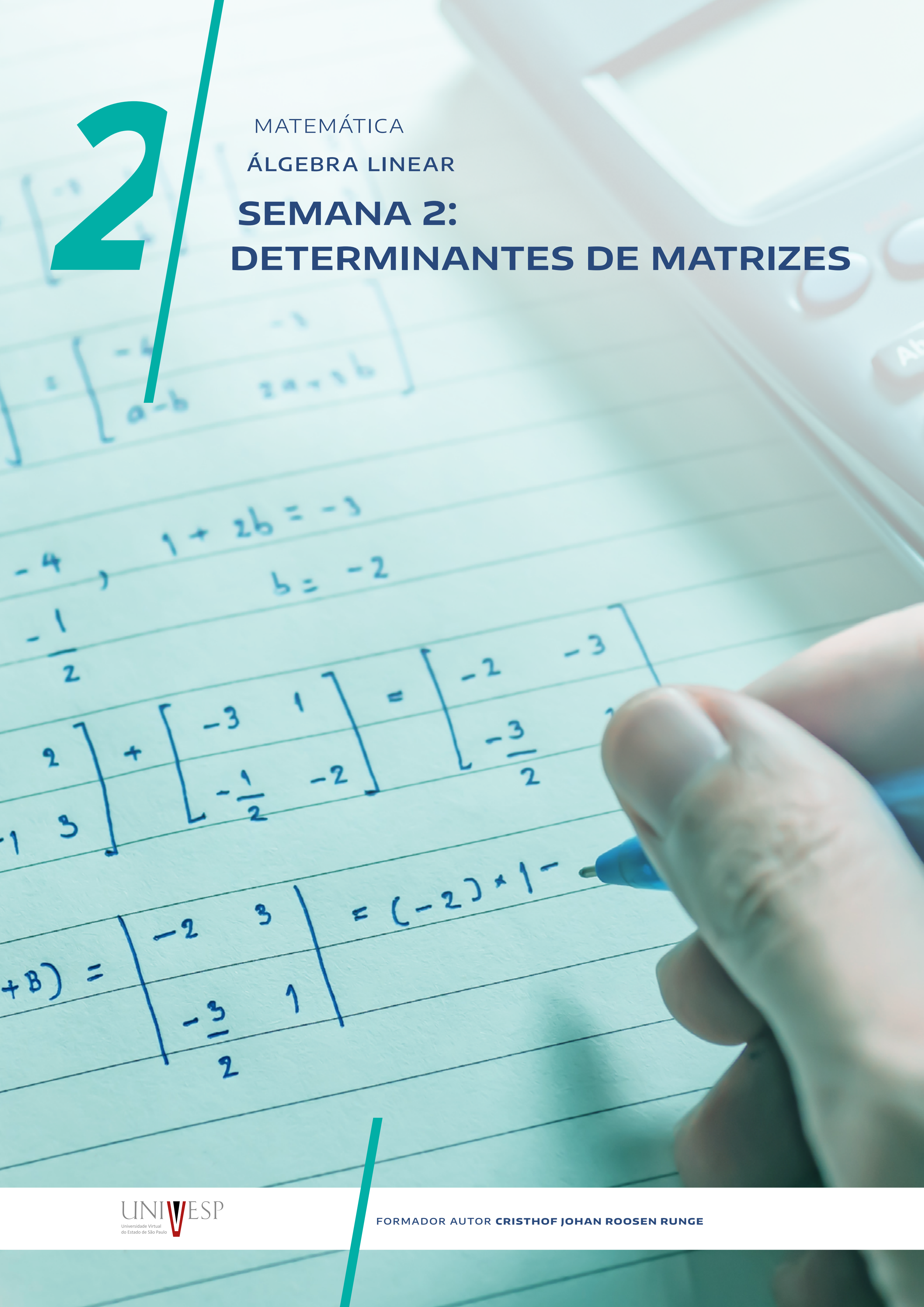

2

MATEMÁTICA

ÁLGEBRA LINEAR

SEMANA 2: DETERMINANTES DE MATRIZES

UNIVESP
Universidade Virtual do Estado de São Paulo

FORMADOR AUTOR **CRISTHOF JOHAN ROOSEN RUNGE**

2

ÁLGEBRA LINEAR

DETERMINANTES DE MATRIZES

INTRODUÇÃO

Boas-vindas ao estudo dos determinantes em álgebra linear! Esta apostila foi elaborada para proporcionar compreensão abrangente e sistemática sobre esse importante tópico matemático.

A jornada terá início com uma breve descrição da **evolução histórica dos determinantes**. Em seguida, serão abordadas as propriedades fundamentais e os **métodos de cálculo**, começando com matrizes 2x2 e progredindo para determinantes de ordem superior. Cada conceito será apresentado com exemplos resolvidos detalhadamente, passo a passo, permitindo compreensão clara e objetiva.

Será dada especial atenção à **expansão por cofatores**, à **regra de Cramer para resolução de sistemas lineares** e às **aplicações geométricas dos determinantes**. A apostila inclui também seções dedicadas à relação entre determinantes e matrizes inversas.

Todo o conteúdo foi estruturado de forma progressiva, com explicações claras e exemplos práticos. Ao final do estudo, você terá adquirido uma sólida base teórica e prática sobre determinantes e suas aplicações na álgebra linear.

Nesta apostila, haverá os seguintes tópicos:

1. **Introdução aos determinantes**
2. **Conceitos fundamentais**
3. **Cálculo de determinantes 2x2**
4. **Determinantes 3x3**
5. **Expansão por cofatores**
6. **Propriedades dos determinantes**
7. **Regra de Cramer**
8. **Determinantes e matriz inversa**
9. **Aplicações em geometria**
10. **Glossário**

1. INTRODUÇÃO AOS DETERMINANTES

HISTÓRIA E DESENVOLVIMENTO

No ano de 1683, o matemático japonês Seki Kowa trouxe à luz a ideia de determinante ao associá-la a um polinômio relacionado a uma matriz quadrada de números. Reconhecido como um dos maiores matemáticos do Japão no século XVII, Kowa desenvolveu essa noção a partir do estudo de sistemas lineares, sistematizando um método antigo da China aplicável a sistemas com duas equações.


Gottfried Leibniz. Fonte: Wikipedia

O uso de determinantes no Ocidente começou uma década mais tarde, com um trabalho de Gottfried Leibniz que também se baseava em sistemas lineares. Leibniz formulou a condição de compatibilidade para um sistema de três equações com duas incógnitas, utilizando o determinante de ordem 3 formado pelos coeficientes e pelos termos independentes, que deveria ser igual a zero. Para isso, ele introduziu notação com índices para os coeficientes, substituindo o que hoje se chama de a_{12} pela notação 1_2.

A famosa regra de Cramer, que permite resolver sistemas de n equações a n incógnitas por meio de determinantes, atribui-se, na verdade, ao escocês Colin Maclaurin (1698-1746), embora sua descoberta datasse de 1729 e tenha sido publicada postumamente em 1748 em seu *Treatise of algebra*. O nome do suíço Gabriel Cramer (1704-1752) aparece nesse contexto porque também encontrou a regra de maneira independente, apresentando-a em sua obra *Introdução à análise das curvas planas* (1750), em relação ao problema de determinar os coeficientes da cônica geral $A + By + Cx + Dy^2 + Exy + x^2 = 0$.

O francês Étienne Bézout (1730-1783) também contribuiu para a disciplina ao sistematizar, em 1764, o processo de determinação dos sinais dos termos de um determinante. Em 1771, o matemático Alexandre Vandermonde (1735-1796) faz a primeira abordagem da teoria dos determinantes, desvinculando-a do estudo exclusivo de sistemas lineares, embora ainda os utilizasse para resolvê-los. No ano seguinte, o importante teorema de Laplace, que permite a expansão de determinantes através de menores e seus complementos, foi demonstrado por Laplace em um artigo cujo título não refletia claramente o tema: “Pesquisas sobre o cálculo integral e o sistema do mundo”.

O termo “determinante”, em seu sentido moderno, apareceu em 1812 em um artigo de Cauchy. Nesse trabalho, apresentado à Academia de Ciências, Cauchy compilou e simplificou o conhecimento existente sobre determinantes, aprimorou a notação (embora a notação moderna com barras verticais só tenha sido introduzida em 1841 por Arthur Cayley) e apresentou uma demonstração do teorema da multiplicação de determinantes. Embora Binet (1786-1856) tenha fornecido a primeira demonstração desse teorema alguns meses antes, a de Cauchy era considerada superior.

Outro importante contribuinte para a consolidação da teoria dos determinantes foi o alemão Carl Jacobi (1804-1851), muitas vezes chamado de “o grande alegorista”. Ele simplificou de modo significativo a forma como essa teoria se apresenta atualmente. Como defensor da notação de determinantes, Jacobi valorizou suas aplicações, e o conceito de jacobiano de função é uma justa homenagem a um dos aspectos mais significativos de sua obra (Origem [...], c1998-2025).

2. CONCEITOS FUNDAMENTAIS

O determinante é uma função que associa a cada matriz quadrada um número real (ou complexo, dependendo do campo da matriz). Para uma matriz A de ordem n, o determinante é frequentemente denotado por $det(A)$ ou $|A|$.

NOTAÇÃO USADA

Para uma matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

O determinante é notado como: $det(A)$ ou $|A|$.

IMPORTÂNCIA DO DETERMINANTE

O determinante tem várias propriedades e aplicações importantes:

Propriedades lineares: o valor do determinante pode indicar características importantes de uma matriz:

- Se $det(A) = 0$, a matriz é singular (ou seja, não é invertível) e seus vetores colunas (ou linhas) são linearmente dependentes.
- Se $det(A) \neq 0$, a matriz é não singular (invertível) e as colunas (ou linhas) são linearmente independentes.

VOLUME

O determinante pode ser interpretado geometricamente como uma medida do "volume" de um paralelepípedo (ou a área de um paralelogramo em duas dimensões) formado pelos vetores coluna da matriz

MUDANÇA DE VARIÁVEIS

Em cálculo multivariável, o determinante é usado para transformar integrais através da mudança de variáveis. O valor absoluto do determinante da matriz jacobiana é usado para calcular a variável de escala em integrais múltiplas

SISTEMAS LINEARES

O teorema de Cramer utiliza determinantes para resolver sistemas de equações lineares, fornecendo fórmula explícita para as soluções

TEOREMA DE ADIÇÃO

O determinante tem a propriedade de que a adição de múltiplos de uma linha (ou coluna) em outra não altera seu valor

2.1 CÁLCULO DO DETERMINANTE

Matrizes 2x2:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = ad - bc$$

Matrizes 3x3:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = a(e \cdot i - f \cdot h) - b(d \cdot i - f \cdot g) + c(d \cdot h - e \cdot g)$$

Matrizes de ordem superior: a partir de 4x4 ou maior, o determinante pode ser calculado usando desenvolvimentos por cofatores.

3. CÁLCULO DE DETERMINANTES 2x2

3.1 MÉTODO DIRETO

Para matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}\, a_{21}$

No método direto para uma matriz 2x2, multiplicam-se os elementos da diagonal principal e subtrai-se a multiplicação da diagonal secundária

EXEMPLO RESOLVIDO 1

→ Calcule o determinante da matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

→ Solução passo a passo:

1º Identificar os elementos:

- $a_{11} = 2$
- $a_{12} = 3$
- $a_{21} = 1$
- $a_{22} = 4$

2º Aplicar a fórmula:

$$\det(A) = (2 \times 4) - (3 \times 1)$$
$$\det(A) = 8 - 3$$
$$\det(A) = 5$$

4. DETERMINANTES 3x3

4.1 REGRA DE SARRUS

Para matriz 3x3:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

No método de Sarrus, repetem-se as duas primeiras colunas à direita da matriz, somam-se os produtos das diagonais e subtrai-se o resultado

EXEMPLO RESOLVIDO 2

→ Calcule o determinante da matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

→ Solução passo a passo:

1º Aplicar a regra de Sarrus:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Repetir as duas primeiras colunas à direita da matriz

2º Soma dos produtos que serão somados:

Produto dos elementos das diagonais principais

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(2 \times 4 \times 5) + (1 \times 1 \times 1) + (3 \times 0 \times 2) = 40 + 1 + 0 = 41$$

3º Soma dos produtos que serão subtraídos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Produto dos elementos das diagonais secundárias

$$(3 \times 4 \times 1) + (2 \times 1 \times 2) + (1 \times 0 \times 5) = 12 + 4 + 0 = 16$$

4º Resultado final:

$$\det(A) = 41 - 16 = 25$$

Soma dos produtos positivos menos a soma dos produtos negativos

5. EXPANSÃO POR COFATORES

5.1 DEFINIÇÃO DE COFATOR

Seja A uma matriz quadrada, então o "menor do elemento a_{ij}" é denotado por M_{ij} e definido como o determinante da submatriz que sobra quando se suprime a i-ésima linha e j-ésima coluna de A. O número $(-1)^{i+j} M_{ij}$ é denotado por C_{ij} e é denominado cofactor de a_{ij}.

Assim, o cofator C_{ij} do elemento a_{ij} é calculado por:

$$C_{ij} = (-1)^{(i+j)} \times M_{ij}$$

DEFINIÇÃO

Se A for uma matriz $n \times n$, então o número obtido mutiplicando os valores de a_{ij} de uma linha ou coluna "qualquer" de A pelos cofatores correspondentes e somando os produtos corresponde ao "determinante de A".

EXEMPLO RESOLVIDO 3

→ Calcule o determinante usando expansão por cofatores:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

→ Solução passo a passo:

1º Expandindo pela primeira linha, calculando os cofatores C_{11}, C_{12} e C_{13} ($C_{ij} = (-1)^{(i+j)} \times M_{ij}$):

$$C_{11} = (-1)^{(1+1)} \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = +\left[(2 \times 3) - (1 \times 3)\right] = 3$$

$$C_{12} = (-1)^{(1+2)} \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -\left[(4 \times 3) - (1 \times 1)\right] = -11$$

$$C_{13} = (-1)^{(1+3)} \times \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = +\left[(4 \times 3) - (2 \times 1)\right] = 10$$

2º Multiplicando os elementos da primeira linha pelos cofatores correspondentes e somando-os para definir o determinante:

$$\det(A) = a_{11} \times C_{11} + a_{12} \times C_{12} + a_{13} \times C_{13}$$
$$\det(A) = 3 \times C_{11} + 1 \times C_{12} + 2 \times C_{13}$$
$$\det(A) = 3 \times 3 + 1 \times (\text{-}11) + 2 \times 10$$
$$\det(A) = 9 \text{ - } 11 + 20$$
$$\det(A) = 18$$

6. PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

6.1 PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

Algumas propriedades básicas dos determinantes podem ser consideradas, como:

1º O determinante de uma matriz identidade é 1.

$$\det(I) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

2º A troca de duas linhas ou colunas muda o sinal do determinante.

$$\det C = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \neq \mathbf{\det A} = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{vmatrix} \neq \det B = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

3º O determinante de uma matriz transposta é igual ao determinante da matriz original.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = \det A^T = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

4º Quando se multiplica uma linha ou coluna por um número k, o determinante fica multiplicado por k.

$$\mathbf{det}\,\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{vmatrix} = \mathbf{-3}$$

$$\mathbf{2} \cdot \mathbf{det}\,\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boxed{\mathbf{4} \quad \mathbf{6}} \\ \mathbf{5} \quad \mathbf{6} \end{vmatrix} \text{x2} = \mathbf{-6}$$

5º Soma de múltiplo de uma linha a outra não altera o determinante.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \text{exemplo} \Longrightarrow l_1 + 2l_2$$

$$\Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 15 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

6º A multiplicação de uma matriz A de ordem n por um escalar k resulta na multiplicação do determinante por k elevado à ordem da matriz.

$$\det(kA) = k^n \det(A)$$

6.2 MULTIPLICATIVIDADE

Para matrizes quadradas A e B de mesma ordem:

$$\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$$

OBS.:
Em geral,
$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

EXEMPLO RESOLVIDO 4

→ Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Verifique a propriedade multiplicativa.

→ Solução passo a passo:

1º Calcular $\det(A)$:

$$\det(A) = (2 \times 3) - (1 \times 1) = 5$$

2º Calcular $\det(B)$:

$$\det(\text{B}) = (3 \times 4) - (2 \times 1) = 10$$

3º Calcular $A \times B$:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 \times 3 + 1 \times 1 & 2 \times 2 + 1 \times 4 \\ 1 \times 3 + 3 \times 1 & 1 \times 2 + 3 \times 4 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$$

4º Calcular $\det(A \times B)$:

$$\det(A \times B) = (7 \times 14) - (8 \times 6)$$
$$\det(A \times B) = 98 - 48$$
$$\det(A \times B) = 50$$

5º Verificar $\det(A) \times \det(B)$:

$$\det(A) \times \det(B) = 5 \times 10 = 50$$

6º Conclusão:

$$\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B) = 50$$

A propriedade multiplicativa é verificada.

7. REGRA DE CRAMER

Se $Ax = b$ for um sistema linear de n equações com n incógnitas tais que $\det(A) \neq 0$, então o sistema tem uma única solução.

Essa solução é:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} \cdots x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

Em que A_j é a matriz obtida substituindo as entradas da j-ésima coluna de A pelos valores da matriz b.

7.1 SISTEMAS LINEARES – REGRA DE CRAMER

EXEMPLO RESOLVIDO 5

→ Resolva o sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 4x - y = 5 \end{cases}$$

→ Solução passo a passo:

1º Identificar matrizes A e b através do sistema de equações:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \; ; \; b = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

2º Calcular $\det(A)$:

$$\det(A) = (2 \times (-1)) - (3 \times 4)$$
$$\det(A) = -2 - 12$$
$$\det(A) = -14$$

3º Calcular o determinante "Dx":

$$Dx = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$
$$Dx = (12 \times (-1)) - (3 \times 5)$$
$$Dx = (-12) - (15)$$
$$Dx = -27$$

Substituindo a primeira coluna de A pela matriz b

4º Calcular o determinante "Dy":

$$Dy = \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Substituindo a segunda coluna de A pela matriz b

$Dy = (2 \times 5)$ - (12×4)
$Dy = 10$ - 48
$Dy =$ -38

5º Aplicar a regra de Cramer:

$$x = \frac{Dx}{\det(A)} = \frac{-27}{(-14)} = \frac{27}{14}$$

$$y = \frac{Dy}{\det(A)} = \frac{-38}{(-14)} = \frac{38}{14}$$

8. DETERMINANTES E MATRIZ INVERSA

8.1 RELAÇÃO ENTRE DETERMINANTES E INVERSIBILIDADE

Uma matriz A é inversível se e somente se $det(A) \neq 0$

TEOREMA

Se A for uma matriz invertível, então:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

Se A for uma matriz $n \times n$ qualquer, e C_{ij} o cofactor de a_{ij}, então a matriz

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

é denominada "matriz de cofatores de A". A matriz transposta dessa matriz é denominada "adjunta de A" e denotada por $adj(A)$.

EXEMPLO RESOLVIDO 6

→ Encontre a inversa da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

→ Solução passo a passo:

1º Calcular $det(A)$:

$$det(A) = (2 \times 3) \text{ - } (1 \times 1) = 5$$

2º Calcular a matriz de cofatores:

$$C_{11} = +|3| = 3$$
$$C_{12} = \text{-}|1| = \text{-}1$$
$$C_{21} = \text{-}|1| = \text{-}1$$
$$C_{22} = +|2| = 2$$

3º Transpor a matriz de cofatores para obter a adjunta:

$$\text{adj}\,(A) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

4º Calcular a inversa:

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{\det(A)}\right) \times \text{adj}\,(A)$$

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{5}\right) \times \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

5º Resultado final:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

9. APLICAÇÕES EM GEOMETRIA

9.1 ÁREA DE TRIÂNGULOS

O determinante de uma matriz pode ser usado para calcular a área de um triângulo no plano cartesiano quando se conhecem as coordenadas de seus vértices. Esse método elegante baseia-se na álgebra linear e na relação entre o determinante e o cálculo de volumes e áreas.

Fórmula geral com o determinante

Considere um triângulo cujos vértices no plano cartesiano têm as coordenadas:

$$A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2),\ C(x_3, y_3)$$

A fórmula da área do triângulo utilizando o determinante é:

$$\text{Área do triângulo} = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot |\det(M)|$$

Em que:

$$M = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO RESOLVIDO 7

→ Calcule a área do triângulo com vértices em $\mathrm{A}(1, 1)$, $\mathrm{B}(4, 2)$ e $\mathrm{C}(2, 5)$.

→ Solução passo a passo:

1º Formar matriz M com coordenadas:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

2º Calcular determinante (regra de Sarrus):

$$\det(M) = (1 \times 2 \times 1 + 1 \times 5 \times 4 + 1 \times 2 \times 1) - (1 \times 1 \times 4 + 1 \times 5 \times 1 + 1 \times 2 \times 2)$$

$$\det(M) = (2 + 20 + 2) - (4 + 5 + 4)$$

$$\det(M) = 24 - 13$$

$$\det(M) = 11$$

3º Calcular área:

$$\text{Área} = \frac{|\det(M)|}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{11}{2}$$

$$\text{Área} = 5{,}5 \text{ unidades quadradas}$$

10. GLOSSÁRIO

Cofator: determinante da submatriz multiplicado por $(-1)^{(i+j)}$.

Determinante: número real associado a uma matriz quadrada.

Expansão por cofatores: método de cálculo de determinantes usando cofatores.

Matriz adjunta: transposta da matriz de cofatores.

Matriz não singular: matriz cujo determinante é diferente de zero.

Matriz singular: matriz cujo determinante é zero.

Matriz triangular: matriz com zeros acima ou abaixo da diagonal principal.

Menor: determinante da submatriz obtida eliminando uma linha e uma coluna.

Propriedade multiplicativa: $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$.

Regra de Cramer: método para resolver sistemas lineares usando determinantes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre, RS: Bookman, 2012.

ORIGEM dos sistemas lineares e determinantes. **Só Matemática**, c1998-2025. Disponível em: https://www.somatematica.com.br/historia/sistemas.php. Acesso em: 31 jul. 2025.