Fizika I.

1. Fejezet – mindaz, ami a középiskolai oktatásból elsajátított kellene legyen …

1.1. Mértékegység

A fizikai mennyiségek döntő többségét jellemzi egy mértékegység. Nagyon fontos az, hogy a mértékegységeket tudatosan használjuk minden esetben.

Ha nem így teszünk, a számított eredménynek körülbelül annyi lesz az értelme, mint a következő viccnek „A hajó kapitánya leszól a gépházba és kérdezi a hajógépészt: „Mennyi?”. A hajógépész visszaszól: „30”. A kapitány erre megkérdezi: „Mi 30?”. Ezek után pedig a hajógépész visszakérdez: „Mi mennyi?”.

A nagy átlagtól eltérően, vannak olyan fizikai mennyiségek, amelyek nem rendelkeznek mértékegységgel. Ilyen például a súrlódási együttható (jele μ) vagy a viszonyszámok, amelyek két mennyiség arányát fejezik ki (pl. a fénytanban a törésmutató: jele n és a fény terjedési sebességeinek arányát fejezi ki a vákuum és az adott közeget illetően*)*.

1.2. Mértékrendszer

A mértékegységeket különböző mértékegység-rendszerekbe foglaljuk. A legfontosabb a Nemzetközi Mértékegységrendszer, amelynek a rövidítése SI (francia nyelvből származó rövidítés: Système International d’Unités). Ebben a mértékegység-rendszerben létezik hat alapmértékegység, amelyeknek segítségével minden más mértékegységet származtathatunk, így ezeknek a nevük is származtatott mértékegységek.

A nemzetközi mértékegység-rendszer alap mennyiségeit, jelöléseiket és mértékegységeiket az 1. Táblázat foglalja össze:

	Mennyiség	Mértékegység	
1.	hosszúság	1m	méter
2.	idő	1 s	szekundum
3.	tömeg	1 kg	kilogramm
4.	áramerősség	1 A	Ampère
5.	abszolút hőmérséklet	1 K	Kelvin
6.	anyagmennyiség	1 mol	mol
7.	fényerősség	1 cd	kandella

1. Táblázat: a Nemzetközi Mértékegységrendszer (SI) alapmennyiségei.

Származtatott mennyiség például a sebesség, amely nem más, mint az időegység alatt megtett út, $v = \frac{d}{t}$ tehát a mértékegység $[v]_{SI} = \frac{1m}{1s} = 1\,\frac{m}{s}$.

Alternatív mértékegység például a *cgs* mértékrendszer, ahol a távolságot *cm*-ben (***c**gs*), a tömeget *gramm*-ban (*c**g**s*), az időt pedig szekundumban (*cg**s***) definiáljuk.

Használatos még a Brit Mértékegység-rendszer (főleg az USA-ban és már csak korlátozottan az Egyesült Királyságban) ahol tömegmérésre *fontot* illetve *unciát*, térfogatmérésre *gallont* és *pintet*, a távolságot pedig *mérfölddel*, *yarddal*, *lábbal* és *hüvelykkel* mérnek (pl. 1 gallon = 3,78 l; 1 láb = 30,48 cm; 1 hüvelyk (inch) = 2,54 cm stb.).

1.3. Nagyságrend

A fizikai mennyiségek értékei nagyon széles tartományban lehetnek, legyen például az egy kondenzátor kapacitása, amelynek értéke lehet 0,000000000001 F (farad) vagy egy erőmű elektromos teljesítménye, amely felveheti az 1000000000 W (Watt) értéket. Ha mindig ki kellene írjuk és mondjuk azt a sok nullát, amely az első esetben a tizedesvessző után, vagy a második esetben az 1-es számjegy után van, akkor nagyon bonyolult lenne minden úgy szóban, mint írásban. Könnyítésként, egyszerűsítésként bevezették a nagyságrendeket, amelyek átveszik a nullák szerepét és nagyon elegáns, könnyen érthető jelentéssel bírnak. A nagyságrend nem más, mint a *10*-el való osztás illetve szorzás eredményeként származtatott mennyiség értéke az előbbihez viszonyítva (pl. a 100 az egy nagyságrenddel nagyobb, mint a 10). A könnyebb kifejezés érdekében, bizonyos nagyságrendek nevet és jelet is kaptak, ezeket a 2. Táblázat foglalja össze.

	távolság	$10^0 = 1$		
10^{-1} - deci	deciméter – $10^{-1}m$		10^1 - deka	dekaméter – $10^1 m = 1dm$
10^{-2} - centi	centiméter – $10^{-2}m$=1cm		10^2 - hekto	hektométer – $10^2 m = 1hm$
10^{-3} - milli	milliméter – $10^{-3}m = 1mm$		10^3 - kilo	kilométer – $10^3 m = 1km$
10^{-6} - mikro	mikométer – $10^{-6}m = 1\mu m$		10^6 - Mega	Megaméter – $10^6 m = 1Mm$
10^{-9} - nano	nanométer – $10^{-9}m = 1nm$		10^9 - Giga	Gigaméter – $10^9 m = 1Gm$
10^{-12} - piko	pikométer – $10^{-12} = 1pm$		10^{12} - Terra	Terraméter – $10^{12} m = 1Tm$
10^{-15} - femto	femtométer – $10^{-15}m = 1fm$		10^{15} - Peta	Petaméter – $10^{15} m = 1Pm$
10^{-18} - atto	attométer – $10^{-18}m = 1am$		10^{18} - Exa	Examéter – $10^{18} m = 1Em$

2. Táblázat: Nagyságrendek.

A *2. Táblázatba* foglalt távolságok léptékei óriási különbségeket szemléletnek. Például amíg *1fm* a proton mérete, addig *1Pm* a fény által egy év alatt megtett út nagyságrendjét jelöli (fényév). Ezek közül jónéhányat használunk a mindennapi életben a foglalkozásunktól függetlenül (pl. huzal átmérője milliméterben, vagy megtett út kilométerben), de sokat már csak a különböző tudományágakban dolgozók használnak (pl. femtoszekundum a lézerfizikában, vagy Examéter a csillagászatban).

1.4. Mennyiségek

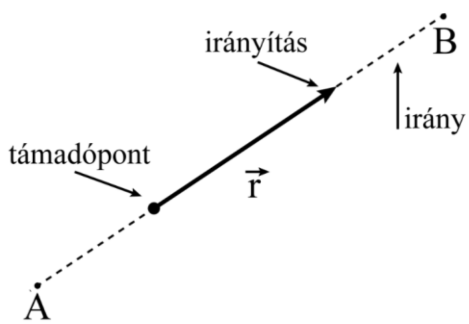
1.4.1. Skaláris mennyiség (röviden skalár)

- egy olyan fizikai mennyiség, amelyet kizárólag az értéke jellemez (megj. fontos a mértékegység és a nagyságrend ld. az előző alpontokat),
- példa: tömeg, egyezményes jele *m*; idő, jele *t* stb.

1.4.2. Vektoriális mennyiség (röviden vektor)

- egy olyan fizikai mennyiség, amelynek van iránya, irányítása és nagysága (modulusz).
- példák:
  - *Helyzetvektor*: két pont közötti távolság az skaláris mennyiség, amelyet méterben fejezünk ki, azonban amikor az egyik pont helyzetét a másikhoz viszonyítva kell megadjuk már egészen más a helyzet. Mivel a távolságot egyenes vonalban mérjük definiáljuk a két pontot összekötő egyenest, amely nem más, mint a helyzetvektor iránya, majd pedig definiáljuk, hogy ezen az egyenesen merre található a pont és ez adja meg az irányítást. A modulusz megegyezik a két pont közötti távolság értékével.
  - *Sebességvektor*: megadja, hogy adott irányba és adott irányítással egységnyi idő alatt mekkora utat tesz meg egy adott objektum. A napi életben szinte mindig csak a sebesség értékét használjuk (hány km/h óra sebességgel haladunk), de azért mindenki tudja azt, hogy hova akar megérkezni és azt is, hogy milyen útvonalon fog haladni, amelyek éppen az irány és irányítás jellemzőket takarják.

Az általánosan használt jelölés egy nyíl az adott fizikai mennyiséget jelző betű fölött: pl. helyzetvektor $\vec{r}$, sebességvektor $\vec{v}$, erő $\vec{F}$, impulzus $\vec{p}$ stb. (*megjegyzés*: könyvekben és internetes oldalakon is találhatunk olyan jelölésformát, amikor a vektoriális mennyiséget vastagított betűvel jelölik: pl. sebességvektor ***v***).



1. ábra: vektor és a jellemzői.

Megjegyzés: alkalmazásoktól függően megkülönböztetünk szabad- és kötött vektorokat. Kötött vektorok esetében az 1. ábrán látható minden jellemző rögzített, míg szabad vektorok esetén a vektor elcsúsztatható (megváltozhat a tartóegyenese (AB) illetve a támadópontja (A)).

Sok esetben szükségünk van olyan vektorra, amely a térbeli irányt és irányítást fejezi ki, a modulusza pedig *1*-el egyenlő. Az ilyen vektor egységvektornak nevezzük. Például egy adott pont helyzetének meghatározására szolgáló $\vec{r}$ helyzetvektor esetében az egységvektor definíciója:

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

1.4.3. Tenzoriális mennyiségég (röviden tenzor).

Ilyen mennyiséggel az előadás keretein belül nem fogunk találkozni, de azért érdemes megjegyezni, hogy az ilyen típusú mennyiségeket mátrix formájában adjuk meg és minden művelet a mátrixokra vonatkozó szabályok szerint történik. A fizikában ilyen mennyiségekkel jellemzünk azokat a fizikai mennyiségeket, amelyek irányfüggőséggel rendelkeznek (pl. optikában az elektromos permittivitás tenzor).

1.5. A mechanikában használatos fizikai objektumokra vonatkozó modellek.

A mechanikában a testek nyugalmi helyzetét, valamint az általuk végzett valamilyen mozgásformát írjuk le az idő függvényében.

1.5.1. Anyagi pont

A legegyszerűbb esetet az ún. anyagi pont jelenti. Az anyagi pont egy olyan modell, amelynek esetében a testnek semmilyen térbeli kiterjedést nem tulajdonítunk és kizárólag a tömegével jellemezzük.

1.5.2. Pontrendszer

A pontrendszer (vagy anyagi pontrendszer) az anyagi pontok sokaságát jelenti, amelyek egymással valamilyen „kötésben" találhatók. Tulajdonképpen a környezetünkben észlelhető minden makroszkopikus tárgy, de még a folyadékok és gázok is pontrendszereknek tekinthetők. A pontrendszert alkotó anyagi pontok közötti távolságok függvényében rendszerezhetjük a pontrendszereket.

1.5.2.1. Merev test:

- a pontrendszerben elhelyezkedő anyagi pontok közötti távolság nem változik.

1.5.2.2. Deformálható test:

- a pontrendszerben elhelyezkedő anyagi pontok közötti távolság nem változik. A deformáció lehet maradandó vagy nem maradandó jellegű. Az első esetben a pontrendszer alakja megváltozik, míg a második esetben a pontrendszer visszanyeri eredeti alakját.

1.6. Vonatkoztatási rendszer (koordináta rendszer).

A fizikai jelenségeket vonatkoztatási rendszerekben írjuk le, amelyek jellemezhetik térben, és/vagy időben is a jelenségeket (pl. eltelt tíz perc … de mióta?; megtettem 200 métert … de honnan számítva?).

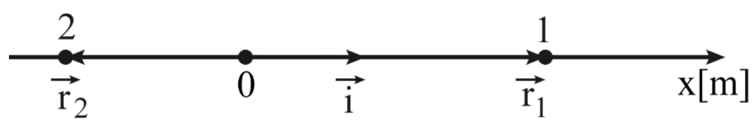
Fontos megjegyezni azt a tényt, hogy a vonatkoztatási rendszerek lehetnek nyugalomban lévők (vagy viszonylagos nyugalomban lévők), illetve mozgásban lévők is és végezhetnek egymáshoz képest egyenletes (állandó sebesség) vagy gyorsuló haladó mozgást, illetve forgó mozgást is. Ennek megfelelően nem mindegy az, hogy milyen koordináta rendszert használunk egy jelenség leírására. Egyelőre a nyugalomban lévő, úgynevezett inercia vonatkoztatási rendszerekre szorítkozunk, ám később a gyorsuló vonatkoztatási rendszerekben fellépő különbségekre is kitérünk.

A továbbiakban a jelenségek térbeli leírására használatos (Euklideszi-térre vonatkozó) vonatkoztatási rendszerekkel ismerkedünk meg.

1.6.1. Descartes-féle koordináta rendszer.

- 1 dimenzió (1D):

Ebben az esetben egy pont helyzetét a vonatkoztatási rendszer kezdőpontjához képest csak egy adat határozza meg. A 2. ábrán az *x*-koordináta. Mivel egy adott iránnyal van dolgunk, két különböző irányítás lehetséges. Ennek a matematikai megjelenítését egy egységvektor segítségével fejezzük ki. Az *x*-tengelyhez hagyományosan az $\vec{i}$ - egységvektor tartozik. Az ábra szerint az 1-es pont r_1 távolságra található az *0*-ponttól és a helyzetét $\vec{r}_1 = r_1\vec{i}$ vektor adja meg, míg a 2-es pont r_2 távolságra található az *0*-ponttól és a helyzetét $\vec{r}_2 = -r_2\vec{i}$ vektor adja meg.



2. ábra: 1D koordinátarendszer.

Mivel egyetlen iránnyal van dolgunk szögek használatának tekintetében két lehetőség adódik. Abban az esetben amikor két vektor azonos irányítással rendelkezik, az általuk bezárt szög értéke nulla, ha pedig ellentétes irányítással rendelkeznek, az általuk bezárt szög értéke 180 deg (π- radián).

- 2 dimenzió (2D):

Ebben az esetben egy pont helyzetét a vonatkoztatási rendszer kezdőpontjához képest két adat határozza meg. A 3. ábrán az *x* és az *y* koordináták. Az *x*-tengelyhez hagyományosan az $\vec{i}$ – egységvektor, míg az *y*-tengelyhez a $\vec{j}$ egységvektor tartozik. Az $\vec{i}$ és a $\vec{j}$ egységvektorok merőlegesek egymásra. Az ilyen koordináta-rendszert derékszögű koordináta-rendszernek hívjuk.

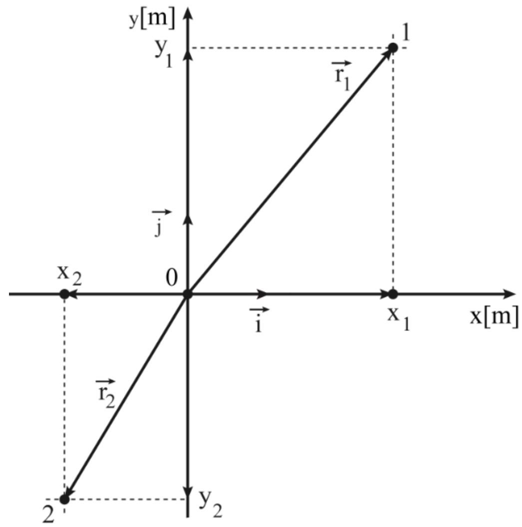
Az ábra szerint az 1-es pont r_1 távolságra található az *0*-ponttól és a helyzetét

$$\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$$

vektor adja meg, míg a 2-es pont r_2 távolságra található az *0*-ponttól és a helyzetét

$$\vec{r}_2 = -x_2\vec{i} - y_2\vec{j}$$

vektor adja meg.



3. ábra: 2D koordinátarendszer

- 3 dimenzió (3D):

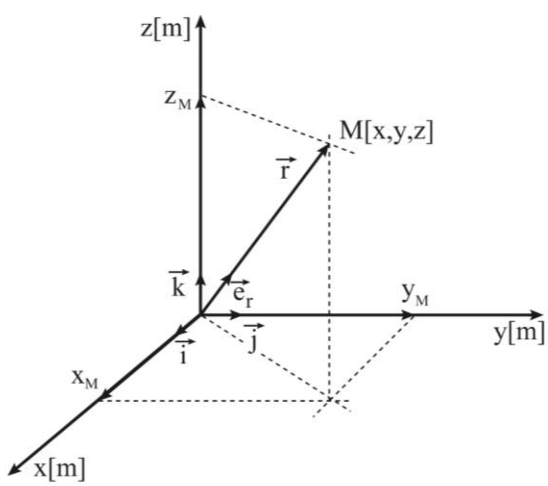
Ebben az esetben egy pont helyzetét a vonatkoztatási rendszer kezdőpontjához képest három adat határozza meg. A 4. ábrán az *x, y* és *z* koordináták. Az *x*-tengelyhez hagyományosan az $\vec{\imath}$, az *y*-tengelyhez a $\vec{\jmath}$ és a z-tengelyhez a $\vec{k}$ egységvektor tartozik. Az $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ és $\vec{k}$ egységvektorok merőlegesek egymásra. Az ilyen koordináta-rendszert derékszögű koordináta-rendszernek hívjuk.

Az ábra szerint az *M*-pont r távolságra található az *0*-ponttól és a helyzetét

$$\vec{r} = x_M\vec{\imath} + y_M\vec{\jmath} + z_M\vec{k} = r\vec{e}_r$$

ahol $\vec{e}_r$ a $\vec{r}$-hoz tartozó egységvektor.
vektor adja meg.

Megjegyzés: az *x*, *y* és *z* koordinátákat Descartes-féle koordinátáknak nevezzük.

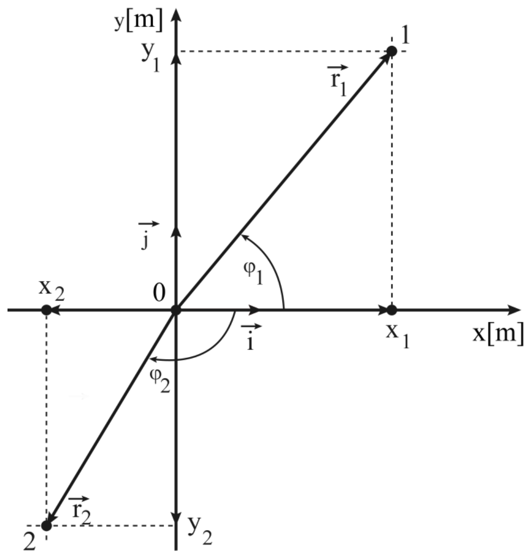


4. ábra: 3D koordinátarendszer

1.6.2. Poláris koordináta rendszer.

- 2 dimenzió (2D):

Kiindulásként használjuk a 3. ábrán szemléltetett koordináta-rendszert, amelyhez annyi kiegészítést teszünk, hogy egy pont helyzetét egy szög és egy távolság függvényében is megadhatjuk. Az 5. ábrán az *1*-pont helyzetét megadhatjuk a descartes-i koordinátákkal (x_1, y_1), vagy az r_1 távolság és a φ_1 egy szög (azimut-szög) segítségével (megjegyezzük, hogy a szögek meghatározása is mindig egy vonatkoztatási irányhoz képest történik, az 5. ábrán a vonatkoztatási irány az *x*-tengely pozitív irányítása – 0 fokos „irány”). Az $(r_1,\ \varphi_1)$ párost nevezzük poláris koordinátáknak.



5. ábra: 2D poláris koordinátarendszer

Felhasználva a trigonometriai függvényeket kapcsolatot teremthetünk a descartes-i és a poláris koordináták között.

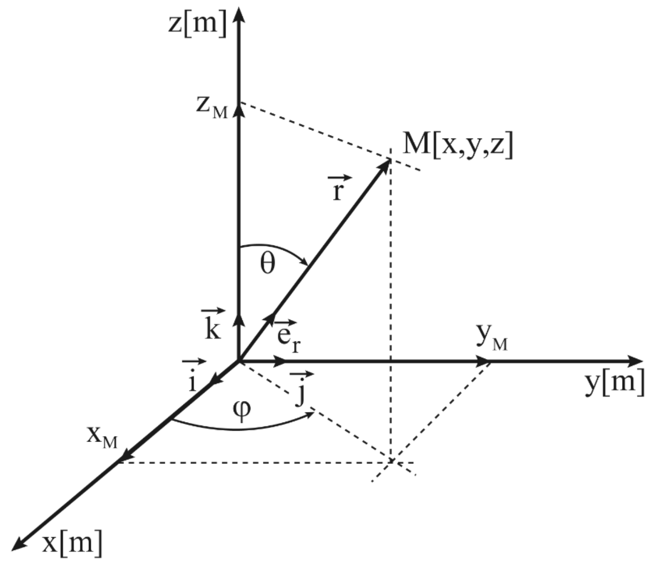
$$x_1 = r_1 cos\varphi_1$$
és
$$y_1 = r_1 sin\varphi_1$$

vagy

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$
és
$$tg\varphi_1 = \frac{y_1}{x_1}.$$

- 3 dimenzió (3D):

Kiindulásként használjuk a 4. ábrán szemléltetett koordináta-rendszert, amelyhez annyi kiegészítést teszünk, hogy egy pont helyzetét két szög és egy távolság függvényében is megadhatjuk. A 6. ábrán az *M*-pont helyzetét megadhatjuk a descartes-i koordinátákkal (x_M, y_M, z_M), vagy az r távolság a φ és a θ szögek segítségével. Az $(r,\ \varphi,\ \theta)$ hármast nevezzük poláris koordinátáknak.



6. ábra: 3D poláris koordinátarendszer

Felhasználva a trigonometriai függvényeket kapcsolatot teremthetünk a descartes-i és a poláris koordináták között.

$$x_M = rsin\theta cos\varphi \qquad r = \sqrt{x_M^2 + y_M^2 + z_M^2}$$
$$y_M = rsin\theta sin\varphi \quad \text{vagy} \quad tg\varphi = \frac{y_M}{x_M}$$
$$z_M = rcos\theta \qquad tg\theta = \frac{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}{z_M}.$$

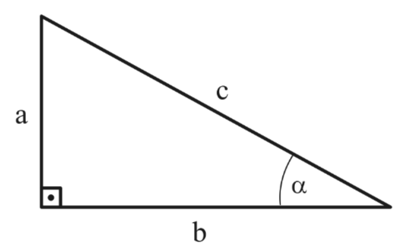
2. Fejezet – matematika, amit tudni kellene …

2.1. A szinusz (sinα) és koszinusz függvény (cosα).

- definíciójuk egy derékszögű háromszögben (7. ábra):

$$sin\alpha = \frac{szöggel\ szembeni\ befogó}{átfogó} = \frac{a}{c}$$

$$cos\alpha = \frac{szög\ melletti\ befogó}{átfogó} = \frac{b}{c}$$



7. ábra: szinusz- és koszinusz függvények

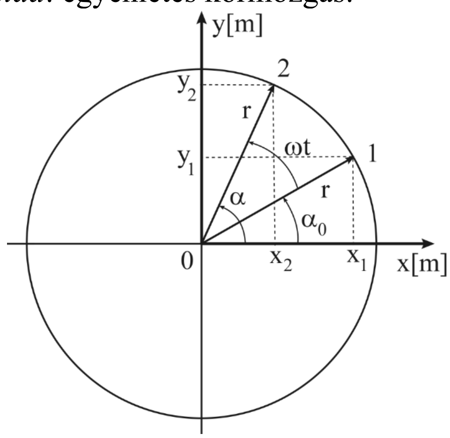
- periodikus függvények, amelyeket főleg a körmozgás (ld. példaként a 8. ábrát és a hozzá tartozó összefüggéseket) és a kvázi-stacionárius feszültség/áram tanulmányozásánál fogunk használni,

- ezekben az esetekben az α szöget fázisszögnek hívjuk (vagy röviden fázis), periodikusan változik az idő függvényében és következő formában írjuk fel az értékét: $\alpha = \alpha_0 + \omega t$, ahol

- α_0 a kezdőfázis(szög) (mértékegysége 1rad/s),
- ω a szögsebesség (vagy körfrekvencia, mértékegysége 1rad/s),
- t az idő (mértékegysége 1s),
- a függvény periódusa/frekvenciája $T = \frac{2\pi}{\omega}$ és $\nu = \frac{1}{T}$ (a frekvencia mértékegysége $1s^{-1} = 1Hz$).

- α_0 szerepe:
  - mivel időben lejátszódó folyamatokat fogunk tanulmányozni, szükségünk van egy vonatkoztatási rendszerre az idő múlásának tekintetében. Az α_0 kezdőfázis arra szolgál, hogy a kezdő pillanatban tudjuk megadni egy függvény értékét (jelen esetben egyszerűen a cos vagy sin függvények értékét).

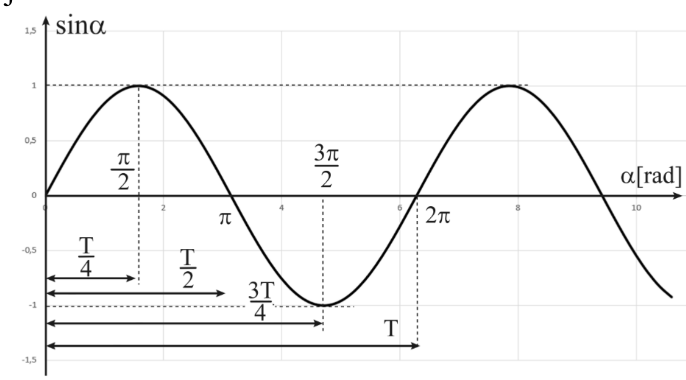
Példa: egyenletes körmozgás:



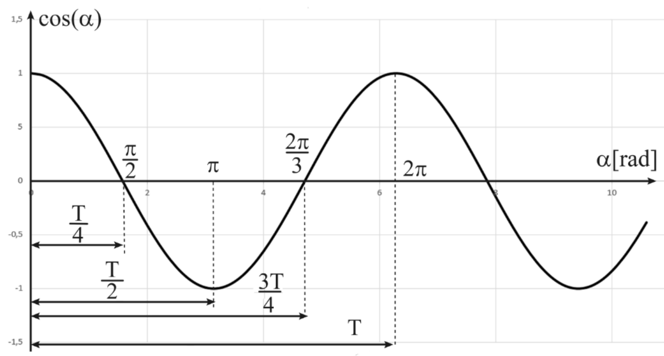
8. ábra: Egyenletes körmozgás (ω=áll.)

Egy *m*-tömegű anyagi pont az *1*-es pontból kiindulva *r*-sugarú pályán egyenletes körmozgást végez (az ω-val jelzett szögsebessége állandó, ami azt jelenti, hogy egyenlő időközönként az r sugár egyenlő szögtartományt érint). Az *1*-es pontban az anyagi pont poláris koordinátái $[r, \alpha_0]$. Az anyagi pont *t*-idő elteltével a *2*-es pontba található, amelynek poláris koordinátái $[r, \alpha]$, ahol $\alpha = \alpha_0 + \omega t$.
Az anyagi ponthelyzeteit megadó descartes-i koordinátákat a szinusz és koszinusz függvények segítségével a következőképpen adhatjuk meg:
$x_1 = rcos\alpha_0$ és $y_1 = rsin\alpha_0$
illetve
$x_2 = rcos(\alpha_0 + \omega t)$ és $y_1 = rsin(\alpha_0 + \omega t)$

Figyelembe véve, hogy a szinusz és koszinusz függvények értéktartománya [-1,1] az eddigiekben felsorolt jellemzőket 9. és10. ábrák szemléltetik.



9. ábra: $y(t) = sin(\alpha)$; $\alpha = \omega t + \alpha_0$ *és* $\alpha_0 = 0$



10. ábra: $y(t) = cos(\alpha)$*;* $\alpha = \omega t + \alpha_0$ *és* $\alpha_0 = 0$

Hasznos képletek:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = sin\alpha cos\beta \pm cos\alpha sin\beta \qquad 1.$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha cos\beta \mp sin\alpha sin\beta \qquad 2.$$

$$sin^2\alpha = \frac{1 - cos2\alpha}{2}$$

$$cos^2\alpha = \frac{1 + cos2\alpha}{2}$$

$$sin2\alpha = 2sin\alpha cos\alpha$$

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

$$\int_0^T \sin(\omega t + \alpha_0)\, dt = 0$$

$$\int_0^T \cos(\omega t + \alpha_0)\, dt = 0$$

Fontos következtetést vonhatunk le az (1.) vagy (2.) képletből:
Ha $\beta = \frac{\pi}{2}$ akkor

$$cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

ami azt jelenti, hogy a koszinusz függvény fázisban (fázis szöget tekintve) siet $\frac{\pi}{2}$-es szög értékkel a szinusz függvényhez képest (ld. 9. és 10. ábrák összehasonlítása!!!).

Általánosan felírva:

$$\sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = cos\alpha$$

$$\cos\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp sin\alpha.$$

2.2. Komplex számok és a komplex számokkal való számítások.

Komplex szám.

Formálisan gondolkodva, komplex számokra azért van szükségünk, mert negatív számokból nem lehet négyzetgyököt vonni. A formális mivolta mellett a komplex számoknak és a komplex számokkal történő számításoknak nagyon komoly jelentése van a fizikában, amelyekre természetesen kitérünk a továbbiakban.

Például mennyi az értéke $\sqrt{-121}=$? Ezt a következő módon számítjuk ki: $\sqrt{-121}=\sqrt{121}\sqrt{-1}=12\sqrt{-1}$. Használjuk a következő jelölést: $j=\sqrt{-1}$, így az előző értéket így írhatjuk fel: $\sqrt{-121}=12j$ és komplex számnak nevezzük (megjegyzés: a matematikusok $i=\sqrt{-1}$ jelölést használnak, azonban a későbbiekben bevezetésre kerülő áramerősség jelölés miatt ezt az elektrotechnikában nem használjuk!!!).

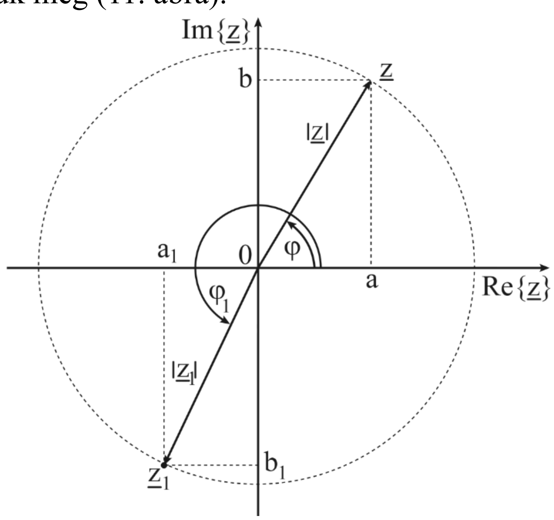
Általánosan a komplex számot nem csak az előbbiekben megismert, ún. imaginárius rész definiálja, hanem lehet a komplex számnak egy valós része is, sőt még akár az is lehet, hogy csak valós része van. A komplex szám általános definícióját a következő összefüggés adja meg:

$$\underline{z}=a+jb,$$

ahol ***a*** a komplex szám valós része $\left(a=Re\{\underline{z}\}\right)$ és ***b*** a komplex szám imaginárius (vagy másképpen képzetes) része $\left(b=Im\{\underline{z}\}\right)$ (megjegyzés: a matematikusok a komplex számokat $\overline{x}$-al jelölik!!!).

A komplex számsík.

A komplex számokat a komplex számsíkban ábrázoljuk, ahol a komplex szám egy pontot jelöl a síkban. A pontnak a helyzetét (ugyanúgy, mint a kétdimenziós euklideszi térben) két koordináta párossal adhatjuk meg (11. ábra).



11. ábra: a komplex számsík

Descartes-koordinátáknak megfelelő páros: $\begin{cases} a=Re\{\underline{z}\}=z\cos\varphi \\ b=Im\{\underline{z}\}=z\sin\varphi \end{cases}$

Poláris-koordinátának megfelelő páros: $\begin{cases} z\equiv\left|\underline{z}\right|=\sqrt{a^2+b^2} & \text{- modulusz} \\ tg\varphi=\dfrac{b}{a} & \text{- fázisszög} \end{cases}$

Nagyon fontos megjegyezni, hogy azok a komplex számok, amelyek egy adott sugarú körön helyezkednek el (pl. $|\underline{z}|$ sugarú kör a 11. ábrán, $\underline{z}$ és $\underline{z}_1$), különböző valós, illetve imaginárius résszel rendelkeznek, azonos a moduluszuk de különböző a fázisszögük.

Nagyon fontos képlet az ún. Euler-képlet, amely az exponenciális függvény és a komplex számok közötti kapcsolatot termeti meg a trigonometriai függvények lineáris kombinációjaként.

$$e^{\pm j\varphi} = cos(\pm\varphi) + sin(\pm\varphi) = cos\varphi \pm jsin\varphi$$

Euler-képlet

Ennek a képletnek a következményeként említsük meg azt, hogy miként lehet a szinusz és koszinusz függvényeket kiszámítani az exponenciális függvények segítségével:

$$cos\varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$$

$$sin\varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$$

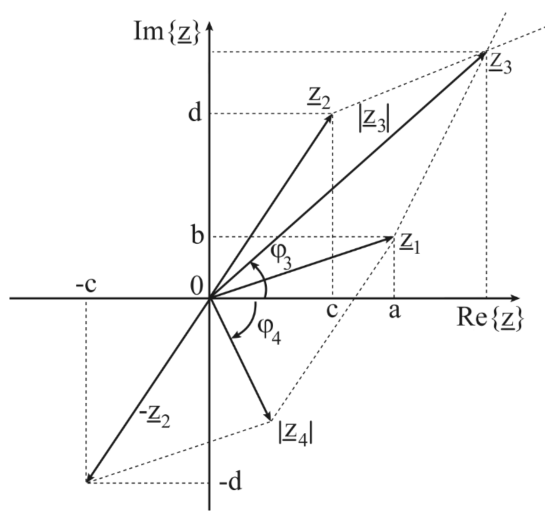
Műveletek komplex számokkal.

Az alábbiakban tekintsük a következő két komplex számot $\underline{z}_1 = a + jb$ és $\underline{z}_2 = c + jd$, amelyekkel elvégezzük az egyszerű számításokat (az általánosítást az olvasóra bízzuk).

- *összeadás*:

$$\underline{z}_3 = \underline{z}_1 + \underline{z}_2 = a + jb + c + jd = (a + c) + j(b + d),$$

ahol az eredményként származó komplex szám valós része $Re\{\underline{z}_3\} = a + c$ és imaginárius része $Im\{\underline{z}_3\} = b + d$, modulusza $z_3 = |\underline{z}_3| = \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}$, valamint fázisszöge $\varphi_3 = arctg\frac{b+d}{a+c}$ (*megjegyzés*: a modulusz és fázis számítás hasonlóképpen történik a további műveletek esetén is). A komplex számok összeadása grafikusan a paralelogramma szabály szerint történik (12. ábra).



12. ábra: komplex számok összeadása és kivonása

- *kivonás*:

$$\underline{z}_4 = \underline{z}_1 - \underline{z}_2 = \underline{z}_1 + \left(-\underline{z}_2\right) = a + jb - (c + jd) = (a - c) + j(b - d)$$

A komplex számok összeadása grafikusan a paralelogramma szabály szerint történik (12. ábra).

- *szorzás*:

$$\underline{z}_5 = \underline{z}_1\underline{z}_2 = (a + jb)(c + jd) = (ac + j^2bd) + j(ad + bc) = \left(ac + \sqrt{-1}^2bd\right) + j(ad + bc)$$
$$= (ac - bd) + j(ad + bc).$$

- *komplex konjugálás*: a $\underline{z}_1 = a + jb$ komplex szám komplex konjugáltját úgy képezzük, hogy a komplex szám imaginárius részének értékét megszorozzuk (-1)-el. így $\underline{z}_1{}^* = a - jb$.

- *négyzetre emelés*: a $\underline{z}_1 = a + jb$ komplex szám négyzetét a saját komplex konjugáltjával történő szorzás útján számítjuk ki: $\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_1{}^* = (a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2 = \left|\underline{z}_1\right|^2$. Tulajdonképpen így számítjuk ki a komplex szám moduluszát: $z_1 = \left|\underline{z}_1\right| = \sqrt{\underline{z}_1\underline{z}_1{}^*} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

- *osztás*: ez a művelet egy kicsit összetettebb az eddigieknél, mivel a komplex számok osztásakor a nevezőben nem maradhat komplex mennyiség, így minden esetben az osztónak a komplex konjugáltjával kell osztani és szorozni a törtet:

$$\underline{z}_6 = \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{a + jb}{c + jd} = \frac{(a + jb)(c - jd)}{(c + jd)(c - jd)} = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + j\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

2.3. Az exponenciális függvényekkel való számítások.

Ebben a részben egy számításra hívjuk fel a figyelmet, amely alapvetően fontos a váltóáramú áramkörökkel való számításoknál.

$$e^{(a+b)} = e^a e^b$$

illetve

$$e^{(a-b)} = \frac{e^a}{e^b} = e^a e^{-b}$$

Példa: komplex pillanatnyi feszültséggel való számítás:

$$\underline{u}(t) = U_0 e^{j(\varphi_0 + \omega t)} = U_0 e^{j\varphi_0} e^{j\omega t}.$$

3. Kinematika

Egy anyagi pont helyzetének meghatározása után (ld. előző fejezetek) szükségünk van az anyagi pont helyváltoztatásának leírására. A mechanikának azt a fejezetét, amely az anyagi pont idő szerinti helyváltoztatását írja le (az erőhatások figyelembevétele nélkül), kinematikának nevezzük (természetesen ebben az esetben az anyagi pont kinematikájáról van szó).

3.1. A sebesség

Tekintsünk egy anyagi pontot, amely egy görbe vonalú pályán mozog (*13*. ábra). A pályán történő mozgást egy kétdimenziós descartes-i koordináta rendszerben írjuk le. A pálya a geometriai pontok összessége, amelyeket az anyagi pont mozgása során érint, esetünkben az *1*-es ponttól a *2*-es pont felé mozogva. A választott koordináta-rendszerben az anyagi pont helyzetét az $\vec{r}_i$-vel jelzett helyzetvektorok adják meg ($i = \overline{1{,}4}$).

Mivel a helyváltoztatás időben történik, az a feladatunk, hogy adjuk meg miként változik meg a helyzetvektor ($\Delta\vec{r} = \vec{r}_i - \vec{r}_1$, $i = \overline{2{,}4}$) egy adott időegység alatt (Δt). Ezt a mennyiséget középsebességnek nevezzük és a definíciója:

$$\vec{v}_k = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

A sebesség nemzetközi rendszerben elfogadott mértékegysége:

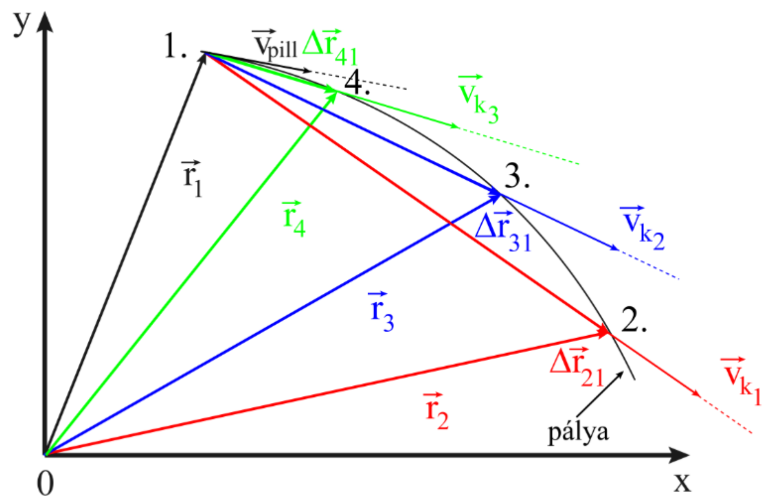
$$[v_k]_{SI} = \frac{[\Delta r]_{SI}}{[\Delta t]_{SI}} = \frac{1m}{1s} = 1\frac{m}{s}$$

de lehetőségünk van más mértékegységek bevezetésére, mint például a közlekedési eszközök sebességére használatos km/h.

$$[v] = \frac{[\Delta r]}{[\Delta t]} = \frac{1km}{1h} = \frac{1000}{3600}\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{1}{3{,}6}\left(\frac{m}{s}\right)$$

Ez a mozgásra jellemző középsebesség egy „átlag" információt nyújt az anyagi pont mozgását, helyváltoztatását illetően. Ez sok esetben fontos és elégséges információ lehet. Például abban az esetben amikor csak arra az információra van szükség, hogy egy autó az *A* és *B* város közötti *100 km*-es távolságot (nem utat, amely a pályát jelenti, hanem légvonalban mért távolságot) *2* óra alatt teszi meg, akkor az autó középsebessége $v_k = 100/2 = 50\ (km/h)$. Mivel két települést általában nem egyenes útszakasz köt össze, a megtett út nem *100 km* és nagy valószínűséggel a sebesség sem állandó, így ez az információ nem elégséges, hiszen nem tudunk pontos információt arról, hogy az autó a mozgás egy adott pillanatban a pálya meghatározott pontjában mekkora sebességgel rendelkezett.

A *13. ábra 1*-es és *2*-es pontja között egy görbült pályaszakaszon mozog az anyagi pont, de a sebességet a $\Delta\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ vektor Δr_{21} moduluszával közelítjük meg, ami pontatlan információ. Megfigyelhető az is, hogy ebben az esetben a sebességvektor iránya is a $\Delta\vec{r}_{21}$-nek megfelelő irányítás.



13. ábra: a középsebesség és a pillanatnyi sebesség.

A pálya egyes szakaszaira vonatkozó egyre pontosabb információhoz jutunk abban az esetben, ha az *1*-es ponthoz képest egyre közelebbi pontokat vizsgálunk, így egyre rövidebb időtartományokban vizsgáljuk a mozgást. Az ábrán először az *1*-es és *3*-as pontok közötti pályaszakaszt a $\Delta\vec{r}_{31} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1$ vektor Δr_{31} moduluszával, majd az *1*-es és *4*-es pontok közötti pályaszakaszt a $\Delta\vec{r}_{41} = \vec{r}_4 - \vec{r}_1$ vektor Δr_{41} moduluszával közelítjük meg. Minden esetben megfigyelhető a számítható sebességvektor irányának változása. Határértékben addig csökkentjük az időtartamot, amíg $\Delta t \to 0$, így ekkor kapjuk a lehető legjobb közelítést az anyagi pontnak a pálya egy adott pontjában jellemző sebességére. Ezt a sebességet ***pillanatnyi sebességnek*** nevezzük, iránya ***mindig megegyezik a pálya adott pontjában a pályához húzott érintő irányával***, irányítása az anyagi pont haladási irányának megfelelő és az alábbi módon definiáljuk.

$$\vec{v}_{pill} \equiv \vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

Sok lehetőség áll rendelkezésre ahhoz, hogy a sebesség definícióját átírjuk más alakba. Lássunk néhányat ezek közül:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}\right) = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{d}t}\vec{\imath} + \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}t}\vec{\jmath} + \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{d}t}\vec{k} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k} = v\vec{e}_v$$

ahol $\vec{e}_v$ a sebesség irányába mutató egységvektor és

$$v_x = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{d}t} \qquad v_y = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}t} \qquad v_z = \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{d}t}$$

a sebesség modulusza pedig

$$v = \sqrt{\vec{v}\vec{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

3.2. A gyorsulás

3.2.1. Általános fogalmak

Mivel egy anyagi pont sebessége mozgása során nem állandó, szükség van egy újabb mennyiségre, amelyik jellemzi a sebesség időbeli változásának mértékét. Ezt a mennyiséget gyorsulásnak nevezzük és jellemzi az anyagi pont sebességének egységnyi időtartam alatti változását. Szükséges megjegyezni azt, hogy az anyagi pont sebessége növekedhet mozgása során tehát gyorsul (ebben az esetben az anyagi pont gyorsulása pozitív) vagy csökkenhet mozgása során tehát lassul (ebben az esetben az anyagi pont gyorsulása negatív). Függetlenül attól, hogy az anyagi pont sebessége növekedik vagy csökken, minden esetben a gyorsulás megnevezést használjuk. Ha a vizsgált időtartam eléggé hosszú akkor az ún. középgyorsulásról beszélünk, melynek a következő a definíciója.

$$\vec{a}_k = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

A gyorsulás mértékegysége:

$$[a_k]_{SI} = \frac{[\Delta v]_{SI}}{[\Delta t]_{SI}} = \frac{\frac{1m}{1s}}{1s} = 1\,\frac{m}{s^2}$$

Ha az időtartamot megfelelően lerövidítjük $\Delta t \to 0$ akkor megkapjuk a pillanatnyi gyorsulás fogalmát, amelynek következő összefüggés a definíciója.

$$\vec{a}_{pill} \equiv \vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

Sok lehetőség áll rendelkezésre ahhoz, hogy a gyorsulás definícióját átírjuk más alakba. Lássunk néhányat ezek közül:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}\right) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{\imath} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{\jmath} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k} = a\vec{e}_a$$

vagy

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}}{\mathrm{d}t^2}\vec{\imath} + \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{d}t^2}\vec{\jmath} + \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{z}}{\mathrm{d}t^2}\vec{k} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k} = a\vec{e}_a$$

ahol $\vec{e}_a$ a gyorsulás irányába mutató egységvektor és

$$a_x = \frac{\mathrm{d}^2 \mathrm{x}}{\mathrm{d}t^2} \qquad a_y = \frac{\mathrm{d}^2 \mathrm{y}}{\mathrm{d}t^2} \qquad a_z = \frac{\mathrm{d}^2 \mathrm{z}}{\mathrm{d}t^2}$$

a gyorsulás modulusza pedig

$$a = \sqrt{\vec{a}\vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

3.2.2. A gyorsulás értelmezése egyenletes körmozgás esetében. A normális gyorsulás fogalma.

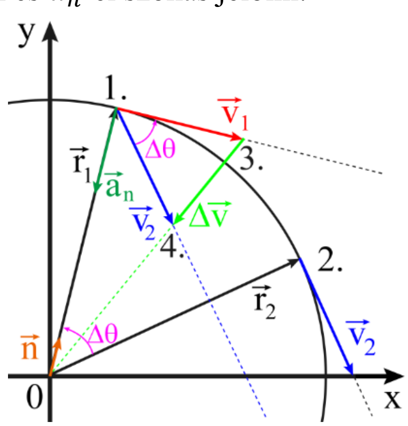
Az egyszerűség vagy jobb megértés kedvéért a gyorsulás általános meghatározásának érdekében kezdjük a tárgyalást egy egyedi esettel, amely az egyenletes körmozgás esete (*14*. ábra). A továbbiakban majd ezt általánosítjuk ahhoz, hogy egy szabálytalan alakú ám törésmentes pályán végbemenő mozgás esetén megadhassuk a pontos definíciót.

A 14. ábrán az anyagi pont egy *R* sugarú körpályán az *1*-es ponttól a *2*-es pont felé állandó értékű sebességgel halad, tehát $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$. Annak ellenére, hogy a sebesség értéke állandó, mégis van sebességváltozás vektoriális szinten, hiszen a $\vec{v}_1$ és a $\vec{v}_2$ vektorok más iránnyal és irányítással rendelkeznek. Ez egy olyan fajta gyorsulást eredményez, amely nem vezet a sebesség értékénekváltozáshoz. A szerkesztéshez a $\vec{v}_2$ vektort önmagával párhuzamosan eltoljuk a $\vec{v}_1$vektor kezdőpontjába, majd a háromszögszabálynak megfelelően meghúzzuk a $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ vektort a $\vec{v}_1$ csúcspontjától a $\vec{v}_2$ csúcspontjáig irányítva (*14*. ábra).

Az anyagi pont gyorsulása

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Látható az ábrán, hogy a sebességváltozás és ennek megfelelően a gyorsulás iránya megegyezik a sugár irányával irányítása pedig a kör középpontja felé mutató. Ezt a gyorsulást normális gyorsulásnak nevezzük és a_n-el szokás jelölni.



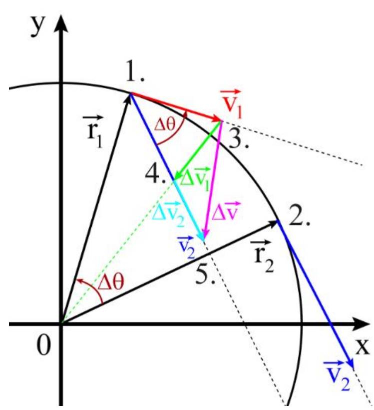
14. ábra: normális gyorsulás egyenletes körmozgás esetében

Mivel az *1*-es pontra mutató helyzetvektor és az *1*-es ponthoz húzott érintő, illetve a *2*-es pontra mutató helyzetvektor és a *2*-es ponthoz húzott érintő merőleges szárú szögeket zárnak be, az *1*-es pontban látható két sebességvektor és a két helyzetvektor között ugyanaz a $\Delta\theta$ szög található. Ezért a $3-1-4_{\Delta}$-ben $\Delta v \cong \mathrm{v}\Delta\theta$ és az $1-0-2_{\Delta}$-ben $\Delta s = R\Delta\theta$. Ennek megfelelően a gyorsulás modulusza

$$a \equiv a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathrm{v}\Delta\theta}{\Delta t} = v \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = v \frac{1}{R} v = \frac{v^2}{R}$$

3.2.3. A gyorsulás értelmezése egyenletesen változó körmozgás esetében. A tangenciális gyorsulás fogalma.

Abban az esetben, amikor az anyagi pont úgy mozog a körpályán, hogy a sebessége egyenletesen változik a 3.2.2. fejezetben leírtakat ki kell egészíteni. A kiegészítéshez a kiindulást a *15*. ábra szemlélteti. A szerkesztés ugyanúgy történik, mint a 3.2.2. fejezetben, de az eredmény annyiban különbözik, hogy a $\Delta\vec{v}$ vektor iránya már nem egyezik meg a sugár irányával (már nem az *0*-pontra mutat). Ezt a $\Delta\vec{v}$ sebességkülönbség-vektort viszont felbonthatjuk két komponensre (vagy két komponens összegeként tekinthetjük), ezekből az egyik a sugár irányában az *0*-pontra mutató $\Delta\vec{v}_1$ komponens (megegyezik a 3.2.2. fejezetben bevezetett $\Delta\vec{v}$-vel), amelynek következménye a már bevezetett normális gyorsulás, a másik pedig a pálya érintőjének irányába eső $\Delta\vec{v}_2$ komponens. Ennek kell a továbbiakban értelmezést adjunk.



15. ábra: normális- és tangenciális gyorsulások
egyenletes körmozgás esetében

Az anyagi pont gyorsulása az alábbi összefüggéssel adható meg.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_1 + \Delta\vec{v}_2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_1}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_2}{\Delta t} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$

ahol $\vec{a}_t$ az ún. tangenciális gyorsulás, amely a sebesség értékének a növekedését/csökkenését okozza.

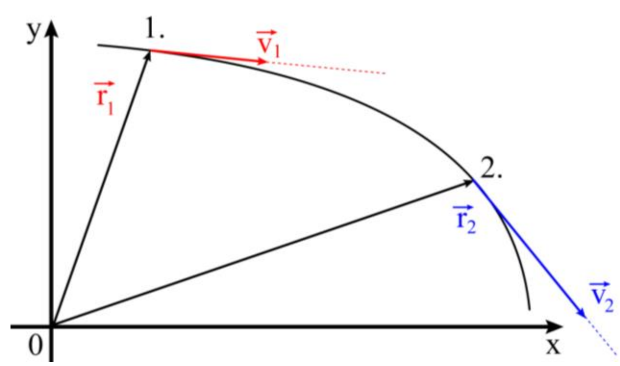
$$\vec{a}_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t}$$

A tangenciális gyorsulás iránya megegyezik az illető pontban a pályához húzott érintő irányával. Ha nő a sebesség értéke akkor az irányítása megegyezik a mozgás irányításával, ha pedig csökken akkor azzal ellentétes.

$$a_t = |\vec{a}_t| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{v}_2|}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

3.2.4. A gyorsulás értelmezése általános esetben. Görbületi sugár értelmezése.

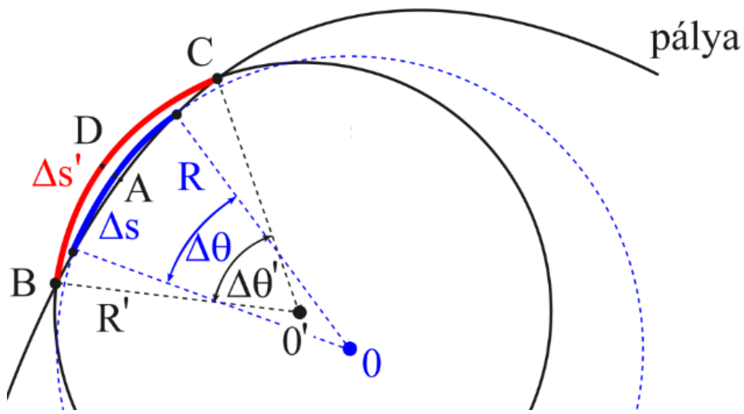
Abban az esetben, amikor a pálya görbevonalú de nem körpálya (*16*. ábra), a sebességre vonatkozó megállapításaink igazak, tehát a görbe minden egyes pontjában a pillanatnyi sebesség iránya megegyezik az illető ponthoz húzott érintő irányával (ne tévesszen meg senkit az, hogy az ábrán az *1*-es és *2*-es pontokban a sebességvektorok nem merőlegesek a helyzetvektorokra, egyik sem „kör sugár”!!!).



16. ábra: normális gyorsulás egyenletes körmozgás esetében

Az eddigiekben használt „sugár” fogalma nem elegendő, hiszen az csak a kör esetében használatos. Ezt a fogalmat ki kell terjesszük úgy, hogy csak a görbe egy adott pontjának környezetét vizsgáljuk (*17*. ábra). Az ábrán látható egy görbevonalú pálya, amelynek az *A* pont körüli közvetlen környezetét vizsgáljuk. Tekintünk egy R' sugarú kört, amely az *A* ponthoz képest szimmetrikusan elhelyezkedő *B* és *C* pontokban metszi a görbét. Látható, hogy a $\widehat{BDC}$ körív ($\Delta s'$) hosszúsága nem egyenlő $\widehat{BAC}$ pályaív hosszúságával. Közelítjük a *B* és *C* pontokat az *A* ponthoz úgy, hogy közben a *D* pont is közeledjen az *A* ponthoz. Ebben az esetben a $\widehat{BDC}$ körív már egy nagyobb sugarú körhöz tartozik, amely az ábrán R-el van jelölve. Ezt a folyamatot folytatjuk mindaddig, amig a *D* pont fedésbe kerül az *A* ponttal, tehát a kör érinti az *A* pontban görbevonalú pályát és a körív hosszúsága $\Delta s \to 0$. Ennek matematikai kifejezést adunk a következő összefüggéssel, amely megadja a görbevonalú pálya egy adott pontjában értelmezett görbületi sugár definícióját (3.).

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{1}{R} \qquad 3.$$



17. ábra: a görbületi sugár fogalma

3.3. Az anyagi pontra vonatkozó mozgástörvények

3.3.1. Egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás

Az anyagi pont mozgástörvényeit a sebesség és a gyorsulás definícióiból vezethetjük le. Mivel egyenes vonalú mozgásról van szó, egydimenziós koordináta-rendszert fogunk tekinteni és a szokásos jelöléseket használva az *x*-tengely mentén történő mozgást fogunk tekinteni.

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad \text{és} \qquad a = \frac{dv}{dt} \qquad 4.$$

3.3.1.1. Sebességtörvény

Az anyagi pont sebességtörvényét a gyorsulás definíciójából, integrálás útján vezethetjük le, ahol v_0 a sebesség a t_0 kezdeti pillanatban és az a gyorsulás állandó.

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a dt = a \int_{t_0}^{t} dt$$

$$v - v_0 = a(t - t_0) \Rightarrow v = v_0 + a(t - t_0) \qquad 5.$$

Megjegyzés: attól függően, hogy ki hogyan értelmezi a kezdeti feltételek megjelenítését ebben az egyenletben több alakban is használatos a sebességtörvény. Abban az esetben, amikor a kezdeti időpillanatot nullának tekintjük $t_0 = 0$, az egyenletből egyszerűen elhagyjuk a t_0-t és a következő alakban írjuk fel $v = v_0 + at$. Van olyan forma is, amikor az eltelt időtartamot $t - t_0 = \Delta t$-vel jelöljük $v = v_0 + a\Delta t$.

3.3.1.2. Mozgástörvény

Az anyagi pont mozgástörvényét a sebesség definíciójából, integrálás útján vezethetjük le, ahol x_0 és v_0 a hely-koordináta és sebesség a t_0 kezdeti pillanatban és az a gyorsulás állandó.

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} vdt = \int_{t_0}^{t} (v_0 + at)dt = v_0 \int_{t_0}^{t} dt + a \int_{t_0}^{t} tdt = v_0(t - t_0) + a\frac{(t - t_0)^2}{2}$$

$$x - x_0 = v_0(t - t_0) + a\frac{(t - t_0)^2}{2} \qquad 6.$$

Megjegyzés: attól függően, hogy ki hogyan értelmezi a kezdeti feltételek megjelenítését ebben az egyenletben több alakban is használatos a mozgástörvény. Abban az esetben, amikor a kezdeti időpillanatot és a kezdő koordinátát nullának tekintjük $t_0 = 0$ és $x_0 = 0$, az egyenletből egyszerűen elhagyjuk a t_0-t és x_0-t és az egyenletet a következő alakban írjuk fel $x = v_0 t + a\frac{t^2}{2}$. Van olyan forma is, amikor az eltelt időtartamot $t - t_0 = \Delta t \equiv t$-vel és a megtett utat $x - x_0 = \Delta x \equiv d$ jelöljük, akkor az egyenletet a $\Delta x = v_0\Delta t + a\frac{\Delta t^2}{2}$ vagy $\mathrm{d} = v_0 t + a\frac{t^2}{2}$ alakban írhatjuk fel.

3.3.2. Egyenes vonalú egyenletes mozgás

Az egyenes vonalú egyenletes mozgásra vonatkozó mozgástörvényeket egyszerűen az egyenesvonalú egyenletesen változó mozgásra vonatkozó mozgástörvényekből az $a = 0$ helyettesítéssel származtathatjuk.

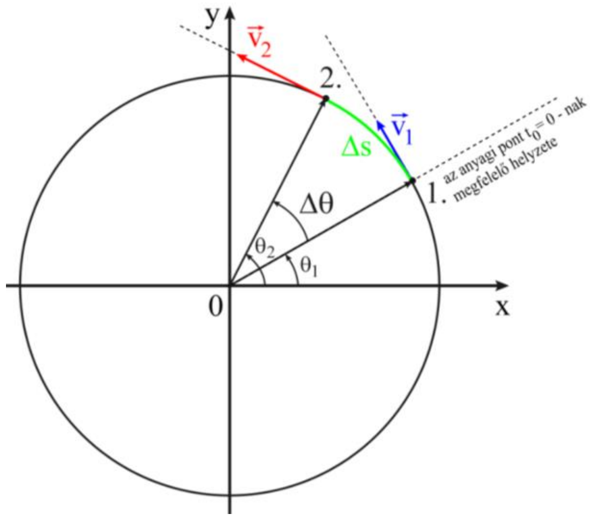
$$v = \acute{a}lland\acute{o}$$

és

$$\mathrm{d} = vt$$

3.3.3. Egyenletesen változó körmozgás

Az egyenletesen változó körmozgásra vonatkozó mozgástörvényeket a sebesség és a gyorsulás definícióiból (4.) kiindulva vezethetjük le úgy, hogy bevezetünk néhány új mennyiéget a körmozgás sajátosságainak figyelembevételére (*18*. ábra).



18. ábra: egyenletesen változó körmozgás

A 18. ábrán az anyagi pont egy R sugarú körön a $t_0 = 0$ pillanatban az *1.*-es pontban v_1 sebességgel halad és az 0-1. egyenes θ_1 szöget zár be a vonatkoztatási rendszer *x*-tengelyével. Tegyük fel, hogy az anyagi pont Δt idő múlva már a *2.*-es pontban található, ahol a sebessége már $v_2 > v_1$. Ez idő alatt a z anyagi pont által megtett út megegyezik a Δs körív hosszúságával. A középponti szög mértékének definícióját felhasználva $\Delta s = R(\theta_2 - \theta_1) = R\Delta\theta$. Ha $\Delta t \to 0$ akkor $ds = Rd\theta$. Differenciáljuk ezt az egyenletet és kapjuk az (7.) összefügést.

$$\frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} \qquad 7.$$

ahol ds/dt nem más, mint az anyagi pont (kerületi) sebessége, a jobb oldalon lévő $d\theta/dt$ mennyiség pedig az anyagi pont x-tengelyhez viszonyított azimutális helyzetének idő szerinti változását írja le, amit szögsebességnek (vagy körfrekvenciának) nevezünk és ω-val jelöljük (8.).

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad 8.$$

így az anyagi pont kerületi sebességét (9.) összefüggéssel számíthatjuk ki.

$$v = R\omega \qquad 9.$$

A szögsebesség mértékegysége:

$$[\omega]_{SI} = \frac{[\theta]_{SI}}{[t]_{SI}} = 1\frac{rad}{s}$$

Az anyagi pont (4.)-nek megfelelő tangenciális gyorsulást megadó képletébe behelyettesítjük a (9.) összefüggést.

$$a_t \equiv a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(R\omega) = R\frac{d\omega}{dt} = R\beta \qquad 10.$$

ahol β az anyagi pont szöggyorsulása,

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} \qquad 11.$$

és a mértékegysége

$$[\beta]_{SI} = \frac{[\omega]_{SI}}{[t]_{SI}} = 1\frac{rad}{s^2}$$

A sebességtörvény levezetéséhez a (5.) összefüggésből indulunk ki úgy, hogy $t_0 = 0$ helyettesítünk, majd az összefüggést elosztjuk a pályasugárral és megkapjuk az egyenletesen változó körmozgás sebességtörvényét (12.), ahol ω_0 a kezdeti szögsebesség.

$$\frac{v}{R} = \frac{v_0}{R} + \frac{a}{R}t \Rightarrow \quad \omega = \omega_0 + \beta t \qquad 12.$$

A mozgástörvény levezetéséhez a (6.) összefüggésből indulunk ki úgy, hogy $t_0 = 0$ helyettesítünk, majd az összefüggést elosztjuk a pályasugárral és megkapjuk az egyenletesen változó körmozgás mozgástörvényét (12.), ahol ω_0 a kezdeti szögsebesség és $(x - x_0)/R$ az *1.* és *2.* pontok közötti középponti szöget jelenti (*18*. ábra).

$$\frac{x - x_0}{R} = \frac{v_0}{R}t + \frac{a}{R}\frac{t^2}{2} \ \Rightarrow \ \Delta\theta = \omega_0 t + \beta\frac{t^2}{2} \qquad 13.$$

4. Dinamika

A *Kinematika* fejezetben megismerkedtünk a mozgásformákkal és a mozgást időben leíró mennyiségekkel (helyzet, sebesség, gyorsulás). A továbbiakban az anyagi pont gyorsulásának az okát az ún. kölcsönhatást és a kölcsönhatási erőkkel kapcsolatos fogalmakat kell bevezessük.

4.1. A dinamika a törvényei (axiómák)

4.1.1. A dinamika első törvénye. A tehetetlenég törvénye.

Egy test megőrzi viszonylagos nyugalmi állapotát vagy egyenes vonalú egyenletes mozgás állapotát mindaddig, amig egy másik test (vagy testek) nem kényszeríti mozgásállapotának megváltoztatására. Ezt nevezzük Newton-féle első axiómának vagy más néven a tehetetlenség törvényének.

Tehetetlenségnek nevezzük a fizikában a testeknek azon tulajdonságát, hogy ellene szegülnek minden külső behatásnak, amely az egyenes vonalú egyenletes mozgásállapotot megváltoztatná, vagy kibillentené a viszonylagos nyugalmi állapotból.

A tehetetlenség törvénye kizárólag a tehetetlenségi vonatkoztatási rendszerekben érvényes (nem gyorsuló vonatkoztatási rendszer).

A tehetetlenség mértéke a test tömege, amelyet az alapmennyiségek egyike. Jele általában *m* vagy *M* és mértékegysége a kilogramm (*kg*).

4.1.2. A dinamika második törvénye. Impulzus és erő.

A mindennapi tapasztalatból mindenki tudja, érezte már azt, hogy mivel jár az, ha egy *m* tömegű test mozgásállapota (sebessége) megváltozik valamilyen esemény folytán, vagyis kölcsönhatás történik (példának okáért leesik valaki valamilyen magasságból és megüti magát). Nagyon fontos az a tény, hogy a test tömeget és a sebességét egyszerre vegyük figyelembe hiszen, ha a példánkra gondolunk akkor sokkal nagyobb ütést érzünk, ha magasabbról esünk le. E két mennyiség szorzatát impulzusnak nevezzük, általában *p*-vel jelöljük és ne felejtsük el, hogy a sebesség jelenléte miatt ez egy vektoriális mennyiség, amelynek az iránya és irányítása megegyezik a sebesség irányával és irányításával és (14.) adja meg a definícióját.

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad 14.$$

Az impulzus származtatott mennyiség, amelynek a mértékegysége:

$$[p]_{SI} = [m]_{SI} \cdot [t]_{SI} = 1kg\frac{m}{s}$$

A testek kölcsönhatásakor megváltozik a testek mozgásállapota és ennek megfelelően az impulzusa is. Mivel a mozgásállapot időben változik meg a kölcsönhatás mértékét az időegység alatti impulzusváltozás írja le, amely nem más, mint az erőnek nevezett vektoriális mennyiség. A (15.) összefüggés a kölcsönhatási erő definícióját adja meg.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \qquad 15.$$

Abban az esetben amikor a test sebessége jóval kisebb a fénysebességnél, a test tömege állandónak tekinthető és a (15.) összefüggés a (16.) alakban írható fel.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \qquad 16.$$

A (16.) képlet szerint az erő iránya és irányítása megegyezik az általa előidézett gyorsulás vektor irányával és irányításával, a mértéke pedig annál m-szer nagyobb.

Az erő származtatott mennyiség, amelynek a mértékegysége:

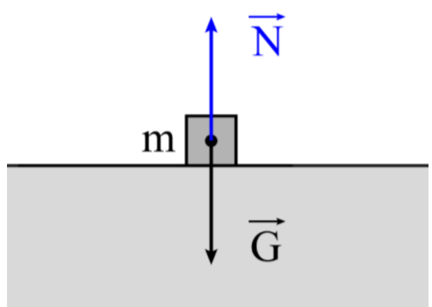
$$[F]_{SI} = [m]_{SI} \cdot [a]_{SI} = 1kg\frac{m}{s^2} = 1N\ (Newton).$$

4.1.3. A dinamika harmadik törvénye. Hatás-visszahatás (kölcsönhatás) törvénye.

Szintén a mindennapi élet tapasztalataiból tudjuk, hogy ha szilárd talajon állunk, akkor nem süllyedünk el, tehát a gravitációs tér részéről ható súly erőt a talajnak ki kell egyensúlyozni egy a testünk súlyának megfelelő ellenerővel. Természetesen hosszan sorolhatnánk még ehhez hasonló példát, amivel nap mint nap találkozhatunk. Ez az egyszerű kis példa nem más, mint a dinamika harmadik törvényének, vagy más néven a hatás-visszahatás törvényének egy nagyon egyszerű megfogalmazása. Általánosan fogalmazva, ha egy *A* test egy adott irányú és irányítású erővel hat egy *B* testre ($\vec{F}_{AB}$) akkor a *B* test egy ugyanolyan irányú és értékű, de fordított irányítású erővel hat az *A* testre ($\vec{F}_{BA}$). A törvény matematikai alakját a (17.) összefüggés szemlélteti.

$$\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BA} = 0,\ \text{vagy}\ \ \vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA},\ \text{vagy skalárisan}\ F_{AB} = F_{BA} \qquad 17.$$

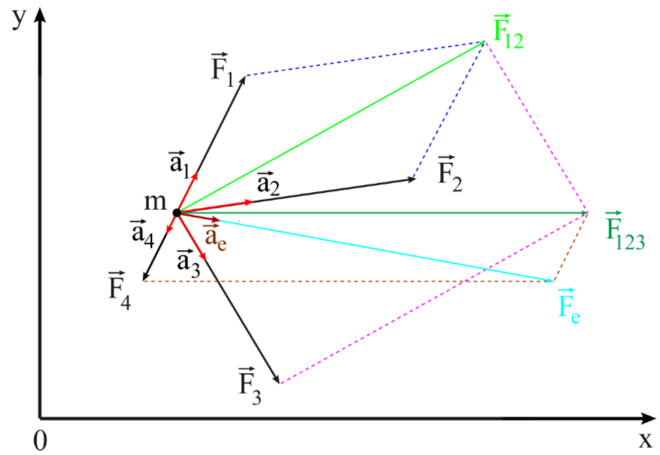
Szemléltessük a hatás-visszahatás törvényét egy *m* tömegű anyagi ponttal, amit egy vízszintes felületre helyezünk (az anyagi pontot a szokásos módon egy négyzettel jelöljük, hiszen rajzon kiterjedés nélküli pontot semmiképpen sem tudunk ábrázolni) (*19.* ábra). A gravitációs tér részéről függőlegesen lefele hat a $\vec{G} = m\vec{g}$ súlyerő, míg ezzel ellentétesen felfele hat az ezt kiegyensúlyozó merőleges nyomóerő, $\vec{N} = -\vec{G} = -m\vec{g}$, $N = G = mg$.



19. ábra: hatás-visszahatás törvénye ($\vec{N}$ merőleges nyomóerő)

4.1.4. A dinamika negyedik törvénye. Az erőhatások függetlenségének törvénye.

Egy test egyidejűleg több erő hatásának is ki lehet téve (sőt a valóságban a legtöbb esetben így van), amelyek a mozgásállapotát (gyorsulását) meghatározzák. A test gyorsulását az egyidejűleg ható erők paralelogramma szabály szerint meghatározható eredője határozza meg úgy, hogy az egyes erők által kifejtett egyedi hatások nem érzékelhetők (*20.* ábra).



20. ábra: erőhatások függetlenségének törvénye

Abban az esetben amikor a testre *n*-erő hat egyidejűleg, az eredő erő kifejezését a (18.) összefüggéssel definiálhatjuk.

$$\vec{F}_e = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad 18.$$

Ha feltételezzük, hogy mindegyik erő a maga gyorsulását eredményezi az (18.) összefüggést a (19.) alakba írhatjuk át,

$$m\vec{a}_e = m\vec{a}_1 + m\vec{a}_2 + \cdots + m\vec{a}_n = m\sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i \qquad 19.$$

vagyis a test gyorsulása

$$\vec{a}_e = \frac{\vec{F}_1}{m} + \frac{\vec{F}_2}{m} + \cdots + \frac{\vec{F}_n}{m} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i \qquad 20.$$

amely azt a tény szögezi le, hogy ha egy testre egyidejűleg több erő hat, az egyidejűleg ható erők egymás hatását nem befolyásolják, hanem zavartalanul egymásra tevődnek. Ezt a törvényt nevezzük erőhatások függetlenségének.

4.2. Mozgásegyenletek

Minden összefüggést, amely közvetlenül Newton második törvényére alapozott mozgásegyenletnek nevezzük. Matematikai alakját a (21.) összefüggés definiálja.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m} \qquad 21.$$

5. Tartalomjegyzék