

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ им. Р.Е.АЛЕКСЕЕВА



Институт радиоэлектроники и информационных технологий  
Кафедра вычислительные системы и технологии

Лабораторная работа № 5  
Численное дифференцирование функций  
Вариант №15

## ОТЧЕТ

по лабораторной работе

по дисциплине

Вычислительная математика

РУКОВОДИТЕЛЬ:

\_\_\_\_\_ Суркова А.С.

СТУДЕНТ:

\_\_\_\_\_ Сапожников В.О.

19-ИВТ-3

Работа защищена «\_\_\_» \_\_\_\_\_

С оценкой \_\_\_\_\_

Нижний Новгород 2021

## Содержание

1. Цель.....	3
2. Постановка задачи.....	4
3. Теоретические сведения.....	5
3.1. Интерполяционный многочлен Ньютона.....	5
3.2. Формулы Лагранжа.....	7
4. Расчётные данные.....	9
5. Листинг разработанной программы.....	11
6. Результаты работы программы.....	21
7. Вывод.....	23

## **1. Цель**

Закрепление знаний и умений по численному дифференцированию функций с помощью интерполяционного многочлена Ньютона.

## 2. Постановка задачи

Вычислить первую и вторую производные функции в точках  $x$ , заданные таблицей.

15

$x$	$y$
3.50	33.1154
3.55	34.8133
3.60	36.5982
3.65	38.4747
3.70	40.4473
3.75	42.5211
3.80	44.7012
3.85	46.9931
3.90	49.4024
3.95	51.9354
4.00	54.5982
4.05	57.3975
4.10	60.3403
4.15	63.4340
4.20	66.6863

### 3. Теоретические сведения

#### 3.1. Интерполяционный многочлен Ньютона

Предположим, что функция  $f(x)$ , заданная в виде таблицы с постоянным шагом  $h = x_i - x_{i-1}$  может быть аппроксимированная интерполяционным многочленом Ньютона:

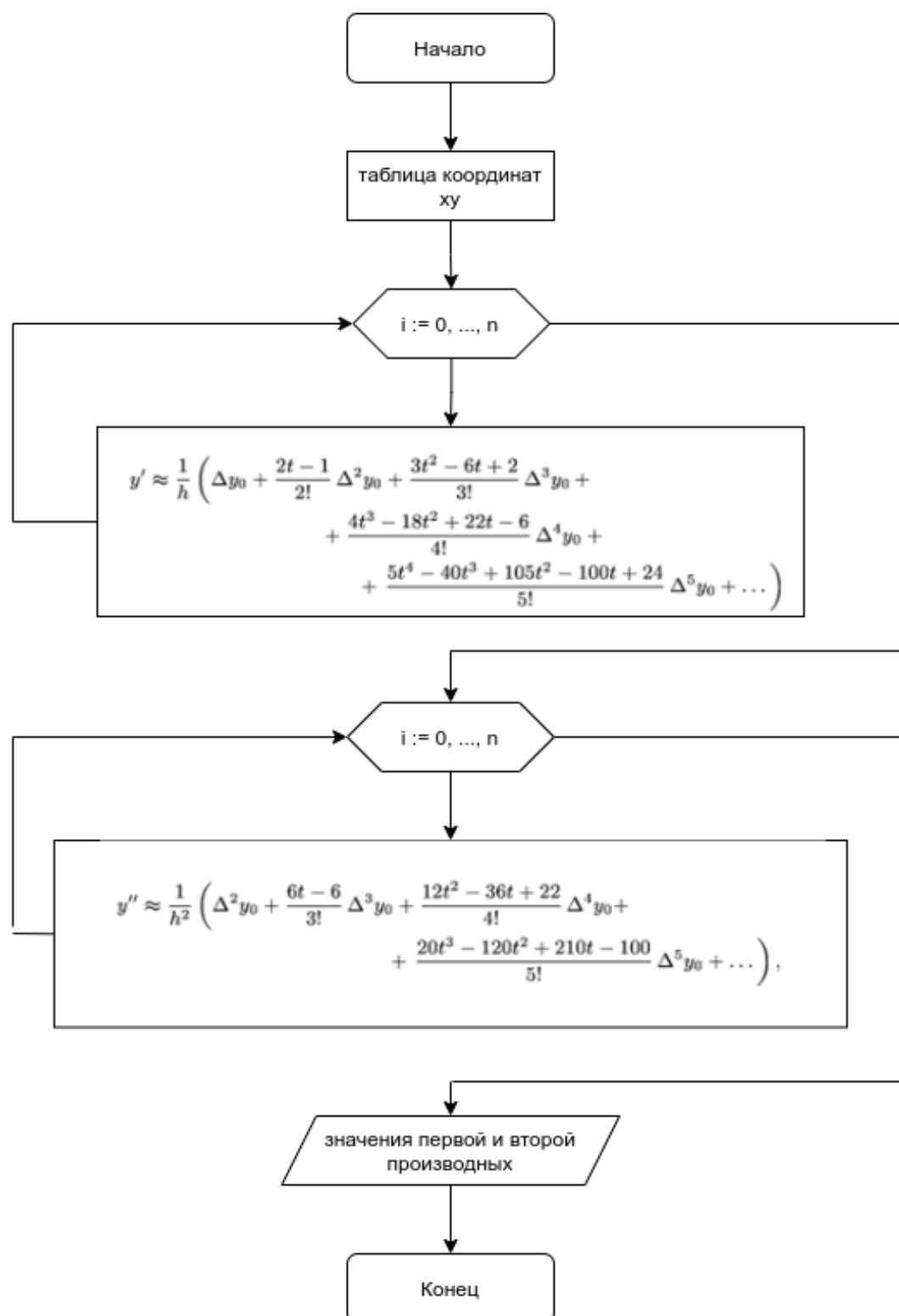
$$y \approx N(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \quad t = \frac{x - x_0}{h}$$

Дифференцируя этот многочлен по переменной  $x$  с учетом правила дифференцирования сложной функции:

$$\frac{dN}{dx} = \frac{dN}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{h} \frac{dN}{dt},$$

можно получить формулы для вычисления производных любого порядка:

$$y' \approx \frac{1}{h} \left( \Delta y_0 + \frac{2t-1}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{3t^2-6t+2}{3!} \Delta^3 y_0 + \frac{4t^3-18t^2+22t-6}{4!} \Delta^4 y_0 + \frac{5t^4-40t^3+105t^2-100t+24}{5!} \Delta^5 y_0 + \dots \right),$$
$$y'' \approx \frac{1}{h^2} \left( \Delta^2 y_0 + \frac{6t-6}{3!} \Delta^3 y_0 + \frac{12t^2-36t+22}{4!} \Delta^4 y_0 + \frac{20t^3-120t^2+210t-100}{5!} \Delta^5 y_0 + \dots \right),$$



### 3.2. Формулы Лагранжа

Предположим, что функция  $f(x)$ , заданная в виде таблицы с постоянным шагом  $h = x_i - x_{i-1}$  может быть аппроксимирована при помощи формул Лагранжа:

$$f(x) \approx L_n(x)$$

$$L_n(x) = \frac{1}{2h^2} [(x - x_1)(x - x_2)y_0 - 2(x - x_0)(x - x_2)y_1 + (x - x_0)(x - x_1)y_2]$$

$$R_l(x) = \frac{y'''}{3!} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Дифференцируя этот многочлен по переменной  $x$ , можно получить формулы для вычисления производных любого порядка:

#### Формулы Лагранжа для первых производных на 4 узла

$$y'_0 = \frac{1}{12h} (-25y_0 + 48y_1 - 36y_2 + 16y_3 - 3y_4) + \frac{h^4}{5} y_*^v$$

$$y'_1 = \frac{1}{12h} (-3y_0 - 10y_1 + 18y_2 - 6y_3 + y_4) - \frac{h^4}{20} y_*^v$$

$$y'_2 = \frac{1}{12h} (y_0 - 8y_1 + 8y_2 - y_4) + \frac{h^4}{30} y_*^v$$

$$y'_3 = \frac{1}{12h} (-y_0 + 6y_1 - 18y_2 + 10y_3 + 3y_4) + \frac{h^4}{20} y_*^v$$

$$y'_4 = \frac{1}{12h} (3y_0 - 16y_1 + 36y_2 - 48y_3 + 25y_4) + \frac{h^4}{5} y_*^v$$

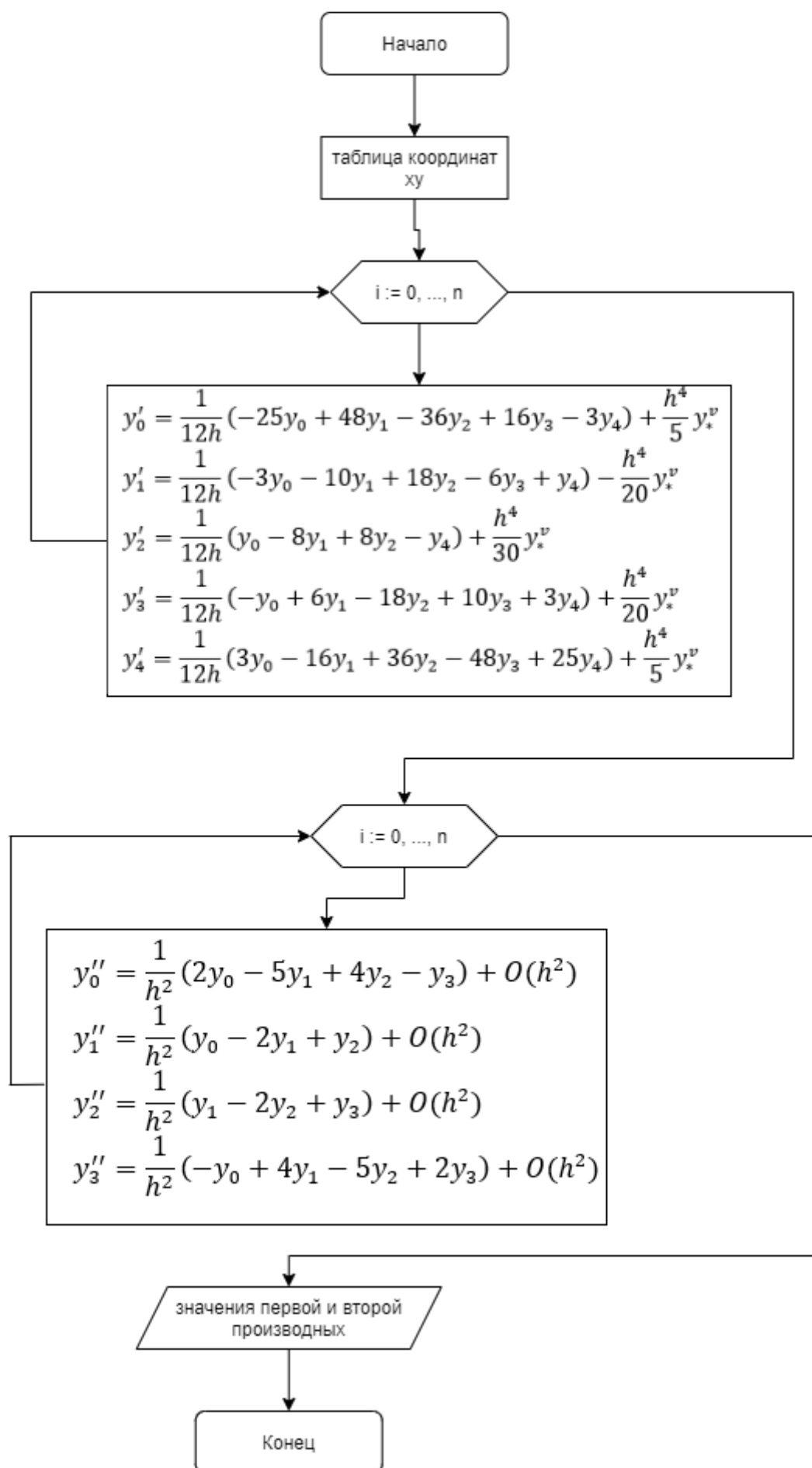
#### Формулы Лагранжа для вторых производных на 3 узла

$$y''_0 = \frac{1}{h^2} (2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3) + O(h^2)$$

$$y''_1 = \frac{1}{h^2} (y_0 - 2y_1 + y_2) + O(h^2)$$

$$y''_2 = \frac{1}{h^2} (y_1 - 2y_2 + y_3) + O(h^2)$$

$$y''_3 = \frac{1}{h^2} (-y_0 + 4y_1 - 5y_2 + 2y_3) + O(h^2)$$





#### 4. Расчетные данные Многочлен Ньютона

$x$	$y'$
3.50	33.1220
3.55	34.8088
3.60	36.5873
3.65	38.4485
3.70	40.3973
3.75	42.4528
3.80	44.7102
3.85	46.9839
3.90	49.3789
3.95	51.9353
4.00	54.6104
4.05	57.4449
4.10	60.4478
4.15	63.6259
4.20	66.9844

$x$	$y''$
3.50	32.6900
3.55	34.8267
3.60	36.6433
3.65	38.4200
3.70	40.4367
3.75	42.9733
3.80	44.1000
3.85	46.9933
3.90	49.4867
3.95	51.9880
4.00	54.5833
4.05	57.3867
4.10	60.3500
4.15	63.4333
4.20	66.5967

#### Формулы Лагранжа

$x$	$y'$
3.50	33.1192
3.55	34.8125
3.60	36.5987
3.65	38.4762

3.70	40.4425
3.75	42.5178
3.80	44.7825
3.85	46.9933
3.90	49.4008
3.95	51.9425
4.00	54.5988
4.05	57.3968
4.10	60.3403
4.15	63.4338
4.20	66.36848

<b>x</b>	<b>y''</b>
3.50	32.9600
3.55	34.8000
3.60	36.6400
3.65	38.4800
3.70	40.3200
3.75	42.5200
3.80	44.7200
3.85	46.9200
3.90	49.2400
3.95	51.9200
4.00	54.6000
4.05	57.2800
4.10	60.3600
4.15	63.4400
4.20	66.5200

## 5. Листинг разработанной программы

### Main.java

```
import solution_strategy.*;
import java.util.Scanner;

/**
 * Класс, содержащий точку входа в программу - метод main.
 * Язык: java
 *
 * Реализация пятой лабораторной работы по дисциплине: Вычислительная математика
 * Вариант №15
 *
 * Текст задания:
 * Найти первую и вторую производную функции в точках x, заданных
 * таблицей, используя интерполяционные многочлены Ньютона. Сравнить со
 * значениями производных, вычисленными по формулам, основанным на
 * интерполировании многочленом Лагранжа (вычисление производных через
 * значения функций).
 *
 *
 *      x      y
 *      3.50    33.1154
 *      3.55    34.8133
 *      3.60    36.5982
 *      3.65    38.4747
 *      3.70    40.4473
 *      3.75    42.5211
 *      3.80    44.7012
 *      3.85    46.9931
 *      3.90    49.4024
 *      3.95    51.9354
 *      4.00    54.5982
 *      4.05    57.3975
 *      4.10    60.3403
 *      4.15    63.4340
 *      4.20    66.6863
 *
 *
 * @release: -    03.05.21
 * @last_update: - 03.05.21
 *
 * @author Vladislav Sapozhnikov 19-IVT-3
 */
public class Main
{
    //Константы для хранения последовательностей для
    //изменения цвета текста в консоли
```

```

public static final String RESET = "\u001B[0m";
public static final String PURPLE = "\u001B[35m";
public static final String RED = "\u001B[31m";

/**
 * Точка входа в программу
 * */
public static void main(String[] args)
{
    System.out.println("\t\t\t\tЛабораторная работа №5 <<" + PURPLE + "Численное
дифференцирование функций" +
        " Ньютона и многочленом Лагранжа" + RESET + ">>");

    //Открытие потока ввода
    Scanner scanner = new Scanner(System.in);

    //Таблица значений Вариант №15
    double[][] coordinates = {{3.50, 33.1154},
                                {3.55, 34.8133},
                                {3.60, 36.5982},
                                {3.65, 38.4747},
                                {3.70, 40.4473},
                                {3.75, 42.5211},
                                {3.80, 44.7012},
                                {3.85, 46.9931},
                                {3.90, 49.4024},
                                {3.95, 51.9354},
                                {4.00, 54.5982},
                                {4.05, 57.3975},
                                {4.10, 60.3403},
                                {4.15, 63.4340},
                                {4.20, 66.6863}};

    //Создание ссылки на объект, реализующий интерфейс
    //SolutionStrategy
    SolutionStrategy strategy = null;

    //Переменная для хранения результата ввода
    String ch = "";

    double[][] firstDerivative;
    double[][] secondDerivative;

    //Выбор стратегии решения
    while (!ch.equals("q"))
    {
        System.out.println("Выберите способ нахождения производной:");
        System.out.println("\t1. При помощи многочлена Ньютона");
    }

```

```

System.out.println("\t2. При помощи многочлена Лагранжа");
System.out.println();
System.out.println("\tВведите q для выхода");
System.out.print("Ввод: ");
ch = scanner.nextLine();
System.out.println();

//Ввод с повторением
switch (ch)
{
    case ("1") -> strategy = new NewtonSolution();
    case ("2") -> strategy = new LagrangianSolution();
    case ("3") -> strategy = new DifferenceForm();
    case ("q") ->
        {
            System.out.println(RED + "Завершение работы..." + RESET);
            System.exit(0);
        }
    default -> System.out.println(RED + "Неверный ввод!" + RESET);
}

assert strategy != null;
firstDerivative = strategy.getFirstDerivative(coordinates);
secondDerivative = strategy.getSecondDerivative(coordinates);

System.out.println("Значения первой производной: ");
for (double[] doubles : firstDerivative)
{
    System.out.printf("%.2f", doubles[0]);
    System.out.print(" ");
    System.out.printf("%.4f", doubles[1]);
    System.out.println();
}

System.out.println();
System.out.println();

System.out.println("Значения второй производной: ");
for (double[] doubles : secondDerivative)
{
    System.out.printf("%.2f", doubles[0]);
    System.out.print(" ");
    System.out.printf("%.4f", doubles[1]);
    System.out.println();
}
}
}
}

```

### **solution\_strategy/SolutionStrategy.java**

```
package solution_strategy;

/**
 * Общий интерфейс всех стратегий решения.
 *
 * @see DifferenceForm
 * @see LagrangianSolution
 * @see NewtonSolution
 * @author Vladislav Sapozhnikov 19-IVT-3
 * */
public interface SolutionStrategy
{
    /**
     * Метод для получения первой производной различными способами.
     *
     * @param coordinates - двумерный массив значений [0][Xi] [1][Yi]
     * @return список значений производной в заданных точках.
     * */
    double[][] getFirstDerivative(double[][] coordinates);

    /**
     * Метод для получения второй производной различными способами.
     *
     * @param coordinates - двумерный массив значений [0][Xi] [1][Yi]
     * @return список значений производной в заданных точках.
     * */
    double[][] getSecondDerivative(double[][] coordinates);
}
```

### **solution\_strategy/NewtonSolution.java**

```
package solution_strategy;

import java.util.ArrayList;
import java.util.List;

/**
 * Класс, в котором реализованы методы нахождения
 * первых и вторых производных при помощи многочлена Ньютона
 *
 * @see SolutionStrategy
 * */
public class NewtonSolution implements SolutionStrategy
{
    /**
     * Метод для нахождения конечных приращений
```

```

*
* @param coordinates - массив координат для которого необходимо найти
*                     конечные приращения
* @return список списков конечных приращений
* */
private List<List<Double>> getFiniteDifferences(double[][] coordinates)
{
    //Создание списка списков для хранения значений конечных разностей
    List<List<Double>> finiteDifferences = new ArrayList<>();

    //Ссылка на временный список для хранения промежуточных значений
    //конечных разностей
    List<Double> tempList;

    //В промежуточный список заносятся конечные разности 1-ого порядка
    tempList = new ArrayList<>();
    for (int i = 0; i < coordinates.length - 1; i++)
    {
        //Вычисление конечных разностей
        tempList.add(coordinates[i + 1][1] - coordinates[i][1]);
    }
    //промежуточный список ханосится в список списков конечных разностей
    finiteDifferences.add(tempList);

    //На каждом i-ом шаге вычисляем значения конечных разностей нового порядка
    //и заносим в промежуточный список.
    //Полученный промежуточный список заносим в список списков промежуточных разностей
    for (int i = 0; i < coordinates.length-2; i++)
    {
        tempList = new ArrayList<>(); //инициализация промежуточного списка
        for (int j = 0; j < finiteDifferences.get(i).size() - 1; j++)
        {
            //Вычисление конечных разностей
            tempList.add(finiteDifferences.get(i).get(j + 1) -
                        finiteDifferences.get(i).get(j));
        }
        finiteDifferences.add(tempList);
    }

    return finiteDifferences;
}

/**
* Вспомогательный метод для получения факториала
*
* @param n - число, от которого необходимо получить факториал
*
* @return - факториал переданного числа

```

```

    */
private int getFact(int n)
{
    int res = 1;

    while (n > 1)
    {
        res *= n;
        n--;
    }

    return res;
}

/**
 * Метод для получения первых производных при помощи
 * многочлена Ньютона
 *
 * @param coordinates - массив координат точек, в которых
 *                     необходимо найти производные
 * @return массив значений первых производных
 */
@Override
public double[][] getFirstDerivative(double[][] coordinates)
{
    //Вычисление шага
    double h = coordinates[1][0] - coordinates[0][0];
    double[][] resArr = new double[15][2];

    //Нахождение производных для первых бти членов
    //выделяем координаты необходимых точек
    double[][] tempArr = new double[6][2];
    for (int i = 0; i < 6; i++)
    {
        tempArr[i][0] = coordinates[i][0];
        tempArr[i][1] = coordinates[i][1];
    }
    //Получаем список конечных приращений
    List<List<Double>> finiteDifference = getFiniteDifferences(tempArr);

    //Расчет производных по формуле
    for (int i = 0; i < 6; i++)
    {
        double t = (coordinates[i][0] - coordinates[0][0]) / h;

        resArr[i][0] = coordinates[i][0];
        resArr[i][1] = (finiteDifference.get(0).get(0)
            + ((2.0 * t - 1) * finiteDifference.get(1).get(0) / getFact(2))

```



```

        + ((3.0*t*t - 6.0*t + 2) * finiteDifference.get(2).get(0) / getFact(3)
        + ((4.0*t*t*t + 18.0*t*t + 22.0*t - 6.0) *
            finiteDifference.get(3).get(0)) / getFact(4))
        + ((5.0*t*t*t*t - 40.0*t*t*t + 105.0*t*t - 100.0*t + 24.0) *
            finiteDifference.get(4).get(0) / getFact(5))) / h;
    }

    //Нахождение производных для следующих 3 членов
    //выделяем координаты необходимых точек
    tempArr = new double[6][2];
    for (int i = 6, j = 0; i < 12; i++, j++)
    {
        tempArr[j][0] = coordinates[i][0];
        tempArr[j][1] = coordinates[i][1];
    }
    //Получаем список конечных приращений
    finiteDifference = getFiniteDifferences(tempArr);

    //Расчет производных по формуле
    for (int i = 6; i < 10; i++)
    {
        double t = (coordinates[i][0] - coordinates[6][0]) / h;

        resArr[i][0] = coordinates[i][0];
        resArr[i][1] = (finiteDifference.get(0).get(0)
            + ((2.0 * t - 1) * finiteDifference.get(1).get(0) / getFact(2))
            + ((3.0*t*t - 6.0*t + 2) * finiteDifference.get(2).get(0) / getFact(3)
            + ((4.0*t*t*t + 18.0*t*t + 22.0*t - 6.0) *
                finiteDifference.get(3).get(0)) / getFact(4))
            + ((5.0*t*t*t*t - 40.0*t*t*t + 105.0*t*t - 100.0*t + 24.0) *
                finiteDifference.get(4).get(0) / getFact(5))) / h;
    }

    //Нахождение производных для последних 6ти членов
    //выделяем координаты необходимых точек
    tempArr = new double[6][2];
    for (int i = 9, j = 0; i < 15; i++, j++)
    {
        tempArr[j][0] = coordinates[i][0];
        tempArr[j][1] = coordinates[i][1];
    }
    //Получаем список конечных приращений
    finiteDifference = getFiniteDifferences(tempArr);

    //Расчет производных по формуле
    for (int i = 9; i < 15; i++)

```

```

    {
        double t = (coordinates[i][0] - coordinates[9][0]) / h;

        resArr[i][0] = coordinates[i][0];
        resArr[i][1] = (finiteDifference.get(0).get(0)
            + ((2.0 * t - 1) * finiteDifference.get(1).get(0) / getFact(2))
            + ((3.0*t*t - 6.0*t + 2) * finiteDifference.get(2).get(0) / getFact(3)
            + ((4.0*t*t*t + 18.0*t*t + 22.0*t - 6.0) *
                finiteDifference.get(3).get(0)) / getFact(4))
            + ((5.0*t*t*t*t - 40.0*t*t*t + 105.0*t*t - 100.0*t + 24.0) *
                finiteDifference.get(4).get(0) / getFact(5))) / h;
    }

    return resArr;
}

/**
 * Метод для получения вторых производных при помощи
 * многочлена Ньютона
 *
 * @param coordinates - массив координат точек, в которых
 *                      необходимо найти производные
 * @return массив значений вторых производных
 * */
@Override
public double[][] getSecondDerivative(double[][] coordinates)
{
    //Вычисление шага
    double h = coordinates[1][0] - coordinates[0][0];
    double[][] resArr = new double[15][2];

    //Нахождение производных для первых бти членов
    //выделяем координаты необходимых точек
    double[][] tempArr = new double[6][2];
    for (int i = 0; i < 6; i++)
    {
        tempArr[i][0] = coordinates[i][0];
        tempArr[i][1] = coordinates[i][1];
    }
    //Получаем список конечных приращений
    List<List<Double>> finiteDifference = getFiniteDifferences(tempArr);

    //Расчет производных по формуле
    for (int i = 0; i < 6; i++)
    {
        double t = (coordinates[i][0] - coordinates[0][0]) / h;

        resArr[i][0] = coordinates[i][0];

```

```

        resArr[i][1] = (finiteDifference.get(1).get(0)
            + ((6.0 * t - 6.0) * finiteDifference.get(2).get(0) / getFact(3))
            + ((12.0*t*t - 36.0*t + 22.0) * finiteDifference.get(3).get(0)
                / getFact(4)
            + ((20.0*t*t*t - 120.0*t*t + 210.0*t - 100.0) *
                finiteDifference.get(4).get(0)) / getFact(5))) / (h*h);
    }

    //Нахождение производных для следующих 3 членов
    //выделяем координаты необходимых точек
    tempArr = new double[6][2];
    for (int i = 6, j = 0; i < 12; i++, j++)
    {
        tempArr[j][0] = coordinates[i][0];
        tempArr[j][1] = coordinates[i][1];
    }
    //Получаем список конечных приращений
    finiteDifference = getFiniteDifferences(tempArr);

    //Расчет производных по формуле
    for (int i = 6; i < 10; i++)
    {
        double t = (coordinates[i][0] - coordinates[6][0]) / h;

        resArr[i][0] = coordinates[i][0];
        resArr[i][1] = (finiteDifference.get(1).get(0)
            + ((6.0 * t - 6.0) * finiteDifference.get(2).get(0) / getFact(3))
            + ((12.0*t*t - 36.0*t + 22.0) * finiteDifference.get(3).get(0)
                / getFact(4)
            + ((20.0*t*t*t - 120.0*t*t + 210.0*t - 100.0) *
                finiteDifference.get(4).get(0)) / getFact(5))) / (h*h);
    }

    //Нахождение производных для последних 6ти членов
    //выделяем координаты необходимых точек
    tempArr = new double[6][2];
    for (int i = 9, j = 0; i < 15; i++, j++)
    {
        tempArr[j][0] = coordinates[i][0];
        tempArr[j][1] = coordinates[i][1];
    }
    //Получаем список конечных приращений
    finiteDifference = getFiniteDifferences(tempArr);

    //Расчет производных по формуле
    for (int i = 9; i < 15; i++)

```

```

{
    double t = (coordinates[i][0] - coordinates[9][0]) / h;

    resArr[i][0] = coordinates[i][0];
    resArr[i][1] = (finiteDifference.get(1).get(0)
        + ((6.0 * t - 6.0) * finiteDifference.get(2).get(0) / getFact(3))
        + ((12.0*t*t - 36.0*t + 22.0) * finiteDifference.get(3).get(0)
            / getFact(4)
        + ((20.0*t*t*t - 120.0*t*t + 210.0*t - 100.0) *
            finiteDifference.get(4).get(0)) / getFact(5))) / (h*h);
}

return resArr;
}
}

```

## 6. Результаты работы программы

```
————— Лабораторная работа №5 <<Численное дифференцирование функций Ньютона и многочленом Лагранжа>>
Выберите способ нахождения производной:
———— 1. При помощи многочлена Ньютона
———— 2. При помощи многочлена Лагранжа

———— Введите q для выхода
Ввод: 1

Значения первой производной:
3,50 -> 33,1220
3,55 -> 34,8088
3,60 -> 36,5873
3,65 -> 38,4485
3,70 -> 40,3973
3,75 -> 42,4528
3,80 -> 44,7102
3,85 -> 46,9839
3,90 -> 49,3789
3,95 -> 51,9353
4,00 -> 54,6104
4,05 -> 57,4449
4,10 -> 60,4478
4,15 -> 63,6259
4,20 -> 66,9844

Значения второй производной:
3,50 -> 32,6900
3,55 -> 34,8267
3,60 -> 36,6433
3,65 -> 38,4200
3,70 -> 40,4367
3,75 -> 42,9733
3,80 -> 44,1000
3,85 -> 46,9933
3,90 -> 49,4867
3,95 -> 51,9800
4,00 -> 54,5833
4,05 -> 57,3867
4,10 -> 60,3500
4,15 -> 63,4333
4,20 -> 66,5967
```

Выберите способ нахождения производной:

- 1. При помощи многочлена Ньютона
- 2. При помощи многочлена Лагранжа

— Введите q для выхода

Ввод: 2

Значения первой производной:

3,50 → 33,1192

3,55 → 34,8125

3,60 → 36,5987

3,65 → 38,4762

3,70 → 40,4425

3,75 → 42,5178

3,80 → 44,7025

3,85 → 46,9933

3,90 → 49,4008

3,95 → 51,9425

4,00 → 54,5988

4,05 → 57,3968

4,10 → 60,3403

4,15 → 63,4338

4,20 → 66,6848

Значения второй производной:

3,50 → 32,9600

3,55 → 34,8000

3,60 → 36,6400

3,65 → 38,4800

3,70 → 40,3200

3,75 → 42,5200

3,80 → 44,7200

3,85 → 46,9200

3,90 → 49,2400

3,95 → 51,9200

4,00 → 54,6000

4,05 → 57,2800

4,10 → 60,3600

4,15 → 63,4400

4,20 → 66,5200

Выберите способ нахождения производной:

- 1. При помощи многочлена Ньютона
- 2. При помощи многочлена Лагранжа

— Введите q для выхода

Ввод: q

Завершение работы...

## **7. Вывод**

В ходе данной работы были закреплены знания и умения по вычислению производных первого и второго порядка при помощи интерполяционного многочлена Ньютона формул Лагранжа.