

1

MATEMÁTICA
ÁLGEBRA LINEAR

SEMANA 1: OPERAÇÕES COM MATRIZES

$$\begin{aligned} & -4, \quad 1 + 2b = -3 \\ & \quad \quad b = -2 \\ & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \\ & +B) = \left| \begin{array}{cc|c} -2 & 3 & \\ -\frac{3}{2} & 1 & \end{array} \right| = (-2) \times 1 - \end{aligned}$$

1

ÁLGEBRA LINEAR OPERAÇÕES COM MATRIZES

INTRODUÇÃO

Nesta apostila, serão trabalhados os conteúdos desenvolvidos ao longo da Semana 1 de estudos. Nela abordados o conceito de matrizes, as operações básicas envolvendo matrizes, as propriedades algébricas nas operações entre matrizes, a definição de matriz inversa, o cálculo da inversa para matrizes 2×2 e, por fim, um algoritmo para o cálculo da matriz inversa, baseado nas operações elementares com linhas.

Nesta apostila, haverá os seguintes tópicos:

- 1. Introdução às matrizes**
 - 2. Tipos de matrizes**
 - 3. Operações com matrizes**
 - 4. Propriedades das matrizes**
 - 5. Matriz inversa**
 - 6. Aplicações práticas**
- Ferramentas**
Referências

1. INTRODUÇÃO ÀS MATRIZES

Matriz é uma estrutura matemática que organiza números em linhas e colunas. Ela é fundamental na álgebra linear e possui diversas aplicações em várias áreas da ciência e engenharia.



DEFINIÇÃO:

Matriz é um conjunto retangular de números dispostos em m linhas e n colunas. A notação geral para uma matriz A com m linhas e n colunas é:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

a_{ij} representa o elemento na i -ésima linha e j -ésima coluna.

DIMENSÕES DE UMA MATRIZ

A dimensão de uma matriz é dada pelo número de linhas e colunas. Uma matriz com m linhas e n colunas é chamada de matriz $m \times n$.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

A matriz A é uma matriz 2×3 (2 linhas e 3 colunas).

2. TIPOS DE MATRIZES

Existem vários tipos especiais de matrizes, cada um com características únicas:

MATRIZ QUADRADA

Matriz com o mesmo número de linhas e colunas.

Exemplo:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

MATRIZ DIAGONAL

Matriz quadrada em que todos os elementos fora da diagonal principal são zero.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

MATRIZ IDENTIDADE

Matriz diagonal em que todos os elementos da diagonal principal são 1.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRIZ ZERO (NULA)

Matriz em que todos os elementos são zero.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRIZ TRANSPOSTA

A transposta de uma matriz A , denotada por A^T , é obtida trocando as linhas pelas colunas.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \implies A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

3. OPERAÇÕES COM MATRIZES

3.1 ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

A adição e subtração de matrizes só podem ser realizadas entre matrizes de mesmas dimensões. A operação é feita elemento por elementos correspondentes a cada posição.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

3.2 MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

Multiplica-se cada elemento da matriz pelo escalar.

Exemplo:

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

3.3 MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

A multiplicação de matrizes $A \times B$ só é possível se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B.

Algoritmo:

1. O resultado será uma matriz com o número de linhas de A e o número de colunas de B.
2. Cada elemento c_{ij} da matriz resultante C é obtido multiplicando os elementos da i-ésima linha de A pelos elementos da j-ésima coluna de B e somando os resultados.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

4. PROPRIEDADES DAS MATRIZES

Comutatividade

A adição de matrizes é comutativa:

$$A + B = B + A$$

A multiplicação de matrizes geralmente não é comutativa:

$$AB \neq BA$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+1 \\ 3-1 & 4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+1 & 1+2 \\ -1+3 & 0+4 \end{bmatrix} = B + A$$

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \neq BA = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Associatividade

Tanto a adição quanto a multiplicação de matrizes são associativas:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(AB)C = A(BC)$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A + B) + C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A + (B + C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

Distributividade

A multiplicação de matrizes é distributiva sobre a adição:

$$A(B + C) = AB + AC$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A(B + C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

5. MATRIZ INVERSA

A matriz inversa de A , denotada por A^{-1} , é a matriz que, quando multiplicada por A , resulta na matriz identidade.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

5.1 OPERAÇÕES ELEMENTARES ENTRE LINHAS DE UMA MATRIZ

As operações elementares são transformações básicas que podem ser aplicadas às linhas de uma matriz sem alterar suas propriedades fundamentais. Existem três tipos de operações elementares:

Operações elementares	Exemplo
1. Troca de duas linhas	$l_1 \leftrightarrow l_3 :$ $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$
2. Multiplicação de uma linha por escalar não nulo	$2l_2 :$ $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 6 & 8 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
3. Adição de múltiplo de uma linha a outra linha	$\{2l\}_1 + l_3 :$ $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1+0 & 0+(2 \cdot 2) & 3+(2 \cdot 5) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 13 \end{bmatrix}$

5.2 ALGORITMO PARA OBTENÇÃO DA MATRIZ INVERSA

O método de redução de linhas forma escada reduzida (mais tarde será visto que corresponde ao algoritmo de Gauss-Jordan) e é comumente usado para encontrar a matriz inversa. O algoritmo é o seguinte:

Passo 1 Escreva a matriz A e a matriz identidade I lado a lado: $[A|I]$

Passo 2 Use operações elementares para transformar a parte esquerda em I

Passo 3 A parte direita será transformada na inversa A^{-1} .

Exemplo:

Encontre a inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Passo 1: $\left[A \mid I \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right]$

Passo 2: Transforme A em I usando operações elementares.

→ Multiplique a primeira linha por -3 e adicione à segunda linha:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right]$$

Essa operação faz com que o elemento abaixo do pivô na primeira posição da primeira linha fique igual a zero

→ Multiplique a segunda linha por -1/2:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{array} \right]$$

Isso torna o pivô da segunda linha igual a 1

→ Multiplique a segunda linha por -2 e adicione à primeira linha:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{array} \right]$$

Essa operação torna o valor acima do pivô da segunda linha igual a zero. Reduzindo finalmente a matriz A a forma escada linha reduzida, como desejado.

Passo 3: A inversa de A é a parte direita da matriz resultante:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

5.3 OBTENÇÃO DA INVERSA DE UMA MATRIZ 2x2

Você viu que para matrizes 2x2, a obtenção da inversa pode ser obtida facilmente através da fórmula:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Exemplo:

Encontre a inversa de:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 4 - 2 \cdot 3} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$



IMPORTANTE

Para matrizes 2x2 e 3x3 é possível aplicar a regra de Sarrus, realizando a soma dos produtos das diagonais principais menos a soma dos produtos das diagonais secundárias.

Obs.: Lembre-se de que, no caso de matrizes 3x3, é necessário repetir as duas primeiras colunas do lado direito da matriz original para realizar as operações.

5.4 CARACTERÍSTICAS DE MATRIZES NÃO INVERTÍVEIS

Considerando o que já foi estudado, por inspeção, pode-se dizer que uma matriz é não invertível (ou singular) se:

1. A matriz não é quadrada.
2. Possui linhas que são proporcionais entre si.
3. Possui uma linha ou coluna toda de zeros.
4. Possui linhas ou colunas repetidas.

Exemplo de matriz não invertível:

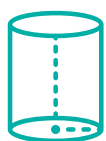
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Esta matriz não é invertível, porque a segunda linha é múltipla da primeira, tornando-as linearmente dependentes.



6. APLICAÇÕES PRÁTICAS

As matrizes são utilizadas amplamente nas mais diversas aplicações no mundo real, alguns exemplos são:



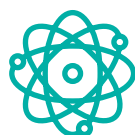
1. Computação gráfica: transformações geométricas

Em computação gráfica, matrizes são amplamente utilizadas para manipular objetos em um espaço 2D ou 3D. Imagine que você está criando um jogo e quer mover um personagem em um mapa. Para fazê-lo “andar para a direita”, você usa matriz de translação, adicionando unidades ao eixo X da posição inicial. Da mesma forma, se você quiser girá-lo, a matriz de rotação pode ser usada para calcular as novas coordenadas do personagem após o giro. Por exemplo, pense em girar um quadrado em 90° para mudá-lo de “em pé” para “virado de lado”. Esses cálculos são feitos automaticamente com matrizes.



2. Economia: modelos de entrada-saída

Na economia, matrizes são utilizadas para mostrar como setores da economia dependem uns dos outros para produzir bens e serviços. Por exemplo, imagine economia simplificada com dois setores: agricultura e indústrias. A agricultura fornece insumos para as indústrias, e as indústrias fornecem máquinas para a agricultura. Usando uma matriz, pode-se representar o quanto cada setor consome do outro quando produz certo nível. A partir disso, é possível prever necessidades de produção, consumo e até mesmo impactos de mudanças em algum setor, por exemplo se a demanda por produtos agrícolas aumentar.



3. Física: mecânica quântica

Na mecânica quântica, matrizes representam estados e operadores que descrevem partículas microscópicas, como elétrons ou fótons. Imagine um cubo quântico girando com dois estados possíveis: “frente” ou “costas”. Esses dois estados podem ser descritos por vetores, enquanto matrizes dizem como esses estados podem se transformar (por exemplo, uma mudança no spin da partícula). Caso queira prever como uma partícula irá se comportar em um sistema físico, como sob a influência de campo magnético ou quando interage com outra partícula, os cálculos são feitos utilizando matrizes.



4. Engenharia: análise estrutural

Na engenharia civil e mecânica, matrizes ajudam a prever como uma estrutura reage à aplicação de forças. Imagine uma ponte sob a pressão do peso dos carros. Os engenheiros criam uma matriz que descreve como cada elemento estrutural (como vigas e cabos) está conectado e como ele suporta carga. Por exemplo, se uma força vertical é aplicada na extremidade de uma viga, as matrizes ajudam a calcular qual será o deslocamento ou a tensão em outra parte da estrutura. Sem isso, seria muito difícil projetar estruturas seguras e eficientes.



5. Ciência de dados: processamento de imagens

No processamento de imagens, as matrizes representam os pixels de uma imagem, de modo que cada número em uma matriz é a intensidade de cor ou brilho de um pixel. Por exemplo, em uma foto em preto e branco, cada valor da matriz pode variar de 0 (preto) a 255 (branco). Matrizes são usadas para realizar operações como melhorar o contraste, aplicar filtros ou detectar bordas. Pense em uma câmera de celular aplicando efeito de “foco” automático: ela utiliza matriz para comparar os pixels ao redor de uma área e ajustar os detalhes, reconhecendo padrões para destacar o que é mais importante na imagem.



Contexto educacional

Finamente, pode-se afirmar que as matrizes são ferramentas matemáticas fundamentais que transcendem a teoria e se aplicam em situações práticas essenciais para o desenvolvimento tecnológico e científico. No ensino, elas não apenas introduzem conceitos algébricos, mas também **preparam os estudantes para resolver problemas complexos nas mais variadas áreas.**

Dominar matrizes, portanto, não é apenas exercício acadêmico, mas habilidade que conecta a matemática ao mundo real, incentivando a criatividade e a resolução de problemas em diversas carreiras.

FERRAMENTAS

Existem diversos sites e ferramentas que permitem realizar operações com matrizes. Alguns deles estão listados abaixo. Procure explorar estes recursos, muitas vezes são uma maneira rápida de checar algum resultado de operações com matrizes.

Software:

Octave: *software* livre de alto nível para cálculos numéricos, projetado para resolver problemas matemáticos envolvendo álgebra linear, otimização, algoritmos e visualização de dados. O Octave será utilizado ao longo do curso como ferramenta de apoio nos cálculos envolvendo álgebra linear. Disponível em: <https://octave.org/>

Sites:

- **Matrix Calculator:** disponível em: <https://matrixcalc.org/pt/>
- **Matrix Reshish:** disponível em: <https://matrix.resish.com/ptBr/>

REFERÊNCIAS

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre, RS: Bookman, 2012.