МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Р.Е.АЛЕКСЕЕВА

Институт радиоэлектроники и информационных технологий Кафедра вычислительные системы и технологии

> Лабораторная работа № 4 Численное интегрирование функций Вариант №15

ОТЧЕТ

по лабораторной работе по дисциплине

Вычислительная математика

РУКОВОДИТЕЛЬ:	
	Суркова А.С.
СТУДЕНТ:	
	Сапожников В.О.
	19-ИВТ-3
Работа защищена «	
С оценкой	

Содержание

1.	Цель	······································				
		гановка задачи				
	3. Теоретические сведения					
	-	Метод средних (центральных) прямоугольников				
		Метод трапеций				
		Метод Симпсона				
4.	Расч	ётные данные	11			
5.	. Листинг разработанной программы12					
	 Результаты работы программы					
	-	од				

1. Цель

Закрепление знаний и умений по численному интегрированию функций.

2. Постановка задачи

Вычислить интеграл по формулам центральных (средних) прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона, при n=8 и n=20; оценить погрешность результата.

$$15. \int_{0,4}^{1,2} \frac{\cos(x^2)}{x+1} dx$$

3. Теоретические сведения

3.1. Метод средних (центральных) прямоугольников.

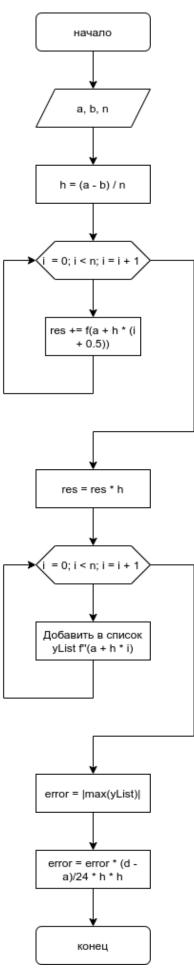
Метод прямоугольников — метод численного интегрирования функции одной переменной, заключающийся в замене подынтегральной функции на многочлен нулевой степени, то есть константу, на каждом элементарном отрезке. Если рассмотреть график подынтегральной функции, то метод будет заключаться в приближённом вычислении площади под графиком суммированием площадей конечного числа прямоугольников, ширина которых будет определяться расстоянием между соответствующими соседними узлами интегрирования, а высота — значением подынтегральной функции в этих узлах.

Составная квадратурная формула для метода средних (центральных) прямоугольников.

$$h = \frac{b-a}{n}$$
$$\int_{a}^{b} f(x)dx = h \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-\frac{1}{2}})$$

Погрешность формулы интегрирования метода средних (центральных) прямоугольников:

$$|R_n| \le \frac{(b-a)}{24} h^2 \max |f''(x)|$$



3.2. Метод трапеций

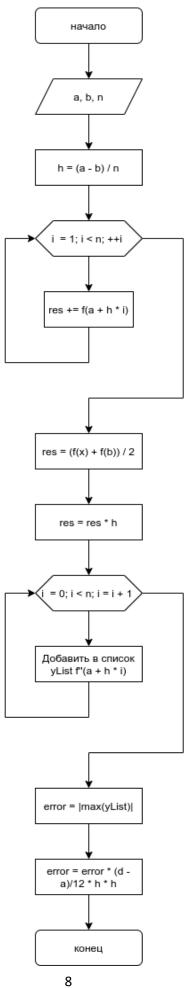
Метод трапеций — метод численного интегрирования функции одной переменной, заключающийся в замене на каждом элементарном отрезке подынтегральной функции на многочлен первой степени, то есть линейную функцию. Площадь под графиком функции аппроксимируется прямоугольными трапециями.

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

Погрешность формулы интегрирования метода средних (центральных) прямоугольников:

$$|R_n| \le \frac{(b-a)}{12} h^2 \max |f''(x)|$$



3.3. Многочлен Лагранжа для равноотстоящих узлов

Формула Симпсона (также Ньютона-Симпсона) относится к приёмам численного интегрирования. Получила название в честь британского математика Томаса Симпсона (1710—1761).

Суть метода заключается в приближении подынтегральной функции на отрезке [a;b] интерполяционным многочленом второй степени $p_2(x)$, то есть приближение графика функции на отрезке параболой.

$$h = \frac{b-a}{n}$$

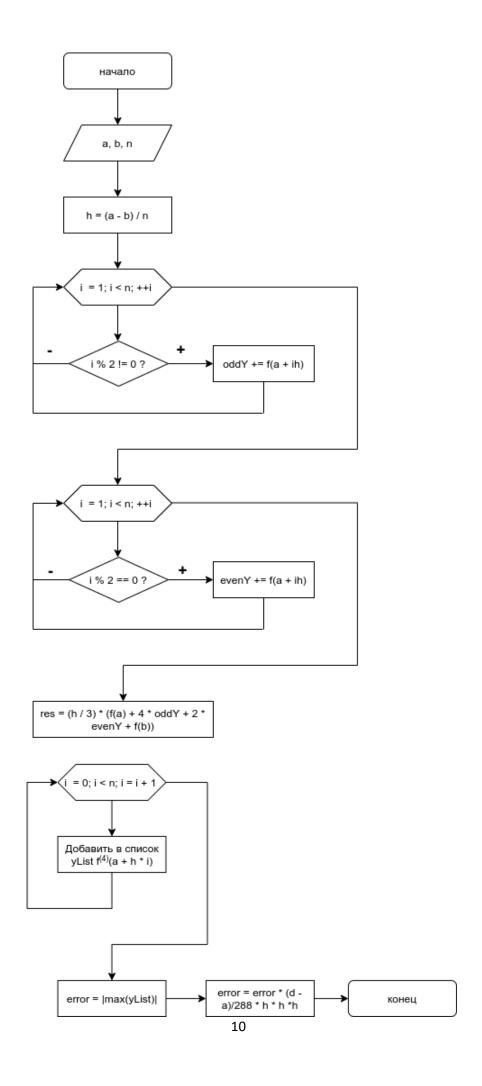
$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + y_n)$$

Погрешность формулы интегрирования метода Симпсона:

$$|R_n| \le \frac{(b-a)}{2880} h^4 \max |f^{(4)}(x)|$$

Погрешность формулы интегрирования метода Симпсона при невозможности ввода производной четвертого порядка:

$$|R_n| \le \frac{(b-a)}{288} h^3 \max |f^{(3)}(x)|$$



4. Расчетные данные

Исходная функция:

$$\int_{0.4}^{1.2} \frac{\cos{(x^2)}}{x+1} dx$$

Вторая производная:

$$\frac{2(-2x^2\cos(x^2) + 2x\frac{\sin(x^2)}{x+1} - \sin(x^2) + \frac{\cos(x^2)}{(x+1)^2}}{(x+1)}$$

Третья производная:

$$\frac{-12x^{2}\cos(x^{2}) - 12x\cos(x^{2}) + 8x^{5}\sin(x^{2}) + 16x^{4}\sin(x^{2}) + 8x^{3}\sin(x^{2}) + }{(x+1)^{3}} + \frac{-4x\sin(x^{2})(x+1) - 6\cos(x^{2})}{(x+1)^{4}}$$

При n = 8:

	Значение интеграла	Значение погрешности
Метод средних прямоугольников	0,33853248	0,00005690
Метод трапеций	0,33788777	0,00011381
Метод Симпсона	0,33832247	0,00000286

При n = 20:

	Значение интеграла	Значение погрешности
Метод средних прямоугольников	0,33835153	0,00000910
Метод трапеций	0,33824871	0,00001821
Метод Симпсона	0,33831738	0,00000002

5. Листинг разработанной программы

Main.java

```
import function.TrigonometricFunction;
import equation solution strategy.*;
import java.util.Scanner;
/**
 * Класс, содержащий точку входа в программу - метод main.
 * Язык: java
 * Реализация четвертой лабораторной работы по дисциплине:
       Вычислительная математика
 * Текст задания:
 * Вычислить интеграл по формулам центральных (средних) прямоугольников,
   трапеций и формуле Симпсона, при n=8 и n=20; оценить погрешность результата.
 * @release: 01.04.21
 * @last_update: 01.04.21
 * @author Vladislav Sapozhnikov 19-IVT-3
public class Main
{
    //Константы для хранения последовательностей для
    //изменения цвета текста в консоли
   public static final String RESET = "\u001B[0m";
   public static final String RED = "\u001B[31m";
   public static final String PURPLE = "\u001B[35m";
    /**
     * Точка входа в программу
   public static void main(String[] args)
    {
        System.out.println("\t\t\tЛабораторная работа №4 <<" + PURPLE + "Численное +
                + интегрирование функций" + RESET + ">>");
        //Создаем объект функцию
        TrigonometricFunction function = new TrigonometricFunction();
        //Открываем поток ввода
        Scanner scanner = new Scanner(System.in);
        System.out.println("Программа для вычисления интеграла функций методами средний " +
```

```
"прямоугольников, трапеций и методом Симпсона.");
System.out.println("\tФункция: cos(x^2)/(x+1)");
System.out.println();
//Ввод нижней и верхней границы интегрирования
System.out.print("Введите нижнию границу интегрирования: ");
double a = scanner.nextDouble();
System.out.print("Введите верхнюю границу интегрирования: ");
double b = scanner.nextDouble();
//Ввод кол-во итераций
System.out.print("Введите кол-во итервалов разбиения (n): ");
double numberOfIterations = scanner.nextDouble();
System.out.println();
//Создание ссылки на объект, реализующий интерфейс
//SolutionStrategy
SolutionStrategy strategy = null;
//Переменная для хранения результата ввода
String ch;
//Сброс потока ввода
ch = scanner.nextLine();
//Выбор стратегии решения
while (!ch.equals("q"))
   System.out.println("Выберите метод для решения уранвения:");
   System.out.println("\t1. Метод средних прямоугольников");
   System.out.println("\t2. Метод трапеций");
   System.out.println("\t3. Метод Симпсона");
   System.out.println();
   System.out.println("\t#. Изменить кол-во итервалов разбиения (n): ");
   System.out.println();
   System.out.println("\tВведите q для выхода");
   System.out.print("Ввод: ");
   ch = scanner.nextLine();
   System.out.println();
   switch (ch)
   {
       case ("1") -> strategy = new MediumRectangleMethod();
        case ("2") -> strategy = new TrapeziumMethod();
        case ("3") -> strategy = new SimpsonMethod();
        case ("#") -> {
```

```
System.out.print("Введите кол-во интервалов разбиения
                                                                               (n): ");
                                   numberOfIterations = scanner.nextInt();
                                   scanner.nextLine();
                                   continue;
                              }
                case ("q") -> {
                                   System.out.println(RED + "Завершение работы..." +
                                                    RESET);
                                   System.exit(0);
                              }
                           -> System.out.println(RED + "Неверный ввод!" + RESET);
                default
            }
            //Получаем значение интеграла
            assert strategy != null;
            double res = strategy.getSolution(function, a, b, numberOfIterations);
            //Получаем значение погрешности
            double error = strategy.getError(function, a, b, numberOfIterations);
            System.out.print("Значение интеграла:
            System.out.printf("%.8f" + "\n", res);
            System.out.print("Значение погрешности: " + RED);
            System.out.printf("%.8f" + RESET + "\n\n", error);
        }
    }
}
```

function/Function.java

```
раскаде function;

import java.util.List;

/**

* Интерфейс, реализующий основные методы функций любого вида.

* Общий вид уравнения:

* a*x^n + b*x^(n-1) + c*x^(n-1) + ... + d*x^0 = 0

*

* Содержит 4 метода необходимых для данной лабораторной работы:

* получение значения функции в точке

* получение значения второй производной в точке

* получение значения третьей производной в точке

* @author Vladislav Sapozhnikov 19-IVT-3

* @see TrigonometricFunction
```

```
* */
public interface Function
{
     * Метод для получения значения функции в заданной точке.
     * @param x - точка, в которой необходимо получить значение функции.
     * @return значение функции в данной точке
     * */
    double getValueAtX(double x);
    /**
     * Метод для получения значения второй производной в при заданном х.
     * @param x - точка, в которой необходимо получить значение второй производной.
     * @return значение второй производной в данной точке
    double getSecDerivativeAtX(double x);
    /**
     * Метод для получения значения третьей производной при заданном х.
     * @param x - точка, в которой необходимо получить значение третьей производной.
     * @return значение третьей производной в данной точке
    double getThirdDerivativeAtX(double x);
}
```

function/TrigonometricFunction.java

```
package
function;

/**

* Класс, реализующий необходимые методы для функции Варианта №15

* cos(x^2)/(x+1)

*

* @author Vladislav Sapozhnikov 19-IVT-3

* @see Function

* */
public class TrigonometricFunction implements Function

{
    /**

    * Метод для получения значения функции в заданной точке.

    *

* @param x - значение X, в котором необходимо получить
```

```
значение функции.
                           * @return - значение функции при заданном X
                          * */
                     @Override
                     public double getValueAtX(double x)
                                            return Math.cos(x*x) / (x + 1);
                     }
                     /**
                           * Метод для получения значения второй производной в заданной точке.
                           * Функция второй производной в "читаемом" виде представлена в отчете.
                           * @рагаm х - значение X, в котором необходимо получить
                                                                                                      значение функции.
                           * @return - значение второй производной при заданном X
                           * */
                     @Override
                     public double getSecDerivativeAtX(double x)
                                            return (2.0 / (x + 1)) * ((-2.0 * x*x * Math.cos(x*x)) + (2 * x * Ma
((Math.sin(x*x))/(x + 1))) - (Math.sin(x*x)) + ((Math.cos(x*x))/((x + 1)*(x + 1))));
                     }
                     /**
                            * Метод для получения значения третьей производной в заданной точке.
                           * Функция третьей производной в "читаемом" виде представлена в отчете.
                           *
                            * @param x - значение X, в котором необходимо получить
                                                                                                      значение функции.
                           * @return - значение второй производной при заданном X
                           * */
                     @Override
                     public double getThirdDerivativeAtX(double x)
                                            return 2.0 * (-3.0 * Math.cos(x*x) / Math.pow((1.0 + x), 3.0) + 2 * x *(-3.0 * (-3.0 * Math.cos(x*x) / Math.pow((1.0 + x), 3.0)) + 2 * x *(-3.0 * Math.cos(x*x) / Math.pow((1.0 + x), 3.0)) + 2 * x *(-3.0 * Math.cos(x*x)) / Math.pow((1.0 + x), 3.0)) + 2 * x *(-3.0 * Math.cos(x*x)) / Math.pow((1.0 + x), 3.0)) + 2 * x *(-3.0 * Math.cos(x*x)) / Math.pow((1.0 + x), 3.0)) + 2 * x *(-3.0 * Math.cos(x*x)) / Math.cos(x*x)) / Math.cos(x*x) / Math.cos(x*x) / Math.cos(x*x)) / Math.cos(x*x) /
                                            Math.cos(x*x) + 2 * x*x * Math.sin(x*x)) + 3.0 * (2.0 * x*x * Math.cos(x*x) + 3.0 * (2.0 * x*x * Math.cos(x*x)) + 3.0 * (2.0 * x*x) + 3.0 * (2.0 * x*x) + 3.0 * (2.0 * x*x) 
                                            + Math.\sin(x^*x)) / (1.0 + x) - 6.0 * x * Math.\sin(x^*x) / (1.0 + x)*(1.0 + x)) /
                                            / (1.0 + x);
                     }
                           * Конуструктор без параметров
                           * */
```

```
public TrigonometricFunction()
{
    }
}
```

solution strategy/SolutionStrategy.java

```
package equation_solution_strategy;
import function.Function;
/**
 * Общий интерфейс всех методов вычисления интеграла.
 * @author Vladislav Sapozhnikov 19-IVT-3
 * @see MediumRectangleMethod
 * @see TrapeziumMethod
 * @see SimpsonMethod
public interface SolutionStrategy
{
    /**
     * Метод для вычисления значения интеграла.
    * @param function
                                - функция, для которой необходимо вычислить интеграл
                                - нижний предел интегрирования
    * @param a
    * @param b
                                - верхний предел интегрирования
    * @param numberOfIterations - кол-во итераций
    * @return значение инетграла для данной функции.
    * */
   double getSolution(Function function, double a, double b, double numberOfIterations);
   /**
     * Метод для вычисления значения погрешности.
    * @param function
                                - функция, для которой необходимо вычислить интеграл
    * @param a
                                - нижний предел интегрирования
     * @param b
                                - верхний предел интегрирования
     * @param numberOfIterations - кол-во итераций
     * @return значение инетграла для данной функции.
    double getError(Function function, double a, double b, double numberOfIterations);
}
```

solution strategy/MediumRectangelMethod.java

```
package equation_solution_strategy;
import function.Function;
import java.util.Collections;
import java.util.LinkedList;
import java.util.List;
/**
 * Класс, реализующий вычисление интеграла методом
 * средних прямоугольников.
 * @author Vladislav Sapozhnikov 19-IVT-3
 * @see SolutionStrategy
 * */
public class MediumRectangleMethod implements SolutionStrategy
    /**
     * Метод для вычисления значения интеграла
     * методом средних прямоугольников.
     * @param function
                                 - функция, для которой необходимо вычислить интеграл
     * @param a
                                 - нижний предел интегрирования
     * @param b
                                 - верхний предел интегрирования
     * @param numberOfIterations - кол-во итераций
     * @return значение инетграла для данной функции.
     * */
    @Override
    public double getSolution(Function function, double a, double b, double
numberOfIterations)
        //Вычисляем величену шага h
        double h = (b - a)/numberOfIterations;
        //пеменная для хранения значения интеграла
        double res = 0.0;
        //Вычисляем сумму значений функции в промежутках
        for (int i = 0; i < numberOfIterations; i++)</pre>
        {
            //K результату прибавляем значение f(Xi-1/2)
            //Начальная точка а, последующие шаги вычисляются как: h * (i + 0.5)
            res += function.getValueAtX(a + h * (i + 0.5));
        }
        //Поскольку шаг равномерный, то просто домножаем результат на h
```

```
res *= h;
    return res;
}
/**
 * Метод для вычисления значения погрешности при вычислении
 * интеграла методом средних прямгоугольников.
 * @param function
                             - функция, для которой необходимо вычислить интеграл
 * @param a
                             - нижний предел интегрирования
 * @param b
                             - верхний предел интегрирования
 * @param numberOfIterations - кол-во итераций
 * @return значение инетграла для данной функции.
 * */
@Override
public double getError(Function function, double a, double b,
                                     double numberOfIterations)
{
    List<Double> yList = new LinkedList<>();
    //Вычисляем величену шага h
    double h = (b - a)/numberOfIterations;
    //Получаем список значений второй производной в промежутках
    for (int i = 0; i < numberOfIterations; i++)</pre>
    {
        //Получаем значения второй производной функциий в точках от а до b с шагом h
        yList.add(function.getSecDerivativeAtX(a + h * (i)));
    }
    //Находим максимальное значение второй производной на промежутке от а до b
    double error = Math.abs(Collections.max(yList));
    //Вычисляем погрешность: Rn = (b-a)/24 * h^2 * max(f''(x))
    error *= ((b - a) / 24.0) * h * h;
    return error;
}
 * Конструктор без параметров.
public MediumRectangleMethod()
{
}
```

}

solution strategy/TrapeziumMethod.java

```
package equation_solution_strategy;
import function.Function;
import java.util.Collections;
import java.util.LinkedList;
import java.util.List;
 * Класс, реализующий вычисление интеграла методом
 * трапеций.
 * @author Vladislav Sapozhnikov 19-IVT-3
 * @see SolutionStrategy
public class TrapeziumMethod implements SolutionStrategy
{
     * Метод для вычисления значения интеграла
     * методом трапеций.
     * @param function
                                 - функция, для которой необходимо вычислить интеграл
     * @param a
                                 - нижний предел интегрирования
     * @param b
                                 - верхний предел интегрирования
     * @param numberOfIterations - кол-во итераций
     * @return значение инетграла для данной функции.
     * */
    @Override
    public double getSolution(Function function, double a, double b,
                                           double numberOfIterations)
    {
        //Вычисляем величену шага h
        double h = (b - a)/numberOfIterations;
        //пеменная для хранения значения интеграла
        double res = 0.0;
        //Выполняем заданное кол-во итераций
        for (int i = 1; i < numberOfIterations; ++i)</pre>
            //К результату прибавляем значение f(Xi)
            //Начальная точка а, последующие шаги вычисляются как: h * i
            res += function.getValueAtX(a + h * i);
        }
```

```
//Добавляем к результату (y0 + yn) / 2;
    res += (function.getValueAtX(a) + function.getValueAtX(b)) / 2.0;
    //Поскольку шаг равномерный, то домножаем результат на h
    res *= h;
    return res;
}
/**
 * Метод для вычисления значения погрешности при вычислении
 * интеграла методом трапеций.
 * @param function
                             - функция, для которой необходимо вычислить интеграл
 * @param a
                             - нижний предел интегрирования
 * @param b
                             - верхний предел интегрирования
 * @param numberOfIterations - кол-во итераций
 * @return значение инетграла для данной функции.
 * */
@Override
public double getError(Function function, double a, double b,
                                     double numberOfIterations)
{
    List<Double> yList = new LinkedList<>();
    //Вычисляем величену шага h
    double h = (b - a)/numberOfIterations;
    //Получаем список значений третьей производной в промежутках
    for (int i = 0; i < numberOfIterations; i++)</pre>
    {
        //Получаем значения второй производной функциий в точках от а до b с шагом h
        yList.add(function.getSecDerivativeAtX(a + h * (i)));
    }
    //Находим максимальное значение второй производной на промежутке от а до b
    double error = Math.abs(Collections.max(yList));
    //Вычисляем погрешность: Rn = (b-a)/24 * h^2 * max(f''(x))
    error *= ((b - a) / 12.0) * h * h;
    return error;
}
/**
 * Конструктор без параметров.
 * */
public TrapeziumMethod()
```

```
{
}
}
```

solution strategy/SimpsonMethod.java

```
package equation_solution_strategy;
import function.Function;
import java.util.Collections;
import java.util.LinkedList;
import java.util.List;
/**
* Класс реализующий вычисление интеграла методом
* трапеций.
* @author Vladislav Sapozhnikov 19-IVT-3
* @see SolutionStrategy
* */
public class SimpsonMethod implements SolutionStrategy
    /**
     * Метод для вычисления значения интеграла
     * методом Симпсона.
                                 - функция, для которой необходимо вычислить интеграл
     * @param function
     * @param a
                                 - нижний предел интегрирования
     * @param b
                                 - верхний предел интегрирования
     * @param numberOfIterations - кол-во итераций
     * @return значение инетграла для данной функции.
     * */
    @Override
    public double getSolution(Function function, double a, double b,
                                           double numberOfIterations)
    {
        //Вычисляем величену шага h
        double h = (b - a)/numberOfIterations;
        //Переменная для хранения суммы нечетных у
        double evenY = 0.0;
        //Переменная для хранения суммы четных у
        double oddY = 0.0;
        //Вычисление суммы y1 + y3 + ... + yn-1
        for (int i = 1; i < numberOfIterations; i++)</pre>
```

```
{
           if (i % 2 != 0) oddY += function.getValueAtX(a + i*h);
        }
        //Вычисление суммы y2 + y4 + ... + yn-2
        for (int i = 2; i < (numberOfIterations - 1); i++)</pre>
            if (i % 2 == 0) evenY += function.getValueAtX(a + i*h);
        }
        //Возвращение результата
        // h/3(y0 + 4*(y1 + y3 + ... + yn-1) + 2*(y2 + y4 + ... + yn-2) - yn)
        return (h / 3.0) * (function.getValueAtX(a) + 4.0 * oddY + 2.0 * evenY +
function.getValueAtX(b));
   }
    /**
     * Метод для вычисления значения погрешности при вычислении
    * интеграла методом Симсона.
    * @param function
                                - функция, для которой необходимо вычислить интеграл
    * @param a
                                 - нижний предел интегрирования
     * @param b
                                 - верхний предел интегрирования
     * @param numberOfIterations - кол-во итераций
     * @return значение инетграла для данной функции.
    * */
   @Override
    public double getError(Function function, double a, double b,
                                         double numberOfIterations)
   {
        List<Double> yList = new LinkedList<>();
        //Вычисляем величену шага h
        double h = (b - a)/numberOfIterations;
        //Вычисляем значения второй производной в промежутках
        for (int i = 0; i < numberOfIterations; i++)</pre>
            //Получаем значения второй производной функциий в точках от а до b с шагом h
           yList.add(function.getThirdDerivativeAtX(a + h * (i)));
        }
        //Находим максимальное значение второй производной на промежутке от а до b
        double error = Math.abs(Collections.max(yList));
        //Вычисляем погрешность: Rn = (b-a)/24 * h^2 * max(f''(x))
        error *= ((b - a) / 288.0) * h * h * h;
```

```
return error;
}

/**

* Конструктор без параметров.

* */
public SimpsonMethod()
{
}
```

6. Результаты работы программы

```
Лабораторная работа №4 <<Численное интегрирование функций>>
  — Функция: cos(x^2)/(x+1)
Введите верхнюю границу интегрирования:
Выберите метод для решения уранвения:
   -1. Метод средних прямоугольников
   - 2. Метод трапеций
  — 3. Метод Симпсона
  — #. Изменить кол-во итервалов разбиения (n):
Выберите метод для решения уранвения:
  — 1. Метод средних прямоугольников
   - 2. Метод трапеций
 — #. Изменить кол-во итервалов разбиения (n):
Выберите метод для решения уранвения:
    Введите д для выхода
Значение интеграла: ••• 0,33832247
Выберите метод для решения уранвения:
   — 1. Метод средних прямоугольников
   — 2. Метод трапеций
   — 3. Метод Симпсона
   — #. Изменить кол-во итервалов разбиения (n):
Ввол:
    1. Метод средних прямоугольников
  — 3. Метод Симпсона
    #. Изменить кол-во итервалов разбиения (n):
    Введите д для выхода
Ввод:
```

```
Выберите метод для решения уранвения:
   — 1. Метод средних прямоугольников
   — 2. Метод трапеций
  — #. Изменить кол-во итервалов разбиения (n):
Выберите метод для решения уранвения:
—— 1. Метод средних прямоугольников
—— 2. Метод трапеций
 —— 3. Метод Симпсона
 —— #. Изменить кол-во итервалов разбиения (n):
Выберите метод для решения уранвения:
  — 1. Метод средних прямоугольников
  — 2. Метод трапеций
```

7. Вывод

В ходе данной работы были закреплены знания и умения по вычислению интеграла при помощи методов средних прямоугольников, трапеция и методу Симпсона.

Самым точным является метод Симпсона, а самым не точным метод трапеций. При увеличении кол-во промежутков разбиения п точность результатов возрастает.