

Nome completo legível

Número RA

Resolução e pontuação	_____
-----------------------	-------

(1) Resolva cada item, apresentando apenas as respostas finais. O primeiro item está resolvido como exemplo.

Ex.: Resolva a equação $y'' - 5y' + 6y = 0$.

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

(a) Resolva a equação $y'' + 4y' + 7y = 0$. (1pt) *aniso em sala*

$$y = C_1 e^{-2x} \cos(\sqrt{3}x) + C_2 e^{-2x} \sin(\sqrt{3}x)$$

(b) Determine a solução de $y'' + 2xy' - 4y = 0$ da forma $x^2 + Ax + B$. (1pt)

$$y = x^2 + \frac{1}{2}$$

(c) Determine os equilíbrios de $\begin{cases} x' = 2xy + 5x \\ y' = 3y - 7xy \end{cases}$ (não os classifique). (1pt)

$$(0,0) \quad e \quad \left(\frac{3}{7}, -\frac{5}{2}\right)$$

(d) Determine ω para que uma força externa $\cos \omega t$ cause ressonância em um sistema massa-mola horizontal não amortecido com massa λ e constante elástica p . (1pt)

$$\omega = \sqrt{p/\lambda}$$

Calculos: (a) $P(t) = t^2 + 4t + 7 \Rightarrow$ raízes $-2 \pm \sqrt{3}i$. (b) $y = x^2 + Ax + B \Rightarrow$
 $\Rightarrow y' = 2x + A \Rightarrow y'' = 2 \Rightarrow 2 + 2x(2x + A) - 4(x^2 + Ax + B) = 0 \Rightarrow 0x^2 - 2Ax +$
 $+ (2 - 4B) = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ e } B = 1/2$. (c) $\begin{cases} x(2y+5)=0 \\ y(3-7x)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ ou } y=-5/2 \\ y=0 \text{ ou } x=3/7 \end{cases}$

(d) $\lambda x'' + px = \cos \omega t \Rightarrow P(u) = \lambda u^2 + p \Rightarrow$ raízes $\pm \sqrt{p/\lambda}i \Rightarrow x_h = A \cos(\sqrt{p/\lambda}t - \theta)$

(2) Resolva o PVI $x^2 y'' - 6xy' + 10y = x^6$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$ (atenção: equação de Euler e método de Lagrange da variação das constantes). (3pts)

Euler: $P(t) = 1t^2 + (-6-1)t + 10 \Rightarrow$ raízes 2 e 5 $\Rightarrow y_1 = x^2$ e $y_2 = x^5$ (1pts)

Lagrange: $W = \begin{vmatrix} x^2 & x^5 \\ 2x & 5x^4 \end{vmatrix} = 3x^6 \Rightarrow C_1 = - \int \frac{y_2 R}{pW} dx = - \int \frac{x^5 \cdot x^6}{x^2 \cdot 3x^6} dx$

$= - \int \frac{x^3}{3} dx = - \frac{x^4}{12}$ e $C_2 = \int \frac{y_1 R}{pW} dx = \int \frac{x^2 \cdot x^6}{x^2 \cdot 3x^6} dx = \int \frac{dx}{3} = \frac{x}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow y_p = C_1 y_1 + C_2 y_2 = - \frac{x^4}{12} \cdot x^2 + \frac{x}{3} \cdot x^5 = \frac{x^6}{4} \Rightarrow y = D_1 x^2 + D_2 x^5 + \frac{x^6}{4}$ (1pts)

$y(1) = 1 \Rightarrow D_1 + D_2 + \frac{1}{4} = 1$ e $y'(1) = 3$ com $y' = 2D_1 x + 5D_2 x^4 + \frac{3x^5}{2}$

$\Rightarrow 2D_1 + 5D_2 + \frac{3}{2} = 3 \Rightarrow \begin{cases} D_1 + D_2 = 3/4 \\ 2D_1 + 5D_2 = 3/2 \end{cases} \Rightarrow D_1 = 3/4$ e $D_2 = 0 \Rightarrow y =$

$= \frac{3}{4} x^2 + \frac{x^6}{4}$ (1pts)

(3) Resolva o sistema $\begin{cases} x' = -3x + y \\ y' = -2x - y \end{cases}$ e classifique seu equilíbrio na origem. (3pts)

$y = x' + 3x$ (1ª eq.) $\Rightarrow y' = x'' + 3x' \Rightarrow x'' + 3x' = -2x - (x' + 3x)$ (2ª eq.)

$\Rightarrow x'' + 4x' + 5x = 0 \Rightarrow P(u) = u^2 + 4u + 5 \Rightarrow$ raízes $-2 \pm i \Rightarrow$

$\Rightarrow x = C_1 e^{-2t} \cos t + C_2 e^{-2t} \sin t$ (1pts)

$\Rightarrow y = x' + 3x = C_1 e^{-2t} (-2) \cos t - C_1 e^{-2t} \sin t + C_2 e^{-2t} (-2) \sin t +$

$+ C_2 e^{-2t} \cos t + 3C_1 e^{-2t} \cos t + 3C_2 e^{-2t} \sin t = (C_1 + C_2) e^{-2t} \cos t +$

$+ (C_2 - C_1) e^{-2t} \sin t$ (1pts)

Raízes com $-2 < 0$ e $i \neq 0 \Rightarrow$ espiral atrator (1pts)