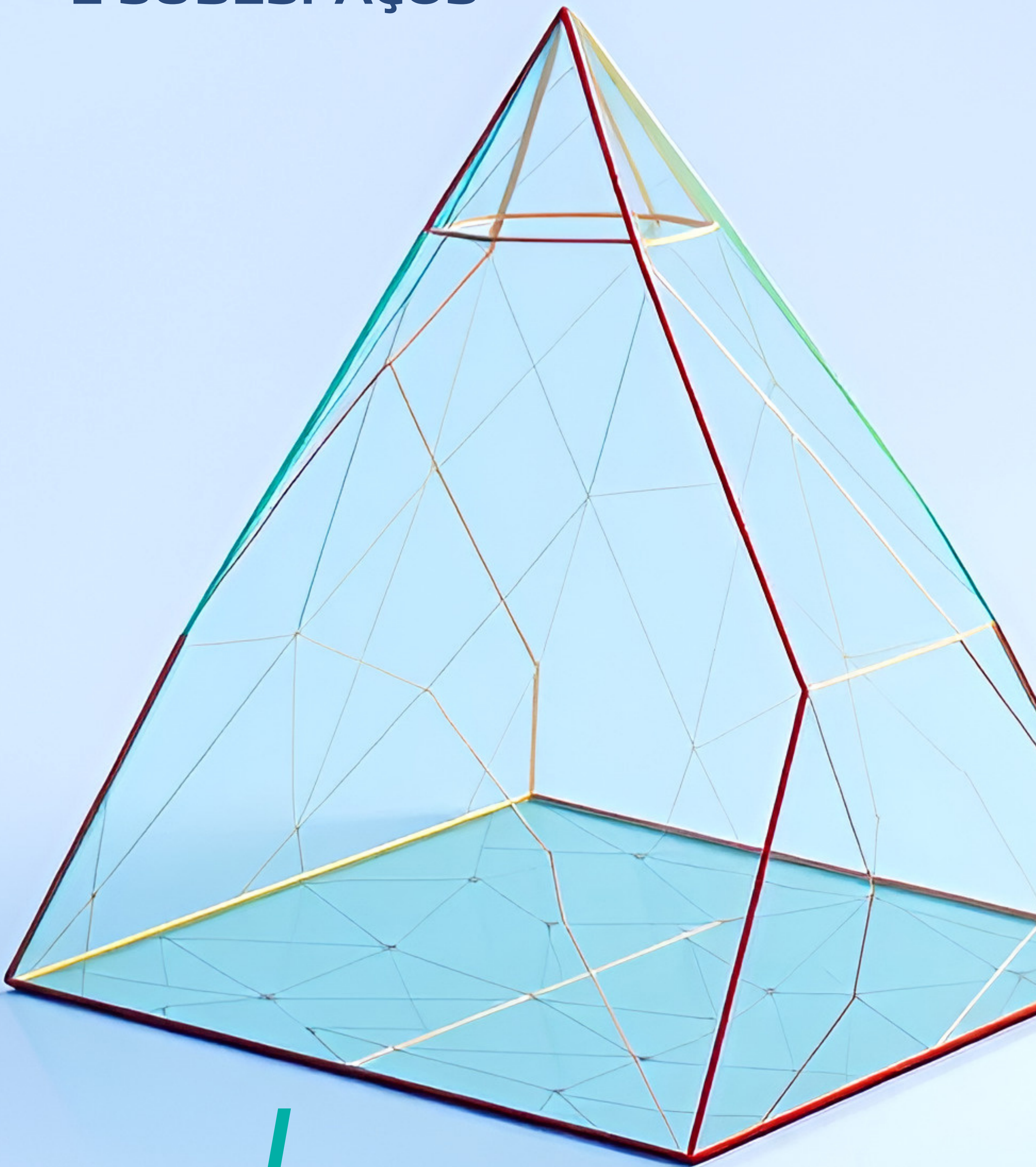
MATEMÁTICA

ÁLGEBRA LINEAR

4

SEMANA 4: ESPAÇOS VETORIAIS E SUBESPAÇOS



UNIVESP
Universidade Virtual do Estado de São Paulo

FORMADOR AUTOR **CRISTHOF JOHAN ROOSEN RUNGE**

4

ÁLGEBRA LINEAR

ESPAÇOS VETORIAIS E SUBESPAÇOS

INTRODUÇÃO

Nesta apostila, serão explorados os conceitos fundamentais dos **espaços vetoriais**, uma das bases da álgebra linear e que têm papel crucial em diversas disciplinas, incluindo matemática, física, computação e ciência de dados. O estudo dos espaços vetoriais inicia-se com a compreensão de suas definições e propriedades, permitindo a análise detalhada de subespaços vetoriais, bases e dimensões.

Neste percurso, haverá uma **introdução aos espaços vetoriais**, na qual serão abordadas suas definições básicas e a importância dos axiomas que os regem. Em seguida, serão explorados os **subespaços vetoriais**, que são subconjuntos de espaços vetoriais que também apresentam a estrutura de espaço vetorial. Você verá as condições necessárias para que um subconjunto possa ser considerado um subespaço, bem como exemplos práticos.

Em seguida, será abordado o conceito de **base de um espaço vetorial**, um conjunto de vetores linearmente independentes que geram todo o espaço; e será discutida a importância da **dimensão** de um espaço vetorial, que quantifica a complexidade de um espaço em termos de seus vetores geradores. Por meio de exercícios e exemplos ilustrativos, busca-se não apenas transmitir conceitos, mas também possibilitar a compreensão dos conteúdos abordados.

Nesta apostila, haverá os seguintes tópicos:

1. **Introdução aos espaços vetoriais**
2. **Definição e propriedades**
3. **Subespaços vetoriais**
4. **Base de um espaço vetorial**
5. **Dimensão de um espaço vetorial**
6. **Conclusão**
7. **Sugestão de recursos adicionais**
8. **Glossário**
9. **Referência**

1. INTRODUÇÃO AOS ESPAÇOS VETORIAIS

O estudo dos espaços vetoriais tem suas raízes no século XVII, com o desenvolvimento da geometria analítica por René Descartes, que uniu álgebra e geometria ao introduzir coordenadas. No século XIX, Hermann Grassmann formalizou conceitos como espaços vetoriais e dimensão, enquanto Giuseppe Peano definiu axiomaticamente os espaços vetoriais. David Hilbert e outros matemáticos expandiram essas ideias para espaços de dimensão infinita, fundamentais na análise funcional. O conceito de subespaços vetoriais surgiu como uma generalização natural, permitindo a análise de conjuntos menores dentro de um espaço vetorial.

A noção de base e dimensão foi consolidada no século XX, com a teoria de espaços vetoriais tornando-se central em áreas como física, computação e ciência de dados. Hoje, esses conceitos são pilares da álgebra linear, essenciais para o avanço da matemática e suas aplicações.

2. DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES

2.1 DEFINIÇÃO

Um espaço vetorial V é um conjunto **não vazio** de elementos (objetos), para o qual estejam definidas duas operações, **adição** e **multiplicação por escalar**.

- **Adição:** corresponde a uma regra que associa dois elementos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ a um elemento $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ também pertencente a V.
- **Multiplicação por escalar:** corresponde a uma **regra** que associa cada escalar a e cada elemento $\mathbf{u}$, pertencente ao conjunto, a um elemento $a\mathbf{u}$, também pertencente a V, denominado **múltiplo escalar** de $\mathbf{u}$ por a.

Essas operações devem satisfazer 10 axiomas apresentados na próxima subseção.

2.2 AXIOMAS

Os 10 axiomas de um espaço vetorial são propriedades fundamentais que definem a estrutura de um espaço vetorial. Essas propriedades garantem que as operações de adição de vetores e multiplicação por escalares se comportem de maneira consistente. São eles:

Espaço Vetorial deve satisfazer

1. Fechamento da adição
2. Comutatividade da adição
3. Associatividade da adição
4. Elemento neutro aditivo
5. Elemento simétrico
6. Fechamento da multiplicação por escalar
7. Distributividade do escalar sobre a soma de vetores
8. Distributividade escalar sobre a soma de escalares
9. Associatividade da multiplicação escalar
10. Elemento neutro multiplicativo

2.3 EXEMPLOS DE ESPAÇOS VETORIAIS

Alguns exemplos de espaços vetoriais são os seguintes:

1. **Plano cartesiano** $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$: vetores da forma (x, y).
2. **Espaço tridimensional** $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$: vetores da forma (x, y, z).
3. **Conjunto de polinômios na forma:**
$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$

2.4 APLICAÇÕES PRÁTICAS

Alguns campos e aplicações práticas dos conceitos e das propriedades dos espaços vetoriais:

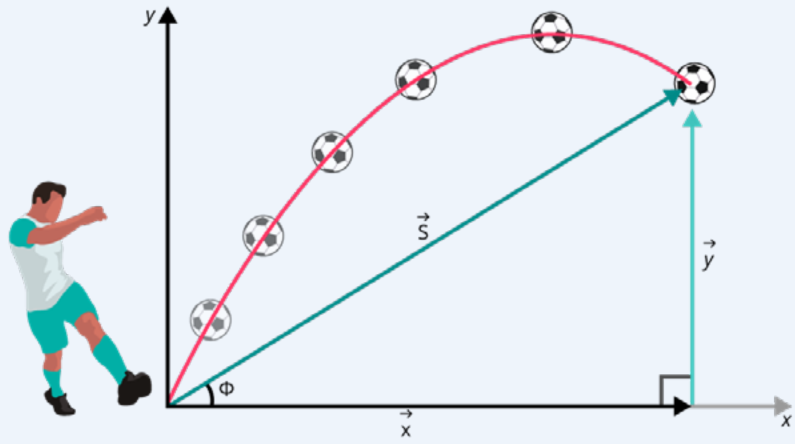
FÍSICA – PARA REPRESENTAR FORÇAS E MOVIMENTOS

Os espaços vetoriais são amplamente utilizados na física para descrever grandezas que possuem magnitude e direção, como forças e movimentos.

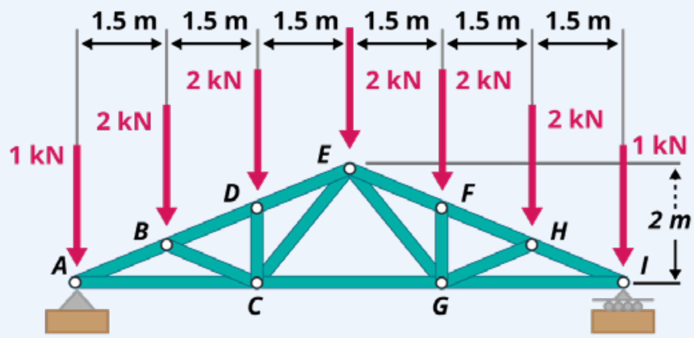
- **Forças:** são representadas como vetores. Por exemplo, a força gravitacional, a força de atrito e a força normal são descritas por vetores em um espaço tridimensional $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$.
- **Movimentos:** posição, velocidade e aceleração de um objeto também são vetores. Por exemplo:
  - **Posição:** um vetor $\mathbf{r} = (x, y, z)$ descreve a localização de um objeto no espaço.
  - **Velocidade:** um vetor $\mathbf{v} = (vx, vy, vz)$ descreve a taxa de mudança da posição.
  - **Aceleração:** um vetor $\mathbf{a} = (ax, ay, az)$ descreve a taxa de mudança da velocidade.

Aplicações práticas

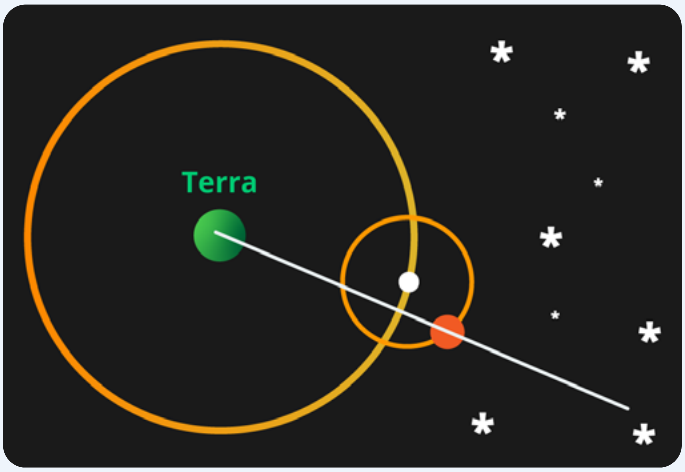
• Cálculo de trajetória de projéteis.



• Análise de forças em estruturas na engenharia civil.



• Simulações de movimentos planetários.



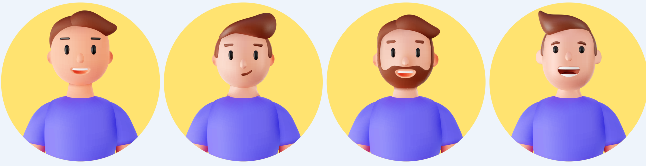
COMPUTAÇÃO GRÁFICA – PARA MODELAR OBJETOS EM 3D

Na computação gráfica, os espaços vetoriais são usados para representar e manipular objetos tridimensionais.

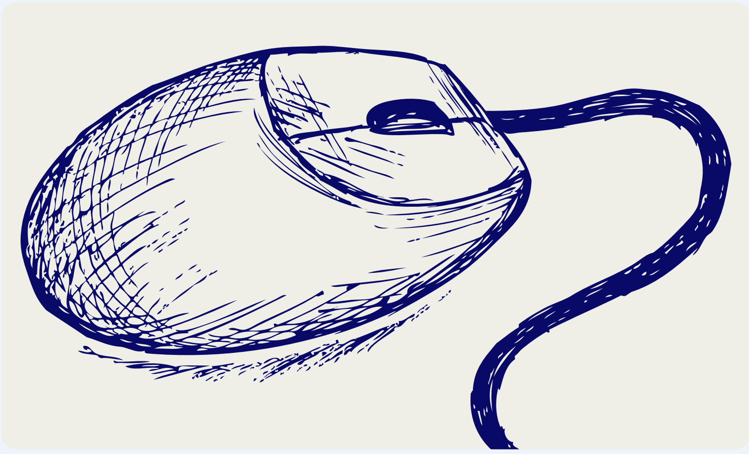
- **Modelagem 3D:** objetos são representados por vértices, que são pontos no espaço tridimensional ($\mathbb{R}^3$). Cada vértice é um vetor v = (x,y,z).
- **Transformações:** operações como translação, rotação e escalonamento são realizadas usando matrizes que atuam sobre os vetores dos vértices.
    - **Translação:** movimenta um objeto no espaço.
    - **Rotação:** gira um objeto em torno de um eixo.
    - **Escalonamento:** aumenta ou diminui o tamanho de um objeto.

Aplicações práticas:

- Criação de personagens e cenários em filmes e jogos.



- *Design* de produtos e protótipos em 3D.



• *Design* de produtos e protótipos em 3D.

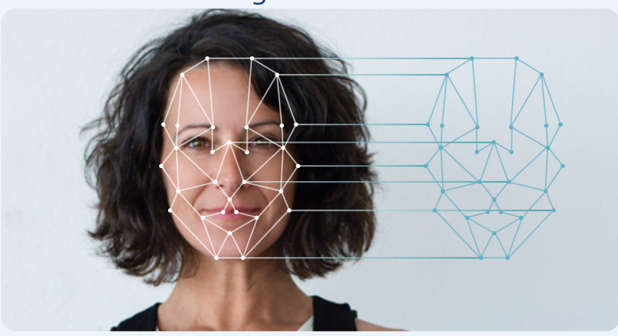
MACHINE LEARNING – PARA MANIPULAR DADOS EM ALTA DIMENSÃO

No *machine learning*, os espaços vetoriais são usados para representar dados em alta dimensão, e cada dimensão corresponde a uma característica (*feature*) dos dados.

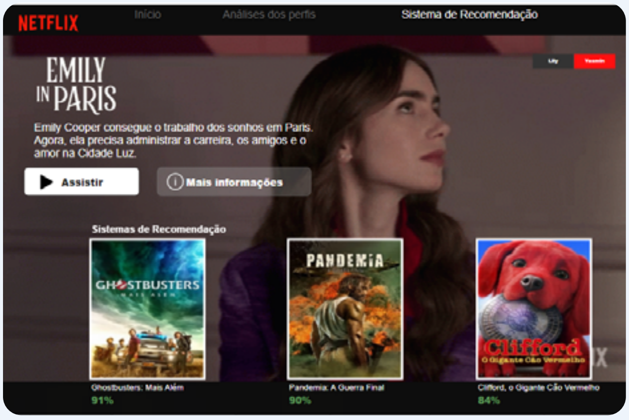
- **Representação de dados:** um conjunto de dados pode ser visto como conjunto de vetores em um espaço n-dimensional (R^n), em que **n** é o número de *features*. Por exemplo, uma imagem pode ser representada como vetor de *pixels*.
- **Redução de dimensionalidade:** técnicas como análise de componentes principais (PCA) projetam dados de alta dimensão em um espaço de menor dimensão, mantendo a estrutura original dos dados.
- **Classificação e clusterização:** algoritmos como máquinas de vetores de suporte (SVM) e *k-means* operam em espaços vetoriais para separar ou agrupar dados.

Aplicações práticas:

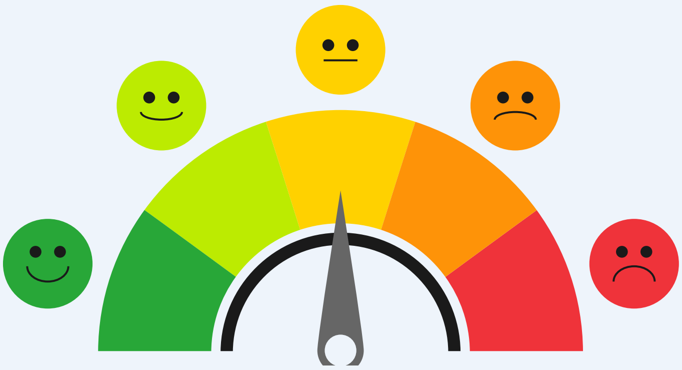
• Reconhecimento de imagens e voz.



• Sistemas de recomendação (como Netflix ou Spotify).



• Análise de sentimentos em textos.



2.5 EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

EXERCÍCIO 1 – VERIFIQUE SE $\mathbb{R}^2$ É UM ESPAÇO VETORIAL.

Solução:
Para provar que $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial, é preciso verificar que ele **satisfaz os 10 axiomas que definem um espaço vetorial**. Isso será feito passo a passo, utilizando as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar definidas em $\mathbb{R}^2$.

1. Comutatividade da adição

Para quaisquer $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ em $\mathbb{R}^2$:
$\mathbf{u} + \mathbf{v}$ = $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ = $(v_1 + u_1, v_1 + u_2)$ = $\mathbf{u} + \mathbf{v}$
Portanto, a adição é comutativa.

2. Associatividade da adição

Para quaisquer $\mathbf{u} = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ em $\mathbb{R}^2$:
$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) + (w_1, w_2) = (u_1 + v_1 + w_1, u_2 + v_2 + w_2)$
$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (u_1, u_2) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2) = (u_1 + v_1 + w_1, u_2 + v_2 + w_2)$
Logo, $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$, e a adição é associativa.

3. Elemento neutro da adição

O vetor nulo **0** = (0,0) é o elemento neutro da adição, pois para $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$:
$\mathbf{u} + \mathbf{0} = (u_1 + 0, u_2 + 0) = (u_1, u_2) = \mathbf{u}$

4. Elemento simétrico da adição

Para cada $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, o vetor $-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2)$ é o elemento simétrico,
pois: $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (u_1 - u_1, u_2 - u_2) = (0, 0) = \mathbf{0}$

5. Distributividade do escalar sobre a soma de vetores

Para qualquer escalar $a \in \mathbb{R}$ e vetores $\mathbf{u} = (u_1, u_2), \mathbf{v} = (v_1, v_2)$
$a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a(u_1 + v_1, u_2 + v_2) = (a(u_1 + v_1), a(u_2 + v_2)) = (au_1 + av_1, au_2 + av_2)$
$a\mathbf{u} + a\mathbf{v} = (au_1, au_2) + (av_1, av_2) = (au_1 + av_1, au_2 + av_2)$
Portanto, $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$.

6. Distributividade escalar sobre a soma de escalares

Para qualquer escalar $a,\ b \in \mathbb{R}$ e vetor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$
$(a + b)\mathbf{u} = (a + b)(u_1, u_2) = ((a + b)u_1, (a + b)u_2) = (au_1 + bu_1, au_2 + bu_2)$
$a\mathbf{u} + b\mathbf{u} = a(u_1, u_2) + b(u_1, u_2) = (au_1, au_2) + (bu_1, bu_2) = (au_1 + bu_1, au_2 + bu_2)$
Portanto, $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$.

7. Associatividade da multiplicação escalar

Para quaisquer escalares $a,\ b \in \mathbb{R}$ e vetor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$:
$a(b\mathbf{u}) = a(b(u_1, u_2)) = a(bu_1, bu_2) = (a(bu_1), a(bu_2)) = ((ab)u_1, (ab)u_2)$
$(ab)\mathbf{u} = (ab)(u_1, u_2) = ((ab)u_1, (ab)u_2)$
Portanto, $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$.

8. Elemento neutro multiplicativo

O escalar 1 é o elemento neutro multiplicativo, pois para qualquer $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$:

$1 \cdot \mathbf{u} = (1 \cdot u_1, 1 \cdot u_2) = (u_1, u_2) = \mathbf{u}$

9. Fechamento da adição

Para quaisquer $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$: em $\mathbb{R}^2$
$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \left(u_1 + v_1, u_2 + v_2\right) \in \mathbb{R}^2$
Portanto, $\mathbb{R}^2$ é fechado para a adição.

10. Fechamento da multiplicação por escalar

Para quaisquer $a \in \mathbb{R}$ e vetor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$
$a\mathbf{u} = a\left(u_1, u_2\right) = \left(au_1, au_2\right) \in \mathbb{R}^2$
Portanto, $\mathbb{R}^2$ é fechado para a multiplicação por escalar.
Conclusão
Como $\mathbb{R}^2$ satisfaz todos os 10 axiomas, ele é um espaço vetorial sobre os números reais $\mathbb{R}$. Portanto, $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial.

3. SUBESPAÇOS VETORIAIS

3.1 DEFINIÇÃO E CARACTERÍSTICAS

O subespaço vetorial *W* de um espaço vetorial *V* é o subconjunto de *V* que também é um espaço vetorial. Para ser subespaço, W deve:

- → Ser fechado para adição: $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{W} \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathrm{W}$
- → Ser fechado para multiplicação por escalar: $\mathbf{u} \in \mathrm{W}, a \in \mathbb{R} \Rightarrow a\mathbf{u} \in \mathrm{W}$

IMPORTANTE

Note que, por meio da propriedade de fechamento em relação à multiplicação por escalar, as condições de existência do elemento neutro e do elemento simétrico são obtidas para $a = 0$ e $a = -1$, respectivamente.
As demais propriedades são herdadas e não precisam ser verificadas.

3.2 EXEMPLOS DE SUBESPAÇOS

Alguns exemplos de subespaços vetoriais são os seguintes:

- Reta que passa pela origem: $W = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 |\ \ y = 2x\}$
- Plano que passa pela origem: $W = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 |\ \ z = 0\}$

3.3 EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

***EXERCÍCIO 2** – VERIFIQUE SE $W = \{(x,y)\} \in \mathbb{R}^2 |\ \ x = y\}$ É UM SUBESPAÇO DE $\mathbb{R}^2$.*

Solução:

1. **Fechamento da adição:** $(x_1,y_1)\ \ e\ \ (x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$, então $x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2$.

   Logo, $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in W,\ \ \text{pois}\ \ x_1 + x_2 = y_1 + y_2$.
2. **Fechamento da multiplicação por escalar:** Se $(x, y) \in W$, então $x = y$. Logo, $(kx, ky) \in W$, pois $kx = ky$.

Portanto, W é um subespaço vetorial.

4. BASE DE UM ESPAÇO VETORIAL

4.1 DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES

- **Combinação linear**

Um vetor $\mathbf{w}$ em um espaço vetorial V é uma combinação linear dos vetores v_1, v_2, ...,v_r em V se $\mathbf{w}$ puder ser expresso em termos desses vetores, ou seja, na forma:

$$\mathbf{w} = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_r v_r$$

em que a_1, a_2, ...,a_r são escalares.

Exemplo:

O vetor $\mathbf{w} = (2{,}3{,}4)$ pertencente a $\mathbb{R}^3$ pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0{,}0{,}1)$, que formam uma base canônica para $\mathbb{R}^3$.

$$\mathbf{w} = 2 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2 + 4 \cdot e_3$$

→ **Independência linear**

Um conjunto de vetores é dito linearmente independente se nenhum dos vetores do conjunto puder ser escrito como uma combinação linear dos demais vetores.

Matematicamente, isso corresponde a dizer que um conjunto não vazio de vetores $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ em um espaço vetorial V é linearmente independente se a única solução para a equação:

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_r v_r = 0$
for a solução trivial $(a_1 = 0, a_2 = 0, \ldots, a_r = 0)$.

→ **Gerador de um subespaço vetorial**

Teorema: seja $S = \{\mathbf{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_r\}$um conjunto não vazio de vetores num espaço vetorial **V**. O conjunto **W** de todas as combinações lineares possíveis de vetores em S é um subespaço de **V**.

Então, S gera o subespaço **W**, e S é um gerador, ou conjunto gerador, de **W**.

W = ger $\{\mathbf{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_r\}$ ou **W** = ger(S)

→ **Base de um espaço vetorial**

A base de um espaço vetorial V é o conjunto de vetores linearmente independentes que geram V. Ou seja, a base é um gerador de V, formado somente por vetores linearmente independentes.

4.2 EXEMPLO: BASE CANÔNICA

O **vetor canônico** é um vetor que possui valor "1" em uma de suas componentes, sendo que todas as demais componentes são iguais a zero. Um vetor canônico denotado por e_i diz que esse vetor possui a coordenada $i = 1$ (e as demais coordenadas iguais a zero).

Os vetores canônicos formam uma base denominada "base canônica de $\mathbb{R}^n$".

Exemplos:

→ **A base canônica de $\mathbb{R}^2$ é**: (1,0), (0,1)

→ **A base canônica de $\mathbb{R}^3$ é**: (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)

4.3 EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

EXERCÍCIO 3 – VERIFIQUE SE (1,2), (3,4) É UMA BASE DE $\mathbb{R}^2$

Solução:
Você viu que uma forma de verificar se conjunto de vetores é linearmente independente é calculando o determinante da matriz *A* de coeficientes. Ou seja, se $det(A) \neq 0$, o conjunto de vetores é linearmente independente.

Assim, tem-se: $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2 \neq 0$

Logo, os vetores (1,2) e (3,4) são linearmente independentes e, portanto, formam uma base para o $\mathbb{R}^2$. Ou seja, qualquer vetor (x,y) $\in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear de (1,2) e (3,4).

5. DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

5.1 CONCEITO DE DIMENSÃO

A dimensão de um espaço vetorial V, denotada por dim(V), é o número de vetores em uma base de V.

5.2 EXEMPLOS

Alguns exemplos de dimensões de um espaço vetorial são os seguintes:

- **Plano cartesiano** $\mathbb{R}^2$: na seção 4.2, você viu que a base canônica para $\mathbb{R}^2$ é formada pelos vetores (1,0) e (0,1). Desta forma, conclui-se que a dimensão do espaço é 2.
- **Espaço tridimensional** $\mathbb{R}^3$: na seção 4.2, você viu que a base canônica para $\mathbb{R}^3$ é formada pelos vetores (1,0,0), (0,1,0) e (0,0,1). Desta forma, conclui-se que a dimensão do espaço é 3.

5.3 EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

EXERCÍCIO 4 – DETERMINE A DIMENSÃO DO ESPAÇO VETORIAL $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+z=0\}$

Solução:

Note que os vetores em V são definidos por meio de uma equação paramétrica com três variáveis. Ou seja, há duas variáveis livres, e a terceira pode ser escrita em função dessas variáveis.

Então, pode-se fazer: $x = m; y = n; z = -n - m$

Assim:
$(x, y, z) = m(1, 0, -1) + n(0, 1, -1) = (m, n, -m - n) \Rightarrow m + n - n - m = 0$

Note que uma base para V pode ser formada pelos vetores $(1, 0, -1)$ e $(0, 1, -1)$.

Portanto, $\dim(V) = 2$.

6. CONCLUSÃO

Espaços vetoriais, subespaços, dimensão e base são conceitos fundamentais da álgebra linear, pois servem como ferramentas poderosas para modelar e resolver problemas complexos em uma infinidade de áreas. Ao explorar **espaços vetoriais**, você descobre um universo em que vetores, funções e até mesmo matrizes podem ser manipulados com elegância e precisão. Os **subespaços** revelam estruturas ocultas dentro desses espaços, permitindo a decomposição de problemas em partes mais simples e gerenciáveis. A **dimensão** oferece uma medida da complexidade desses espaços, enquanto as **bases** fornecem os alicerces sobre os quais toda a teoria é construída, permitindo representar qualquer elemento do espaço de maneira única e eficiente.

Esses conceitos não são apenas teóricos; eles têm aplicações práticas em áreas como **física, engenharia, ciência da computação, economia e *machine learning***. Seja projetando algoritmos de inteligência artificial, otimizando sistemas de engenharia ou analisando dados complexos, o domínio desses pilares da álgebra linear abre portas para inovações que transformam o mundo. Ao mergulhar nesses conceitos, você não apenas expande sua compreensão matemática, mas também adquire as ferramentas necessárias para enfrentar desafios reais e impulsionar o progresso em diversas áreas do conhecimento.

7. SUGESTÃO DE RECURSOS ADICIONAIS

A compreensão e aplicação de conceitos de espaços vetoriais e vetores são fundamentais em diversas áreas da matemática e suas aplicações práticas. Para isso, o uso de recursos adicionais pode facilitar a realização de atividades e o aprofundamento no tema. Seguem algumas sugestões de recursos.

SOFTWARES

Octave

- **Aplicações:** o GNU Octave é uma linguagem de programação semelhante ao Matlab, amplamente utilizada para cálculos numéricos. Ele facilita a execução de operações com vetores e matrizes, manipulação de dados e visualização gráfica.
- **Atividades:** é possível usar o Octave para implementar algoritmos que trabalham com espaços vetoriais, como calcular bases de subespaços vetoriais. Também é possível criar visualizações de vetores em 2D e 3D, ajudando a entender a geometria dos espaços vetoriais.

Python (NumPy)

- **Aplicações:** Python é uma linguagem de programação versátil e comumente usada em ciência de dados, engenharia e matemática. A biblioteca NumPy fornece suporte para *arrays* multidimensionais e operações matemáticas que são essenciais para trabalhar com vetores e matrizes.
- **Atividades:** com NumPy, é possível realizar operações de álgebra linear, como adição de vetores e multiplicação por escalares. Além disso, Python permite a automação de cálculos complexos e manipulação eficaz de grandes conjuntos de dados, facilitando a aplicação de conceitos de espaço vetorial em *machine learning* e análise de dados.

SITES

Khan Academy

- **Aplicações:** a Khan Academy oferece uma gama de vídeos e exercícios interativos sobre álgebra linear, incluindo tópicos relacionados a espaços vetoriais e operações com vetores.
- **Atividades:** é possível utilizar o site para revisar conceitos básicos por meio de vídeos explicativos e, em seguida, testar o entendimento com exercícios práticos. É uma ótima ferramenta para complementar o aprendizado teórico com prática imediata.

Wolfram Alpha

- **Aplicações:** Wolfram Alpha é um motor de busca computacional que pode resolver problemas de matemática e fornecer respostas a perguntas sobre álgebra linear e espaços vetoriais.
- **Atividades:** é possível usar Wolfram Alpha para verificar soluções de exercícios, obter representações gráficas de vetores e explorar propriedades de diferentes espaços vetoriais. Isso pode ajudar na visualização e compreensão de conceitos complexos.

8. GLOSSÁRIO

Base: conjunto de vetores linearmente independentes que geram o espaço vetorial.

Base canônica: conjunto de vetores unitários que formam uma base-padrão para $\mathbb{R}^n$.

Combinação linear: expressão de um vetor como soma de outros vetores multiplicados por escalares.

Dimensão: número de vetores em uma base de espaço vetorial.

Elemento neutro: vetor **0** que, somado a qualquer vetor, não altera o vetor original.

Elemento simétrico: vetor **- *u*** que, somado a ***u***, resulta no vetor nulo.

Espaço vetorial: conjunto de vetores com operações de adição e multiplicação por escalar, satisfazendo 10 axiomas.

Independência linear: conjunto de vetores que não podem ser escritos como combinação linear uns dos outros.

Subespaço vetorial: subconjunto de um espaço vetorial que também é um espaço vetorial.

Vetor: segmento de reta orientado com direção, sentido e comprimento.

9. REFERÊNCIA

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre, RS: Bookman, 2012.