3D- Riduzione Gerarchica di Modello

con le basi istruite

Matteo Aletti & Andrea Bortolossi

Politecnico di Milano

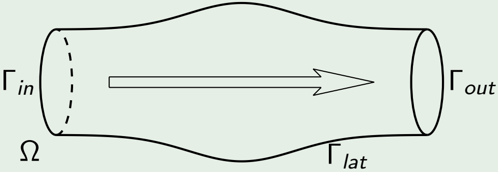
16 Ottobre 2013

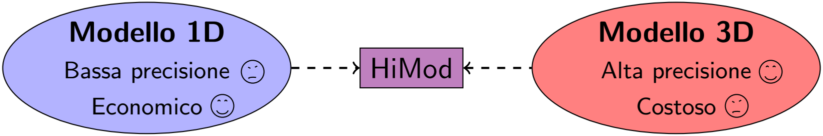
1. Fondamenti teorici
   - Hierarchical Model Reduction in 3D
   - Basi istruite

Motivazione

esistenza di una direzione dominante

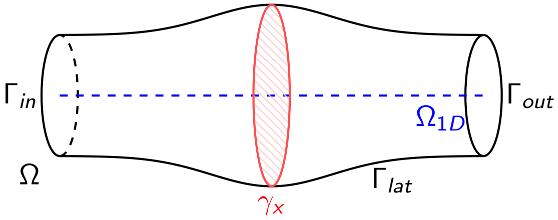
Vogliamo risolvere un certo tipo di problemi: quelli che presentano una direzione preferenziale





- Fibra di supporto rettilinea Ω_{1D} dove avviene la dinamica dominante.
- Suddivisione del dominio in slices γ_x ortogonali alla fibra di supporto.

$$\Omega = \bigcup_{x \in \Omega_{1D}} \gamma_x$$



Idea:

- mappare Ω in un dominio di riferimento $\widehat{\Omega}$ in modo che
$$\hat{\gamma}_{\hat{x}} = \hat{\gamma} \; \forall \hat{x} \in \widehat{\Omega}_{1D}$$
- espandere, in direzione trasversale, la soluzione rispetto alla base di Fourier generalizzata
$$\{\varphi_k(y,z)\}_{k\in\mathbb{N}}$$

Noi lavoreremo direttamente in un riferimento, quindi non utilizzeremo la notazione con i cappelli.

Spazi in direzione trasversale

$$V_\gamma^\infty = \left\{ v(y,z) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \varphi_k(y,z) \right\}$$

$$V_\gamma^m = \left\{ v(y,z) = \sum_{k=1}^{m} v_k \varphi_k(y,z) \right\}$$

Lungo la direzione principale usiamo uno spazio V_{1D} di tipo $H^1(\Omega_{1D})$ che consideri correttamente le condizioni al bordo. Possiamo ora definire gli spazi ridotti come spazi prodotto:

Spazi ridotti

$$V^\infty(\Omega) = V_{1D} \otimes V_\gamma^\infty := \left\{ v(x,y,z) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)\varphi_k(y,z), v_k \in V_{1D} \right\}.$$

$$V^m(\Omega) = V_{1D} \otimes V_\gamma^m := \left\{ v(x,y,z) = \sum_{k=1}^{m} v_k(x)\varphi_k(y,z), v_k \in V_{1D} \right\}.$$

una equazione tipo questa più qualche spiegazione

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{\Omega_{1D}} \Bigg[\underbrace{\hat{r}_{k,j}^{11} \frac{\hat{u}_k}{\hat{x}} \frac{\theta}{\hat{x}}}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{\hat{r}_{k,j}^{10} \frac{\hat{u}_k}{\hat{x}}}_{\text{Advection}} \theta + \underbrace{\hat{r}_{k,j}^{01} \hat{u}_k \frac{\theta}{\hat{x}}}_{\text{One-order term}} + \underbrace{\hat{r}_{k,j}^{00} \hat{u}_k \theta}_{\text{Reaction}} \, d\hat{x} \Bigg] = \int_{\Omega_{1D}} \theta \hat{f}_k d\hat{x}.$$

- Letteratura: in perotto:2008, dirichlet, base di soli seni (2D).
- Letteratura: legendre polynomials x $(1 - x^2)$.
- Educated basis x condizioni al bordo più generali.

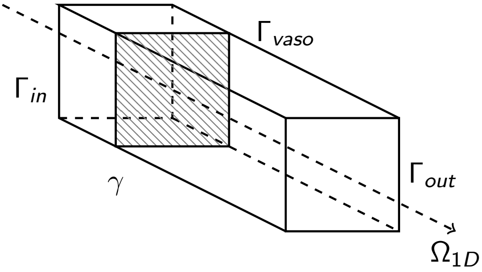
Base teorica

Teorema spettrale per forme bilineari

- teorema spettrale solito (salsa)

Ipotesi geometriche

Dominio parallelepipedo



- si può fare anche con il cerchio
- condizioni al bordo a coefficienti costanti su ogni lato del quadrato

- i conti
- la tabella con i risultati

facciamo qui un esempio numerico con Ly diverso da Lz e i conti proprio questa ultima slide ci da il la per la seconda sezione