

Bases Matemáticas – BIS 0003 – 1º quad. 2025 – Prof. Vinicius Cifú Lopes
Segunda Prova – Versão X – 05 maio 2025

Nome legível

Número RA

<i>Resolução e pontuação</i>	
------------------------------	---

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou “branquinho”. Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém 3 (três) folhas, incluindo esta, e 4 (quatro) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Resolva cada item, apresentando apenas as simplificações das expressões e os resultados. O primeiro item está resolvido como exemplo.

Ex.: Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$.

$$\frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{1 + \cos x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \cdot \frac{0}{2} = 0$$

(a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3 - 3x^2 - 2x}{4x^3 - x^2 - 3x}$. (1pto)

$$\frac{\cancel{x} (5x^2 - 3x - 2)}{\cancel{x} (4x^2 - x - 3)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0 - 2}{0 - 0 - 3} = \frac{2}{3}$$

(b) Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 3x^2 - 2x}{4x^3 - x^2 - 3x}$. (1pto)

$$\frac{\cancel{x^3} (5 - 3/x - 2/x^2)}{\cancel{x^3} (4 - 1/x - 3/x^2)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{5 - 0 - 0}{4 - 0 - 0} = \frac{5}{4}$$

(c) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^3 - 3x^2 - 2x}{4x^3 - x^2 - 3x}$. (1pto)

$$\frac{\cancel{x} (\cancel{x-1}) (5x+2)}{\cancel{x} (\cancel{x-1}) (4x+3)} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{7}{7} = 1$$

(d) Substitua a tal que exista $\lim_{u \rightarrow 5} \frac{u^2 - 8u + a}{u^2 - 3u - 10}$ e calcule-o. (1pto)

$$a = 15 \Rightarrow \frac{u^2 - 8u + 15}{u^2 - 3u - 10} = \frac{(\cancel{u-5})(u-3)}{(\cancel{u-5})(u+2)} \xrightarrow{u \rightarrow 5} \frac{2}{7}$$

(limite da forma $\frac{k}{0}$: existência requer $k=0$.)

(2) Mostre que $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{x + \sin x}\right) = 2$. (2pts)

Para $x > 1$, temos $x-1 \leq x + \sin x \leq x+1$ e então (com $x-1 > 0$)

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x + \sin x} \leq \frac{1}{x-1} \quad (\underline{1 \text{ pt}})$$

Pelo Teorema do Confronto, como $\frac{1}{x \pm 1} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$, também

$$\frac{1}{x + \sin x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0. \quad (\underline{1 \text{ pt}})$$

(3) Calcule os limites $\lim_{s \rightarrow 3^\pm} e^{s/(s-3)}$ separadamente. (2pts)

$\lim_{s \rightarrow 3^+} e^{s/(s-3)}$: temos $s > 3 \Rightarrow s/(s-3) > 0 \Rightarrow s/(s-3) \xrightarrow{s \rightarrow 3^+} \infty$ (da forma $\infty/0^+$) $\Rightarrow e^{s/(s-3)} \xrightarrow{s \rightarrow 3^+} \infty$. (1 pt)

$\lim_{s \rightarrow 3^-} e^{s/(s-3)}$: temos $s < 3$, mas $s > 0 \Rightarrow s/(s-3) < 0 \Rightarrow s/(s-3) \xrightarrow{s \rightarrow 3^-} (-\infty)$ (da forma $\infty/0^-$) $\Rightarrow e^{s/(s-3)} \xrightarrow{s \rightarrow 3^-} 0$. (1 pt)

(4) Enuncie o Teorema do Valor Intermediário. (2pts)

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua (1 pt) e se $f(a) < u < f(b)$ ou $f(a) > u > f(b)$, então existe $x \in]a, b[$ tal que $f(x) = u$ (1 pt).