Fizika I.

1. Fejezet – mindaz, ami a középiskolai oktatásból elsajátított kellene legyen …

1.1. Mértékegység

A fizikai mennyiségek döntő többségét jellemzi egy mértékegység. Nagyon fontos az, hogy a mértékegységeket tudatosan használjuk minden esetben.

Ha nem így teszünk, a számított eredménynek körülbelül annyi lesz az értelme, mint a következő viccnek „A hajó kapitánya leszól a gépházba és kérdezi a hajógépészt: „Mennyi?”. A hajógépész visszaszól: „30”. A kapitány erre megkérdezi: „Mi 30?”. Ezek után pedig a hajógépész visszakérdez: „Mi mennyi?”.

A nagy átlagtól eltérően, vannak olyan fizikai mennyiségek, amelyek nem rendelkeznek mértékegységgel. Ilyen például a súrlódási együttható (jele μ) vagy a viszonyszámok, amelyek két mennyiség arányát fejezik ki (pl. a fénytanban a törésmutató: jele n és a fény terjedési sebességeinek arányát fejezi ki a vákuum és az adott közeget illetően).

1.2. Mértékrendszer

A mértékegységeket különböző mértékegység-rendszerekbe foglaljuk. A legfontosabb a Nemzetközi Mértékegységrendszer, amelynek a rövidítése SI (francia nyelvből származó rövidítés: Système International d’Unités). Ebben a mértékegység-rendszerben létezik hat alapmértékegység, amelyeknek segítségével minden más mértékegységet származtathatunk, így ezeknek a nevük is származtatott mértékegységek.

A nemzetközi mértékegység-rendszer alap mennyiségeit, jelöléseiket és mértékegységeiket az 1. Táblázat foglalja össze:

	Mennyiség	Mértékegység	
1.	hosszúság	1m	méter
2.	idő	1 s	szekundum
3.	tömeg	1 kg	kilogramm
4.	áramerősség	1 A	Ampère
5.	abszolút hőmérséklet	1 K	Kelvin
6.	anyagmennyiség	1 mol	mol
7.	fényerősség	1 cd	kandella

1. Táblázat: a Nemzetközi Mértékegységrendszer (SI) alapmennyiségei.

Származtatott mennyiség például a sebesség, amely nem más, mint az időegység alatt megtett út, $v = \frac{d}{t}$ tehát a mértékegység $[v]_{SI} = \frac{1m}{1s} = 1\frac{m}{s}$.

Alternatív mértékegység például a *cgs* mértékrendszer, ahol a távolságot *cm*-ben (***c****gs*), a tömeget *gramm*-ban (*c****g****s*), az időt pedig szekundumban (*cg****s***) definiáljuk.

Használatos még a Brit Mértékegység-rendszer (főleg az USA-ban és már csak korlátozottan az Egyesült Királyságban) ahol tömegmérésre *fontot* illetve *unciát*, térfogatmérésre *gallont* és *pintet*, a távolságot pedig *mérfölddel*, *yarddal*, *lábbal* és *hüvelykkel* mérnek (pl. 1 gallon = 3,78 l; 1 láb = 30,48 cm; 1 hüvelyk (inch) = 2,54 cm stb.).

1.3. Nagyságrend

A fizikai mennyiségek értékei nagyon széles tartományban lehetnek, legyen például az egy kondenzátor kapacitása, amelynek értéke lehet 0,000000000001 F (farad) vagy egy erőmű elektromos teljesítménye, amely felveheti az 1000000000 W (Watt) értéket. Ha mindig ki kellene írjuk és mondjuk azt a sok nullát, amely az első esetben a tizedesvessző után, vagy a második esetben az 1-es számjegy után van, akkor nagyon bonyolult lenne minden úgy szóban, mint írásban. Könnyítésként, egyszerűsítésként bevezették a nagyságrendeket, amelyek átveszik a nullák szerepét és nagyon elegáns, könnyen érthető jelentéssel bírnak. A nagyságrend nem más, mint a *10*-el való osztás illetve szorzás eredményeként származtatott mennyiség értéke az előbbihez viszonyítva (pl. a 100 az egy nagyságrenddel nagyobb, mint a 10). A könnyebb kifejezés érdekében, bizonyos nagyságrendek nevet és jelet is kaptak, ezeket a 2. Táblázat foglalja össze.

	távolság	$10^0 = 1$		
10^{-1} - deci	deciméter – $10^{-1}m$		10^1 - deka	dekaméter – $10^1m = 1dm$
10^{-2} - centi	centiméter – $10^{-2}m$=1cm		10^2 - hekto	hektométer – $10^2m = 1hm$
10^{-3} - milli	milliméter – $10^{-3}m = 1mm$		10^3 - kilo	kilométer – $10^3m = 1km$
10^{-6} - mikro	mikométer – $10^{-6}m = 1\mu m$		10^6 - Mega	Megaméter – $10^6m = 1Mm$
10^{-9} - nano	nanométer – $10^{-9}m = 1nm$		10^9 - Giga	Gigaméter – $10^9m = 1Gm$
10^{-12} - piko	pikométer – $10^{-12} = 1pm$		10^{12} - Terra	Terraméter – $10^{12}m = 1Tm$
10^{-15} - femto	femtométer – $10^{-15}m = 1fm$		10^{15} - Peta	Petaméter – $10^{15}m = 1Pm$
10^{-18} - atto	attométer – $10^{-18}m = 1am$		10^{18} - Exa	Examéter – $10^{18}m = 1Em$

2. Táblázat: Nagyságrendek.

A *2. Táblázatba* foglalt távolságok léptékei óriási különbségeket szemléletnek. Például amíg *1fm* a proton mérete, addig *1Pm* a fény által egy év alatt megtett út nagyságrendjét jelöli (fényév). Ezek közül jónéhányat használunk a mindennapi életben a foglalkozásunktól függetlenül (pl. huzal átmérője milliméterben, vagy megtett út kilométerben), de sokat már csak a különböző tudományágakban dolgozók használnak (pl. femtoszekundum a lézerfizikában, vagy Examéter a csillagászatban).

1.4. Mennyiségek

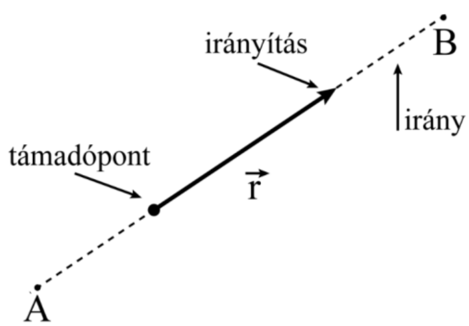
1.4.1. Skaláris mennyiség (röviden skalár)

- egy olyan fizikai mennyiség, amelyet kizárólag az értéke jellemez (megj. fontos a mértékegység és a nagyságrend ld. az előző alpontokat),
- példa: tömeg, egyezményes jele *m*; idő, jele *t* stb.

1.4.2. Vektoriális mennyiség (röviden vektor)

- egy olyan fizikai mennyiség, amelynek van iránya, irányítása és nagysága (modulusz).
- példák:
    - *Helyzetvektor*: két pont közötti távolság az skaláris mennyiség, amelyet méterben fejezünk ki, azonban amikor az egyik pont helyzetét a másikhoz viszonyítva kell megadjuk már egészen más a helyzet. Mivel a távolságot egyenes vonalban mérjük definiáljuk a két pontot összekötő egyenest, amely nem más, mint a helyzetvektor iránya, majd pedig definiáljuk, hogy ezen az egyenesen merre található a pont és ez adja meg az irányítást. A modulusz megegyezik a két pont közötti távolság értékével.
    - *Sebességvektor*: megadja, hogy adott irányba és adott irányítással egységnyi idő alatt mekkora utat tesz meg egy adott objektum. A napi életben szinte mindig csak a sebesség értékét használjuk (hány km/h óra sebességgel haladunk), de azért mindenki tudja azt, hogy hova akar megérkezni és azt is, hogy milyen útvonalon fog haladni, amelyek éppen az irány és irányítás jellemzőket takarják.

Az általánosan használt jelölés egy nyíl az adott fizikai mennyiséget jelző betű fölött: pl. helyzetvektor $\vec{r}$, sebességvektor $\vec{v}$, erő $\vec{F}$, impulzus $\vec{p}$ stb. (*megjegyzés*: könyvekben és internetes oldalakon is találhatunk olyan jelölésformát, amikor a vektoriális mennyiséget vastagított betűvel jelölik: pl. sebességvektor ***v***).



1. ábra: vektor és a jellemzői.

Megjegyzés: alkalmazásoktól függően megkülönböztetünk szabad- és kötött vektorokat. Kötött vektorok esetében az 1. ábrán látható minden jellemző rögzített, míg szabad vektorok esetén a vektor elcsúsztatható (megváltozhat a tartóegyenese (AB) illetve a támadópontja (A)).

Sok esetben szükségünk van olyan vektorra, amely a térbeli irányt és irányítást fejezi ki, a modulusza pedig *1*-el egyenlő. Az ilyen vektor egységvektornak nevezzük. Például egy adott pont helyzetének meghatározására szolgáló $\vec{r}$ helyzetvektor esetében az egységvektor definíciója:

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

1.4.3. Tenzoriális mennyiségég (röviden tenzor).

Ilyen mennyiséggel az előadás keretein belül nem fogunk találkozni, de azért érdemes megjegyezni, hogy az ilyen típusú mennyiségeket mátrix formájában adjuk meg és minden művelet a mátrixokra vonatkozó szabályok szerint történik. A fizikában ilyen mennyiségekkel jellemzünk azokat a fizikai mennyiségeket, amelyek irányfüggőséggel rendelkeznek (pl. optikában az elektromos permittivitás tenzor).

1.5. A mechanikában használatos fizikai objektumokra vonatkozó modellek.

A mechanikában a testek nyugalmi helyzetét, valamint az általuk végzett valamilyen mozgásformát írjuk le az idő függvényében.

1.5.1. Anyagi pont

A legegyszerűbb esetet az ún. anyagi pont jelenti. Az anyagi pont egy olyan modell, amelynek esetében a testnek semmilyen térbeli kiterjedést nem tulajdonítunk és kizárólag a tömegével jellemezzük.

1.5.2. Pontrendszer

A pontrendszer (vagy anyagi pontrendszer) az anyagi pontok sokaságát jelenti, amelyek egymással valamilyen „kötésben" találhatók. Tulajdonképpen a környezetünkben észlelhető minden makroszkopikus tárgy, de még a folyadékok és gázok is pontrendszereknek tekinthetők. A pontrendszert alkotó anyagi pontok közötti távolságok függvényében rendszerezhetjük a pontrendszereket.

1.5.2.1. Merev test:

- a pontrendszerben elhelyezkedő anyagi pontok közötti távolság nem változik.

1.5.2.2. Deformálható test:

- a pontrendszerben elhelyezkedő anyagi pontok közötti távolság nem változik. A deformáció lehet maradandó vagy nem maradandó jellegű. Az első esetben a pontrendszer alakja megváltozik, míg a második esetben a pontrendszer visszanyeri eredeti alakját.

1.6. Vonatkoztatási rendszer (koordináta rendszer).

A fizikai jelenségeket vonatkoztatási rendszerekben írjuk le, amelyek jellemezhetik térben, és/vagy időben is a jelenségeket (pl. eltelt tíz perc … de mióta?; megtettem 200 métert … de honnan számítva?).

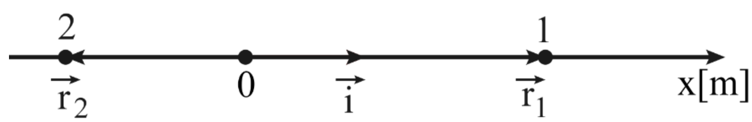
Fontos megjegyezni azt a tényt, hogy a vonatkoztatási rendszerek lehetnek nyugalomban lévők (vagy viszonylagos nyugalomban lévők), illetve mozgásban lévők is és végezhetnek egymáshoz képest egyenletes (állandó sebesség) vagy gyorsuló haladó mozgást, illetve forgó mozgást is. Ennek megfelelően nem mindegy az, hogy milyen koordináta rendszert használunk egy jelenség leírására. Egyelőre a nyugalomban lévő, úgynevezett inercia vonatkoztatási rendszerekre szorítkozunk, ám később a gyorsuló vonatkoztatási rendszerekben fellépő különbségekre is kitérünk.

A továbbiakban a jelenségek térbeli leírására használatos (Euklideszi-térre vonatkozó) vonatkoztatási rendszerekkel ismerkedünk meg.

1.6.1. Descartes-féle koordináta rendszer.

- 1 dimenzió (1D):

Ebben az esetben egy pont helyzetét a vonatkoztatási rendszer kezdőpontjához képest csak egy adat határozza meg. A 2. ábrán az *x*-koordináta. Mivel egy adott iránnyal van dolgunk, két különböző irányítás lehetséges. Ennek a matematikai megjelenítését egy egységvektor segítségével fejezzük ki. Az *x*-tengelyhez hagyományosan az $\vec{\imath}$ - egységvektor tartozik. Az ábra szerint az 1-es pont r_1 távolságra található az *0*-ponttól és a helyzetét $\vec{r}_1 = r_1 \cdot \vec{\imath}$ vektor adja meg, míg a 2-es pont r_2 távolságra található az *0*-ponttól és a helyzetét $\vec{r}_2 = -r_2 \cdot \vec{\imath}$ vektor adja meg.



2. ábra: 1D koordináta-rendszer.

Mivel egyetlen iránnyal van dolgunk szögek használatának tekintetében két lehetőség adódik. Abban az esetben amikor két vektor azonos irányítással rendelkezik, az általuk bezárt szög értéke nulla, ha pedig ellentétes irányítással rendelkeznek, az általuk bezárt szög értéke 180 deg (π- radián).

- 2 dimenzió (2D):

Ebben az esetben egy pont helyzetét a vonatkoztatási rendszer kezdőpontjához képest két adat határozza meg. A 3. ábrán az *x* és az *y* koordináták. Az *x*-tengelyhez hagyományosan az $\vec{\imath}$ – egységvektor, míg az *y*-tengelyhez a $\vec{\jmath}$ egységvektor tartozik. Az $\vec{\imath}$ és a $\vec{\jmath}$ egységvektorok merőlegesek egymásra. Az ilyen koordináta-rendszert derékszögű koordináta-rendszernek hívjuk.

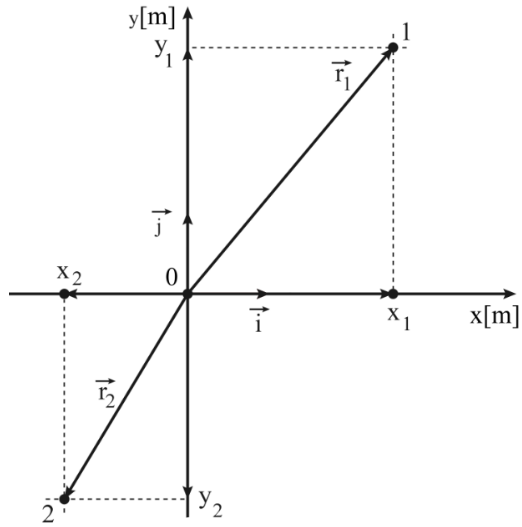
Az ábra szerint az 1-es pont r_1 távolságra található az *0*-ponttól és a helyzetét

$$\vec{r}_1 = x_1 \cdot \vec{\imath} + y_1 \cdot \vec{\jmath}$$

vektor adja meg, míg a 2-es pont r_2 távolságra található az *0*-ponttól és a helyzetét

$$\vec{r}_2 = -x_2 \cdot \vec{\imath} - y_2 \cdot \vec{\jmath}$$

vektor adja meg.



3. ábra: 2D koordináta rendszer

- 3 dimenzió (3D):

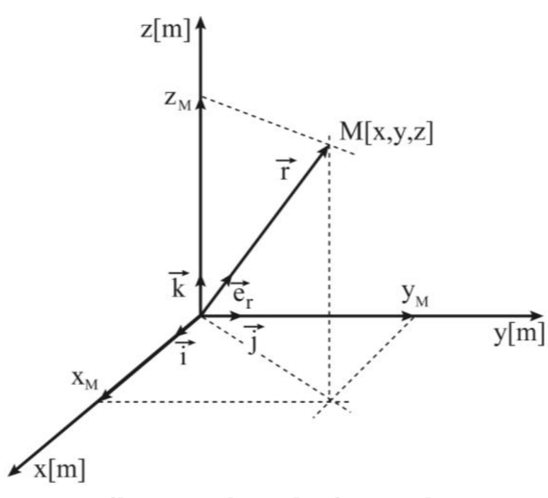
Ebben az esetben egy pont helyzetét a vonatkoztatási rendszer kezdőpontjához képest három adat határozza meg. A 4. ábrán az *x*, *y* és *z* koordináták. Az *x*-tengelyhez hagyományosan az $\vec{\imath}$, az *y*-tengelyhez a $\vec{\jmath}$ és a z-tengelyhez a $\vec{k}$ egységvektor tartozik. Az $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ és $\vec{k}$ egységvektorok merőlegesek egymásra. Az ilyen koordináta-rendszert derékszögű koordináta-rendszernek hívjuk.

Az ábra szerint az *M*-pont r távolságra található az *0*-ponttól és a helyzetét

$$\vec{r} = x_M \cdot \vec{\imath} + y_M \cdot \vec{\jmath} + z_M \cdot \vec{k} = r \cdot \vec{e}_r$$

ahol $\vec{e}_r$ a $\vec{r}$-hoz tartozó egységvektor.
vektor adja meg.

Megjegyzés: az *x*, *y* és *z* koordinátákat Descartes-féle koordinátáknak nevezzük.

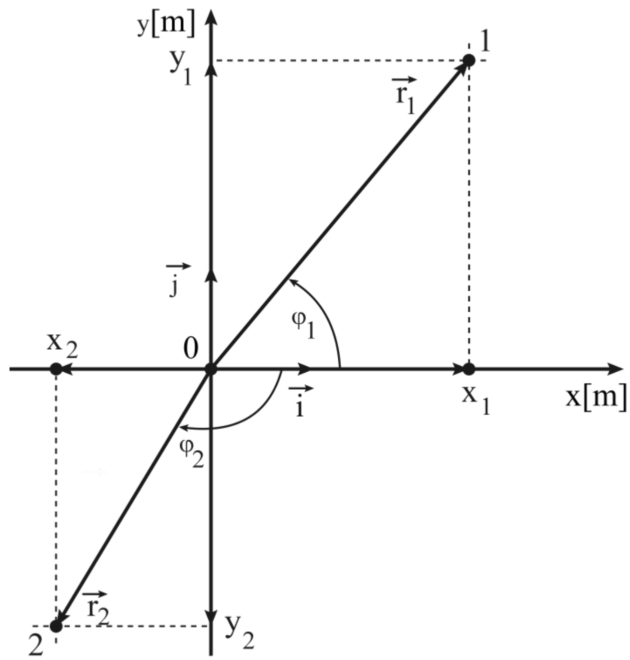


4. ábra: 3D koordináta rendszer

1.6.2. Poláris koordináta rendszer.

- 2 dimenzió (2D):

Kiindulásként használjuk a 3. ábrán szemléltetett koordináta-rendszert, amelyhez annyi kiegészítést teszünk, hogy egy pont helyzetét egy szög és egy távolság függvényében is megadhatjuk. Az 5. ábrán az *1*-pont helyzetét megadhatjuk a descartes-i koordinátákkal (x_1, y_1), vagy az r_1 távolság és a φ_1 egy szög (azimut-szög) segítségével (megjegyezzük, hogy a szögek meghatározása is mindig egy vonatkoztatási irányhoz képest történik, az 5. ábrán a vonatkoztatási irány az *x*-tengely pozitív irányítása – 0 fokos „irány”). Az $(r_1,\ \varphi_1)$ párost nevezzük poláris koordinátáknak.



5. ábra

Felhasználva a trigonometriai függvényeket kapcsolatot teremthetünk a descartes-i és a poláris koordináták között.

$$x_1 = r_1 \cdot cos\varphi_1$$
és
$$y_1 = r_1 \cdot sin\varphi_1$$

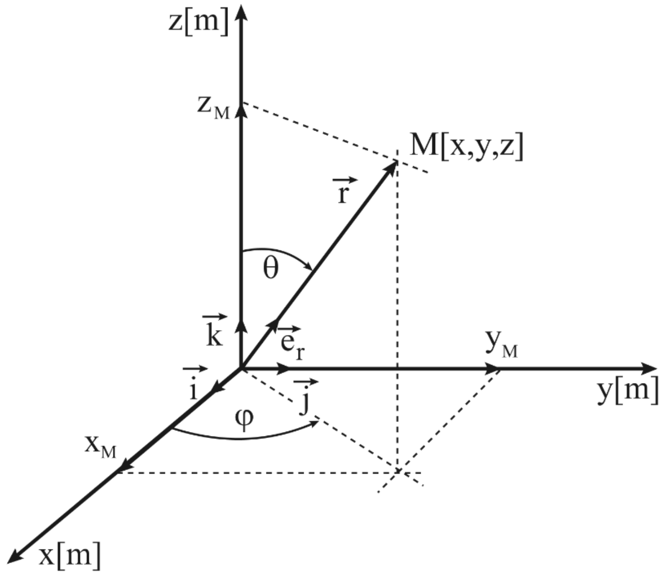
vagy

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$
és
$$tg\varphi_1 = \frac{y_1}{x_1}.$$

- 3 dimenzió (3D):

Kiindulásként használjuk a 4. ábrán szemléltetett koordináta-rendszert, amelyhez annyi kiegészítést teszünk, hogy egy pont helyzetét két szög és egy távolság függvényében is megadhatjuk. A 6. ábrán az *M*-pont helyzetét megadhatjuk a descartes-i koordinátákkal

(x_M, y_M, z_M), vagy az r távolság a φ és a θ szögek segítségével. Az $(r,\ \varphi,\ \theta)$ hármast nevezzük poláris koordinátáknak.



6. ábra

Felhasználva a trigonometriai függvényeket kapcsolatot teremthetünk a descartes-i és a poláris koordináták között.

$$x_M = r \cdot sin\theta \cdot cos\varphi$$
$$y_M = r \cdot sin\theta \cdot sin\varphi$$
$$z_M = r \cdot cos\theta$$

vagy

$$r = \sqrt{x_M^2 + y_M^2 + z_M^2}$$
$$tg\varphi = \frac{y_M}{x_M}$$
$$tg\theta = \frac{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}{z_M}.$$

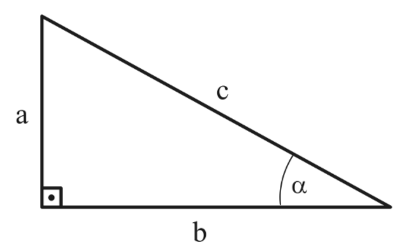
2. Fejezet – matematika, amit tudni kellene …

2.1. A szinusz (sinα) és koszinusz függvény (cosα).

- definíciójuk egy derékszögű háromszögben (7. ábra):

$$sin\alpha = \frac{szöggel\ szemben\ levő\ befogó}{átfogó} = \frac{a}{c}.$$

$$cos\alpha = \frac{szög\ mellett\ levő\ befogó}{átfogó} = \frac{b}{c}.$$



7. ábra

- periodikus függvények, amelyeket főleg a körmozgás (ld. példaként a 8. ábrát és a hozzá tartozó összefüggéseket) és a kvázi-stacionárius feszültség/áram tanulmányozásánál fogunk használni,

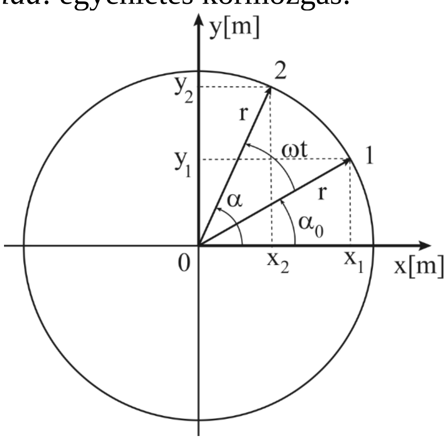
- ezekben az esetekben az α szöget fázisszögnek hívjuk (vagy röviden fázis), periodikusan változik az idő függvényében és következő formában írjuk fel az értékét: $\alpha = \alpha_0 + \omega t$, ahol

  - α_0 a kezdőfázis(szög) (mértékegysége 1rad/s),
  - ω a szögsebesség (vagy körfrekvencia, mértékegysége 1rad/s),
  - t az idő (mértékegysége 1s),
  - a függvény periódusa/frekvenciája $T = \frac{2\pi}{\omega}$ és $\nu = \frac{1}{T}$ (a frekvencia mértékegysége $1s^{-1} = 1Hz$).

- α_0 szerepe:

  - mivel időben lejátszódó folyamatokat fogunk tanulmányozni, szükségünk van egy vonatkoztatási rendszerre az idő múlásának tekintetében. Az α_0 kezdőfázis arra szolgál, hogy a kezdő pillanatban tudjuk megadni egy függvény értékét (jelen esetben egyszerűen a cos vagy sin függvények értékét).

Példa: egyenletes körmozgás:



8. ábra: Egyenletes körmozgás (ω=áll.)

Egy *m*-tömegű anyagi pont az 1-es pontból kiindulva *r*-sugarú pályán egyenletes körmozgást végez (az ω-val jelzett szögsebessége állandó, ami azt jelenti, hogy egyenlő időközönként az r sugár egyenlő szögtartományt érint). Az 1-es pontban az anyagi pont poláris koordinátái $[r,\ \alpha_0]$. Az anyagi pont *t*-idő elteltével a 2-es pontba található, amelynek poláris koordinátái $[r,\alpha]$, ahol $\alpha = \alpha_0 + \omega t$.

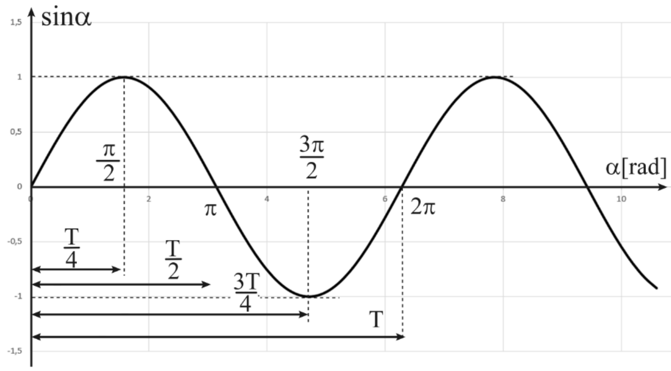
Az anyagi ponthelyzeteit megadó descartes-i koordinátákat a szinusz és koszinusz függvények segítségével a következőképpen adhatjuk meg:

$x_1 = r \cdot cos\alpha_0$ és $y_1 = r \cdot sin\alpha_0$

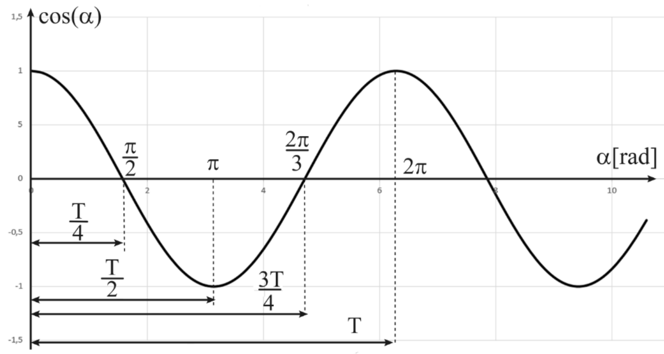
illetve

$x_2 = r \cdot cos(\alpha_0 + \omega t)$ és $y_1 = r \cdot sin(\alpha_0 + \omega t)$

Figyelembe véve, hogy a szinusz és koszinusz függvények értéktartománya [-1,1] az eddigiekben felsorolt jellemzőket 9. és10. ábrák szemléltetik.



9. ábra: $y(t) = sin(\alpha)$*;* $\alpha = \omega t + \alpha_0$ *és* $\alpha_0 = 0$



10. ábra: $y(t) = cos(\alpha)$*;* $\alpha = \omega t + \alpha_0$ *és* $\alpha_0 = 0$

Hasznos képletek:

$$(1)\ \sin(\alpha \pm \beta) = sin\alpha \cdot cos\beta \pm cos\alpha \cdot sin\beta$$

$$(2)\ \cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta \mp sin\alpha \cdot sin\beta$$

$$sin^2\alpha = \frac{1 - cos2\alpha}{2}$$

$$cos^2\alpha = \frac{1 + cos2\alpha}{2}$$

$$sin2\alpha = 2sin\alpha \cdot cos\alpha$$

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

$$\int_0^T \sin(\omega t + \alpha_0)\, dt = 0$$

$$\int_0^T \cos(\omega t + \alpha_0)\, dt = 0$$

Fontos következtetést vonhatunk le az (1) vagy (2) képletből:

Ha $\beta = \frac{\pi}{2}$ akkor

$$cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

ami azt jelenti, hogy a koszinusz függvény fázisban (fázis szöget tekintve) siet $\frac{\pi}{2}$-es szög értékkel a szinusz függvényhez képest (ld. 9. és 10. ábrák összehasonlítása!!!).

Általánosan felírva:

$$\sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = cos\alpha$$
$$\cos\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp sin\alpha.$$

2.2. Komplex számok és a komplex számokkal való számítások.

Komplex szám.

Formálisan gondolkodva, komplex számokra azért van szükségünk, mert negatív számokból nem lehet négyzetgyököt vonni. A formális mivolta mellett a komplex számoknak és a komplex számokkal történő számításoknak nagyon komoly jelentése van a fizikában, amelyekre természetesen kitérünk a továbbiakban.

Például mennyi az értéke $\sqrt{-121}$ =? Ezt a következő módon számítjuk ki: $\sqrt{-121} = \sqrt{121} \cdot \sqrt{-1} = 12 \cdot \sqrt{-1}$. Használjuk a következő jelölést: $j = \sqrt{-1}$, így az előző értéket így írhatjuk fel: $\sqrt{-121} = 12 \cdot j$ és komplex számnak nevezzük (megjegyzés: a matematikusok $i = \sqrt{-1}$ jelölést használnak, azonban a későbbiekben bevezetésre kerülő áramerősség jelölés miatt ezt az elektrotechnikában nem használjuk!!!).

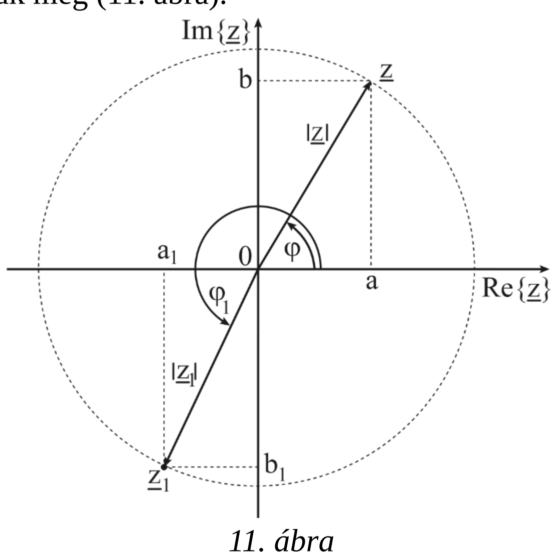
Általánosan a komplex számot nem csak az előbbiekben megismert, ún. imaginárius rész definiálja, hanem lehet a komplex számnak egy valós része is, sőt még akár az is lehet, hogy csak valós része van. A komplex szám általános definícióját a következő összefüggés adja meg:

$$\underline{z} = a + jb,$$

ahol ***a*** a komplex szám valós része $\left(a = Re\{\underline{z}\}\right)$ és ***b*** a komplex szám imaginárius (vagy másképpen képzetes) része $\left(b = Im\{\underline{z}\}\right)$ (megjegyzés: a matematikusok a komplex számokat $\overline{x}$-al jelölik!!!).

A komplex számsík.

A komplex számokat a komplex számsíkban ábrázoljuk, ahol a komplex szám egy pontot jelöl a síkban. A pontnak a helyzetét (ugyanúgy, mint a kétdimenziós euklideszi térben) két koordináta párossal adhatjuk meg (11. ábra).



11. ábra

Descartes-koordinátáknak megfelelő páros: $\begin{cases} a = Re\{\underline{z}\} = z \cdot cos\varphi \\ b = Im\{\underline{z}\} = z \cdot sin\varphi \end{cases}$

Poláris-koordinátának megfelelő páros: $\begin{cases} z \equiv |\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} & \text{- modulusz} \\ tg\varphi = \dfrac{b}{a} & \text{- fázisszög} \end{cases}$

Nagyon fontos megjegyezni, hogy azok a komplex számok, amelyek egy adott sugarú körön helyezkednek el (pl. $|\underline{z}|$ sugarú kör a 11. ábrán, $\underline{z}$ és $\underline{z}_1$), különböző valós, illetve imaginárius résszel rendelkeznek, azonos a moduluszuk de különböző a fázisszögük.

Nagyon fontos képlet az ún. Euler-képlet, amely az exponenciális függvény és a komplex számok közötti kapcsolatot termeti meg a trigonometriai függvények lineáris kombinációjaként.

$$e^{\pm j\varphi} = cos(\pm\varphi) + sin(\pm\varphi) = cos\varphi \pm jsin\varphi$$

Euler-képlet

Ennek a képletnek a következményeként említsük meg azt, hogy miként lehet a szinusz és koszinusz függvényeket kiszámítani az exponenciális függvények segítségével:

$$cos\varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$$

$$sin\varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$$

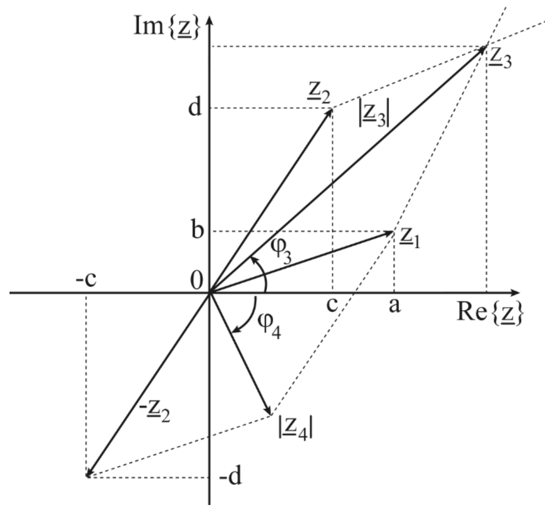
Műveletek komplex számokkal.

Az alábbiakban tekintsük a következő két komplex számot $\underline{z}_1 = a + jb$ és $\underline{z}_2 = c + jd$, amelyekkel elvégezzük az egyszerű számításokat (az általánosítást az olvasóra bízzuk).

- *összeadás*:

$$\underline{z}_3 = \underline{z}_1 + \underline{z}_2 = a + jb + c + jd = (a + c) + j(b + d),$$

ahol az eredményként származó komplex szám valós része $Re\{\underline{z}_3\} = a + c$ és imaginárius része $Im\{\underline{z}_3\} = b + d$, modulusza $z_3 = |\underline{z}_3| = \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}$, valamint fázisszöge $\varphi_3 = arctg\,\frac{b+d}{a+c}$ (*megjegyzés*: a modulusz és fázis számítás hasonlóképpen történik a további műveletek esetén is). A komplex számok összeadása grafikusan a paralelogramma szabály szerint történik (12. ábra).



12. ábra

- *kivonás*:

$$\underline{z}_4 = \underline{z}_1 - \underline{z}_2 = \underline{z}_1 + \left(-\underline{z}_2\right) = a + jb - (c + jd) = (a - c) + j(b - d)$$

A komplex számok összeadása grafikusan a paralelogramma szabály szerint történik (12. ábra).

- *szorzás*:

$$\underline{z}_5 = \underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = (a + jb) \cdot (c + jd) = (ac + j^2 bd) + j(ad + bc)$$
$$= \left(ac + \sqrt{-1}^2 bd\right) + j(ad + bc) = (ac - bd) + j(ad + bc).$$

- *komplex konjugálás*: a $\underline{z}_1 = a + jb$ komplex szám komplex konjugátját úgy képezzük, hogy a komplex szám imaginárius részének értékét megszorozzuk (-1)-el. így $\underline{z}_1{}^* = a - jb$.

- *négyzetre emelés*: a $\underline{z}_1 = a + jb$ komplex szám négyzetét a saját komplex konjugáltjával történő szorzás útján számítjuk ki: $\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_1{}^* = (a + jb) \cdot (a - jb) = a^2 + b^2 = \left|\underline{z}_1\right|^2$. Tulajdonképpen így számítjuk ki a komplex szám moduluszát: $z_1 = \left|\underline{z}_1\right| = \sqrt{\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_1{}^*} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

- *osztás*: ez a művelet egy kicsit összetettebb az eddigieknél, mivel a komplex számok osztásakor a nevezőben nem maradhat komplex mennyiség, így minden esetben az osztónak a komplex konjugáltjával kell osztani és szorozni a törtet:

$$\underline{z}_6 = \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{a + jb}{c + jd} = \frac{(a + jb) \cdot (c - jd)}{(c + jd) \cdot (c - jd)} = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + j\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

2.3. Az exponenciális függvényekkel való számítások.

Ebben a részben egy számításra hívjuk fel a figyelmet, amely alapvetően fontos a váltóáramú áramkörökkel való számításoknál.

$$e^{(a+b)} = e^{a} \cdot e^{b}$$

illetve

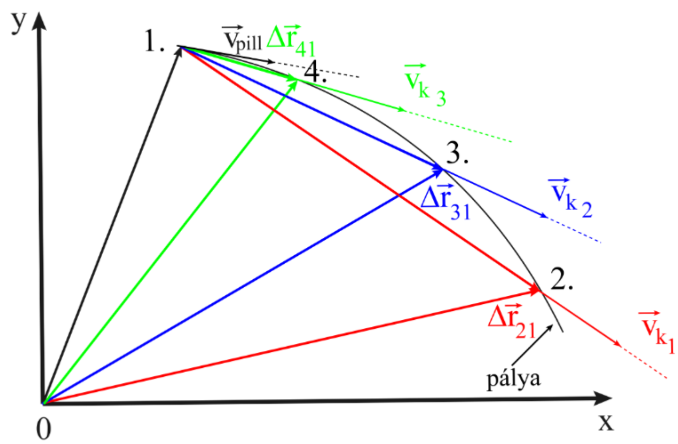
$$e^{(a-b)} = \frac{e^{a}}{e^{b}} = e^{a} \cdot e^{-b}$$

Példa: komplex pillanatnyi feszültséggel való számítás:

$$\underline{u}(t) = U_0 \cdot e^{j(\varphi_0+\omega t)} = U_0 \cdot e^{j\varphi_0} \cdot e^{j\omega t}.$$

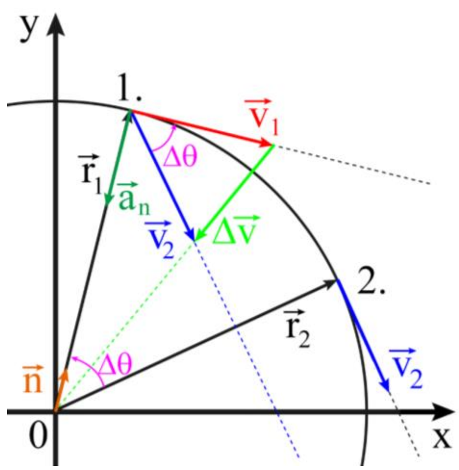
3. Kinematika

3.1. A sebesség

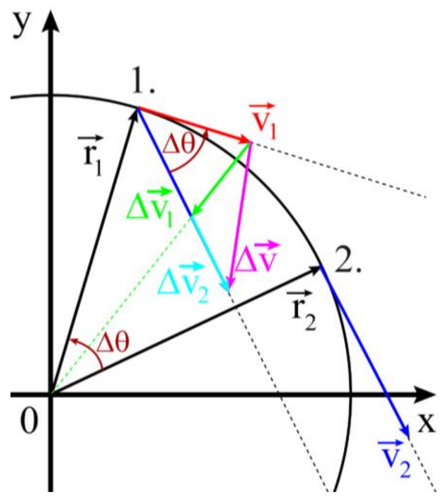


13. ábra: a középsebesség és a pillanatnyi sebesség.

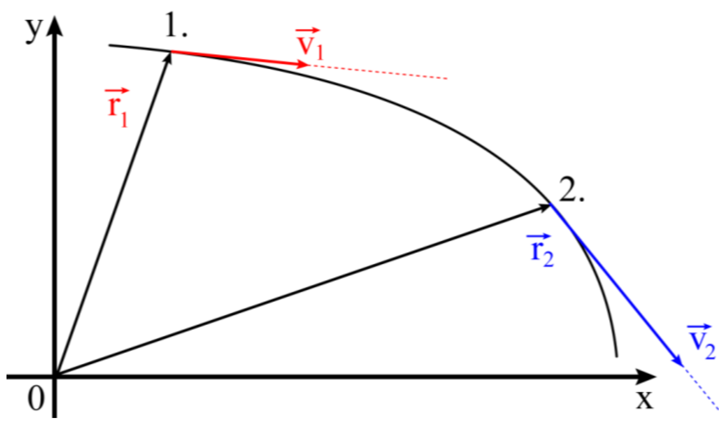
3.2. A gyorsulás



14. ábra: normális gyorsulás egyenletes körmozgás esetében



15. ábra: normális gyorsulás egyenletes körmozgás esetében



16. ábra: normális gyorsulás egyenletes körmozgás esetében

4. Tartalomjegyzék