

3

MATEMÁTICA
ÁLGEBRA LINEAR

SEMANA 3: RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$
$$(+B) = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = (-2) \cdot 1 - \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

3

ÁLGEBRA LINEAR RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

INTRODUÇÃO

O estudo de sistemas lineares é fundamental em diversos ramos da ciência e engenharia, pois permite representar e resolver ampla gama de problemas matemáticos de forma estruturada. Neste material, haverá uma introdução aos conceitos fundamentais, abordando definições e termos básicos relevantes para a compreensão do tema, seguidos pela representação matricial dos sistemas. Em seguida, será discutida a classificação de sistemas lineares, com ênfase nos diferentes tipos, como sistemas compatíveis, incompatíveis e indeterminados.

Após isso, será apresentado o escalonamento de matrizes, detalhando o processo e sua importância na análise de sistemas. A apostila também explora os principais métodos de resolução de sistemas lineares, incluindo a eliminação de Gauss, a substituição retroativa e o método de Gauss-Jordan, cada um com explicações e exemplos práticos. Por último, serão abordados os sistemas homogêneos, analisando as características e as soluções desse tipo de sistema, incluindo a identificação da solução trivial e as condições que possibilitam soluções não triviais.

Nesta apostila, haverá os seguintes tópicos:

1. Conceitos fundamentais
2. Classificação de sistemas
3. Matriz escalonada (escada)
4. Métodos de resolução de sistemas lineares
5. Sistemas homogêneos
6. Aplicações práticas
7. Recursos e ferramentas úteis
8. Glossário

1. CONCEITOS FUNDAMENTAIS

1.1 DEFINIÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

Um **sistema linear** é composto por um conjunto de equações lineares que possuem a forma geral:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Em que:

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ são coeficientes constantes.
 x_1, x_2, \dots, x_n são as variáveis (incógnitas).
 b_1, b_2, \dots, b_m é uma constante (termo independente).

1.2 REPRESENTAÇÃO MATRICIAL

Os sistemas lineares podem ser representados na forma compacta, usando matrizes:

$$Ax = b$$

Com:

- A sendo a matriz dos coeficientes (a_{ij}).
- \mathbf{x} representando o vetor das variáveis (incógnitas) x_1, x_2, \dots, x_n .
- b sendo a matriz (vetor) dos termos independentes b_1, b_2, \dots, b_m .
- $[A|b]$ representando a matriz aumentada, que consiste na matriz de coeficientes adicionada a sua última coluna a matriz b .

2. CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS

Os sistemas possuem três classificações possíveis:

- 1º - Sistema é dito consistente (possível) e **determinado** quando possui solução única.
- 2º - Sistema consistente (possível) e **indeterminado** quando admite infinitas soluções.
- 3º - Sistemas **inconsistentes** não admitem solução (apresentam contradições na sua solução).

2.1 TIPOS DE SISTEMAS LINEARES

De acordo com a análise do posto da matriz aumentada $[A|b]$, p_a , da matriz de coeficientes A , p_c , e do número de incógnitas n . Os sistemas podem ser classificados da seguinte forma:

Consistentes determinados: possuem uma única solução ($p_a = p_c = n$)

Exemplo:

$$A\mathbf{x} = b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow n = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow p_c = 2$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow p_a = 2$$

Consistentes indeterminados: possuem infinitas soluções ($p_a = p_c < n$)

Exemplo:

$$A\mathbf{x} = b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow n = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow p_c = 1$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow p_a = 1$$

Inconsistentes: não possuem solução ($p_a \neq p_c$)

Exemplo:

$$A\mathbf{x} = b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow n = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow p_c = 1$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow p_a = 2$$

3. MATRIZ ESCALONADA (ESCALADA)

Uma matriz escalonada (escada) é uma etapa anterior à matriz escada linha reduzida (vista na Videoaula 2), sendo menos restritiva, pois não exige que os elementos acima dos pivôs sejam zero.

Assim, pode-se dizer que uma **matriz está na forma escalonada (escada) se:**

1. Uma linha não se constituir inteiramente por zeros, então o primeiro elemento da linha (pivô) é igual a 1.
2. Em quaisquer duas linhas sucessivas que não consistem de zeros, o pivô da linha inferior ocorrer mais à direita do pivô da linha superior.
3. Existirem linhas constituídas inteiramente de zeros, então elas estão agrupadas juntas nas linhas inferiores da matriz.

Seguem alguns exemplos de matrizes escalonadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

obs. * representa qualquer valor real

4. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

4.1 MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

O método de eliminação de Gauss transforma um sistema linear original, representado pela matriz aumentada, que consiste na matriz de coeficientes A acrescida da matriz b como sendo sua última coluna $[A \mid b]$, em um sistema mais simples (muitas vezes na forma escada) por meio das **operações elementares**.



ANOTA AÍ!

São operações elementares:

1. Troca de linhas.
2. Multiplicação de uma linha por escalar diferente de zero.
3. Adição de múltiplo de uma linha a outra.

O objetivo final é a obtenção da matriz escalonada (escada) para facilitar a resolução pelo processo de substituição retroativa de variáveis.

Exemplo da utilização do método de eliminação de Gauss, para um sistema linear $Ax = b$ com a matriz de coeficientes A e a matriz de termos independentes b , conforme segue:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & -7 & -5 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ 4 \end{bmatrix}; \quad [A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{array} \right]$$

Após a realização do escalonamento, por meio de operações elementares, para obtenção da forma matriz escalonada (escada), obtém-se a matriz a seguir:

$$\rightarrow \text{Eliminação de Gauss} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Tente chegar
nesse resultado!

Substituição retroativa: a partir da matriz obtida, aplica-se a substituição retroativa para determinação dos valores das incógnitas.

$$x_3 = 2; \quad x_2 = -\frac{2x_3}{3} - \frac{2}{3} = -2; \quad x_1 = -\frac{x_3}{3} + \frac{11}{3} = 3$$

4.2 MÉTODO DE GAUSS-JORDAN

O **método de Gauss-Jordan** é uma extensão da eliminação de Gauss que busca levar o sistema à **forma escalonada reduzida (escada linha reduzida)**. Nessa forma, as equações aparecem isoladas em termos das variáveis.

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow$$

Após o escalonamento até a obtenção da forma escada linha reduzida, obtém-se a matriz abaixo:

Eliminação de Gauss — Jordan → $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Tente chegar nesse resultado!

$$x_3 = 2; x_2 = -2; x_1 = 3$$

Note que nesse caso não é necessária a substituição retroativa, uma vez que as linhas da matriz correspondem aos valores finais de cada uma das variáveis.

Comparativo: eliminação de Gauss-Jordan e Gauss

Finalmente, cabe salientar que:

ELIMINAÇÃO DE GAUSS-JORDAN	ELIMINAÇÃO DE GAUSS
A eliminação de Gauss-Jordan é uma técnica útil para resolver sistemas de equações lineares pequenos , que podem ser resolvidos manualmente	Para sistemas lineares grandes , que requerem o uso de computadores, a eliminação de Gauss seguida pela substituição retroativa geralmente é mais eficiente computacionalmente

5. SISTEMAS HOMOGÊNEOS

Nos sistemas homogêneos, tem-se $b = 0$, ou seja, o sistema é dado por:

$$AX = 0$$

5.1 SOLUÇÕES DE UM SISTEMA HOMOGÊNEO

- **Solução trivial:** $X = 0$
- **Solução não trivial:** existe quando o número de incógnitas é maior do que o número de equações independentes. Um sistema homogêneo sempre terá a solução trivial. Desta forma, ele sempre será consistente e poderá ter somente uma (solução trivial) ou infinitas soluções.

6. APLICAÇÕES PRÁTICAS



ENGENHARIA: ANÁLISE ESTRUTURAL DE PRÉDIOS E PONTES

Na engenharia civil e estrutural, sistemas lineares são fundamentais para a análise de estruturas como prédios e pontes. Esses sistemas são usados para calcular as forças e tensões em diferentes partes da estrutura, garantindo que ela seja segura e estável.

Exemplo prático:

- **Análise de treliças:** treliças são estruturas compostas por barras conectadas em juntas. Para garantir a estabilidade de uma treliça, é necessário calcular as forças em cada barra. Isso é feito montando um sistema de equações lineares que representam o equilíbrio das forças em cada junta.
- **Método dos elementos finitos (FEM):** utilizado para resolver problemas complexos de engenharia, o FEM divide uma estrutura em pequenos elementos e aplica sistemas lineares para analisar as tensões e deformações em cada elemento.



ECONOMIA: MODELOS DE OTIMIZAÇÃO LINEAR

Na economia e nas finanças, sistemas lineares são usados para resolver problemas de otimização, em que o objetivo é maximizar ou minimizar uma função, sujeita a um conjunto de restrições lineares.

Exemplo prático:

- **Programação linear:** um exemplo clássico é o problema de maximização de lucros em empresa que fabrica diferentes produtos. A empresa

deve decidir a quantidade de cada produto a ser fabricado para maximizar os lucros, considerando restrições de recursos como matéria-prima, mão de obra e capacidade de produção. O problema é formulado como um sistema de equações lineares e resolvido usando métodos como o Simplex.

- **Análise de insumo-produto:** este modelo, desenvolvido por Wassily Leontief, utiliza sistemas lineares para representar as relações entre diferentes setores da economia. Ele ajuda a entender como mudanças na demanda final de produtos afetam a produção e a distribuição de recursos entre os setores.



CIÊNCIAS DA COMPUTAÇÃO: RESOLUÇÃO DE ALGORITMOS E REDES

Em ciências da computação, sistemas lineares são aplicados em diversas áreas, desde a resolução de algoritmos até o *design* e a análise de redes.

Exemplo prático:

- **Algoritmos de grafos:** muitos problemas em teoria dos grafos, como encontrar o caminho mais curto ou o fluxo máximo em uma rede, podem ser formulados e resolvidos usando sistemas lineares. Por exemplo, o algoritmo de Edmonds-Karp para encontrar o fluxo máximo em uma rede de fluxo que utiliza sistemas lineares para calcular os fluxos.
- **Machine learning e inteligência artificial:** no treinamento de modelos de aprendizado de máquina, como a regressão linear, é comum resolver sistemas lineares para ajustar os parâmetros do modelo aos dados de treinamento. Métodos como a decomposição de valores singulares (SVD) são usados para resolver esses sistemas de forma eficiente.
- **Codificação e correção de erros:** em teoria da informação, sistemas lineares são usados para projetar códigos que detectam e corrigem erros em transmissões de dados. Códigos lineares, como os códigos de Hamming e os códigos Reed-Solomon, utilizam matrizes e operações lineares para garantir a integridade dos dados transmitidos.



7. RECURSOS E FERRAMENTAS ÚTEIS

SOFTWARES E TECNOLOGIAS ÚTEIS:

- Octave
- Python (Bibliotecas como NumPy, SymPy)

PARA ESTUDO TEÓRICO:

→ Livros:

- *Álgebra linear com aplicações* (Anton; Rorres, 2012).
- *Álgebra linear* (Bondrini et al., 1980).



8. GLOSSÁRIO

Forma escalonada de uma matriz: Representação matricial onde cada linha não nula possui o primeiro elemento diferente de zero (chamado de **pivô**) posicionado à direita do pivô da linha anterior, e todas as linhas nulas estão posicionadas abaixo das linhas não nulas.

Matriz aumentada: Matriz $[A|B]$ formada pela matriz de coeficientes e o vetor de termos independentes.

Substituição retroativa: Processo de resolução “de trás para frente” após obter uma matriz escalonada, para determinação dos valores das incógnitas do sistema.

Posto de uma matriz: quando uma matriz está na **forma escalonada**, o número de linhas diferentes de zero é igual ao posto da matriz, pois as linhas não nulas nessa forma são automaticamente linearmente independentes.

REFERÊNCIAS

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre, RS: Bookman, 2012.

BOLDRINI, C. et al. **Álgebra linear**. 3 ed. São Paulo, SP: Harper & Row do Brasil, 1980.