Markowe
Wykłady
z Matematyki

Markowe Wykłady z Matematyki

analiza geometria i świat fizyczny

Marek Zakrzewski

GiS

Projekt okładki
Andrzej Krupa

Zdjęcie na okładce
Artur Zakrzewski

Skład komputerowy książki w systemie LaTeX wykonał autor.
Rysunki wykonał Marian Gewert.

ISBN 978–83–62780–45–7

Wydanie I, Wrocław 2017
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: I-BiS Usługi Komputerowe -Wydawnictwo s.c.

Wyznaję pogląd naiwny, ale logicznie bez zarzutu, że [. . .] są tylko dwie kategorie studentów: tacy, którzy już lubią matematykę oraz tacy, którzy jeszcze jej nie lubią, ale mogą polubić. Moja książka adresowana jest do obu tych grup.

George F. Simmons, *Calculus gems*, MAA 2007

Księga natury pisana jest w języku matematyki . . .

Galileusz

Spis treści

Wstęp

Stosowność języka matematyki do formułowania praw fizyki jest cudownym darem.

Eugen P. Wigner, *Niepojęta skuteczność matematyki w naukach przyrodniczych*, cyt. wg *Zagadnienia filozoficzne* w nauce, XIII 1991, tłum. Jacek Dembek C.Ss.R

Książka może służyć jako podstawowy podręcznik dla studentów uczelni technicznych, a także jako podręcznik uzupełniający dla studentów matematyki. Wykłady 1-22 (z niewielkimi cięciami w trudniejszych partiach materiału) odpowiadają semestralnemu wykładowi kursu *Analiza 2* (tzn. rachunku różniczkowego i całkowego funkcji wielu zmiennych) z elementami analizy wektorowej. Wykłady 24-29 mogą służyć jako podstawa krótkiego kursu *Funkcje zespolone*. Tylko w kilku wykładach książka wykracza poza typowy materiał.

Zakładamy, że Czytelnik przeszedł przez podstawowy kurs analizy 1 (tzn. rachunku funkcji jednej zmiennej) i elementarny kurs geometrii analitycznej, w tym działania na wektorach — mnożenie skalarne i wektorowe. W ostatniej części wymagana jest też znajomość liczb zespolonych.

Matematyka zdecydowanie stosowana

W tomie *Analiza* poświęconemu rachunkowi różniczkowemu i całkowemu funkcji jednej zmiennej skupiliśmy się na jego zastosowaniach w matematyce *czystej*. Był to naturalny wybór, gdyż autentyczne zastosowania w fizyce i naukach technicznych wymagają narzędzi bardziej zaawansowanych: funkcji wielu zmiennych, funkcji wektorowych, funkcji zespolonych czy równań różniczkowych cząstkowych.

W tym tomie pokazujemy, jak matematyka pomaga rozumieć świat fizyczny. Każda z pięciu części kończy się wykładem odnoszącym się do podstawowych zagadnień fizyki, czasem także geometrii.

Niestety, omawiając równania różniczkowe cząstkowe musieliśmy ograniczyć się jedynie do luźnego zasygnalizowania tej tematyki. Uzupełnienie książki o jakkolwiek użyteczny ich wykład zwiększyłoby tom o ponad 100 stron.

Rola zadań

Przynajmniej część podstawowych pojęć omawianych w tym kursie uchodzi za trudne. Na pewno *pojęciowo* jest to materiał trudniejszy niż *Analiza 1*. Większość zadań ma ułatwić zrozumienie pojęć i pokazać przykładowe zastosowania. Unikamy zadań trudnych rachunkowo. Współcześnie, przeciętny użytkownik analizy matematycznej niewątpliwie musi *rozumieć* takie pojęcia jak całka krzywoliniowa czy powierzchniowa, ale rzadko wykonuje samodzielnie skomplikowane rachunki.

Do większości zadań podane są wskazówki bądź odpowiedzi. Często Czytelnik może samodzielnie sprawdzić poprawność rozwiązania, korzystając np. z programu Wolfram Alpha®. Tam, gdzie to możliwe proponujemy rozwiązywanie zadań rachunkowych z pomocą tego programu. Przy niektórych tematach warto też sięgać do dostępnych w Internecie wizualizacji.

Dowody, a raczej wyjaśnienia

Ścisłe dowody na poziomie kursu *Analizy 2* są zazwyczaj dość trudne. Wymagałyby też rozbudowania podstaw teoretycznych. Dlatego tylko część twierdzeń podawana jest z dowodami czy też szkicami dowodów. Dowody staramy się dać wszędzie tam, gdzie twierdzenie jest zaskakujące, a przynajmniej mało oczywiste. To tłumaczy, dlaczego najwięcej dowodów jest w części poświęconej funkcjom zespolonym.

Prostsze, rutynowe dowody służą przede wszystkim lepszemu zrozumieniu i zapamiętaniu definicji.

Biogramy

Podobnie, jak we wcześniejszych tomach cyklu w książce przedstawiamy sylwetki najważniejszych matematyków związanych z wykładaną tematyką. Postacie omówione we wcześniejszych tomach cyklu w zasadzie nie mają tu osobnych biogramów albo mają biogramy krótsze. Zawsze wolałem dać biogram ważnego, ale mniej znanego matematyka niż powtarzać notki o postaciach ogólnie znanych. W szczególności nie ma notki biograficznej Gaussa.

Mam nadzieję, że Czytelnik po przejrzeniu biogramów wszystkich czterech tomów uzyska dość pełny przegląd najważniejszych matematyków do końca XIX w. Nazwiska nowszych pojawiały się z rzadka, gdyż ich dorobek na ogół nie jest zrozumiały dla niespecjalisty.

Odnotujmy, że łącznie w całym cyklu pojawiły się notki biograficzne poświęcone ponad 50 matematykom. Pośród nich jest 14 matematyków brytyjskich, po 10 Francuzów i Niemców i sześciu Szwajcarów. Całkowita nieobecność USA i znikoma obecność Rosji (2 biogramy) mimo ich wybitnego wkładu w matematykę bierze się stąd, że kraje te zaczęły odgrywać ważną rolę w jej rozwoju dość późno: Rosja począwszy od lat 1830-40, USA od początków XX w.

Uwagi dla wykładowców

Ze względu na naturę omawianego materiału starałem się wszędzie pokazywać *charakter* jego zastosowań w fizyce. Z drugiej strony zdaję sobie sprawę, iż rzadko można zakładać u Czytelnika gruntowne przygotowanie w tym zakresie. Dlatego też przykłady z fizyki są zawsze możliwie proste. Bardzo proste są też sporadyczne zadania z pogranicza fizyki.

Zwróćmy uwagę, że niezorientowane całki krzywoliniowe i powierzchniowe są potraktowane bardzo zwięźle. Stanowią one jedynie wprowadzenie do ich zorientowanych odpowiedników. Całki niezorientowane są pojęciowo dość proste, a zakres ich zastosowań znacznie mniejszy.

Materiał poświęcony całkom krzywoliniowym i powierzchniowym został konsekwentnie rozbity na część płaską (część III) i przestrzenną (część IV). Tak wyraźny podział podyktowany był dwoma względami.

Po pierwsze całki krzywoliniowe są technicznie prostsze od całek powierzchniowych, a pod względem pojęciowym — gdy twierdzenie Greena pokażemy zarówno w postaci standardowej, jak i normalnej — dają pełny obraz problematyki. Przy starannie wyłożonej teorii całek krzywoliniowych teorię całek powierzchniowych i przestrzennych krzywoliniowych można wyłożyć bardzo szybko.

Po drugie wyraźne wydzielenie części III pozwala przejść od razu do części V, w wielu miejscach silnie z trzecią powiązanej.

◇ ◇ ◇

Pracując nad tym tomem korzystałem z bardzo wielu książek. Części I-IV najwięcej zawdzięczaja podręcznikom G. Simmonsa *Calculus with Analytic Geometry* oraz C. H. Edwardsa i D. E. Penneya *Calculus - Early Transcendentals.* Pracując nad wykładem 6. korzystałem głównie z książki S. J. Farlowa *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers.*

W częściach III-IV da się zauważyć wpływ książki H. M. Sheya *Div, Grad, Curl and All That*, a może też D. Fleischa *A Student's Guide to Maxwell's Equations.* Podstawowa konstrukcja części piątej wzorowana jest na książce S. A. Sasane *A Friendly Approach to Complex Analysis*, a niektóre pomysły pochodzą z podręczników J. Baka i D. J. Newmana *Complex Analysis* i F. J. Flanigana *Complex variables.* Ostatni wykład inspirowany jest książką *The Mathematical Mechanic* Marka Leviego.

Chyba każda odpowiednio długa książka zawiera błędy. Znaczną część udało się usunąć dzięki moim kolegom dr. Jerzemu Cisło, dr. Marianowi Gewertowi, a zwłaszcza doc. dr. Zbigniewowi Skoczylasowi. Dr Gewert zadbał też o staranne opracowanie rysunków. Za wszystkie uwagi i sugestie serdecznie dziękuję.

Cykl *Markowe Wykłady z Matematyki* powstawał przynajmniej od 2009 roku, a w fazę wydawniczą wszedł jesienią roku 2012. Dziękuję jeszcze raz moim Kolegom i zarazem Redaktorom-Wydawcom Marianowi Gewertowi i Zbigniewowi Skoczylasowi za ponad cztery lata znakomitej współpracy.

M. Z.

I

Pochodne cząstkowe i ich zastosowania

Od XVII wieku intuicje fizyczne służyły jako żywotne źródło zagadnień i metod matematycznych.

R. Courant, D. Hilbert,
Methoden der mathematischen Physik,
cyt. wg The MacTutor History of Mathematics archive,
http: www-history.mcs.st-andrews.ac.uk

Pewnego razu [William Thomson, lord Kelvin] wchodząc do sali wykładowej, rzucił studentom pytanie, co to takiego dx/dt. W odpowiedzi usłyszał wszystkie możliwe ścisłe definicje. Wszystkie zakwestionował, po czym dodał: [...] dx/dt to prędkość.

F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der* Mathematik im 19. Jahrhundert, Springer Verlag 1926

Najważniejszym pojęciem matematyki jest funkcja. W tym tomie zajmujemy się głównie **funkcjami dwu i trzech zmiennych**. Funkcje takie dominują w opisie zjawisk fizycznych i w geometrii. Nasze podejście do funkcji jest podobne do tego, jakie mieliśmy w przypadku funkcji jednej zmiennej. Staramy się wyobrazić ich wykresy, szukamy ekstremów.

Z rachunkowego punktu widzenia najważniejszym narzędziem okażą się tu **pochodne cząstkowe** i ściśle z nimi związany **gradient**. Za pomocą pochodnych cząstkowych wyraża się warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej. Warunek dostateczny wymaga wprowadzenia *hessjanu* — pewnej kombinacji pochodnych cząstkowych drugiego rzędu.

Najważniejszym zastosowaniem badania ekstremów będzie seria zadań **izoperymetrycznych**. Jednak odpowiedź na najważniejsze z nich damy dopiero w III części, przy użyciu dość zaawansowanych twierdzeń o całkach.

Przebieg rzeczywistych procesów fizycznych zależy od wielu zmiennych, więc już na początkowym etapie zastosowań pojawiają się funkcje wielu zmiennych. Prawa rządzące podstawowymi procesami fizycznymi — jak rozchodzenie się ciepła, czy zjawiska falowe — wyrażają się za pomocą **równań różniczkowych cząstkowych**. Pod koniec I części przyjrzymy się najprostszym przypadkom trzech **klasycznych równań fizyki matematycznej**: równaniom struny, dyfuzji i Laplace'a.

Pochodne cząstkowe pojawiają się w sposób jawny na początku XVIII w. Ale zdaniem części historyków nauki można takie pochodne dostrzec już w pracach Newtona i Leibniza. Przynajmniej od połowy XVIII w. matematycy zajmują się równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Uściślenie pojęć i główne twierdzenia teoretyczne to już wiek XIX.

Wykład 1

Pojęcia wstępne

Większość wzorów geometrii i prawa fizyki wyraża się za pomocą funkcji wielu zmiennych. Przykładem prawo grawitacji

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

gdzie G — stała grawitacji. Funkcja F (siła przyciągania pomiędzy dwoma ciałami) jest funkcją trzech zmiennych: masy m_1, masy m_2 i odległości r pomiędzy środkami obu mas.

Z czysto pojęciowego punktu widzenia istotna jest tylko różnica pomiędzy funkcjami jednej zmiennej a funkcjami dwu i więcej zmiennych. Dlatego większość dalszych rozważań prowadzić będziemy dla funkcji dwu bądź trzech zmiennych, tzn. funkcji postaci $f(x, y)$ lub $f(x, y, z)$.

1.1 Funkcje wielu zmiennych i ich wykresy

Funkcje wielu zmiennych - Funkcje dwu zmiennych i powierzchnie - Poziomice - Zadania

Pierwsze wyobrażenie o charakterze funkcji daje jej wykres. Dlatego nasze rozważania o funkcjach wielu zmiennych zaczniemy od wykresów takich funkcji.

Funkcje wielu zmiennych

Funkcją rzeczywistą n zmiennych nazywać będziemy funkcję postaci

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

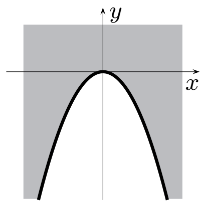
gdzie x_i oraz y są liczbami rzeczywistymi. Aby podkreślić, że argumenty i wartości są liczbami rzeczywistymi, czasem pisać będziemy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Zbiór wszystkich n-tek $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dla których funkcja f jest określona, nazywamy **dziedziną** funkcji f. Zauważ, że dziedzina jest tu podzbiorem $\mathbb{R}^n$ — podzbiorem płaszczyzny w przypadku funkcji dwu zmiennych, podzbiorem przestrzeni trójwymiarowej w przypadku funkcji trzech zmiennych.

Dziedziną funkcji

$$z = \sqrt{y + x^2}$$

jest zbiór punktów płaszczyzny spełniających warunek $y + x^2 \geqslant 0$, czyli obszar pokazany na rysunku obok.



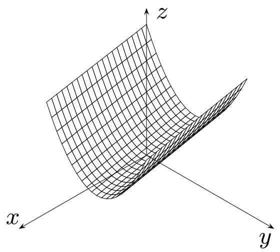
Wykresem funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazywamy zbiór punktów

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

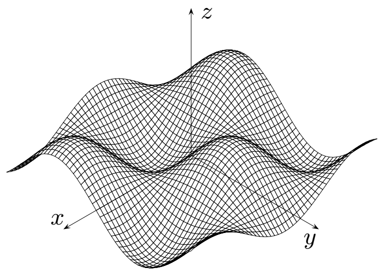
takich, że $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Zauważmy, że już dla trzech zmiennych wykres jest podzbiorem czterowymiarowej przestrzeni $\mathbb{R}^4$, a więc jego praktyczne znaczenie jest umiarkowane.

Funkcje dwu zmiennych i powierzchnie

Wykres funkcji $z = f(x, y)$ jest podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^3$, konkretnie **powierzchnią dwuwymiarową**, i często możemy ją sobie wyobrazić. Oto kilka przykładów:



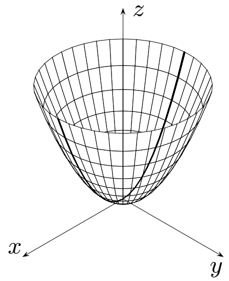
$z = y^2 - x$



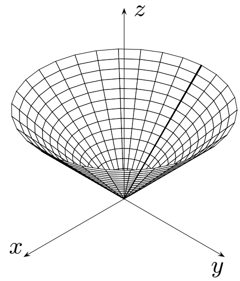
$z = \sin x \cos y$

Szczególnie łatwo wyobrazić sobie wykres dla funkcji postaci $z = f(x^2 + y^2)$. Chociaż są to funkcje dwu zmiennych, wartość funkcji zależy wyłącznie od $x^2 + y^2$, a więc też wyłącznie od $\sqrt{x^2 + y^2}$. Oznacza to, że dla punktów (x, y) jednakowo odległych od początku układu wartości funkcji są równe. Wykres jest wówczas powierzchnią obrotową, przy czym osią obrotu jest Oz.

Spójrzmy na dwa wykresy poniżej:



$z = x^2 + y^2$



$z = \sqrt{x^2 + y^2}$

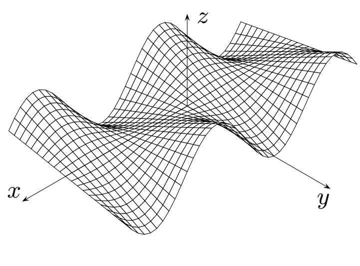
Aby zrozumieć, dlaczego te wykresy tak wyglądają, rozważmy ich przekrój pionową płaszczyzną $y = 0$. Spójrzmy najpierw na pierwszy z nich. Przekrój ten jest wykresem funkcji $z = x^2$, a więc parabolą. Obracając ją wokół osi Oz (wiemy już, że wykresem jest powierzchnia obrotowa) otrzymujemy zatem powierzchnię $z = x^2 + y^2$, zwaną **paraboloidą**.

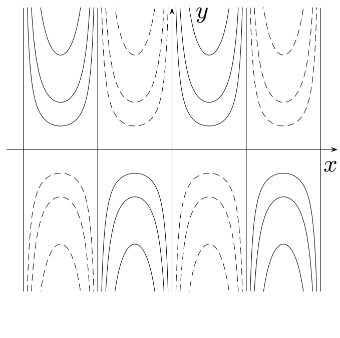
Podobnie dla $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ odpowiednim przekrojem jest wykres funkcji $z = \sqrt{x^2} = |x|$. Obracając ten wykres wokół osi Oz otrzymujemy nieograniczoną **powierzchnię stożkową** przedstawioną na rysunku.

Poziomice

Rzadko wyobrażenie sobie wykresu jest aż tak proste. Zazwyczaj podstawowym narzędziem wizualizacji wykresu są poziomice. **Poziomicą** wykresu $z = f(x, y)$ odpowiadającą poziomowi c nazywamy zbiór punktów (x, y) takich, że $f(x, y) = c$. Innymi słowy, poziomica to rzut na płaszczyznę Oxy przekroju powierzchni $z = f(x, y)$ poziomą płaszczyzną na wysokości c.

Naszkicowanie poziomic odpowiadających kilku wysokościom często daje już dobre wyobrażenie analizowanej powierzchni. Poniżej szkic powierzchni $z = y \sin x$ oraz mapa jej poziomic.





Program Wolfram Alpha® pokazuje zarówno obraz powierzchni, jak też mapę poziomic.

Poziomice funkcji trzech zmiennych określamy analogicznie. Zauważmy, że poziomice takich funkcji są powierzchniami, a nie liniami.

Zadania

1. Naszkicuj dziedzinę funkcji:

a) $z = \dfrac{1}{x-y}$; b) $z = \dfrac{1}{x^2+xy}$; c) $z = \sqrt{x^2-y^2}$;
d) $z = x + \sqrt{y-|y|}$; e) $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$; f) $z = \sqrt{x^2+2x+y^2}$.

2. Jak wygląda dziedzina funkcji:

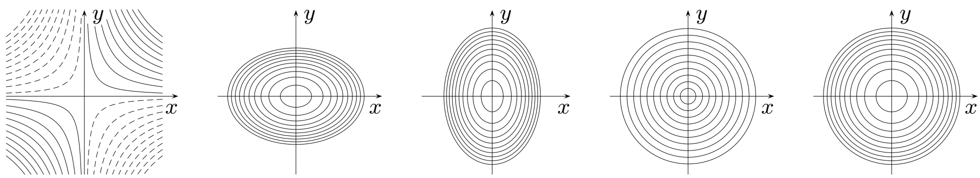
a) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x+y+z}$; b) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2-4}$; c) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{xyz-yz}$?

3. Jak wyglądają poziomice funkcji:

a) $f(x,y) = x+2y$; b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$; c) $f(x,y) = x^2-y^2$; d) $f(x,y) = xy$?

4. Jak wyglądają poziomice funkcji: a) $f(x,y,z) = x+y+z$; b) $f(x,y,z) = x^2+y^2$?

5. Dopasuj poziomice do powierzchni:



$z = x^2+y^2$ $z = xy$ $z = \sqrt{x^2+y^2}$ $z = x^2+2y^2$ $z = 2x^2+y^2$

6. Korzystając z programu Wolfram Alpha® znajdź wykres i poziomice funkcji $z = \sin(x+y)\cos(x-y)$ za pomocą instrukcji

plot $\sin(x+y) * \cos(x-y)$

♢ ♢ ♢

7. Podaj przykład funkcji trzech zmiennych, której poziomice odpowiadające dodatnim poziomom są powierzchniami: a) sześcianu; b) ośmiościanu foremnego.

1.2 Kilka słów o podzbiorach $\mathbb{R}^n$

Odległość punktów - Otoczenie, sąsiedztwa i zbiory otwarte - Punkty skupienia i zbiory domknięte - Zbiory ograniczone i nieograniczone - Zadania

Naturalną dziedziną funkcji jednej zmiennej jest zazwyczaj przedział (ten termin obejmuje też prostą i półprostą) bądź suma przedziałów. Funkcje dwu i więcej zmiennych mają dziedziny bardziej urozmaicone. Dlatego poświęcimy chwilę uwagi podzbiorom przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Dalej niemal zawsze n będzie równe 2 albo 3.

Odległość punktów

Punkty płaszczyzny czy przestrzeni oznaczać będziemy literami pogrubionymi: $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, itd. Jeżeli mówimy o przestrzeni n-wymiarowej, to $\boldsymbol{x}$ oznacza domyślnie punkt $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Odległość punktów $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ oznaczać będziemy symbolem $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ odległość punktów wyraża się wzorem

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Dla płaszczyzny i przestrzeni trójwymiarowej wzór ten jest prostym wnioskiem z twierdzenia Pitagorasa.

Otoczenia, sąsiedztwa i zbiory otwarte

Dla ustalonego punktu $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, zbiór punktów $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ spełniających dla pewnego $r > 0$ warunek

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) < r$$

nazywamy **otoczeniem punktu** $\boldsymbol{x}_0$. Na płaszczyźnie otoczeniem punktu jest wnętrze koła, w przestrzeni — wnętrze kuli. Gdy z otoczenia punktu $\boldsymbol{x}_0$ usuniemy ten punkt, otrzymamy jego **sąsiedztwo**.

Punkt $\boldsymbol{x}_0 \in A$ nazywamy punktem **wewnętrznym** zbioru A, jeżeli zawarty jest w A wraz z pewnym swoim otoczeniem. W przeciwnym razie punkt nazywamy **brzegowym**. Podzbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy **otwartym**, gdy składa się wyłącznie z punktów wewnętrznych. Na płaszczyźnie zbiorami otwartymi są np. wnętrze koła czy wielokąta, a także ich zewnętrza.

Punkty skupienia i zbiory domknięte

Punkt $\boldsymbol{x_0}$, którego każde sąsiedztwo zawiera punkty należące do zbioru A, nazywamy **punktem skupienia** zbioru A. Zbiór zawierający wszystkie swoje punkty skupienia nazywamy **domkniętym**. Na płaszczyźnie zbiorami domkniętymi są np. koło bądź wielokąt wraz z brzegiem czy domknięty odcinek.

Łatwo wykazać, że $A \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem domkniętym wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{R}^n \setminus A$ jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$. Pamiętajmy jednak, że nie każdy zbiór jest otwarty lub domknięty. Przykładem wnętrze koła uzupełnione o punkt na jego brzegu.

Zbiory ograniczone i nieograniczone

Jeżeli zbiór A na płaszczyźnie (w przestrzeni) jest zawarty w pewnym kole (odpowiednio kuli), to nazywamy go zbiorem **ograniczonym**, w przeciwnym razie — **nieograniczonym**. Przykładem zbioru ograniczonego jest koło, zbioru nieograniczonego — prosta czy półpłaszczyzna.

Zadania

8. Każdy z poniższych warunków opisuje pewien podzbiór płaszczyzny bądź przestrzeni. Wskaż podzbiory otwarte i podzbiory domknięte:

a) $x = 0$, $y \geqslant 0$; b) $xy > 0$; c) $x + y + z > 0$; d) $1 < x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2$.

9. **Brzegiem** zbioru A nazywamy zbiór takich punktów $\boldsymbol{x}$, że każde otoczenie $\boldsymbol{x}$ ma niepustą część wspólną ze zbiorem A, jak też z jego dopełnieniem. Znajdź brzeg podzbioru płaszczyzny opisanego warunkiem:

a) $xy > 0$; b) $x \geqslant 0$; c) $x^2 + y^2 \geqslant 2x$; d) $|x + y| > x + y$.

♢ ♢ ♢

10. Uzasadnij, że: zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest:
a) otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{R}^n \setminus A$ jest domknięty;
b) domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera wszystkie swoje punkty brzegowe.

1.3 Granica i ciągłość

Granice ciągu - Granica funkcji - Ciągłość - Zadania

Podobnie, jak dla funkcji jednej zmiennej, pojęcie granicy funkcji potrzebne jest do zdefiniowania pochodnej (tu będzie kilka pokrewnych pojęć) i ciągłości funkcji.

Granica ciągu

Mówimy, że ciąg $\boldsymbol{x}_n$ jest zbieżny do $\boldsymbol{x}_0$, jeżeli dowolne otoczenie punktu $\boldsymbol{x}_0$ zawiera prawie wszystkie (czyli wszystkie oprócz skończenie wielu) wyrazy ciągu. Można wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x_0, y_0) \Longleftrightarrow \left[\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \lim_{n\to\infty} y_n = y_0\right].$$

Innymi słowy zbieżność ciągu punktów na płaszczyźnie jest równoważna zbieżności po współrzędnych. Analogicznie jest dla wyższych wymiarów.

Granica funkcji

Mówimy, że liczba g jest **granicą** funkcji f w punkcie $\boldsymbol{x}_0$, jeżeli dla dowolnego ciągu $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}_0$, o wyrazach różnych od $\boldsymbol{x}_0$, mamy $f(\boldsymbol{x}_n) \to g$. Zauważ, że funkcja f w samym punkcie $\boldsymbol{x}_0$ nie musi być określona.

Prawa rachunku granic dla funkcji wielu zmiennych są dokładnie takie same, jak dla funkcji jednej zmiennej. W konsekwencji obliczanie granic też jest podobne.

Przykład 1.1 Znajdź granicę funkcji w punkcie $(0,0)$:

$$\text{a) } f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}; \qquad \text{b) } g(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Rozwiązanie:
a) Jeżeli $(x,y) \to (0,0)$, to $t = x^2 + y^2 \to 0$. Zatem

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

b) Zauważmy, że

$$0 \leqslant \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant |x| \cdot \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Ułamek ten jest oczywiście równy co najwyżej 1. Zatem, gdy x dąży do zera, to także funkcja $g(x,y)$ dąży do zera.

Dla dowodu, że granica w danym punkcie nie istnieje, wystarczy wskazać dwa ciągi zbieżne do tego punktu takie, że granice funkcji na tych ciągach są różne.

Przykład 1.2 Wykaż, że granica funkcji

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

w punkcie $(0,0)$ nie istnieje.

Rozwiązanie: Gdy zbliżamy się do punktu $(0,0)$ wzdłuż prostej $y = x$, tzn. ciąg ma postać (x_n, x_n), to

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n, x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{x_n^2 + x_n^2} = \frac{1}{2}.$$

Ale, gdy do punktu $(0,0)$ zbliżamy się wzdłuż prostej $y = 2x$, a więc gdy ciąg ma postać $(x_n, 2x_n)$, to analogiczna granica wynosi $2/5$. Zatem funkcja nie ma w tym punkcie granicy.

Ciągłość

Funkcja f określona w punkcie $\boldsymbol{x}_0$ jest w tym punkcie **ciągła**, jeżeli

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0).$$

Funkcja **ciągła** to funkcja ciągła w każdym punkcie swej dziedziny.

Podobnie, jak dla funkcji jednej zmiennej suma, różnica, iloczyn, iloraz, a także złożenie funkcji ciągłych są ciągłe we wszystkich punktach określoności. W konsekwencji funkcje zadane jednym wzorem, w którym nie występują nieciągłe funkcje, jak np. signum $y = \operatorname{sgn} x$, podłoga $y = \lfloor x \rfloor$ czy sufit $y = \lceil x \rceil$, są ciągłe.

Zadania

11. Zbadaj, czy istnieją granice:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{y}$; b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-2xy+y^2}{|x-y|}$; c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$.

12. W jakich punktach nieciągła jest funkcja:

a) $f(x,y) = x + \lfloor y \rfloor$; b) $f(x,y) = x^2 \operatorname{sgn} y$?

◇ ◇ ◇

13. Wykaż, że funkcja

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

nie ma granicy w punkcie $(0,0)$, choć dla dowolnego ciągu postaci (x_n, kx_n), gdzie $x_n \to 0$, granica $f(x_n, y_n)$ jest równa zeru. Wsk. Co dzieje się, gdy do punktu $(0,0)$ zbliżamy się po paraboli $y = x^2$?

Wykład 2

Pochodne cząstkowe i tematy pokrewne

Pochodne funkcji jednej zmiennej pozwalają wyobrazić sobie kształt krzywej $y = f(x)$. Podobnie, pochodne cząstkowe f_x oraz f_y funkcji dwu zmiennych f dają wiele użytecznych informacji o powierzchni $z = f(x, y)$. W szczególności, jak zobaczymy w następnym wykładzie, za pomocą pochodnych cząstkowych funkcji f wyraża się równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni $z = f(x, y)$.

2.1 Pochodne cząstkowe

Pochodne cząstkowe - Interpretacja geometryczna - Pochodne cząstkowe a ciągłość funkcji - Zadania

Przypomnijmy, że pochodna funkcji jednej zmiennej mówi, jak szybko rośnie (maleje) funkcja w danym punkcie. Pochodne cząstkowe określają tempo zmiany funkcji w kierunku osi.

Pochodne cząstkowe

Pochodną cząstkową (pierwszego rzędu) funkcji $f(x, y)$ po x w punkcie (x_0, y_0) nazywamy liczbę

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Analogicznie, pochodna cząstkowa po y to

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Dla funkcji większej liczby zmiennych mówimy też o pochodnych cząstkowych w pozostałych kierunkach.

Pochodne cząstkowe funkcji f oznaczane są często za pomocą prostszych symboli f_x, f_y itd. Wprowadzony przez Leibniza symbol $\partial f/\partial x$ jest czytelniejszy, symbol f_x, — łatwiejszy w składzie. Obydwa sposoby oznaczeń występują w literaturze, więc warto przyzwyczaić się do obu.

Przykład 2.1 Oblicz obie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji $f(x,y) = x^2 - xy$ w punkcie $(x_0, y_0) = (2,3)$:
a) korzystając z definicji;
b) korzystając ze wzorów na pochodne.

Rozwiązanie:
a) Z definicji pochodnej cząstkowej po x mamy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(2,3) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(2+\Delta x,3) - f(2,3)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{[(2+\Delta x)^2 - (2+\Delta x)\cdot 3] - (2^2 - 2\cdot 3)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{[(4+4\Delta x+\Delta^2 x) - (6+3\Delta x)] - (-2)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} (1+\Delta x) = 1.
\end{aligned}$$

Podobnie

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(2,3) &= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(2,3+\Delta y) - f(2,3)}{\Delta y} = \\
&= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{[2^2 - 2(3+\Delta y)] - (2^2 - 2\cdot 3)}{\Delta y} = \\
&= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{(-2-2\Delta y) - (-2)}{\Delta y} = \\
&= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{-2\Delta y}{\Delta y} = -2.
\end{aligned}$$

b) Zauważmy, że gdy ustalimy wartość zmiennej $y = y_0$ (y nie zmienia się), to otrzymamy funkcję $z = f(x, y_0)$ jednej zmiennej. Pochodną cząstkową funkcji f po x jest pochodna tej funkcji. Analogicznie jest dla pochodnej cząstkowej po y. Symbolicznie:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{d}{dx} f(x,y_0), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{d}{dy} f(x_0,y).$$

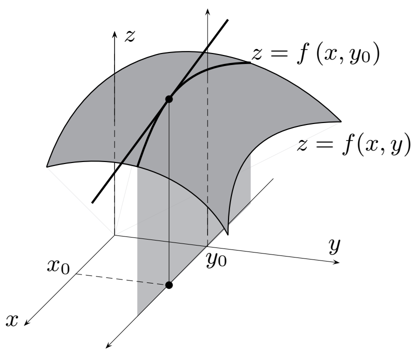
W powyższym przykładzie

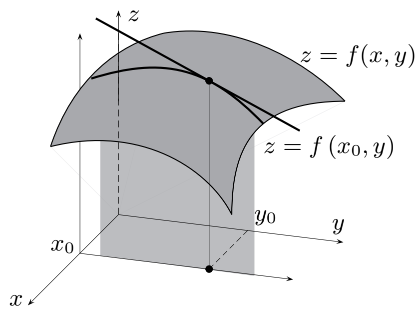
$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2-xy) = (x^2)'_x-(x)'_x y = 2x-y, \qquad \frac{\partial}{\partial y}(x^2-xy) = (x^2)'_y-x(y)'_y = -x.$$

Dla $x=2$, $y=3$ otrzymujemy $f_z = 1$, $f_y = -2$.

Interpretacja geometryczna

Wykres funkcji $z = f(x,y)$ jest pewną powierzchnią. Przetnijmy ten wykres płaszczyzną $y = y_0$. Otrzymany przekrój jest wykresem funkcji jednej zmiennej $z = f(x, y_0)$. Pochodna cząstkowa $f_x(x_0, y_0)$ wyraża zatem tempo zmiany funkcji f, gdy przechodzimy przez punkt (x_0, y_0) poruszając się w kierunku osi Ox. Analogicznie pochodna cząstkowa f_y wyraża tempo zmiany f, gdy poruszamy się w kierunku osi Oy.





Obie pochodne można też interpretować jako miarę nachylenia stycznych do powierzchni $z = f(x,y)$ prowadzonych w punkcie (x_0, y_0) w odpowiednich kierunkach.

Pochodne cząstkowe a ciągłość funkcji

Z rachunku różniczkowego i całkowego funkcji jednej zmiennej pamiętamy, że funkcja może mieć pochodną tylko w punkcie, w którym jest ciągła. W rachunku wielu zmiennych nie ma związku pomiędzy istnieniem pochodnych cząstkowych a ciągłością funkcji.

Rozważmy funkcję

$$(*) \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{gdy } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{gdy } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Wykażemy, że funkcja ta nie jest ciągła. Zauważmy, że granica funkcji w punkcie $(0,0)$, gdy zbliżamy się do niego po prostej $y = kx$, zależy od wyboru prostej:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot kx}{x^2+(kx)^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

Jednak ma ona obie pochodne cząstkowe. Ponieważ funkcja zadana jest innym wzorem w samym punkcie $(0,0)$, a innym w jego sąsiedztwie, pochodne musimy obliczać bezpośrednio z definicji. Mamy

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x \cdot 0}{\Delta x^2 + 0^2} = 0.$$

Podobne rachunki pokazują, iż także $f_y = 0$.

Widzimy zatem, że funkcja nieciągła może mieć pochodne cząstkowe. Rozwiązując zadanie 4. Czytelnik przekona się, że nie ma też zależności odwrotnej: funkcja ciągła może nie mieć pochodnych cząstkowych.

Zadania

1. Oblicz pochodne cząstkowe podanych funkcji korzystając z definicji:

a) $f(x,y) = x(y+1)$ w punkcie $(2,3)$; b) $f(x,y) = \sqrt{xy}$ w punkcie $(1,4)$.

2. Oblicz pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji:

a) $f(x,y) = x \sin y$; b) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$; c) $f(x,y) = \ln \dfrac{x-y}{x+y}$; d) $f(x,y,z) = xy^2z^3$.

3. Korzystając z programu Wolfram Alpha® oblicz pochodną cząstkową po x funkcji $z = xe^{x+y}$ wykonując instrukcję

$$\mathrm{d}/dx\,(x * \exp(x+y))$$

♢ ♢ ♢

4. Zbadaj, czy poniższa funkcja ma pochodne cząstkowe w punkcie $(0,0)$:

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$; b) $f(x,y) = |x+y|$; c) $f(x,y) = |xy|$.

5. Pomiędzy temperaturą T gazu doskonałego, jego ciśnieniem p, objętością V zachodzi związek $pV/T = c$, gdzie c jest pewną stałą zależną od gazu. Sprawdź, że

$$\frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -1.$$

6.* Zbadaj, czy pochodne cząstkowe funkcji określonej wyżej wzorem $(*)$ są ciągłe w punkcie $(0,0)$?

2.2 Pochodne cząstkowe drugiego rzędu i laplasjan

Pochodne II rzędu - Twierdzenie Schwarza - Laplasjan - Zadania

W rachunku różniczkowym funkcji jednej zmiennej druga pochodna rozstrzyga kwestię ekstremum w punktach krytycznych, a także odpowiada za wypukłość wykresu funkcji. W rachunku różniczkowym wielu zmiennych podobną rolę odgrywają kombinacje pochodnych cząstkowych drugiego rzędu: *hessjan* — będzie o nim mowa w wykładzie 4. oraz *laplasjan*.

Pochodne cząstkowe II rzędu

Pochodne cząstkowe I rzędu same też są funkcjami, więc można obliczać ich kolejne pochodne. Dla funkcji dwu zmiennych otrzymujemy w ten sposób cztery rodzaje pochodnych cząstkowych II rzędu:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

a także

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Te dwie ostatnie pochodne nazywamy **pochodnymi mieszanymi** drugiego rzędu. Analogicznie określamy pochodne cząstkowe wyższych rzędów.

Przykład 2.2 Oblicz wszystkie pochodne cząstkowe II rzędu funkcji $f(x,y) = x^2 \sin y$.

Rozwiązanie: Mamy

$$f_x = 2x \sin y, \qquad f_y = x^2 \cos y.$$

Zatem

$$f_{xx} = 2\sin y, \qquad f_{xy} = f_{yx} = 2x\cos y, \qquad f_{yy} = -x^2 \sin y.$$

Twierdzenie Schwarza

W rozważanym przykładzie pochodne mieszane były równe. Tak być nie musi (p. zad. 10). Na szczęście zachodzi poniższe twierdzenie Schwarza:

TWIERDZENIE 2.1 (Schwarza)
Jeżeli obie pochodne mieszane II rzędu funkcji f istnieją i są ciągłe w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0), to

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

W praktyce zatem dla funkcji występujących w zastosowaniach możemy zakładać, że pochodne mieszane są równe. Analogiczne twierdzenie zachodzi też dla funkcji trzech i więcej zmiennych i dla pochodnych mieszanych wyższych rzędów.

Laplasjan

W analizie wielu zmiennych rolę drugiej pochodnej pełnią nie same pochodne cząstkowe drugiego rzędu, ale **laplasjan**. Dla funkcji $f(x, y)$ jest on określony wzorem

$$\nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy},$$

a dla funkcji $f(x, y, z)$ wzorem

$$\nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}.$$

Zadania

7. Oblicz wszystkie pochodne drugiego rzędu funkcji:

a) $f(x, y) = x^2 e^y$; b) $f(x, y) = \sin x \cos 2y$; c) $f(x, y, z) = xy^2z^3$.

8. Nie korzystając z twierdzenia Schwarza sprawdź, że pochodne mieszane drugiego rzędu podanych funkcji są równe:

a) $f(x, y) = x^3 - xy^2$; b) $f(x, y) = xe^{y^2}$; c) $f(x, y, z) = (x^2 - y^2)z$.

9. Wykaż, że laplasjan funkcji $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ jest równy zeru.

♢ ♢ ♢

10.* Wykaż, że funkcja określona wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{gdy } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{gdy } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

ma w punkcie $(0, 0)$ nierówne pochodne mieszane.

Wykład 3

Różniczkowalność i gradient

W rachunku różniczkowym funkcji jednej zmiennej różniczkowalność funkcji oznacza po prostu istnienie pochodnej (skończonej). W rachunku wielu zmiennych różniczkowalność to coś więcej niż samo istnienie obu pochodnych cząstkowych. Dla funkcji dwu zmiennych, geometrycznie różniczkowalność funkcji punkcie (x_0, y_0) oznacza, że w punkcie $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ można poprowadzić płaszczyznę styczną do wykresu. To wstępne określenie za chwilę uściślimy.

Gradient to wektor pochodnych cząstkowych. Okaże się przydatnym narzędziem przy badaniu powierzchni $z = f(x, y)$.

3.1 Płaszczyzna styczna

Równanie płaszczyzny stycznej - Skąd ten wzór? - Zadania

Dla większości regularnych powierzchni można w dowolnym ich punkcie poprowadzić płaszczyznę styczną. Zaczniemy od równania tej płaszczyzny, a w dalszej części wyjaśnimy skąd się ono bierze.

Równanie płaszczyzny stycznej

Płaszczyzna styczna do powierzchni $z = f(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0, z_0) ma równanie

$$z - z_0 = f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0).$$

Tu i dalej symbole f_x, f_y domyślnie oznaczają pochodne cząstkowe w punkcie (x_0, y_0).

Przykład 3.1 Znajdź równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(x_0, y_0, z_0) = (3, 4, 5)$ do powierzchni stożkowej $z^2 = x^2 + y^2$.

Rozwiązanie: Przekształćmy równanie powierzchni do postaci $z = f(x, y)$. Tu mamy

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{lub} \qquad f(x,y) = -\sqrt{x^2+y^2}.$$

Punkt, o którym mowa, należy do powierzchni górnej (gdyż $z_0 = 5 > 0$). Zatem

$$f_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad f_y = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Stąd $f_x(3,4) = 3/5$, $f_y(3,4) = 4/5$. Równanie płaszczyzny stycznej:

$$z - 5 = \frac{3}{5}(x-3) + \frac{4}{5}(y-4)$$

lub równoważnie $3x + 4y - 5z = 0$.

Nie każda powierzchnia w $\mathbb{R}^3$ wyraża się wzorem $z = f(x, y)$. Dla powierzchni postaci $y = f(x, z)$ czy $x = f(y, z)$ wzór należy odpowiednio zmodyfikować.

Skąd ten wzór?

Zastanówmy się, skąd bierze się powyższe równanie płaszczyzny stycznej. Zauważmy przede wszystkim, że płaszczyzna przechodząca przez punkt (x_0, y_0, z_0) ma równanie postaci

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0).$$

Rzeczywiście, powyższe równanie opisuje płaszczyznę w $\mathbb{R}^3$, a punkt (x_0, y_0, z_0) je spełnia. Pozostaje zatem wyznaczyć współczynniki A, B.

Częścią wspólną tej płaszczyzny i płaszczyzny $y = y_0$ jest prosta

$$z - z_0 = A(x - x_0).$$

Jeżeli płaszczyzna $z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$ jest styczna do powierzchni $z = f(x, y)$, to prosta ta jest styczna do krzywej $z = f(x, y_0)$. Zatem jej współczynnik kierunkowy $A = f_x$. Analogicznie $B = f_y$.

Zadania

1. Znajdź równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji:

a) $z = x^2 + y^2 + 2x$ w punkcie $(1, -1, 4)$; b) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ w punkcie $(1, 2, 2)$;
c) $z = y^2 \sin x$ w punkcie $(\pi, 1, 0)$; d) $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ w punkcie $(5, 4, 3)$.

2. Znajdź równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(1, -1, 2)$ do powierzchni $xyz = 2$.

$\diamondsuit \diamondsuit \diamondsuit$

3. Nie korzystając ze wzoru znajdź równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni:

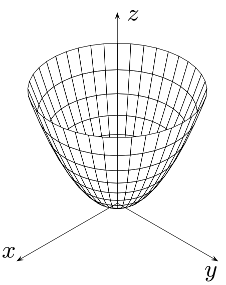
a) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ w punkcie $(0, 0, \sqrt{2})$; b) $x^2 + y^2 = 2$ w punkcie $(1, 1, 5)$.

3.2 Różniczkowalność

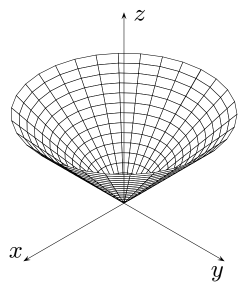
Nowe spojrzenie na różniczkowalność funkcji jednej zmiennej - Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych - Ciągłość, istnienie pochodnych cząstkowych i różniczkowalność - Zadania

Różniczkowalność funkcji *jednej zmiennej* w danym punkcie oznacza, że ma ona w tym punkcie skończoną pochodną. Geometrycznie jest to równoważne istnieniu stycznej. Na bardziej abstrakcyjnym poziomie oznacza, że funkcję można w pobliżu danego punktu aproksymować za pomocą funkcji liniowej. Te dwie własności (istnienie stycznej, lokalna aproksymowalność za pomocą funkcji liniowej) decydują o znaczeniu funkcji różniczkowalnych.

Dlatego dla funkcji dwu i więcej zmiennych określenie różniczkowalności odwołuje się do tych własności. O funkcji $z = f(x, y)$ mówimy, że jest różniczkowalna, gdy przedstawia powierzchnię gładką (tzn. bez kantów, ostrzy itp.). Oznacza to, że powierzchnię $z = f(x, y)$ można w otoczeniu każdego punktu aproksymować styczną do niej płaszczyzną.



Funkcja $z = x^2 + y^2$ jest wszędzie różniczkowalna



Funkcja $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nie jest różniczkowalna w punkcie $(0, 0)$

W praktyce potrzebne jest też bardziej formalne określenie, do którego właśnie zmierzamy. Okazuje się bowiem, że samo istnienie pochodnych cząstkowych nie gwarantuje istnienia takiej aproksymacji.

Nowe spojrzenie na różniczkowalność funkcji jednej zmiennej

Przypomnijmy, że funkcję f różniczkowalną w punkcie x_0 możemy w jego otoczeniu aproksymować za pomocą funkcji liniowej:

$$(*)\quad f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x,$$

czyli

$$(**)\ f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x.$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x)-f(x_0), \qquad\qquad df = f'(x_0)\Delta x.$$

Widzimy, że Δf to *przyrost* wartości funkcji odpowiadający wzrostowi argumentu o Δx. Z kolei wyrażenie df, zwane **różniczką** funkcji, wyraża *przybliżony przyrost* wartości odpowiadający tej zmianie.

W nowych oznaczeniach aproksymacja $(**)$ przyjmuje postać $\Delta f\approx df$. Niech $E(\Delta x)$ oznacza błąd (ang. *error*) tej aproksymacji, tzn.

$$\Delta f = df + E(\Delta x).$$

Wówczas

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{E(\Delta x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f - df}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-f'(x_0)\Delta x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0)\Delta x}{\Delta x} = \\ &= f'(x_0)-f'(x_0)=0.\end{aligned}$$

Widzimy zatem, iż różniczkowalność funkcji f (na razie jednej zmiennej!) w punkcie x_0 oznacza, że w otoczeniu tego punktu funkcję można przybliżać funkcją liniową, przy czym błąd aproksymacji $E(\Delta x)$ spełnia warunek

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{E(\Delta x)}{\Delta x}=0.$$

Innymi słowy, błąd $E(\Delta x)$ przybliżenia zbiega do zera szybciej niż przyrost Δx argumentu.

Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych

Z pierwszej części wykładu wiemy, że jeżeli w punkcie (x_0, y_0, z_0) istnieje płaszczyzna styczna do powierzchni $z = f(x, y)$, to ma ona równanie

$$z = z_0 + f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0).$$

Dla punktów bliskich punktowi (x_0, y_0, z_0) płaszczyzna styczna przybliża powierzchnię $z = f(x, y)$, więc

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0).$$

Równoważnie:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f_x \Delta x + f_y \Delta y.$$

Oznaczmy jak poprzednio:

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \quad \text{(przyrost)}, \\ df &= f_x \Delta x + f_y \Delta y \quad \text{(różniczka)}. \end{aligned}$$

Przy tych oznaczeniach, ostatnia aproksymacja przyjmie postać $\Delta f \approx df$. Różniczkowalność oznacza, że błąd tej aproksymacji zbiega do zera szybciej niż zmiana argumentu, tzn. $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Przyjmijmy zatem następujące określenie:

Definicja 3.1 (różniczkowalność)
Mówimy, że funkcja $z = f(x, y)$ jest **różniczkowalna** w punkcie (x_0, y_0), jeżeli istnieją obie pochodne cząstkowe w tym punkcie oraz zachodzi równość

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\Delta f - df}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0.$$

Analogicznie definiujemy różniczkowalność funkcji trzech i więcej zmiennych.

Przykład 3.2 Sprawdź, że $f(x, y) = xy$ jest różniczkowalna w punkcie $(1, 2)$.

Rozwiązanie: Mamy $f(1, 2) = 2$, $f_x = y$, $f_y = x$, $f_x(1, 2) = 2$, $f_y(1, 2) = 1$. Zatem

$$\Delta f = (1 + \Delta x)(2 + \Delta y) - 2 = 2\Delta x + \Delta y + \Delta x \Delta y, \qquad df = 2\Delta x + \Delta y.$$

Stąd

$$\left| \frac{\Delta f - df}{\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y}} \right| = \left| \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| = |\Delta x| \cdot \frac{|\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}.$$

Ostatni ułamek jest równy co najwyżej 1, więc, gdy $\Delta x \to 0$ (a także $\Delta y \to 0$), to całe wyrażenie dąży do zera.

Ciągłość, istnienie pochodnych cząstkowych i różniczkowalność

Można łatwo wykazać, że jeżeli funkcja jest w jakiś punkcie różniczkowalna, to jest w nim ciągła i ma obie pochodne cząstkowe.

Poniższe twierdzenie pokazuje, że przy pewnych dodatkowych założeniach zachodzi też zależność odwrotna. Subtelny dowód pominiemy.

TWIERDZENIE 3.1 *Jeśli obie pochodne cząstkowe funkcji w otoczeniu punktu istnieją i są ciągłe w jego otoczeniu, to funkcja jest w tym punkcie różniczkowalna.*

Zadania

4. Korzystając z definicji różniczkowalności wykaż, że funkcja $z = x^2+y^2$ jest różniczkowalna w punkcie $(1,0)$.

5. Zapisz definicję różniczkowalności dla funkcji trzech zmiennych $f(x,y,z)$.

◇ ◇ ◇

6. Korzystając z definicji różniczkowalności zbadaj, czy poniższe funkcje są różniczkowalne w początku układu współrzędnych

a) $f(x,y) = |x+y|$; b) $f(x,y) = |xy|$; c) $f(x,y) = |xy^2|$.

7. Niech $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Wykaż, że istnieje granica

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\sqrt{\Delta^2 x+\Delta^2 y}},$$

ale funkcja f nie jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$.

3.3 Gradient i pochodne kierunkowe

Gradient - Pochodne kierunkowe - Podstawowe własności gradientu - Zadania

Funkcja różniczkowalna ma nie tylko pochodne cząstkowe (w kierunku osi), ale też pochodne we wszystkich innych kierunkach. Pełną informację o pochodnych cząstkowych i kierunkowych takiej funkcji daje gradient.

Gradient

Podobnie jak poprzednio rozważać tu będziemy funkcje dwu zmiennych $z = f(x,y)$. Uogólnienia na większą liczbę zmiennych są oczywiste. **Gradientem** funkcji f dwu zmiennych nazywamy wektor

$$\mathbf{grad}\, f = (f_x, f_y) \qquad \text{lub krócej} \qquad \nabla f(x,y) = (f_x, f_y)\,.$$

Symbol ∇ czytamy *nabla*.

Każdemu punktowi płaszczyzny, w którym f jest różniczkowalna, odpowiada gradient. Tak więc gradient definiuje na tym zbiorze funkcję wektorową.

Pochodne kierunkowe

Pochodne cząstkowe mówią, jak zmienia się wartość funkcji, gdy argument zmienia się wzdłuż jednej z osi. Pochodna kierunkowa mówi, jak zmienia się wartość funkcji, gdy argument zmienia się w kierunku ustalonego wersora.

Przypomnijmy, że **wersor** to wektor długości 1. **Pochodną kierunkową** funkcji f w punkcie (x_0, y_0) w kierunku wersora $\boldsymbol{v} = (\alpha, \beta)$ określamy wzorem

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Analogicznie określamy pochodne kierunkowe dla funkcji trzech i więcej zmiennych.

Jeżeli pochodne cząstkowe istnieją, to pochodne kierunkowe w kierunku osi są im odpowiednio równe. Zauważmy jednak, że pochodna kierunkowa definiowana jest jak pochodna jednostronna ($t \to 0^+$). Tak więc, pochodna kierunkowa w kierunku wektorów osi może istnieć nawet wówczas, gdy odpowiednia pochodna cząstkowa nie istnieje.

W poniższym twierdzeniu pojawia się iloczyn skalarny $\boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v}$. Przypomnijmy, że na płaszczyźnie dla wektorów $\boldsymbol{u} = (u_x, u_y)$, $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$ mamy

$$\boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v} = u_x v_x + u_y v_y.$$

Analogiczny wzór zachodzi dla przestrzeni.

TWIERDZENIE 3.2 *Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie (x_0, y_0), to istnieją pochodne kierunkowe w kierunku dowolnego wersora $\boldsymbol{v}$, przy czym*

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(x_0, y_0) = (\nabla f)(x_0, y_0) \circ \boldsymbol{v}.$$

DOWÓD: Niech $\boldsymbol{v} = (\alpha, \beta)$ będzie ustalonym wersorem. Z różniczkowalności funkcji f wynika, że dla przyrostów $\Delta x = \alpha t$, $\Delta y = \beta t$, przy $t \to 0^+$ mamy

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)\alpha t - f_y(x_0, y_0)\beta t}{t} = 0.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f_x(x_0, y_0)\alpha t + f_y(x_0, y_0)\beta t}{t} = \alpha f_x(x_0, y_0) + \beta f_y(x_0, y_0).$$

Dodając obie równości stronami otrzymujemy

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+\alpha t, y_0+\beta t) - f(x_0,y_0)}{t} = \alpha f_x(x_0,y_0) + \beta f_y(x_0,y_0).$$

Lewa strona równości to pochodna kierunkowa funkcji f w punkcie (x_0,y_0) w kierunku wersora $\boldsymbol{v} = (\alpha,\beta)$.

PRZYKŁAD 3.3 Znajdź pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = \sin 2x \cos y$ w punkcie $(\pi/4, \pi/4)$ w kierunku wektora $(1,1)$.

ROZWIĄZANIE: Pochodne cząstkowe to $f_x = 2\cos 2x \cos y$, $f_y = -\sin 2x \sin y$. W podanym punkcie mamy $f_x = 0$, $f_y = -\sqrt{2}/2$. Wersorem w zadanym kierunku jest $\boldsymbol{v} = \left(\sqrt{2}/2,\, \sqrt{2}/2\right)$. Zatem

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Gradient i poziomice

Powróćmy do gradientu, który jest zdecydowanie najważniejszym tematem tej części wykładu.

TWIERDZENIE 3.3 (własnościach gradientu)
Niech $f(x,y)$ będzie funkcją różniczkowalną, $\mathbf{grad}\, f(x_0,y_0) \neq \mathbf{0}$*. Wówczas:*
1. Gradient wskazuje kierunek najszybszego wzrostu funkcji f w danym punkcie, a jego długość określa bezwzględną wartość tej zmiany.
2. Gradient jest wektorem prostopadłym do poziomic.

DOWÓD: W końcowej części dowodu pojawią się granice funkcji wektorowych. Sens takich granic powinien być oczywisty. W szczególności, granica

$$\lim_{x\to x_0} (u(x), v(x)) = (a,b)$$

oznacza, że

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = a \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{x\to x_0} v(x) = b.$$

1. Funkcja zmienia się najszybciej w tym kierunku, w którym pochodna kierunkowa jest największa (gdy dodatnia) bądź najmniejsza (gdy ujemna). Z twierdzenia 3.2 wynika, że pochodna kierunkowa w kierunku wersora $\boldsymbol{v}$ osiąga wartości skrajne wówczas, gdy kierunek $\boldsymbol{v}$ jest zgodny z kierunkiem gradientu.

Wersor w kierunku gradientu to

$$\frac{\mathbf{grad}\, f}{||\,\mathbf{grad}\, f||}.$$

Zatem maksymalna wartość pochodnej kierunkowej to

$$\begin{aligned}\mathbf{grad}\, f \circ \frac{\mathbf{grad}\, f}{||\,\mathbf{grad}\, f||} &= \frac{1}{||\,\mathbf{grad}\, f||} \cdot \mathbf{grad}\, f \circ \mathbf{grad}\, f = \\ &= \frac{1}{||\,\mathbf{grad}\, f||} \cdot ||\,\mathbf{grad}\, f||^2 = ||\,\mathbf{grad}\, f||.\end{aligned}$$

2. Niech $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ będzie ustalonym punktem powierzchni $z = f(x, y)$. Z założenia funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $P\,(x_0, y_0)$, a więc

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)] - [f_x \Delta x + f_y \Delta y]}{\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y}} = 0.$$

Granica ta jest równa zeru także w szczególnym przypadku, gdy rozważamy wyłącznie punkty $Q(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ leżące na poziomicy punktu $P(x_0, y_0)$. Ale wówczas część licznika zawarta w pierwszym nawiasie kwadratowym jest równa zeru. Tak więc, gdy poruszamy się po punktach poziomicy mamy

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{f_x \Delta x + f_y \Delta y}{\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y}} = 0,$$

czyli

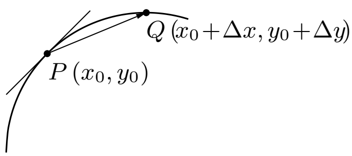
$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \left[(f_x, f_y) \circ \left(\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y}}, \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y}} \right) \right] = 0.$$

Pochodne cząstkowe to konkretne liczby, więc można je przenieść przed znak granicy. Zatem dla przyrostów odpowiadających ruchowi po poziomicy mamy

$$(f_x, f_y) \circ \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y}} = 0.$$

Pozostaje zauważyć, że graniczny wektor w powyższym wzorze to wersor styczny do poziomicy w punkcie $P(x_0, y_0)$.

Rzeczywiście, gdy punkt $Q(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ zbliża się do punktu $P(x_0, y_0)$, to wektor $(\Delta x, \Delta y)$ w granicy osiąga kierunek poziomicy. Podzielony przez długość $\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y}$ jest wersorem do niej stycznym.



Analogiczne twierdzenie zachodzi też dla funkcji trzech i więcej zmiennych.

Jeszcze raz o równaniu płaszczyzny

Korzystając z gradientu wyprowadzimy teraz wzór na równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni $f(x, y, z) = c$, gdzie c jest pewna stałą. Powierzchnia ta jest poziomicą funkcji f. Już wcześniej zwracaliśmy uwagę, że poziomicami funkcji trzech zmiennych są powierzchnie, a nie linie.

Zauważmy, że wektor normalny (czyli prostopadły) płaszczyzny stycznej do powierzchni $f(x, y, z) = c$ jest też wektorem prostopadłym do samej powierzchni. Skoro rozważana powierzchnia jest poziomicą funkcji f, to gradient $\mathbf{grad}\, f$ jest do niej prostopadły.

Płaszczyzna styczna w punkcie (x_0, y_0, z_0) do powierzchni $f(x, y, z) = c$ ma zatem równanie

$$f_x\,(x - x_0) + f_y\,(y - y_0) + f_z\,(z - z_0) = 0.$$

Pochodne f_x, f_y, f_z oznaczają tu domyślnie pochodne w punkcie (x_0, y_0, z_0).

Zadania

8. Znajdź gradient funkcji:

a) $f(x, y) = xy(x - y)$ w punkcie $(2, 1)$; b) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ w punkcie $(1, 2, -1)$.

9. Oblicz pochodne kierunkowe funkcji we wskazanych kierunkach:

a) $z = xy^2$, $(x_0, y_0) = (3, 1)$, $\boldsymbol{v} = (-2, 1)$; b) $z = x \sin xy$, $(x_0, y_0) = (\pi/2, 0)$, $\boldsymbol{v} = (3, 4)$.

10. Dla funkcji $f(x, y, z) = x^2 + xyz + y^2$ znajdź kierunek i wielkość najszybszego wzrostu w punkcie $(1, 2, -1)$.

11. Znajdź wersor normalny do powierzchni $xyz = 2$, w punkcie $(2, 1, -1)$.

12. Nie korzystając z twierdzenia 3.3 sprawdź, że gradient funkcji $z = x^2 + y^2$ jest prostopadły do jej poziomic.

13. Korzystając z ostatniego wzoru na płaszczyznę styczną wyprowadź wzór na płaszczyznę styczną ze str. 19.

14. Korzystając z programu Wolfram Alpha® znajdź $\nabla\left(ye^{-x^2}\right)$ wykonując instrukcję

$$\text{grad}(y * \exp(-x^2))$$

Korzystając z otrzymanego wyniku oblicz pochodne cząstkowe w początku układu współrzędnych.