n pontos fixados $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$. Encontrar uma função F que "melhor se ajusta" ao conjunto de pontos fixado significa minimizar o erro cometido dado pela função $\phi = \sum_{i=1}^n |y_i - F(x_i)|$. Podemos considerar $F(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_j f_j(x)$ em que as funções $f_1(x), f_2(x), \dots, f_j(x)$, são conhecidas a priori (por exemplo, mas não necessariamente, as funções $1, x, x^2, \dots, x^j$ resultariam em uma aproximação polinomial). Para contornar o problema da (não) diferenciabilidade da função modular no domínio necessário, utiliza-se o Método dos Mínimos Quadrados que consiste em minimizar a função $\Phi = \sum_{i=1}^n [y_i - F(x_i)]^2$, cujas variáveis são a_1, \dots, a_j , e Φ é dada pela soma dos quadrados dos erros cometidos em cada ponto do "melhor ajuste". Para obter os pontos críticos de Φ a fim de encontrar seus mínimos precisamos das raízes de suas derivadas parciais de primeira ordem nas variáveis a_1, \dots, a_j . Mas, para todo $k \in \{1, 2, \dots, j\}$ temos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_k} = \sum_{i=1}^n -2f_k(x_i) [y_i - a_1 f_1(x_i) - a_2 f_2(x_i) - \dots - a_n f_j(x_i)] = 0.$$

Então, temos um sistema linear cuja k -ésima linha, para cada $k = 1, 2, \dots, j$, é representada por

$$\sum_{i=1}^n f_k(x_i) [a_1 f_1(x_i) + a_2 f_2(x_i) + \dots + a_n f_j(x_i)] = \sum_{i=1}^n f_k(x_i) y_i.$$

Ao fazermos $j = 2, f_1 = 1$ e $f_2 = x$, por exemplo, obtemos o sistema linear

$$\left\{ \begin{aligned} m a_1 + \sum_{i=1}^n x_i a_2 &= \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i a_1 + \sum_{i=1}^n x_i^2 a_2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{aligned} \right.$$

No caso particular em que $\ln P(k) = \ln A + \beta k$, isto é, $P(k) = Ae^{\beta k}$ é o modelo Malthusiano, basta fazer $a_1 = \ln A$ e $a_2 = \beta$.

3c Temos que o Modelo de população $P(k)$ é Malthusiano quando $\frac{P(k)}{Ae^{\gamma k}} = 1$ para todo k , e, por outro lado, a aproximação linear do modelo é assintótica na escala logarítmica $\lim_{k \rightarrow +\infty} [\ln P(k) - (\gamma k + \beta)] = 0$. Assim, uma população cujo modelo é dado por $\bar{P}(k) = e^{\beta} e^{\gamma k} (1 + \frac{1}{k^n})$, em que n é um número natural arbitrário, tem aproximação linear assintótica na escala logarítmica sem necessariamente ser um modelo Malthusiano.

Por outro lado, se supomos que o modelo satisfaz a equação $P(k) = Ae^{\gamma k} (1 + \varepsilon(k))$, com $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(k) = 0$, ou seja, que ele é assintoticamente Malthusiano, então fazendo $\beta = \ln A$, segue imediatamente que $\lim_{k \rightarrow \infty} [\ln P(k) - (\gamma k + \beta)] = \lim_{k \rightarrow \infty} [\ln(A) + \gamma k + \ln(1 + \varepsilon(k)) - (\gamma k + \beta)] = 0$, o que significa que toda aproximação linear assintótica na escala logarítmica é um modelo assintoticamente Malthusiano.

3d Consideremos o modelo dado por $P(k) = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$ onde c_1 e c_2 são constantes. Podemos ainda escrever, supondo $c_1 \neq 0$,

$$\begin{aligned} P(k) &= c_1 e^{k \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} + c_2 (-1)^k e^{k \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} \\ &= c_1 e^{k \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} \left[1 + (-1)^k \frac{c_2}{c_1} \frac{e^{k \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}}{e^{k \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}} \right] \\ &= c_1 e^{k \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} \left[1 + (-1)^k \frac{c_2}{c_1} e^{-k \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\right)} \right] \end{aligned}$$

Portanto, para $c_1 \neq 0$, o modelo de Fibonacci é Malthusiano se, e somente se, $c_2 = 0$. Além disso, fazendo $\epsilon(k) = (-1)^k e^{-k \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\right)}$, temos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon(k) = 0$ o que significa que o Modelo de Fibonacci é assintoticamente Malthusiano.

3e Fazendo $\nu = \frac{1}{V}$ e $x = \frac{1}{X}$ na equação $V(X) = \frac{AX}{CX + D}$, segue, fazendo $a = \frac{C}{A}$ e $b = \frac{D}{A}$,

$$\nu = \frac{1}{V} = \frac{C \frac{1}{x} + D}{A \frac{1}{x}} = \frac{C + Dx}{A} = \frac{C}{A} + \frac{D}{A} x = a + bx.$$

3f Se f é diferenciável nas vizinhanças de $x=0$, então $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$
ou, equivalentemente, $f(x) - f(0) = f'(0)x + \epsilon$, com $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{x} = 0$. Portanto,
podemos usar a linearização definida pela derivada primeira, $f(x) \approx f(0) + f'(0)x$, para as imagens de pontos x próximos da origem.

Questão 4 - Tempo Médio (Aritmético) de Sobrevivência

4a Defina Média Aritmética Ponderada $M_A(a_1, \dots, a_N)$ para uma sequência de dados numéricos $a_k > 0$. Discuta a razão de se dizer que uma Média Aritmética A é uma única informação numérica populacional que substitui (reduzindo) um conjunto (Tabela) de várias informações numéricas individuais, a_k . Argumente com base nesta distinção sobre a (usual) insensatez de se afirmar que um casal brasileiro tem em média, por exemplo, 1,44 filhos.

4b Segundo um Teorema de Kolmogorov-Nagumo(1933) todas as "Médias" sobre uma sequência de dados numéricos $a_k > 0$ (conceito que pode ser facilmente definido por algumas poucas propriedades bem características) são da forma $M_\phi(a_1, \dots, a_N) = \phi^{-1}(M_A(\phi(a_1), \dots, \phi(a_N)))$ onde ϕ é uma função real estritamente convexa inversível e M_A é uma Média Aritmética. Mostre a veracidade desta afirmação com respeito às médias, Aritmética, Harmônica, Geométrica e Quadrática.

4c Interprete o Método de Quadrados Mínimos de Gauss em termos de uma Média Quadrática.

4d Dada uma sequência de números positivos $a = \{a_k\}$ obtenha, argumentando geometricamente, uma relação de ordem entre suas Médias Aritmética, $M_A(a)$, Harmônica, $M_h(a)$, Geométrica, $M_g(a)$, e Quadrática, $M_2(a)$. (Utilize uma sequência de apenas dois números para seus argumentos.)

4e Mostre que, a depender da escolha da média de Kolmogorov-Nagumo, pode-se dizer que a média de filhos de um casal brasileiro pode ser qualquer número real entre $m = \min\{a_k\}$ e $M = \max\{a_k\}$ onde a_k = "Número de casais com k filhos".

Resolução:

4a A Média Aritmética Ponderada de uma lista de N números reais positivos a_1, a_2, \dots, a_N definida como $M_A(a_1, \dots, a_N) = \frac{p_1 a_1 + \dots + p_N a_N}{p_1 + \dots + p_N}$, ou, de maneira equivalente, como $M_A(a_1, \dots, a_N) = s_1 a_1 + \dots + s_N a_N$, com $s_1 + \dots + s_N = 1$. No caso particular em que $p_1 = \dots = p_N = 1$, a média é chamada Média Aritmética Simples. É fácil verificar que se $a = \min\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ e $A = \max\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$, então $a \leq M_A(a_1, \dots, a_N) \leq A$. A Média Aritmética fornece, portanto, um valor intermediário único, entre o mínimo e o máximo do conjunto, que é usado para representar o conjunto e, como qualquer representação tem suas vantagens (a simplicidade de trocar uma lista de valores pela sua média, por exemplo) e desvantagens (especialmente a falta de precisão ao concentrar toda a lista em um único representante). No caso descrito no enunciado em relação ao fato de que um casal brasileiro tem em média 1,44 filhos (quase $\sqrt{2}$ filhos) além da incorreção óbvia de considerar a possibilidade de a quantidade de filhos (um número natural, portanto) ser 1,44, temos a imprecisão gerada pela análise equivocada do resultado da média.

4b Segundo o Teorema de Kolmogorov-Nagumo, todas as médias relativas a uma lista de N números reais positivos a_1, a_2, \dots, a_N são da forma

$$M_\phi(a_1, \dots, a_N) = \phi^{-1}(M_A(\phi(a_1), \dots, \phi(a_N))),$$

em que ϕ uma função contínua e estritamente monótona.

Primeiramente, para o caso da Média Aritmética Ponderada $M_A(a_1, \dots, a_N) = s_1 a_1 + \dots + s_N a_N$, com $s_1 + \dots + s_N = 1$, podemos tomar $\phi(x) = \phi^{-1}(x) = x$, a função identidade e, neste caso,

$$\begin{aligned} M_A(a_1, \dots, a_N) &= \sum_{j=1}^N s_j a_j \\ &= \phi^{-1} \left(\sum_{j=1}^N s_j a_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^N s_j \phi(a_j) \\ &= M_\phi(a_1, \dots, a_N). \end{aligned}$$

Para o caso da Média Geométrica de a_1, \dots, a_N dada por $M_G = \sqrt[N]{a_1 \cdots a_N}$ basta considerarmos as funções $\phi(x) = \ln(x)$ e $\phi^{-1}(x) = e^x$. Neste caso,

$$\begin{aligned} M_G &= \sqrt[N]{a_1 \cdots a_N} \\ &= e^{\frac{1}{N} \ln \left(\prod_{j=1}^N a_j \right)} \\ &= e^{\left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \ln(a_j) \right)} \\ &= e^{M_A(\ln(a_1), \dots, \ln(a_N))} \\ &= M_\phi(a_1, \dots, a_N). \end{aligned}$$

Agora para a Média Harmônica, $M_H(a_1, \dots, a_N) = \frac{N}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{a_i}}$ podemos to-

mar $\phi(x) = \phi^{-1}(x) = \frac{1}{x}$, obtendo,

$$\begin{aligned} M_H(a_1, \dots, a_N) &= \frac{N}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{a_i}} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{a_i} \right)} \\ &= \phi^{-1} \left(M_A(\phi(a_1), \dots, \phi(a_N)) \right). \end{aligned}$$

Finalmente, para a média quadrática $M_Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (a_i)^2}{N}}$ tomamos $\phi(x) = x^2$, e $\phi^{-1}(x) = \sqrt{x}$, e, daí,

$$\begin{aligned} M_Q &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (a_i)^2}{N}} \\ &= \phi^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^N \phi(a_i)}{N}\right). \end{aligned}$$

4c Para a aplicação do Método dos Mínimos Quadrados devemos encontrar a_1, \dots, a_N que minimizem $\Phi = \sum_{i=1}^n [y_i - (a_1 f_1(x_i) + a_2 f_2(x_i) + \dots + a_N f_j(x_i))]^2$, e a Média Quadrática $M_Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [y_i - (a_1 f_1(x_i) + a_2 f_2(x_i) + \dots + a_N f_j(x_i))]^2}{n}}$ é tal que $n^2 M_Q = \Phi$ é fácil ver que os mínimos da função Φ ocorrem nos mesmos pontos onde a Média Quadrática é minimizada.

4d Primeiramente observemos que

$$\sum_{i,j=1}^n (a_i - a_j)^2 = (n-1) \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \geq 0$$

e, logo,

$$\begin{aligned} (n-1) \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n a_i^2 &\geq 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j + \sum_{i=1}^n a_i^2 \\ n \sum_{i=1}^n a_i^2 &\geq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2 &\geq \left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \right)^2 \\ \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2} &\geq \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}. \end{aligned} \tag{1}$$

e temos que a Média Quadrática (M_Q) é maior ou igual a Média Aritmética Simples (M_A).

Para mostrar agora que a Média Geométrica é maior ou igual que a Média Aritmética Simples nos apoiaremos na seguinte propriedade, se x_1, x_2, \dots, x_n são inteiros positivos tais que $x_1 \cdot x_2 \cdots x_{n-1} \cdot x_n = 1$ então $x_1 + \dots + x_n \geq n$. De fato, a propriedade é evidente para $n = 1$ e se a supomos verdadeira para algum inteiro $n \geq 1$ e tomando $x_1 \cdots x_n \cdot x_{n+1} = 1$ então ou $x_1 = x_2 = \dots = x_{n+1} = 1$ e, nesse caso a soma é exatamente $n+1$ ou existem $i, j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ tais que $0 < x_i < 1$ e $x_j > 1$. Sem perda de generalidade, consideraremos $i = n$ e $j = n+1$. Neste último caso temos $0 < (1 - x_n)(x_{n+1} - 1) = x_{n+1} - x_n - x_n x_{n+1} - 1$ e, logo, $x_{n+1} - x_n - x_n x_{n+1} > 1$ e, somando n a ambos os membros obtemos $n - x_n x_{n+1} > n + 1 - x_{n+1} - x_n$. Para finalizar, observemos que o produto $x_1 \cdot x_2 \cdots x_{n-1} \cdot (x_n x_{n+1}) = 1$ satisfaz a hipótese de indução o que implica $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + (x_n x_{n+1}) \geq n$ e ainda $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} \geq n - (x_n x_{n+1})$. Agora, somando $x_n + x_{n+1}$ a ambos os membros da desigualdade segue:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n + x_{n+1} &\geq n - (x_n x_{n+1}) + x_n + x_{n+1} \\ &\geq n + 1 - x_{n+1} - x_n + x_n + x_{n+1} \\ &\geq n + 1. \end{aligned}$$

Sejam agora a_1, a_2, \dots, a_n uma lista de números inteiros positivos e considere sua média geométrica $M_G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$. Temos $\frac{a_1}{M_G} \cdots \frac{a_n}{M_G} = 1$ e, por conta da desigualdade anterior,

$$\frac{a_1}{M_G} + \frac{a_2}{M_G} + \dots + \frac{a_n}{M_G} \geq n \iff \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq M_G.$$

Finalmente, da última desigualdade segue

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n} &\geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \frac{1}{a_2} \cdots \frac{1}{a_n}} \iff \\ &\leq \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} \end{aligned}$$

Portanto, temos as desigualdades $M_Q \geq M_A \geq M_G \geq M_H$.

Para $n = 2$ uma interpretação geométrica da desigualdade das médias é dada a seguir. Denotaremos por PQ o segmento geométrico de extremidades nos pontos P e Q e por $|PQ|$ denotaremos a medida desse mesmo segmento.

Sejam $x_1 \geq x_2$ dois números reais positivos e considere o segmento AC de medida $x_1 + x_2$. Se O é o centro da circunferência de diâmetro AC e é o pé da perpendicular baixada desde o ponto F então $|OF| = \frac{x_1 + x_2}{2} = M_A$ é o raio r da circunferência. Seja B o ponto no diâmetro AC tal que $|AB| = x_1$ e $|BC| = x_2$. O triângulo OBF tem um ângulo reto em O e sua hipotenusa BF é tal que

$$|BF|^2 = r^2 + (r - x_2)^2$$

$$\begin{aligned}
&= 2r(r - x_2) + x_2^2 \\
&= (x_1 + x_2) \frac{x_1 - x_2}{2} + x_2^2 \\
&= \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto, BF é uma representação geométrica da média quadrática entre x_1 e x_2 e, por ser a hipotenusa do triângulo retângulo do qual OF , que representa a média aritmética, é um dos catetos, temos a média quadrática maior ou igual que a média aritmética (valendo a igualdade se, e só se, $x_1 = x_2$).

Suponha agora que B seja o pé da perpendicular baixada desde o ponto D na circunferência. O triângulo OBD é retângulo em B e temos $|OD|^2 = r^2 = |BD|^2 + (r - x_2)^2$ e, logo

$$\begin{aligned}
|BD|^2 &= r^2 - (r - x_2)^2 \\
&= 2rx_2 - x_2^2 \\
&= (x_1 + x_2)x_2 - x_2^2 \\
&= x_1x_2.
\end{aligned}$$

Portanto, BD é uma representação geométrica da média geométrica entre x_1 e x_2 e, por ser um cateto do triângulo retângulo do qual OD , que representa a média aritmética, é a hipotenusa, temos a média aritmética maior ou igual que a média geométrica (valendo a igualdade se, e só se, $x_1 = x_2$).

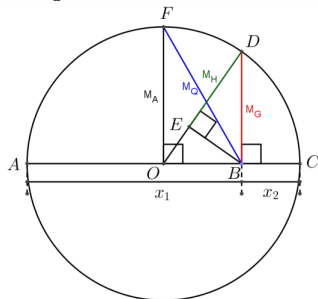
Considere agora o ponto E pé da perpendicular baixada desde o ponto B até o segmento OD . Dos triângulos retângulos OEB e BED segue $\begin{cases} |OB|^2 = |OE|^2 + |BE|^2 \\ |BD|^2 = |ED|^2 + |BE|^2 \end{cases}$.

Logo,

$$\begin{aligned}
|ED|^2 &= |BD|^2 + |OE|^2 - |OB|^2 \\
&= x_1x_2 + (r - |ED|)^2 - (r - x_2)^2 \\
&= \frac{x_1x_2 + (x_1 + x_2)x_2 - x_2^2}{x_1 + x_2} \\
&= \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} \\
&= \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}
\end{aligned} \tag{2}$$

Para visualização das construções geométricas aqui apresentadas destacamos a figura a seguir.

Figura 9: desigualdades das médias para $n = 2$.



Fonte: Couto, Robson F. de Aguiar. "Desigualdade das médias: uma ferramenta para resolução de problemas de otimização". Dissertação do PROFMAT. Universidade Federal do Vale do São Francisco, 2019.

4e Vamos considerar, como no item 4a, a Média Aritmética Ponderada dos N números inteiros positivos a_0, a_1, \dots, a_{N-1} , em que a_k representa a quantidade de casais com k filhos, $M_A(a_0, \dots, a_{N-1}) = s_0 a_0 + s_1 a_1 + \dots + s_{N-1} a_{N-1}$, com $s_0 + s_1 + \dots + s_{N-1} = 1$. Sejam $a = \min\{a_0, a_1, \dots, a_{N-1}\}$ e $A = \max\{a_0, a_1, \dots, a_{N-1}\}$, queremos mostrar que se x é um número tal que $a \leq x \leq A$ então existe uma escolha conveniente dos pesos s_0, \dots, s_{N-1} . O caso $N = 1$ é trivial. Para $N = 2$ podemos considerar a_0 e a_1 o máximo e o mínimo, respectivamente, e de $s_1 = (1 - s_0)$ segue que a equação

$$M_A(a_0, a_1) = s_0 a_0 + s_1 a_1 = s_0 a_0 + (1 - s_0) a_1$$

pode ser interpretada como a equação do segmento de reta sobre o eixo das abscissas que liga a_0 a a_1 e, à medida que s_0 assume valores entre 0 e 1 (inclusive estes dois) $M_A(a_0, a_1)$ assume todos os valores entre a_0 e a_1 (inclusive estes dois). Supondo agora que para algum $n \geq 2$ e para todo $N \leq n$ a média $M_A(a_0, \dots, a_{N-1})$ assume todos os valores entre a e A sempre que $s_0 + s_1 + \dots + s_{N-1} = 1$ observemos que a média para os elementos a_0, \dots, a_{N-1}, a_N é da forma $M_A(a_0, \dots, a_{N-1}, a_N) = \tilde{s}_0 a_0 + \tilde{s}_1 a_1 + \dots + \tilde{s}_{N-1} a_{N-1} + \tilde{s}_N a_N$, com $\tilde{s}_0 + \tilde{s}_1 + \dots + \tilde{s}_{N-1} + \tilde{s}_N = 1$ e queremos mostrar que $M_A(a_0, \dots, a_{N-1}, a_N)$ assume todos os valores x entre o mínimo e o máximo da lista a_0, \dots, a_{N-1}, a_N . Podemos proceder do seguinte modo, consideremos $x = s_0 y + (1 - s_0) a_N$, em que y é uma média entre a_0, \dots, a_{N-1} . Se $a_N \in [a, A]$ nada temos a mostrar; se no entanto $z \notin [a, A]$, *por exemplo*, $z \geq A$ então, existe $s_0 \in [0, 1]$ tal que x assume qualquer valor entre y e a_N e, como pela Hipótese de Indução, y pode assumir qualquer valor no intervalo $[a, A]$ então x assume qualquer valor no intervalo $a = \min\{a_0, a_1, \dots, a_{N-1}, a_N\}$ e $a_N = \max\{a_0, a_1, \dots, a_{N-1}, a_N\}$. O caso em que $a_N \leq a$ é análogo.

Questão 5 - Tempo Médio (Aritmético) de Sobrevivência

Definição: Dado um Modelo populacional especificamente de mortalidade $N(t)$ tal que $\frac{dN}{dt} < 0$ e

$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 0$, diz-se que o valor (finito ou infinito) da integral $\left(\frac{1}{N_0} \int_0^\infty -t \frac{dN}{dt} dt \right)$ é denominado Tempo

Médio (Aritmético) de Sobrevivência da População.

5a- Argumente sobre a motivação para que a expressão

$\left(\frac{1}{N_0} \int_0^\infty -t \frac{dN}{dt} dt = \frac{1}{N_0} \int_0^{N_0} t dN \right)$, que se refere a uma dinâmica $N(t)$ decrescente de uma (Grande) população (sem natalidade e migração) inicialmente com $N(0) = N_0$ indivíduos, possa ser interpretada como o tempo médio (aritmético) de sobrevivência desta população.

5b- Calcule o Tempo Médio (Aritmético) de sobrevivência de uma população Malthusiana (isto é, descrita segundo o Modelo Newtoniano

$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = -\mu$, $N(0) = N_0$) e mostre que este valor independe de N_0 . Discuta o significado biológico deste resultado.

5c- Calcule o tempo médio (aritmético) de sobrevivência de uma população cuja dinâmica de Mortalidade é descrita por uma função quase-polinomial

$N(t) = q(t)e^{-\mu t}$, onde $q(t) = N_0 + \sum_{k=1}^m a_k t^k$ é um polinômio e $\mu > 0$. (Suges-

tão: Calcule explicitamente as integrais $I(n) = \int_0^\infty t^n e^{-\mu t} dt$ recursivamente em n e utilizando integração por partes)

5d- O mesmo para $N(t) = \frac{N_0}{t+1}$.

Resolução:

5a Observemos primeiramente que fazendo a mudança de variáveis $t = -t$ em

$\frac{1}{N_0} \int_0^\infty -t \frac{dN}{dt} dt$ obtemos $\frac{1}{N_0} \int_0^{N_0} t dN$ que é no Cálculo Integral, por definição, a média da função $t = t(N)$ no intervalo $[0, N_0]$ e, portanto, a interpretação de que a integral $\frac{1}{N_0} \int_0^\infty -t \frac{dN}{dt} dt = \frac{1}{N_0} \int_0^{N_0} t dN$, com a dinâmica da população N decrescente em relação ao tempo t é satisfatória.

5b De $\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = -\mu$, $N(0) = N_0$ segue imediatamente

$$\begin{aligned} \ln N &= -\mu t + k \iff \\ N(t) &= N_0 e^{-\mu t}. \end{aligned}$$

Por outro lado, integrando por partes

$$\frac{1}{N_0} \int_0^\infty -t \frac{dN}{dt}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N_0} \int_0^\infty -t \frac{dN}{dt} &= \frac{1}{N_0} \left[\lim_{B \rightarrow \infty} -tN(t)|_0^B - \int_0^\infty N(t)(-dt) \right] \\
&= \frac{1}{N_0} \left[\lim_{B \rightarrow \infty} -tN_0 e^{-\mu t}|_0^B - \int_0^\infty N_0 e^{-\mu t}(-dt) \right] \\
&= \lim_{B \rightarrow \infty} -\frac{e^{-\mu t}}{\mu} \Big|_0^B \\
&= \frac{1}{\mu}.
\end{aligned}$$

Portanto, o Tempo Médio (Aritmético) de sobrevivência de uma população Malthusiana, cuja taxa de sobrevivência decai proporcionalmente ao tamanho da população na forma $\frac{dN}{dt} = -\mu N$, não depende do tamanho da população inicial $N(0) = N_0$. De fato, tal taxa é a mesma (constante) para populações grandes ou pequenas, desde que tenham comparativamente o mesmo coeficiente de decaimento $-\mu$, sendo igual a $\frac{1}{\mu}$. Uma explicação possível para esse fenômeno é a escassez de alimento e água, além da competição entre espécies, as contaminações virais facilmente transmitidas para grandes grupos em pequenas áreas e o ataque de predadores, no caso de populações grandes; e o isolamento com a consequente dificuldade de encontros entre parceiros não consanguíneos para a cópula, o que aumenta a possibilidade de perda de filhotes, no caso de populações pequenas.

5c Já temos do item 5b que

$$\frac{1}{N_0} \int_0^\infty -t \frac{dN}{dt} = \frac{1}{N_0} \left[\lim_{B \rightarrow \infty} -tN(t)|_0^B - \int_0^\infty N(t)(-dt) \right].$$

Supondo agora que $N(t) = \left[N_0 + \sum_{k=1}^m a_k t^k \right] e^{-\mu t}$ temos, para cada $k \in 1, 2, \dots, n$,

$$\begin{aligned}
I(k) &= \int_0^\infty t^k e^{-\mu t} dt \\
&= \lim_{B \rightarrow \infty} t^k \frac{-e^{-\mu t}}{\mu} \Big|_0^B + \frac{k}{\mu} \int_0^\infty t^{k-1} e^{-\mu t} dt \\
&= \frac{k}{\mu} I(k-1)
\end{aligned}$$

e, como $I(0) = \int_0^\infty e^{-\mu t} dt = \frac{1}{\mu}$ segue $I(1) = \frac{1}{\mu^2}$ e $I(2) = \frac{2}{\mu^3}, \dots, I(k) = \frac{k!}{\mu^{k+1}}$, para todo $k \geq 1$.

Portanto,

$$\frac{1}{N_0} \int_0^\infty -t \frac{dN}{dt} dt = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty N(t)(dt)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N_0} \int_0^\infty \left[N_0 + \sum_{k=1}^n a_k t^k \right] e^{-\mu t} (dt) \\
&= I(0) + \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^n a_k I(k) \\
&= \frac{1}{\mu} + \sum_{k=1}^n \frac{k!}{\mu^{k+1}} \frac{a_k}{N_0}
\end{aligned}$$

5d Finalmente, se $N(t) = \frac{N_0}{t+1}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N_0} \int_0^\infty -t \frac{dN}{dt} dt &= \frac{1}{N_0} \int_0^\infty -t \frac{-N_0}{(t+1)^2} dt \\
&= \int_0^\infty \frac{t}{(t+1)^2} dt \\
&= \int_1^\infty \frac{t-1}{(t)^2} dt \\
&= \int_1^\infty \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \right) dt \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Questão 7

7a-Utilizando o Método Operacional explicado no texto, obtenha uma expressão explícita (em termos de integrais) da solução da Equação de (Euler-Malthus) Verhulst $\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = r(t) - \lambda(t)N$, onde $r(t)$ e $\lambda(t)$ são funções reais positivas.

(Sugestão: Utilize a transformação linearizadora $m = \frac{1}{N}$ seguida pelo Método Operacional.)

7b-Apresente um cenário biológico que indique a utilização desta equação como Modelo Matemático para uma Dinâmica Populacional.

7c-Considere uma população cujo tamanho $N(t)$ é regulado pelo chamado Modelo de Euler-Verhulst, $\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = r - \lambda N$, (isto é, com taxa de natalidade Malthusiana (per capita) r e mortalidade (per capita) λN , $r, \lambda > 0$ constantes) que se inicia com uma população "colonizadora" de $N_0 = N(0)$ indivíduos. Considere a decrescente população $n(t)$ dos indivíduos colonizadores ($n(0) = N_0$) submetidos à taxa de mortalidade ambiente. (descendentes de colonizadores não são colonizadores mas fazem parte da população ambiente!) . Obtenha uma expressão para a dinâmica desta população $n(t)$ de colonizadores e mostre que o tempo médio de sobrevivência neste caso, apresenta uma dependência do tamanho da população inicial N_0 , indicando um fenômeno interativo no processo de mortalidade.

Resolução:

7º a) Multiplicando ambos os membros de $\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = r(t) - \lambda(t)N$, por $\frac{1}{N}$ obtemos

$$\frac{1}{N^2} \frac{dN}{dt} = \frac{1}{N} r(t) - \lambda(t) \iff \lambda(t) = \frac{1}{N} r(t) - \frac{1}{N^2} \frac{dN}{dt}.$$

Observando agora que se $m(t) = \frac{1}{N(t)}$, então $\frac{dm(t)}{dt} = \frac{-1}{N^2} \frac{dN}{dt}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \lambda(t) = m(t)r(t) + \frac{dm}{dt} &\implies \lambda(t)e^{\int_0^t r(\tau) d\tau} = m(t)r(t)e^{\int_0^t r(\tau) d\tau} + \frac{dm}{dt}e^{\int_0^t r(\tau) d\tau} \\ &\implies \lambda(t)e^{\int_0^t r(\tau) d\tau} = \frac{d}{dt}m(t)e^{\int_0^t r(\tau) d\tau} \\ &\implies \int_0^t \lambda(v)e^{\int_0^v r(\tau) d\tau} dv = m(t)e^{\int_0^t r(\tau) d\tau} \\ &\implies e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} \int_0^t \lambda(v)e^{\int_0^v r(\tau) d\tau} dv = m(t). \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } N(t) = \frac{e^{\int_0^t r(\tau) d\tau}}{\int_0^t \lambda(v)e^{\int_0^v r(\tau) d\tau} dv}.$$

7b O modelo é utilizado para estimar o impacto e a disseminação de contaminações virais em larga escala, especialmente, durante o ano de 2020 foi largamente utilizado em trabalhos acerca da pandemia de COVID-19.

7c Considerando agora r, λ constantes e o modelo de Euler-Verhulst
 $\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = r - \lambda N$ com taxa de mortalidade λN , e supondo ainda a população
 "colonizadora" inicial $n_0 = N_0$ submetida à taxa de mortalidade similar, λn
 seguem

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} = -\lambda n &\implies \ln n = -\lambda t + k \\ &\implies n(t) = N_0 e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Já o tempo médio de sobrevivência será

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_0} \int_0^{+\infty} -t \frac{dn}{dt} dt &= \frac{1}{N_0} \int_0^{+\infty} -t [-\lambda N_0 e^{-\lambda t}] dt \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} \left[t e^{-\lambda t} \Big|_0^B - \int_0^B e^{-\lambda t} dt \right] \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{-e^{-\lambda t}}{\lambda} \Big|_0^B \\ &= \frac{1}{\lambda}. \end{aligned} \tag{3}$$

Questão 11 - Acoplamento Difusivo de Dinâmicas Malthusianas

Considere um Grafo com 4 vértices, 3 localizados nas quinas de um triângulo e 1 deles, A_0 , no seu centro. Cada vértice A_k das quinas é conectado bilateralmente aos seus dois adjacentes, A_{k-1} e A_{k+1} e todos, da mesma forma, ao centro A_0 por uma dinâmica Malthusiana com o mesmo parâmetro μ em todas as direções.

11a-Escreva a dinâmica do sistema $A = (A_1, A_2, A_3, A_0)^t$ na forma matricial, $\frac{dA}{dt} = SA$.

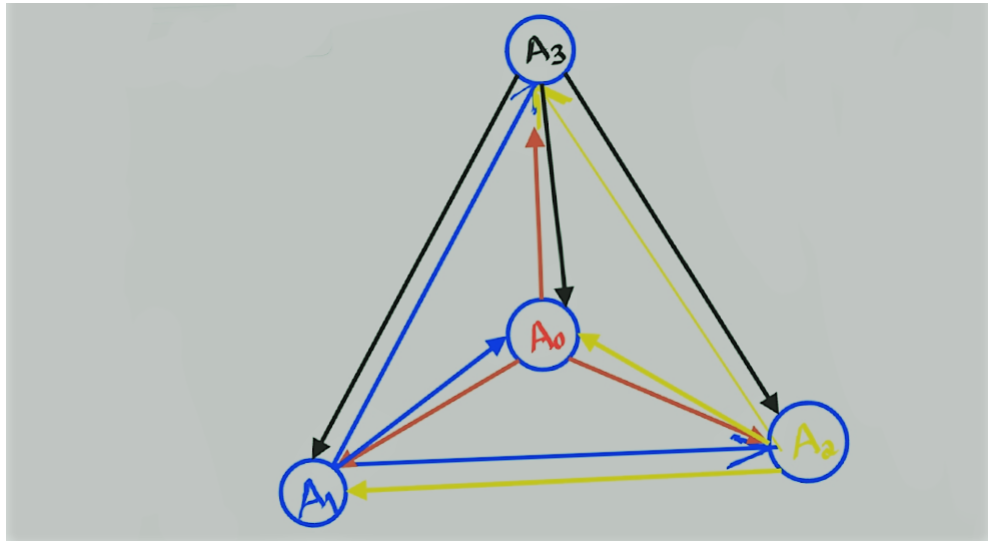
11b-Mostre que S é simétrica e tem autovalor nulo com autovetor $1 = (1, 1, 1, 1)^t$.

11c-Mostre que $n(t) = \sum_{k=0}^3 A_k(t)$ é constante e que $\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t) = n(0)(1, 1, 1, 1)$.

Resolução:

11a Uma representação da situação apresentada no problema é proposta abaixo.

Figura 10: Grafo descrito no enunciado.



Fonte: O autor.

Observe que o fluxo de saída no nó A_0 corresponde a $-3\mu A_0$ por outro lado, o fluxo de entrada no nó A_0 corresponde a $\mu A_1 + \mu A_2 + \mu A_3$, situação análoga

ocorrendo para os demais nós. Portanto, podemos escrevet

$$\begin{aligned}\frac{dA_0}{dt} &= -3\mu A_0 + \mu A_1 + \mu A_2 + \mu A_3. \\ \frac{dA_1}{dt} &= \mu A_0 - 3\mu A_1 + \mu A_2 + \mu A_3 \\ \frac{dA_2}{dt} &= \mu A_0 + \mu A_1 - 3\mu A_2 + \mu A_3 \\ \frac{dA_3}{dt} &= \mu A_0 + \mu A_1 + \mu A_2 - 3\mu A_3\end{aligned}$$

Podemos então escrever na forma matricial

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}.$$

11b A matriz dos coeficiente $S = \mu \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ é evidentemente

simétrica pois a transposta S^t é igual a S . Por outro lado,

$$S(1, 1, 1, 1)^t = \mu(0, 0, 0, 0)^t = 0(1, 1, 1, 1)^t$$

e, portanto $(1, 1, 1, 1)^t$ é autovetor de S associado ao autovalor 0.

11c Seja $n(t) = \sum_{k=0}^3 A_k(t)$ então, $\frac{d}{dt}n(t) = \sum_{k=0}^3 \frac{d}{dt}A_k(t) = 0$, pois a soma das linhas da matriz S é nula. Logo, $n(t) = k = cte$.

Como os autovetores da matriz μS são os mesmos da matriz $\frac{1}{\mu}$, faremos os cálculos baseados nesta última matriz. No entanto, vale destacar que se λ é um autovalor não nulo de S então $\lambda\mu$ é o autovalor correspondente da matriz $\frac{1}{\mu}S$.

Agora, para determinar as raízes da equação $\left(\frac{1}{\mu}S - \lambda I\right)ve^{\lambda t} = 0$ verificamos que

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} &= \lambda^4 + 12\lambda^3 + 48\lambda^2 + 64\lambda \\ &= \lambda(\lambda + 4)^3.\end{aligned}$$

As raízes são $\lambda = 0$, com multiplicidade 1, e $\lambda = -4$, com multiplicidade 3. De 11b já temos que o autovetor de S associado ao autovalor 0 é $(1, 1, 1, 1)^t$. Para o autovalor -4μ basta ver que $S(a, b, c, d)^t = -4\mu(a, b, c, d)^t$ se e somente se, $\mu(a + b + c + d) = 0$ e, portanto, podemos escrever $d = -a - b - c$ e $(a, b, c, d)^t = a(1, 0, 0, -1)^t + b(0, 1, 0, -1)^t + c(0, 0, 1, -1)^t$.

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1(t) \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = c_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-4\mu t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{-4\mu t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t^2 e^{-4\mu t}$$

onde c_0, c_1, c_2, c_3 são constantes definidas a partir das condições iniciais.

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = c_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$