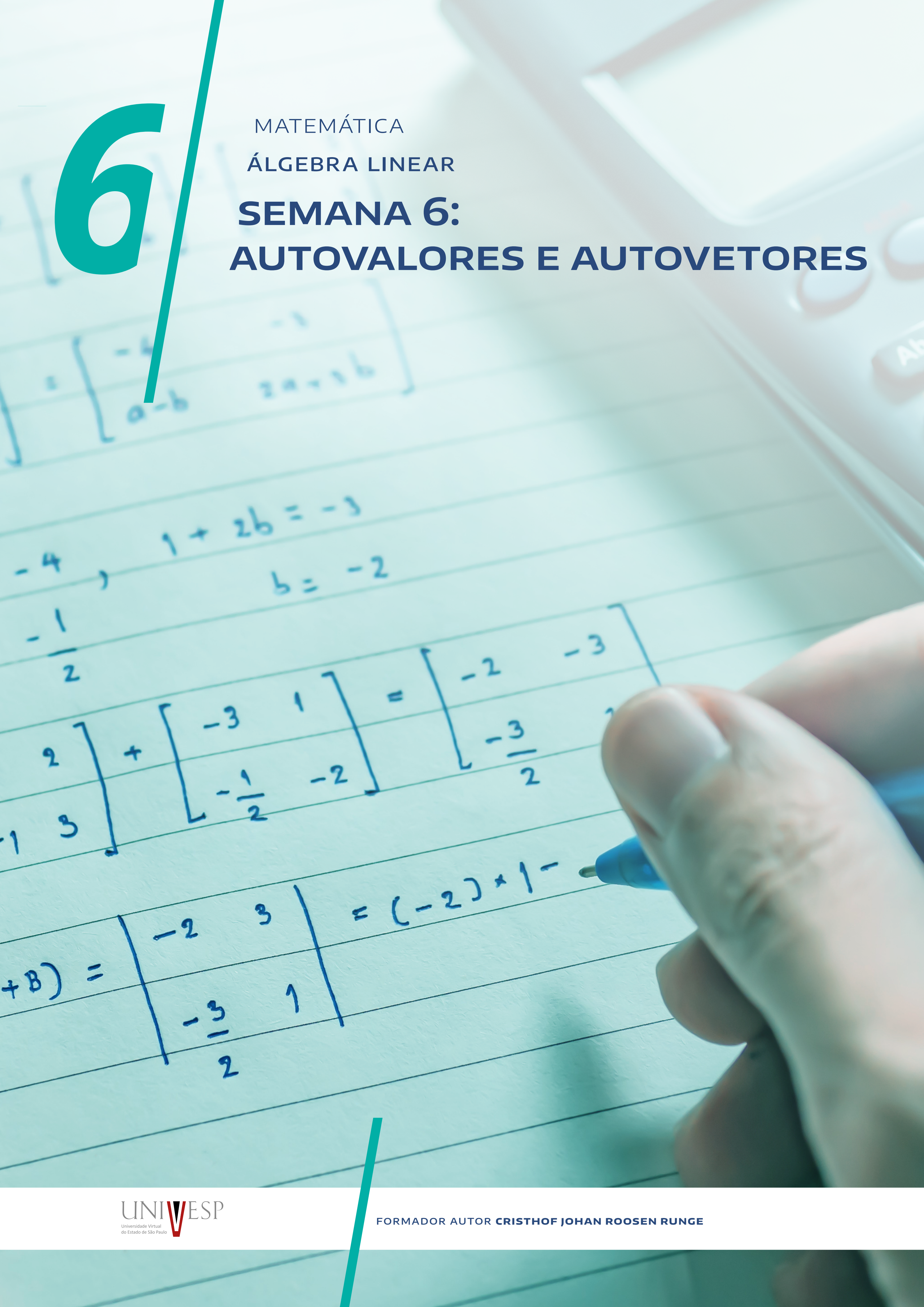

6

MATEMÁTICA

ÁLGEBRA LINEAR

SEMANA 6: AUTOVALORES E AUTOVETORES

UNIVESP Universidade Virtual do Estado de São Paulo

FORMADOR AUTOR **CRISTHOF JOHAN ROOSEN RUNGE**

6

ÁLGEBRA LINEAR

AUTOVALORES E AUTOVETORES

APRESENTAÇÃO

Nesta apostila, são introduzidos os autovalores e autovetores, que são fundamentais na álgebra linear para simplificar problemas complexos. Também é fornecido um panorama histórico de seu desenvolvimento, destacando contribuições de figuras como Euler e Cauchy.

São apresentados os fundamentos teóricos, explorando operadores lineares e a equação característica, que é crucial para determinação de autovalores. É fornecida uma metodologia para o cálculo de autovalores e autovetores, complementada com exemplos práticos.

Destaca-se a teoria da diagonalização de matrizes e suas aplicações em cálculos complexos, também são discutidas as limitações e condições para a diagonalização.

Aplicações práticas são exploradas em áreas como física e engenharia, seguidas por sugestões de ferramentas computacionais úteis, como Matlab e Python. Por fim, é oferecido um glossário de termos-chave e recomendações de recursos adicionais para aprofundar conhecimento.

Nesta apostila, haverá os seguintes tópicos:

1. **Introdução geral**
2. **Conceitos fundamentais**
3. **Fundamentos teóricos**
4. **Metodologia: como determinar autovalores e autovetores**
5. **Teoria da diagonalização de matrizes**
6. **Aplicações práticas**
7. **Recursos computacionais e ferramentas**
8. **Glossário**
9. **Sugestões de recursos adicionais**

1. INTRODUÇÃO GERAL

Autovalores e autovetores são ferramentas essenciais da álgebra linear e que trazem nova perspectiva para o estudo das transformações lineares. Esses conceitos ajudam a decompor problemas complexos, simplificar cálculos de potências de matrizes e resolver sistemas dinâmicos lineares.

Eles emergem naturalmente em diversos problemas matemáticos e físicos, como vibrações, redes elétricas, dinâmica, visão computacional e ciência de dados.

2. CONCEITOS FUNDAMENTAIS

2.1 BREVE HISTÓRICO

Os autovalores e autovetores, conceitos centrais na álgebra linear e teoria das matrizes, têm suas raízes históricas no estudo de formas quadráticas e equações diferenciais. No século XVIII, Leonhard Euler investigou o movimento rotacional de corpos rígidos e identificou a importância dos eixos principais, hoje reconhecidos como autovetores da matriz de inércia. Joseph-Louis Lagrange avançou essa ideia, mostrando que esses eixos principais são, de fato, autovetores.

No início do século XIX, Augustin-Louis Cauchy generalizou essas ideias para dimensões arbitrárias e introduziu o termo "*racine caractéristique*" (raiz característica), precursor do termo "autovalor". Ele também demonstrou como esses conceitos poderiam ser usados para classificar superfícies quádricas. Joseph Fourier, em seu livro de 1822, *Théorie analytique de la chaleur*, aplicou os trabalhos de Lagrange e Laplace para resolver a equação do calor, utilizando a separação de variáveis, uma técnica que envolve autovalores.

Charles-François Sturm e Charles Hermite expandiram essas ideias, mostrando que matrizes simétricas reais têm autovalores reais e, mais tarde, estendendo isso para matrizes hermitianas. Francesco Brioschi e Alfred Clebsch contribuíram ao provar propriedades dos autovalores de matrizes ortogonais e assimétricas, respectivamente. Karl Weierstrass destacou a importância das matrizes defeituosas na teoria da estabilidade.

No final do século XIX, Joseph Liouville e Schwarz fizeram avanços significativos na teoria de Sturm-Liouville e no estudo de autovalores da equação de Laplace. David Hilbert, no início do século XX, visualizou operadores integrais como matrizes infinitas e introduziu o termo "*eigen*" (próprio) para autovalores e autovetores.

O primeiro algoritmo numérico para calcular autovalores e autovetores foi o método da potência, publicado por Richard von Mises em 1929. Em 1961, John G. F. Francis e Vera Kublanovskaya propuseram independentemente o algoritmo QR, que se tornou amplamente utilizado.

Assim, a evolução dos autovalores e autovetores reflete rica história de descobertas matemáticas interligadas, desde a mecânica clássica até os métodos numéricos modernos, destacando sua importância contínua nas ciências exatas e aplicadas.

3. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

3.1 OPERADORES LINEARES

Operadores lineares são uma classe de funções (transformações lineares) que mapeiam vetores dentro do mesmo espaço vetorial ($T : V \to V$). Uma matriz A de ordem $n \times n$ pode ser usada para representar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por exemplo. Formalmente, a transformação linear T é definida por:

$$T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$$

Em geral, a ação de A sobre um vetor $\mathbf{v}$ altera tanto a direção quanto o módulo do vetor. No entanto, existem vetores especiais, chamados **autovetores**, que mantêm sua direção após a aplicação da transformação linear. Esses vetores são escalonados por um fator, chamado **autovalor**. Matematicamente, isso é expresso como:

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

Em que:

- $\mathbf{v}$ é um autovetor de A.
- λ é o autovalor correspondente.

3.2 CONCEITOS DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Formalmente, pode-se definir autovalores e autovetores como:

> **DEFINIÇÃO**
>
> **Autovalor (λ):** número escalar que representa o fator pelo qual um autovetor é escalonado após a aplicação de transformação linear representada por uma matriz A.
>
> **Autovetor ($\mathbf{v}$):** vetor não nulo que, quando transformado por uma matriz A, resulta em múltiplo escalar de si mesmo.

E conforme descrito, a equação fundamental que relaciona autovalores e autovetores é:

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

Isso significa que, ao multiplicar a matriz A pelo vetor $\mathbf{v}$, o resultado é um múltiplo escalar do próprio vetor $\mathbf{v}$. Em outras palavras, a direção do vetor $\mathbf{v}$ é preservada e ele é "esticado" ou "encolhido" pelo fator λ.

3.3 EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA

Para encontrar os autovalores de uma matriz A, resolve-se a **equação característica**, que é derivada da condição de que a matriz (λI - A) deve ter um determinante igual a **zero** para que exista solução não trivial para $\mathbf{v}$. Ou seja:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Em que I é a matriz identidade de ordem n. O polinômio resultante é chamado de **polinômio característico**, e suas raízes são os autovalores de A.

4. METODOLOGIA: COMO DETERMINAR AUTOVALORES E AUTOVETORES

ETAPAS

1º Construa a matriz λI - A.

2º Calcule o determinante.

3º Resolva o polinômio característico para obter os autovalores igualando o determinante a zero e determinando as raizes da equação (autovalores).

4º Para cada λ, monte o sistema linear homogêneo de equações: $(\lambda I$ - $A)\mathbf{v}$ = $\mathbf{0}$.

5º Resolva o sistema e encontre os autovetores.

Observação 1. Note que o conjunto dos autovetores associados a um autovalor corresponde aos vetores não nulos do núcleo da transformação representada pela matriz $(\lambda I$ - $A)$. Esse núcleo é denominado **autoespaço** de A associado a λ.

Observação 2. Autovetores de autoespaços correspondentes a autovalores distintos são linearmente independentes entre si.

EXEMPLO PRÁTICO

→ Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

1º Construa a matriz λI - A:

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$$

2º Calcule o determinante:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

3º Resolva o polinômio característico para obter os autovalores igualando o determinante a zero e determinando as raizes da equação (autovalores):

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

As raízes dessa equação são $\lambda = 3$ e $\lambda =$ -1, que são os autovalores de A.

4º Para cada λ, monte o sistema linear homogêneo de equações: $(\lambda I$ - $A)\mathbf{v} = 0$:

Para encontrar os autovetores correspondentes, resolve-se $(\lambda I$ - $A)\mathbf{v} = 0$ para cada autovalor:

→ **Para λ = 3:**

$$(\lambda I - A)v = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

→ **Para λ = -1:**

$$(\lambda I - A)v = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5º Resolva o sistema e encontre os autovetores.

→ **Para λ = 3:**

Isso resulta no sistema de equações:

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \\ -8x + 4y = 0 \Rightarrow x = 12y \end{cases}$$

Portanto, os autovetores associados a $\lambda = 3$ são da forma $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 12y \\ y \end{bmatrix}$. Fazendo, por exemplo, $y = 1$, tem-se que o vetor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um autovetor associado a $\lambda = 3$.

Obs.: Qualquer vetor da forma $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 12y \\ y \end{bmatrix}$ constitui uma base para o autoespaço associado a $\lambda = 3$.

→ **Para λ = -1:**

Isso resulta no sistema de equações:

$$\begin{cases} -4x + 0 \cdot y = 0 \\ -8x + 0 \cdot y = 0 \end{cases}$$

Como $-4x = -8x = 0 \Rightarrow x = 0$. Ao mesmo tempo em que y pode assumir qualquer valor no sistema de equações, uma vez que há nas duas equações $0 \cdot y$. Assim, os autovetores associados a λ = -1 são da forma $v = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$. Fazendo, por exemplo, $y = 1$, tem-se que o vetor $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um autovetor associado a λ = -1.

Obs.: Qualquer vetor da forma $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$ constitui uma base para o autoespaço associado a λ = -1.

5. TEORIA DA DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES

A diagonalização de matrizes é um conceito central na álgebra linear, com aplicações práticas em diversas áreas, como física, engenharia, ciência de dados e computação gráfica. A diagonalização simplifica muitos cálculos, especialmente aqueles envolvendo potências de matrizes, transformações lineares e sistemas dinâmicos.

5.1 QUANDO UMA MATRIZ É DIAGONALIZÁVEL?

Uma matriz A de ordem $n \times n$ é diagonalizável se, e somente se, possui n autovetores linearmente independentes. Em outras palavras, a matriz A é diagonalizável se puder ser expressa na forma $A = PDP^{-1}$, em que P é uma matriz composta pelos autovetores de A e D é uma matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de A.

Para entender melhor, considere uma matriz A de ordem $n \times n$. Se A possui n autovetores linearmente independentes $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n\}$, então é possível formar a matriz P cujas colunas são esses autovetores. A matriz D será uma matriz diagonal cujos elementos são os autovalores correspondentes $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$.

5.2 A FÓRMULA DA DIAGONALIZAÇÃO

Então, a diagonalização de uma matriz A é expressa pela fórmula:

$$A = PDP^{-1}$$

Em que:

- P é a matriz formada pelos autovetores de A, ou seja, $P = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n]$.
- D é a matriz diagonal formada pelos autovalores correspondentes, ou seja:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

> **Observação:** A matriz P é invertível porque os autovetores são linearmente independentes, garantindo que as colunas de P formem uma base para $\mathbb{R}^n$.

A matriz D é diagonal, o que simplifica muitos cálculos, especialmente aqueles envolvendo potências de matrizes.

5.3 POTÊNCIA *K* DA MATRIZ *A*

Uma propriedade crucial da diagonalização é que, para qualquer inteiro positivo k, a potência A^k pode ser calculada facilmente usando a fórmula:

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

Isso ocorre porque é facil calcular a potência de uma matriz diagonal D. Especificamente, nesse caso, D é uma matriz diagonal formada pelos autovalores de A

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1{}^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2{}^k & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n{}^k \end{bmatrix}$$

Ou seja, elevar uma matriz diagonal a uma potência k é simplesmente elevar cada elemento da diagonal a essa potência.

EXEMPLO PRÁTICO

Considere um exemplo prático para ilustrar a diagonalização e o cálculo da potência de uma matriz.

→ Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Suponha que se quer determinar A^4. Então, primeiramente, é preciso diagonalizar a matriz A. Depois determinar os autovetores e autovalores de A.

Para encontrar os autovalores, calcula-se a equação característica:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -1 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 3) - 2 \Rightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

As raízes dessa equação são $\lambda = 5$ e $\lambda = 2$, que são os autovalores de A.

Para encontrar os autovetores correspondentes, resolve-se $(\lambda I$ - $A)\mathbf{v}$ = $\mathbf{0}$ para cada autovalor:

→ **Para λ = 5:**

$$(\lambda I - A)v = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isso resulta no sistema de equações:

$$x - y = 0$$

$$-2x + 2y = 0 \Rightarrow x = y$$

Portanto, os autovetores associados a $\lambda = 3$ são da forma $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix}$. Fazendo, por exemplo, $y = 1$, tem-se que o vetor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um autovetor associado a $\lambda = 5$.

Obs.: Qualquer vetor da forma $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix}$ constitui uma base para o autoespaço associado a $\lambda = 5$.

→ **Para λ = 2:**

$$(\lambda I - A)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isso resulta no sistema de equações:

$$-2x - y = 0$$

$$-2x - y = 0 \Rightarrow x = \frac{-y}{2}$$

Assim, os autovetores associados a $\lambda = 2$ são da forma $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{-y}{2} \\ y \end{bmatrix}$.

Fazendo, por exemplo, $y = 2$, tem-se que o vetor $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é um autovetor associado a $\lambda = 2$.

Obs.: Qualquer vetor da forma $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{-y}{2} \\ y \end{bmatrix}$ constitui uma base para o autoespaço associado a $\lambda = 2$.

Verificando a diagonalização:

→ Verifica-se que $A = PDP^{-1}$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

→ Calcula-se PDP^{-1}:

$$PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = A$$

Portanto, a diagonalização está correta.

Calculando A^4

Da teoria, $A^k = PD^k P^{-1}$. Portanto:

$$A^4 = PD^4 P^{-1}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5^4 & 0 \\ 0 & 2^4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 625 & -16 \\ 625 & 32 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 422 & 203 \\ 406 & 219 \end{bmatrix}$$

ANOTA AÍ

A diagonalização de matrizes é uma técnica poderosa que simplifica muitos problemas algébricos e computacionais. Ela permite transformar uma matriz complexa em forma diagonal mais simples, facilitando cálculos como a elevação de matrizes a potências. A condição necessária e suficiente para a diagonalização é que a matriz possua um conjunto completo de autovetores linearmente independentes. Compreender e aplicar a diagonalização é essencial em muitos campos da matemática e suas aplicações práticas.

DISCUSSÕES E LIMITAÇÕES

Nem toda matriz é diagonalizável; isso ocorre, por exemplo, quando a matriz é deficiente em autovetores, ou seja, não possui um número suficiente de autovetores linearmente independentes. Além disso, algumas matrizes podem ter autovalores repetidos, mas não possuem um número correspondente de autovetores para formar uma base completa do espaço vetorial, o que também impede a diagonalização. Note, no entanto, que a ocorrência de autovalores repetidos não necessariamente torna a matriz não diagonalizável.

No curso, sempre são abordados espaços vetoriais em $\mathbb{R}^n$. No entanto, em espaços complexos, podem surgir raízes complexas.

6. APLICAÇÕES PRÁTICAS

Você viu, na Videoaula 17, um estudo de caso com uso de autovalores na análise de influência e popularidade em redes sociais. No entanto, o estudo de autovalores e autovetores encontra aplicações nas mais variadas áreas. Veja alguns a seguir:

Área	Aplicação
Física	Vibração de sistemas, mecânica quântica
Estatística	Análise de componentes principais (PCA)
Engenharia	Estabilidade e dinâmica estrutural

7. RECURSOS COMPUTACIONAIS E FERRAMENTAS

Nome	Uso
Octave/Matlab	Diagonalização e autovalores em engenharia
NumPy/SymPy	Python para manipulação simbólica
GeoGebra	Visualização 2D de vetores e transformações

8. GLOSSÁRIO

Autoespaço: Espaço de todos os autovetores + vetor nulo.

Autovalor: Escalar com que o vetor é multiplicado após transformação.

Autovetor
Vetor cuja direção é preservada.

Diagonalização
Representação de uma matriz a partir de sua base espectral.

9. SUGESTÃO DE RECURSOS ADICIONAIS

- **Khan Academy** – khanacademy.org
- **3Blue1Brown** – Essence of Linear Algebra
- **Wolfram Alpha** – https://www.wolframalpha.com

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre, RS: Bookman, 2012.