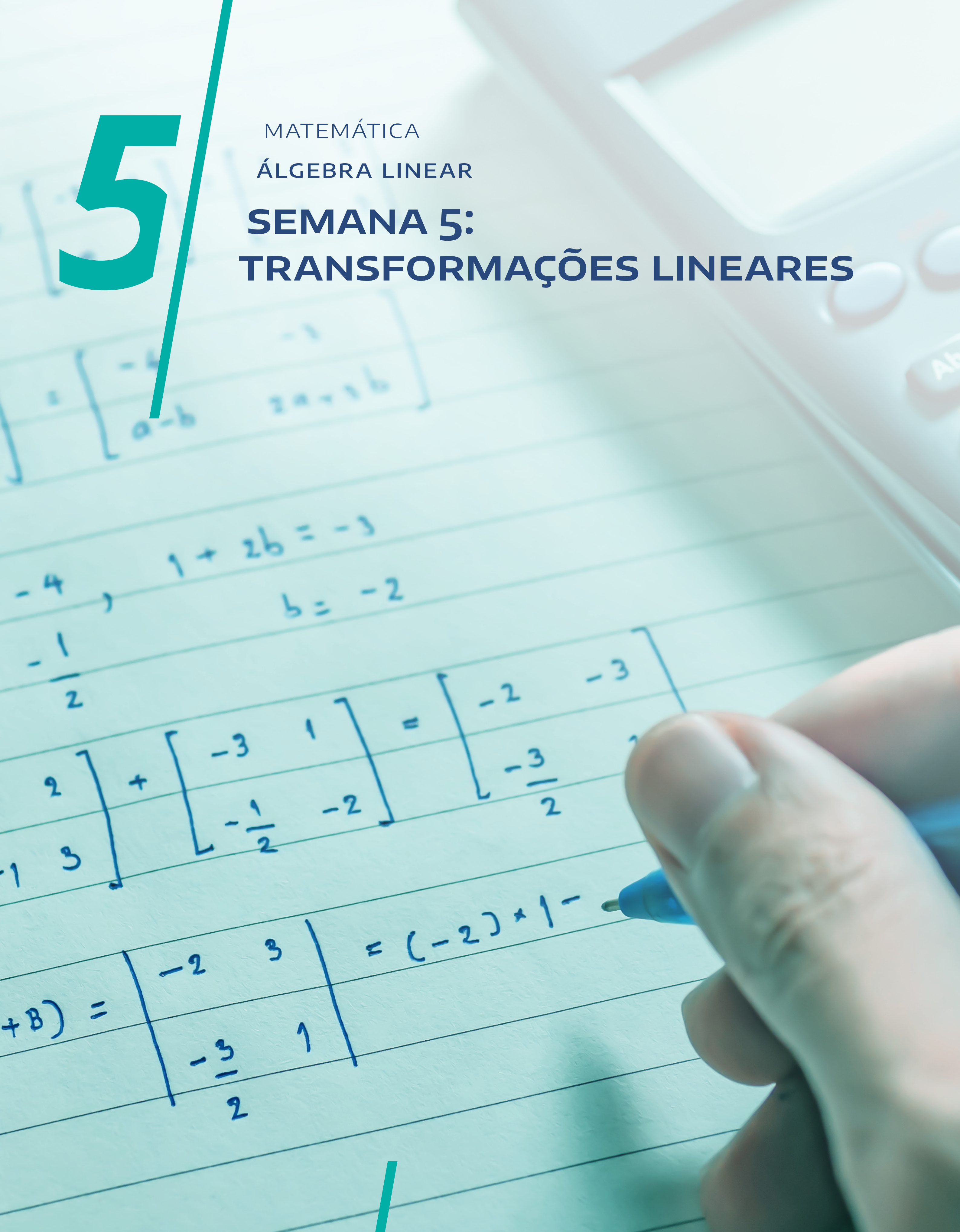


5

MATEMÁTICA

ÁLGEBRA LINEAR

SEMANA 5: TRANSFORMAÇÕES LINEARES

UNIVESP
Universidade Virtual do Estado de São Paulo

FORMADOR AUTOR **CRISTHOF JOHAN ROOSEN RUNGE**

5

ÁLGEBRA LINEAR

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

INTRODUÇÃO

Esta apostila abrange ampla gama de tópicos essenciais para a compreensão das transformações lineares, começando por uma introdução histórica que destaca as contribuições de pioneiros como Hermann Grassmann e Giuseppe Peano. A seguir, define-se o que são transformações lineares, explicando suas propriedades fundamentais de homogeneidade e aditividade. A apostila também explora aplicações práticas em diversas áreas, como computação gráfica, física e *machine learning*.

A sobre "**Transformações lineares**" examina suas propriedades e fornece exemplos detalhados, incluindo operadores de rotação e projeção, além de exercícios resolvidos para solidificar o entendimento. Em "**Núcleo e imagem de uma transformação linear**", núcleo e imagem são definidos e analisados, com exemplos para ilustrar diferentes contextos.

Na parte "**Aplicações em computação gráfica**", a apostila ilustra o uso de transformações lineares para manipular objetos em 3D, apresentando um exemplo prático de rotação de um vetor em $\mathbb{R}^3$.

Concluindo, a apostila ressalta a importância desses conceitos como fundamentos da álgebra linear, essenciais para aplicações em engenharia, ciência, tecnologia e além. Além disso, oferece recursos adicionais para aprofundamento, incluindo softwares e plataformas educacionais, enriquecendo o aprendizado e a aplicação prática desses conceitos matemáticos.

Nesta apostila, haverá os seguintes tópicos:

1. **Introdução**
2. **Transformações lineares**
3. **Núcleo e imagem de uma transformação linear**
4. **Aplicações em computação gráfica**
5. **Conclusão**
6. **Sugestão de recursos adicionais**
7. **Glossário**

1. INTRODUÇÃO

1.1 HISTÓRIA DAS TRANSFORMAÇÕES LINEARES

O estudo das transformações lineares tem suas raízes no século XIX, com o desenvolvimento da álgebra linear e a formalização dos espaços vetoriais. Hermann Grassmann e Giuseppe Peano foram pioneiros na definição de espaços vetoriais e transformações lineares. No século XX, David Hilbert e outros matemáticos expandiram essas ideias para espaços de dimensão infinita, fundamentais na análise funcional. As transformações lineares tornaram-se essenciais em diversas áreas, como física, computação gráfica e ciência de dados, sendo hoje um dos pilares da matemática moderna.

1.2 O QUE É UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR?

Transformação linear é uma função entre dois espaços vetoriais que preserva as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar. Formalmente, uma função $T: V \to W$ é transformação linear se, para quaisquer vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ e qualquer escalar $a \in \mathbb{R}$, valem as propriedades:

1. **Homogeneidade:** $T(a\mathbf{u}) = aT(\mathbf{u})$
2. **Aditividade:** $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})$

1.3 APLICAÇÕES PRÁTICAS

As transformações lineares são funções que mapeiam vetores de um espaço vetorial para outro, preservando as operações de soma e multiplicação por escalar. Elas são fundamentais em diversas áreas, confira a seguir:

NA PRÁTICA

COMPUTAÇÃO GRÁFICA: ROTAÇÕES, TRANSLAÇÕES E MUDANÇAS DE ESCALA

Na computação gráfica, as transformações geométricas são usadas para manipular objetos em 2D e 3D. Enquanto todas as transformações lineares são geométricas, nem todas as transformações geométricas são lineares. Especificamente, as transformações geométricas incluem tanto transformações lineares quanto afins (que incluem translações). Essas diferenças são importantes no contexto da computação gráfica, no qual a manipulação de imagens e objetos pode exigir combinação dessas operações para mudar a posição e a aparência de objetos no espaço de forma desejada.
Aqui estão os principais tipos de transformações:

1. Rotação:

Uma rotação gira um objeto em torno de um eixo. Por exemplo, em 2D, a matriz de rotação é:

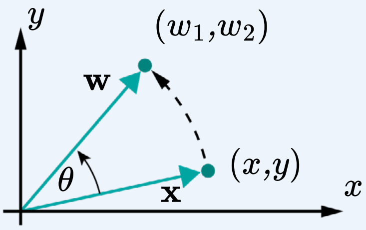
$$R(\theta) = \begin{bmatrix} cos\ \theta & -\ sin\ \theta \\ sin\ \theta & cos\ \theta \end{bmatrix}$$

A figura abaixo mostra um exemplo de rotação de um vetor em 2D.
O processo de rotação é descrito pelas equações:

$$\begin{matrix} \omega_1 = x\ cos\ \theta - y\ sin\ \theta \\ \omega_2 = x\ sin\ \theta + y\ cos\ \theta \end{matrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\ \theta & -\ sin\ \theta \\ sin\ \theta & cos\ \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Essas equações mostram como os componentes e do vetor original são transformados nos componentes w_1 e w_2 do vetor rotacionado por meio de funções trigonométricas de seno e cosseno. A rotação é representada graficamente como uma curva pontilhada que conecta as pontas dos vetores.

Rotação pelo ângulo θ



$$\begin{aligned} w_1 &= x\ cos\ \theta - y\ sen\ \theta \\ w_2 &= x\ sen\ \theta + y\ cos\ \theta \end{aligned}$$

Fonte: Anton; Rorres (2012).

Após a rotação, o vetor resultante $\mathbf{w}$ aparece mantendo o mesmo comprimento, mas alterando sua direção de acordo com o ângulo de rotação θ

Em 3D, as rotações podem ser em torno dos eixos x,y ou z, cada uma com sua matriz específica.

2. Translação:

A translação move um objeto em direção específica. Embora a translação não seja transformação linear pura (pois não preserva a origem), sendo classificada como transformação afim, ela é frequentemente combinada com transformações lineares em coordenadas homogêneas.

3. Mudança de escala:

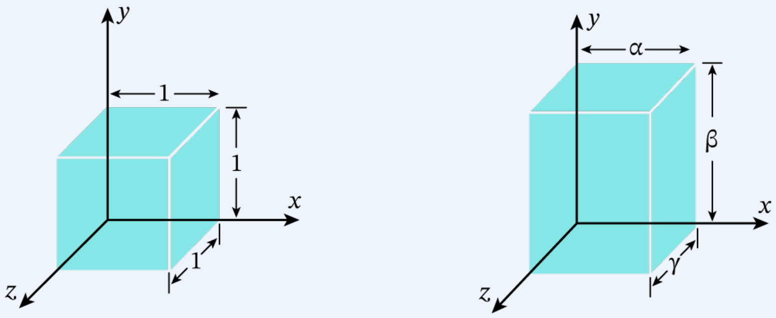
A mudança de escala altera o tamanho de um objeto. A matriz de escala em 2D é:

$$S = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

Em 3D, a matriz é estendida para incluir a escala no eixo z.

$$S = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

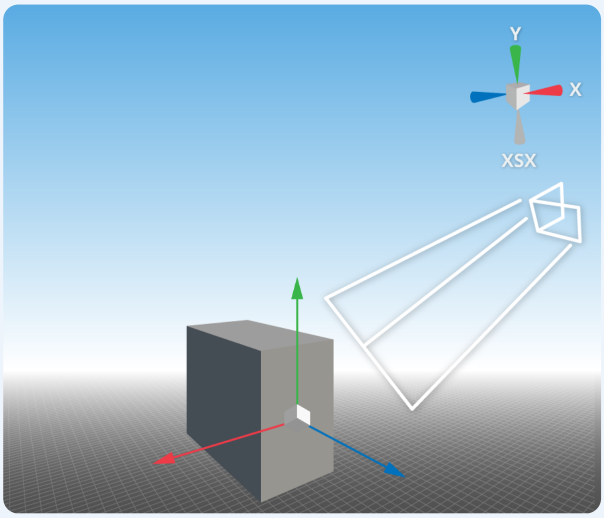
A figura abaixo ilustra um cubo unitário no sistemas tridimensional de coordenadas, e a sua transformação, resultando em um paralelepipedo de dimensões $\alpha \times \beta \times \gamma$. A imagem à direita é a representação do cubo unitário, com arestas de comprimento unitário no sistema tridimensional de coordenadas retangulares x, y, z. O cubo possui um de seus vértices na origem do sistema de coordenadas. A imagem à direita ilustra o paralelepípedo resultante após a transformação de mudança de escala no mesmo sistema de coordenadas. As arestas do paralelepípedo têm comprimento α, β e γ nas direções dos eixos x, y e z, respectivamente.



Aplicações práticas:

→ Animação de personagens em filmes e jogos.

- Transformação de câmeras em ambientes 3D.



- *Design* de interfaces gráficas.

FÍSICA: TRANSFORMAÇÕES DE SISTEMAS DE COORDENADAS

Na física, as transformações lineares são usadas para descrever mudanças entre sistemas de coordenadas, o que é essencial para analisar fenômenos em diferentes referenciais.

1. Mudança de base:

- Um vetor pode ser representado em diferentes sistemas de coordenadas. Por exemplo, um vetor $\mathbf{v}$ em sistema de coordenadas pode ser transformado para outro sistema usando matriz de mudança de base.

2. Transformações de Lorentz:

- Na relatividade especial, as transformações de Lorentz descrevem como as coordenadas de tempo e espaço mudam entre referenciais inerciais em movimento relativo.

Aplicações práticas:

- Análise de movimentos em diferentes referenciais (como em mecânica clássica e relatividade).
- Conversão entre sistemas de coordenadas em engenharia e astronomia.
- Simulações de sistemas físicos complexos.

MACHINE LEARNING: ALGORITMOS DE CLASSIFICAÇÃO E REDUÇÃO DE DIMENSIONALIDADE

Em *machine learning*, as transformações lineares são usadas para manipular dados e encontrar padrões. Um exemplo clássico é o algoritmo **SVM** (***support vector machine***).

1. SVM (*support vector machine*):

O SVM é um algoritmo de classificação que encontra um hiperplano ótimo para separar dados em classes. Se os dados não forem linearmente separáveis, uma transformação linear (ou não linear) pode ser aplicada para mapear os dados para um espaço de maior dimensão, em que a separação linear é possível.

2. Redução de dimensionalidade:

Técnicas como PCA (análise de componentes principais) usam transformações lineares para projetar dados de alta dimensão em um espaço de menor dimensão, mantendo a maior variância possível.

Aplicações práticas:

- Classificação de imagens, textos e dados biomédicos.
- Reconhecimento de padrões em grandes conjuntos de dados.
- Visualização de dados multidimensionais.

2. TRANSFORMAÇÕES LINEARES

2.1 PROPRIEDADES

Teorema: Se $T: V \to W$ for uma transformação linear, então:

(a) $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

(b) $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$, quaisquer que sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V.

2.2 EXEMPLOS DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Alguns exemplos de transformações lineares são:

1. Operador de rotação: rotaciona vetores em ângulo θ no plano.
2. Operador de projeção: projeta vetores em subespaço.
3. Operador identidade: transforma cada vetor em si mesmo.

> **IMPORTANTE**
> Note que os exemplos acima podem ser realizados por meio de operações matriciais. Desta forma, essas transformações, também podem ser chamadas de **transformações matriciais**.

2.3 EXERCÍCIO RESOLVIDO

EXERCÍCIO 1 - VERIFIQUE SE A FUNÇÃO $T(x, y) = (x + y, x - y)$ É TRANSFORMAÇÃO LINEAR.

Solução:

1. Homogeneidade: $T(a\,(x, y)) = T(ax, ay) = (ax + ay, ax - ay) = a(x + y, x - y) = aT(x, y)$.

2. Aditividade: $T((x1, y1) + (x2, y2)) = T(x1 + x2, y1 + y2) = (x1 + x2 + y1 + y2, x1 + x2 - y1 - y2) = (x1 + y1, x1 - y1) + (x2 + y2, x2 - y2) = T(x1, y1) + T(x2, y2)$.

Portanto, T é uma transformação linear.

3. NÚCLEO E IMAGEM DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

3.1 DEFINIÇÃO E CARACTERÍSTICAS

→ **Núcleo** $\boldsymbol{nuc(T)}$ ou $\boldsymbol{ker(T)}$**:** conjunto de vetores em um espaço vetorial V (domínio) que são mapeados para o vetor nulo no espaço vetorial W (contradomínio).

$$Ker(T) = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$

→ **Imagem (**$\boldsymbol{Im(T)}$**):** conjunto de vetores em W que são imagens de vetores em V.

$$Im(T) = \{T(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\}$$

3.2 EXEMPLOS DE NÚCLEO E IMAGEM

Transformação de projeção ortogonal dos pontos de $\mathbb{R}^3$, no plano xy

- **Núcleo:** todos os pontos no eixo z.
- **Imagem:** plano de projeção (plano xy).

Transformação de projeção ortogonal dos pontos de $\mathbb{R}^2$

- **Núcleo:** apenas o vetor nulo.
- **Imagem:** todo o $\mathbb{R}^2$.

3.3 EXERCÍCIO RESOLVIDO

EXERCÍCIO 2 - DETERMINE O NÚCLEO E A IMAGEM DA TRANSFORMAÇÃO LINEAR $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, T\big(x, y, z\big) = \big(x + y, y + z\big).$

Solução:

1. Núcleo: Resolva $T(x, y, z) = (0, 0)$:
$\{x + y = 0, y + z = 0 \Rightarrow x = -y, z = -y \Rightarrow \text{Ker}(T) = \{(-y, y, -y) \mid y \in \mathbb{R}\}\}$

2. Imagem: Qualquer $(a{,}b)$, com $a, b \in \mathbb{R}$ pode ser escrito como:
$T\big(x, y, z\big) = \big(a = x + y, b = y + z\big) \Rightarrow \text{Im}\big(T\big) = \mathbb{R}^2$

4. APLICAÇÕES EM COMPUTAÇÃO GRÁFICA

4.1 TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

As transformações lineares são amplamente utilizadas em computação gráfica para manipular objetos em 3D conforme descrito anteriormente. Como um dos exemplos citados, há o operador de rotação, capaz de rotacionar um objeto 3D em torno de um eixo desejado. Veja o exemplo a seguir:

4.2 EXERCÍCIO RESOLVIDO

EXERCÍCIO 3- APLIQUE UMA ROTAÇÃO DE 90° EM TORNO DO EIXO Z AO VETOR PERTENCENTE A $\mathbb{R}^3$, $(x, y, z) = (1, 0, 0)$.

Solução:

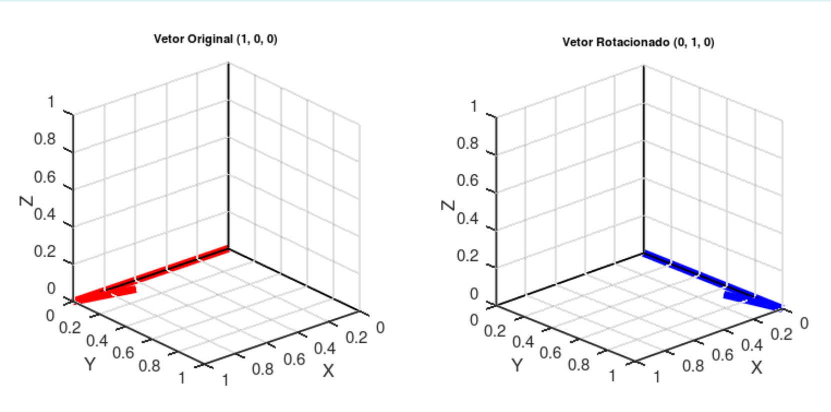
A matriz de rotação para 90° em torno do eixo z é:

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow R_z(90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando a matriz ao vetor (1,0,0):

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, o vetor rotacionado é (0,1,0).



Fonte: Elaborado pelo autor.

5. CONCLUSÃO

Transformações lineares, núcleo e imagem são conceitos fundamentais da álgebra linear, que não apenas formam a base teórica para entender a estrutura dos espaços vetoriais, mas também abrem portas para aplicações práticas em áreas como **computação gráfica, física, engenharia, ciência de dados e *machine learning***. Ao dominar esses conceitos, você ganha ferramentas poderosas para modelar problemas complexos, decompor sistemas em componentes essenciais e explorar a relação entre diferentes dimensões matemáticas. Seja projetando algoritmos de inteligência artificial, otimizando sistemas de engenharia ou criando gráficos 3D impressionantes, o estudo do **núcleo** (que revela as soluções de sistemas homogêneos) e da **imagem** (que descreve o alcance de uma transformação) oferece insights profundos e transformadores. **Esses pilares da álgebra linear não só enriquecem sua compreensão matemática, como também impulsionam inovações que moldam o futuro da tecnologia e da ciência**.

6. SUGESTÃO DE RECURSOS ADICIONAIS

Para aprofundar o estudo de transformações lineares e os conceitos de núcleo e imagem de uma transformação linear, é extremamente benéfico utilizar combinação de recursos tecnológicos e educacionais. Esses recursos não só oferecem aprendizado teórico mais robusto, como também proporcionam ferramentas práticas para a visualização e experimentação dos conceitos.

SOFTWARES

GeoGebra:
Este *software* interativo é uma ferramenta poderosa para a visualização gráfica de transformações lineares. O GeoGebra permite a manipulação de vetores e matrizes em tempo real, facilitando o entendimento visual de como as transformações afetam vetores e formas geométricas. É particularmente útil para estudantes que aprendem bem por meio de representações visuais dinâmicas.

Octave:
Octave é uma plataforma eficiente para realizar cálculos numéricos. Ele é ideal para simulações de transformações lineares e permite a análise numérica de núcleo e imagem de matrizes, através de comandos e funções de álgebra linear. A capacidade de programar e executar scripts torna-o adequado para experimentação e análise aprofundada.

Python (NumPy):
O Python, com a biblioteca NumPy, oferece um ambiente rico para o processamento de *arrays* e operações matemáticas. NumPy suporta operações de álgebra linear e permite simular transformações lineares, bem como calcular núcleos e imagens de matrizes. Como linguagem de programação versátil, é amplamente utilizada tanto na academia quanto na indústria, oferecendo experiência prática valiosa para estudantes.

SITES

Khan Academy:
Como uma plataforma educacional amplamente reconhecida, a Khan Academy proporciona acesso gratuito a vídeos explicativos e exercícios práticos sobre álgebra linear. Os materiais didáticos ajudam a consolidar uma compreensão conceitual dos conceitos teóricos de transformações lineares, núcleo e imagem.

Wolfram Alpha:
Este motor de resposta computacional é uma excelente ferramenta para explorar problemas de álgebra linear, permitindo calcular transformações, encontrar núcleos e imagens de matrizes de forma rápida e precisa. É uma ferramenta de consulta útil para realizar verificações de cálculos e para explorar exemplos adicionais.

A combinação desses *softwares* e *sites* oferece um método abrangente e interativo para o estudo das transformações lineares e dos conceitos de núcleo e imagem. Ao integrar a prática computacional com materiais didáticos de qualidade, esses recursos ajudam a construir uma compreensão sólida e aplicada de conceitos fundamentais em álgebra linear.

7. GLOSSÁRIO

Aditividade: propriedade $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$.

Homogeneidade: propriedade $T(a\mathbf{u}) = aT(\mathbf{u})$.

Imagem (Im): conjunto de vetores que são imagens da transformação.

Núcleo (Ker): conjunto de vetores mapeados para o vetor nulo.

Transformação linear: função entre espaços vetoriais que preserva adição e multiplicação por escalar.

REFERÊNCIAS

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre, RS: Bookman, 2012.