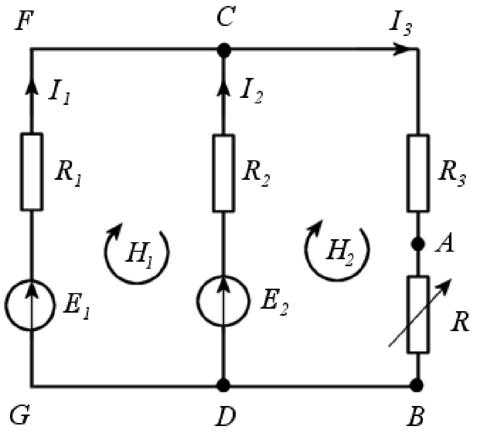
Segédanyagok:

1. Feladat.

Az alábbi számítások az ***„Egyenáramú áramkörök (I. rész)"*** c. laboratóriumi gyakorlatban felhasznált elméleti számítások levezetéseit tartalmazza. Áttekintésük elősegíti az alapfogalmak pontosabb elsajátítását és a mérési adatok pontosabb kiértékelését.

1.1. Az áramkör megoldása Kirchhoff-egyenleteivel.

Az 1. ábrán látható áramkör mindegyik ágában tekintünk egy feltételezett áramirány (amennyiben a számítások eredményeként negatív értékeket kapunk akkor a valódi áramirányok az általunk feltételezettekkel ellentétesek). A H_1 és a H_2 hurkokra felírjuk a huroktörvényét, a C pontara pedig a csomóponttörvényt a következőképpen:



$$\begin{aligned} a)\ H_1 : \quad & \begin{cases} E_1 - E_2 = I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 \\ E_2 = I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot (R + R_3) \\ I_3 = I_1 + I_2 \end{cases} \\ b)\ H_2 : \quad & \\ c)\ C : \quad & \end{aligned} \qquad 1.$$

1. ábra

A gyakorlat céljainak megfelelően az I_3 áramerősséget kell kiszámítsuk. Megoldjuk az egyenletrendszert: I_1-et kifejezzük az (1.c.) -ből, behelyettesítjük (1.a.)-ba és kifejezzük I_2-t:

$$I_2 = \frac{E_2 - I_3 \cdot (R + R_3)}{R_2} \qquad 2.$$

A (2.)-t visszahelyettesítjük (1.b.)-be és az számítások elvégzése után kapjuk az I_3 -ra:

$$I_3 = \frac{E_2 \cdot R_1 + E_1 \cdot R_2}{R_1 \cdot R_2 + (R_1 + R_2)(R + R_3)} \qquad 3.$$

1.2. Az áramkör megoldása a szuperpozíció elvével.

A szuperpozíció elve kimondja, egy olyan áramkörben ahol az ágakban több feszültségforrás található, az egyes ágakban létrejövő áramerősségeket úgy kiszámíthatjuk ki, hogy sorra kiiktatjuk a feszültségforrásokat megmérjük minden esetben az ágakban folyó áramerősségeket, majd ezeket az áramerősségeket áganként összegezzük. Ezeket a lépéseket végezzük el most számításokkal.

Kiiktatjuk az *1*-es ágban lévő feszültségforrást, jelöljük az egyes ágakban folyó áramokat és irányaikat a 2.a ábrának megfelelően. Felírjuk a huroktörvényt a H_1 és H_2 hurkokra, valamint a csomóponttörvényt a C csomópontra (7):

$$\begin{array}{ll} a)\ H_1: & \left\{\begin{array}{l} E_2 = I_{22}\cdot R_2 + I_{12}\cdot R \\ -I_{32}\cdot(R_3+R) + I_{12}\cdot R_1 = 0 \\ I_{22} = I_{12} + I_{32} \end{array}\right. \\ b)\ H_2: & \\ c)\ C: & \end{array} \qquad 4.$$

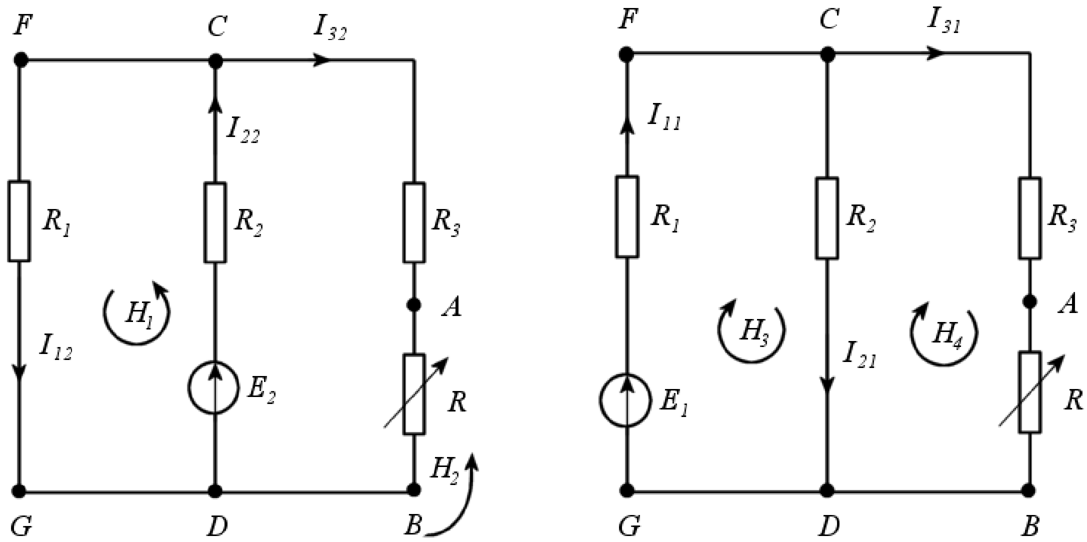
Célunk a továbbiakban is a *3*-as ágban folyó áram meghatározása. Ennek érdekében kifejezzük a (4.b.)-ből I_{12}-t és behelyettesítjük (4.a.)-ba és (4.c.)-be. Az így kapott két ismeretlenes egyenletrendszer:

$$\begin{array}{ll} a) & \left\{\begin{array}{l} E_2 = I_{22}\cdot R_2 + I_{32}\cdot(R_3+R) \\ I_{22} = I_{32}\cdot\left(\dfrac{R_3+R}{R_1}+1\right) \end{array}\right. \\ b) & \end{array} \qquad 5.$$

Behelyettesítjük (5.b)-t (a.a.)-ba és kapjuk I_{32}-re:

$$I_{32} = \frac{E_2\cdot R_1}{R_1\cdot R_2 + (R_1+R_2)(R_3+R)} \qquad 6.$$

Ehhez hasonlóan, felhasználva a már felírt egyenleteket, kiszámíthatjuk I_{12} és I_{22}-t is.



2.a ábra 2.b ábra

A továbbiakban kiiktatjuk a *2*-es ágban lévő feszültségforrást, jelöljük az egyes ágakban folyó áramokat és irányaikat a 2.b ábrának megfelelően. Felírjuk a huroktörvényt a H_3 és H_4 hurkokra, valamint a csomóponttörvényt a *C* csomópontra (7):

$$\begin{array}{ll} a)\ H_3: & \left\{\begin{array}{l} E_1 = I_{11}\cdot R_1 + I_{21}\cdot R_2 \\ -I_{21}\cdot R_2 + I_{31}\cdot(R_3+R) = 0 \\ I_{11} = I_{21} + I_{31} \end{array}\right. \\ b)\ H_4: & \\ c)\ C: & \end{array} \qquad 7.$$

Célunk a továbbiakban is a *3*-as ágban folyó áram meghatározása. Ennek érdekében kifejezzük a (7.b.)-ből I_{21}-t és behelyettesítjük (7.a.)-ba és (7.c.)-be. Az így kapott két ismeretlenes egyenletrendszer:

$$\begin{array}{ll} a) & \left\{\begin{array}{l} E_1 = I_{11}\cdot R_1 + I_{31}\cdot(R_3+R) \\ I_{11} = I_{31}\cdot\left(\dfrac{R_3+R}{R_2}+1\right) \end{array}\right. \\ b) & \end{array} \qquad 8.$$

Behelyettesítjük (8.b)-t (8.a.)-ba és kapjuk I_{31}-re:

$$I_{31} = \frac{E_1 \cdot R_2}{R_1 \cdot R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R)} \qquad 9.$$

Ehhez hasonlóan, felhasználva a már felírt egyenleteket, kiszámíthatjuk I_{11} és I_{21}-et is. Összegezzük áganként az áramerősségeket és kapjuk az eredeti áramkörre érvényes megoldásokat:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{11} - I_{12} \\ I_2 &= -I_{21} + I_{22} \\ I_3 &= I_{31} + I_{32} \end{aligned} \qquad 10.$$

Megjegyzés: az áramkörben ebben az esetben olyan áramirányokat feltételeztünk amelyek megfelelnek a valóságnak, így az eredmények már mind pozitív előjelűek. Ennek megfelelően a (10.) egyenleteknél kellett az áramok irányát figyelembe venni. A feladatot megoldhatjuk úgy is, hogy fiktív áramirányokat tekintünk, ebben az esetben az áramerősségek pozitív vagy negatív előjellel rendelkeznek. Az áganként összegzésnél ebben az esetben mindig összeadjuk az áramerősségeket.

A 3-as ágban folyó áramerősségre kapjuk:

$$I_3 = I_{31} + I_{32} = \frac{E_1 \cdot R_2 + E_2 \cdot R_1}{R_1 \cdot R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R)} \qquad 11.$$

amely megegyezik az 1.1. feladat megoldásánál kapott eredménnyel.

Megjegyzés: a szuperpozíció elvének alkalmazásakor a feszültségforrásokat rövidzárral helyettesítettük, mert a kísérletben szereplő feszültségforrások stabilizáltak, így belső ellenállásuk nulla. Ha a feszültségforrások rendelkeznek belső ellenállással, akkor őket a belső ellenállásukkal helyettesítjük amikor az elv alkalmazásánál kiiktatjuk őket az áramkörből. Hasonlóképpen lehet meghatározni az *1*-es és *2*-es ágakban folyó áramok erősségét is.

1.3. A reciprocitás elvének ellenőrzése.

A reciprocitás (Maxwell-féle) tétele kimondja, hogy ha egy hálózat *j*-ik ágában lévő elektromotoros feszültség a *k*-ik ágban *I* áramot hoz létre, akkor áttéve a feszültség generátort a *k*-ig ágba, a *j*-ik ágban ugyanazt az *I* áramot kapjuk. Ez a tétel csak abban az esetben érvényes amikor a két ágban a feszültségforrások azonos e.m.f.-el rendelkeznek! Az 1. ábrán látható áramkör esetén a reciprocitás elve szerint az *1*-es feszültségforrás kiiktatása esetén a *2*-es ágban folyó áram erőssége meg kell egyezzen a *2*-es feszültségforrás kiiktatásakor az *1*-es ágban folyó áram erősségével, vagyis

$$I_{12} = I_{21} \qquad 12.$$

Felhasználjuk az 1.2. pontban kapott eredményeket: (4.b.)-ből kifejezzük I_{12}-t, ebbe behelyettesítjük (6)-ot és kapjuk (13.)-t,

$$I_{12} = I_{32} \cdot \frac{R + R_3}{R_1} = \frac{E_2 \cdot R_1}{R_1 \cdot R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R)} \cdot \frac{R + R_3}{R_1} = \frac{E_2 \cdot (R + R_3)}{R_1 \cdot R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R)} \qquad 13.$$

valamint, (7.b.)-ből I_{21}-t, ebbe behelyettesítjük (9)-et és kapjuk (14.)-t,
Összehasonlítva ez utóbbi két egyenletet, látszik,

$$I_{21} = I_{31} \cdot \frac{R + R_3}{R_2} = \frac{E_1 \cdot R_2}{R_1 \cdot R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R)} \cdot \frac{R + R_3}{R_2} = \frac{E_1 \cdot (R + R_3)}{R_1 \cdot R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R)} \qquad 14.$$

hogy (12.) csak akkor teljesül, ha

$$E_1 = E_2 \qquad I_{21} = I_{12} \tag{15.}$$