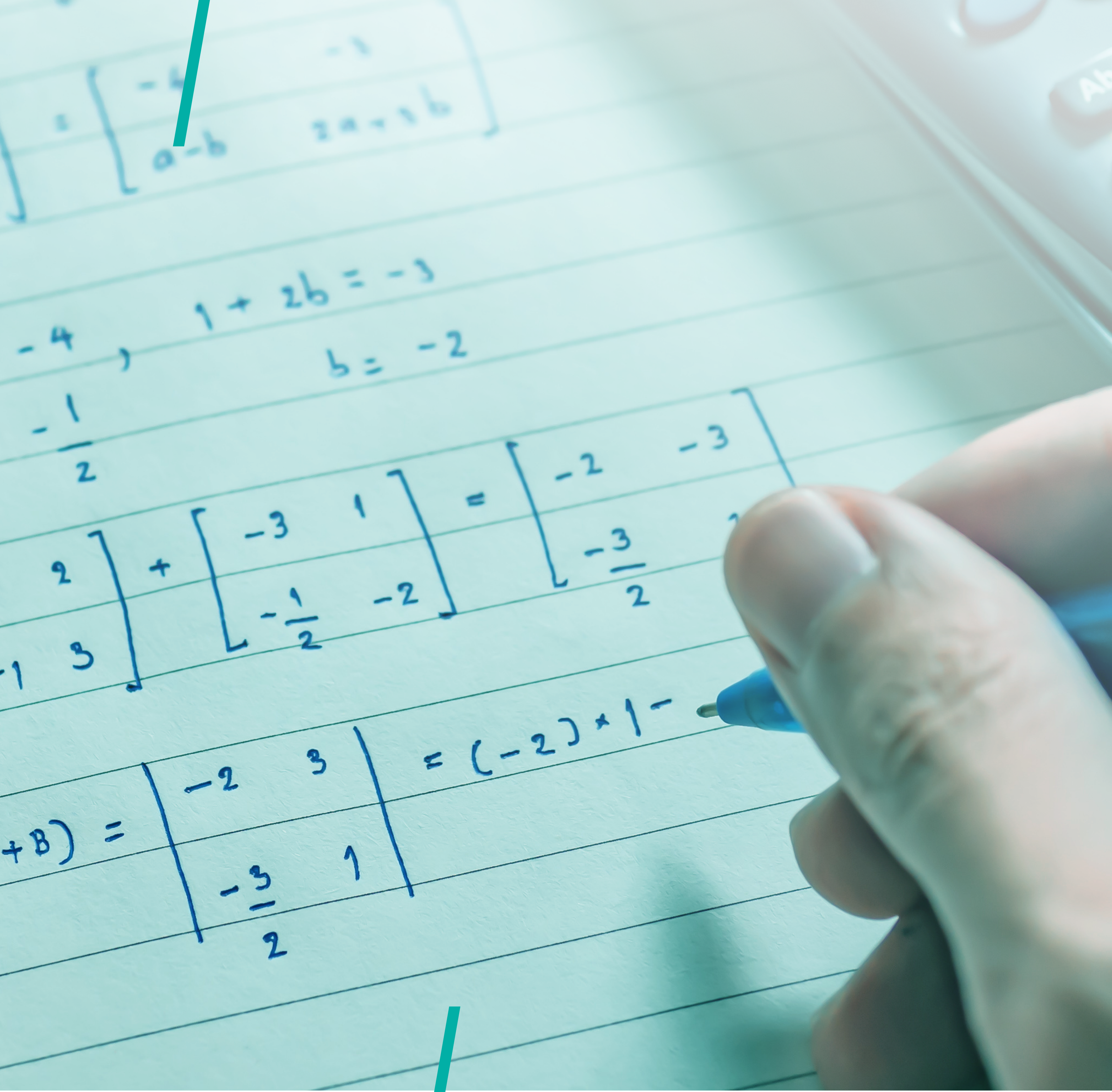
7

MATEMÁTICA

ÁLGEBRA LINEAR

SEMANA 7: APLICAÇÕES AVANÇADAS



UNIVESP
Universidade Virtual do Estado de São Paulo

FORMADOR AUTOR **CRISTHOF JOHAN ROOSEN RUNGE**

7

ÁLGEBRA LINEAR

APLICAÇÕES AVANÇADAS

INTRODUÇÃO

Nesta apostila, serão explorados conceitos fundamentais de **álgebra linear e suas aplicações práticas**, focando em situações como o movimento de drones no espaço tridimensional e a formulação de equações de superfícies a partir de coordenadas conhecidas. Será abordada a utilização de vetores para descrever posições e movimentos, além de examinarmos subespaços e transformações lineares como ferramentas matemáticas essenciais.

O estudo começa com a compreensão dos espaços vetoriais e a representação de figuras no espaço $\mathbb{R}^3$. Em seguida, será analisada a forma como drones se deslocam através de vetores de posição e deslocamento, utilizando translações e rotações para ajustar suas trajetórias.

Para a reconstrução de equações, serão explorados sistemas lineares e determinantes, construindo modelos que se aplicam a diversas áreas do conhecimento.

Ao longo da apostila, recursos computacionais como GeoGebra e Matlab são indicados para enriquecer o aprendizado e proporcionar visualização prática dos conceitos discutidos. O objetivo é mostrar como a álgebra linear pode ser aplicada a problemas reais e servir como preparação para desafios futuros.

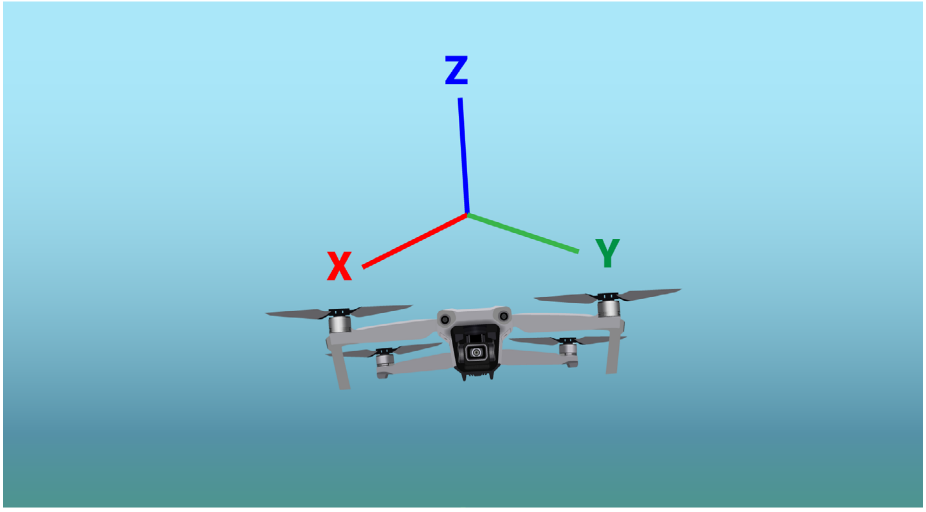
Nesta apostila, haverá os seguintes tópicos:

1. **Introdução geral**
2. **Estudo de caso I – Analisando os movimentos de drone em espaço tridimensional**
3. **Fundamentos teóricos**
4. **Estudo de caso II – Reconstruindo equações com base em coordenadas conhecidas**
5. **Aplicações práticas**
6. **Recursos computacionais e ferramentas**
7. **Glossário**
8. **Sugestões de recursos adicionais**

1. INTRODUÇÃO GERAL

Nesta apostila, serão aplicados conceitos fundamentais de álgebra linear para analisar trajetórias no espaço tridimensional e a construção de equações de superfícies com base em conjuntos finitos de pontos. Um exemplo **aplicável é o estudo do movimento de drone**, descrito por vetores em espaço $\mathbb{R}^3$. Outra análise é a **obtenção das equações de curvas e superfícies a partir de coordenadas conhecidas**, utilizando sistemas lineares e determinantes.

2. ESTUDO DE CASO I – ANALISANDO OS MOVIMENTOS DE DRONE EM ESPAÇO TRIDIMENSIONAL



2.1 VETORES E ESPAÇO VETORIAL

O ponto de partida é o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, que constitui o conjunto formado por todos os vetores tridimensionais com coordenadas reais. Lembrando que um espaço obedece às operações de adição vetorial e multiplicação por escalar atendendo aos 10 axiomas vistos na Semana 4.

Em se tratando da análise em $\mathbb{R}^3$, um vetor pode ser utilizado para descrever tanto uma posição quanto um movimento.

→ Um vetor de posição pode ser denotado por:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

→ Um vetor de deslocamento (movimento) pode ser descrito como:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

2.2 SUBESPAÇOS E TRANSFORMAÇÕES

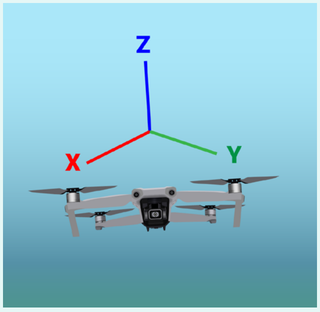
Subespaço vetorial é uma parte de espaço vetorial que, sozinho, também forma espaço vetorial, satisfazendo as mesmas propriedades. Transformações — como rotação, translação ou escala — são ferramentas que permitem manipular vetores no espaço, frequentemente representadas por matrizes.

3. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

3.1 REPRESENTAÇÃO DE POSIÇÕES E MOVIMENTOS

Considere um drone que se mova em três direções:

→ **Eixo x:** horizontal (direita/esquerda)
→ **Eixo y:** profundidade (frente/atrás)
→ **Eixo z:** vertical (altura)



Cada movimento do drone pode ser representado por uma translação (transformação afim), que se constitui na soma do vetor posição, com o vetor deslocamento.

$$\mathbf{p}_f = \mathbf{p}_i + \mathbf{v}$$

→ $\mathbf{p}_i$ é a posição inicial.
→ $\mathbf{p}_f$ é a posição final.
→ $\mathbf{v}$ é o vetor de deslocamento.

3.2 SUBESPAÇO VETORIAL HORIZONTAL

Fixando a altitude do drone (isto é, mantendo z = constante), os deslocamentos se restringem ao plano xy. Ao restringir os movimentos ao plano xy, na prática, se está definindo um subespaço vetorial W de vetores de movimento em $\mathbb{R}^3$. Os vetores nesse subespaço têm a forma:

$$\mathbf{v_W} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ou seja, $W = \{\mathbf{v}_W = (v_x v_y, 0) | v_x, v_y \in \mathbb{R}\}$.

Note que W é fechado tanto para a adição quanto para a multiplicação por escalar:
Sejam dois vetores arbitrários $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em W:

$$\mathbf{u} = (x_1, y_1, 0) \in W, \mathbf{v} = (x_2, y_2, 0) \in W.$$
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) \in W.$$

Tanto $x_1 + x_2$ quanto $y_1 + y_2 \in \mathbb{R}$. Portanto, W é fechado sob adição.

Seja agora o vetor $u = (x, y, 0) \in \mathbb{R}$, e um escalar qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$.
$$\lambda \mathbf{u} = \lambda(x, y, 0) = (\lambda x, \lambda y, 0) \in W$$

Tanto λx quanto $\lambda y \in \mathbb{R}$. Portanto, W é fechado sob multiplicação escalar.

3.3 TRANSFORMAÇÕES LINEARES: ROTAÇÕES

Pode-se implementar rotações em qualquer plano no espaço tridimensional. Especificamente, se o interesse estiver na rotação no plano xy em torno do eixo z, a matriz que produz essa rotação é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para rotação de 90º, tem-se que $cos\theta = 0$ e $sen\theta = 1$. Então:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que aplicar essa transformação a um vetor posição corresponde à multiplicação:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_y \\ p_x \\ p_z \end{bmatrix}$$

Ou seja, a transformação linear correspondente à matriz é equivalente a: $T((x,y,z)) = (-y,x,z)$. Ou seja, o vetor resultante tem sua coordenada $x = -y$ e $y = x$ em relação ao vetor original.

EXEMPLO DE DESLOCAMENTOS NO ESPAÇO 3D

CONSIDERE UM DRONE QUE PARTA ORIGEM DOS SISTEMAS DE COORDENADAS, ENTÃO:

1. PARTINDO DA ORIGEM:

$$\mathbf{p_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. REALIZANDO UMA TRANSLAÇÃO UTILIZANDO VETOR DE DESLOCAMENTO:

Aplicando vetores de deslocamento $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$, a nova posição passa a ser:

$$\mathbf{p_f} = \mathbf{p_i} + \mathbf{v}$$

Então a posição após a translação é:

$$\mathbf{p_f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

3. DESLOCAMENTO NA MESMA ALTITUDE

Pode-se agora navegar através do plano xy, com altitude fixa de $z = 10$ (última altitude do drone). Para isso, usa-se operações de translação, utilizando somente vetores do subespaço vetorial $W = \{\mathbf{v_w}(v_x v_y 0)\} | v_x, v_y \in \mathbb{R}\}$, que define o conjunto de vetores de deslocamento no mesmo plano xy.

Assim, suponha o vetor de deslocamento $\mathbf{v_w} = (3,7,0)$. Note que a operação de translação, nesse caso, não altera a coordenada z de altitude do drone, ou seja, o deslocamento ocorre somente no plano xy.

Então o novo ponto final passa a ser:

$$\mathbf{p_f}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix}$$

4. ROTAÇÕES SUCESSIVAS

Pode-se realizar sucessivas rotações, aplicando a transformação linear definida pela matriz A. Para o caso específico, quando o ângulo de rotação é 90º em torno do eixo z, aplicar a matriz A corresponde a realizar a transformação: $T((x,y,z)) = (-y,x,z)$.

Assim, suponha que se realize quatro rotações de 90º sucessivas. Isso implica que ao final se deve retornar ao mesmo ponto (a rotação seria de 360º).

Aplicando quatro rotações sucessivas ao drone na posição $\mathbf{p_f}' = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix}$

tem-se:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} -12 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} -4 \\ -12 \\ 10 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 12 \\ -4 \\ 10 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Como era de se esperar, após quatro rotações de 90º o drone volta para a posição inicial.

4. ESTUDO DE CASO II – RECONSTRUINDO EQUAÇÕES COM BASE EM COORDENADAS CONHECIDAS

4.1 INTRODUÇÃO

Na prática da modelagem matemática, muitas vezes há apenas um conjunto finito de pontos conhecidos (obtidos por medição, observação ou interpolação) e busca-se encontrar uma equação que represente a curva ou superfície que passa por eles. Esse problema pode ser resolvido com ferramentas de álgebra linear — especialmente sistemas lineares de equações e determinantes.

4.2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A abordagem baseia-se na seguinte ideia:

1. Caso se tenha a equação geral (com coeficientes c_i), pode-se substituir as coordenadas conhecidas em cada ponto e gerar um sistema de equações.
2. Esse sistema pode ser representado como um sistema matricial:

$$A \cdot \mathbf{c} = 0$$

Sendo A a matriz de coeficientes, c o vetor de incógnitas (correspondente aos coeficientes da equação da curva ou superfície), e o vetor nulo representando um sistema homogêneo.

3. Para obter soluções não triviais $(\mathbf{c} \neq 0)$, deve-se ter:

$$\det(A) = 0$$

Isso garante que há infinitas soluções — exatamente o que se quer, pois busca-se uma equação (não o zero trivial), que satisfaz os infinitos pontos da curva ou da superfície.

4.3 DETERMINANDO O MODELO DE RETA NO PLANO (2D)

Equação geral de uma reta:

$$c_1x + c_2y + c_3 = 0$$

Dados dois pontos distintos conhecidos $(x_1, y_1)\mathrm{e}(x_2, y_2)$, que pertencem à reta. Substitui-se esses valores na equação para formar um sistema homogêneo:

$$\begin{aligned} c_1x + c_2y + c_3 = 0 \\ c_1x_1 + c_2y_1 + c_3 = 0 \\ c_1x_2 + c_2y_2 + c_3 = 0 \end{aligned}$$

Matricialmente, tem-se:

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A condição é:

$$\det(A) = 0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Calculando o determinante, chega-se aos seguintes valores para c_1, c_2 e c_3, em função dos pontos especificados:

$$c_1 = (y_1 - y_2)$$
$$c_2 = (x_2 - x_1)$$
$$c_3 = x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1$$

Assim, dados dois pontos conhecidos, é possível determinar a equação de qualquer reta que passa por esses pontos.

EXEMPLO – DETERMINANDO A EQUAÇÃO DA RETA A PARTIR DE DOIS PONTOS ESPECIFICADOS

DETERMINE A EQUAÇÃO DA RETA QUE PASSA PELOS PONTOS (1,1) E (-3,7).

Utilizando os resultados da seção anterior, tem-se que:

$$c_1 = (y_1 - y_2) = 1 - 7 = -6$$
$$c_2 = (x_2 - x_1) = -3 - 1 = -4$$
$$c_3 = x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 = 1 \cdot 7 - (-3) \cdot 1 = 10$$

Então a equação da reta pode ser escrita como: $-6 \cdot x - 4 \cdot y + 10 = 0$. Simplicando (dividindo a equação por 2), tem-se:

$$-3 \cdot x - 2 \cdot y + 5 = 0$$

Verifica-se, de fato, que (1,1) e (-3,7) são pontos da reta, pois:

$$-3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 5 = -5 + 5 = 0$$

e

$$-3 \cdot (-3) - 2 \cdot 7 + 5 = 9 - 14 + 5 = 0$$

A ideia que foi utilizada para determinar a equação da reta pode ser facilmente estendida para determinar a equação de outras funções no plano e no espaço.

FICA A DICA!

Assim, ao conhecer pontos específicos que pertencem a uma curva ou superfície e a forma da equação geral, pode-se determinar a equação específica que passa por esses pontos. Para isso, monta-se um sistema homogêneo de equações lineares e iguala-se o determinante da matriz de coeficientes a zero. Por exemplo:

Circunferência:

Equação geral: $c_1\left(x^2+y^2\right)+c_2x+c_3y+c_4=0$

Então, é preciso determinar:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ {x_1}^2+{y_1}^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ {x_2}^2+{y_2}^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ {x_3}^2+{y_3}^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

Esfera:

Equação geral:

$c_1\left({x_2}^2+{y_2}^2+{z_2}^2\right)+c_2x+c_3y+c_4z+c_5=0$

Então, é preciso determinar:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ {x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ {x_2}^2+{y_2}^2+{z_2}^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ {x_3}^2+{y_3}^2+{z_3}^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ {x_4}^2+{y_4}^2+{z_4}^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=0$$

5. APLICAÇÕES PRÁTICAS

Dentre as diversas áreas e aplicações dos conceitos vistos durante a Semana 7, podem ser citados:

Área	Aplicação
Robótica e drones	Controle de trajetória e estabilidade
Astronomia	Determinação de órbitas celestes
Design gráfico	Construção de superfícies 3D em modelagem
Engenharia civil	Análise de estruturas tridimensionais

6. RECURSOS COMPUTACIONAIS E FERRAMENTAS

Nome	Uso
GeoGebra 3D	Visualização e manipulação de transformações no espaço
Matlab/Octave	Cálculo de rotações, sistemas lineares e vetores
Python (SymPy)	Manipulação simbólica de equações e matrizes

7. GLOSSÁRIO

Determinante: Valor escalar associado a uma matriz, crucial para sistemas lineares

Rotação: Transformação linear que preserva módulo e gira ângulo

Sistema homogêneo: Sistema de equações cuja matriz de termos independentes é o vetor nulo

Subespaço: Parte de um espaço que também forma espaço vetorial

Transformação linear: Operação descrita por matriz sobre um vetor

Vetor: Elemento com direção, sentido e módulo

8. SUGESTÕES DE RECURSOS ADICIONAIS

- **GeoGebra –** https://www.geogebra.org/t/algebra
- **Khan Academy -** Álgebra Linear (Em português) – https://pt.khanacademy.org/math/linear-algebra
- **3Blue1Brown –** Essence of Linear Algebra
- **WOLFRAM ALPHA –** https://www.wolframalpha.com

REFERÊNCIAS

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre, RS: Bookman, 2012.