Riduzione Gerarchica di Modello in 3D

con le basi istruite

Matteo Aletti & Andrea Bortolossi

Politecnico di Milano

16 Ottobre 2013

1. Fondamenti teorici
   - Hierarchical Model Reduction in 3D
   - Basi istruite

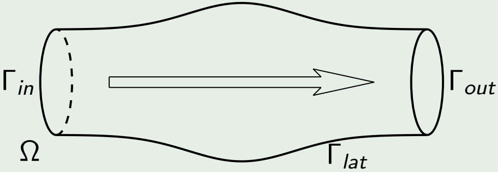
2. Implementazione
   - Basis1DAbstract
   - ModalSpace
   - HiModAssembler

Teoria

Motivazione

esistenza di una direzione dominante

Vogliamo risolvere un certo tipo di problemi: quelli che presentano una direzione preferenziale



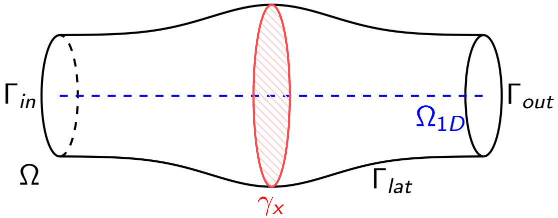
Modello 1D
Bassa precisione ☹
Economico ☺

HiMod

Modello 3D
Alta precisione ☺
Costoso ☹

- Fibra di supporto rettilinea Ω_{1D} dove avviene la dinamica dominante.
- Suddivisione del dominio in slices γ_x ortogonali alla fibra di supporto.

$$\Omega = \bigcup_{x \in \Omega_{1D}} \gamma_x$$



- mappare Ω in un dominio di riferimento $\widehat{\Omega}$ in modo che

$$\hat{\gamma}_{\hat{x}} = \hat{\gamma} \ \forall \hat{x} \in \widehat{\Omega}_{1D}$$

- espandere, in direzione trasversale, la soluzione rispetto alla base di Fourier generalizzata

$$\{\varphi_k(\hat{y}, \hat{z})\}_{k \in \mathbb{N}}$$

Notazione: lavoreremo già sul riferimento, non useremo quindi i cappelli.

Spazi in direzione trasversale

$$V_\gamma^\infty = \left\{ v(y,z) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \varphi_k(y,z) \right\}$$

$$V_\gamma^m = \left\{ v(y,z) = \sum_{k=1}^{m} v_k \varphi_k(y,z) \right\}$$

Usiamo uno spazio V_{1D} di tipo $H^1(\Omega_{1D})$ lungo la **direzione principale**.
Possiamo ora definire gli spazi ridotti come **spazi prodotto**

Spazi ridotti

$$V^{\infty}(\Omega) = V_{1D} \otimes V_{\gamma}^{\infty} := \left\{ v(x,y,z) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)\varphi_k(y,z), v_k \in V_{1D} \right\}.$$

$$V^{m}(\Omega) = V_{1D} \otimes V_{\gamma}^{m} := \left\{ v(x,y,z) = \sum_{k=1}^{m} v_k(x)\varphi_k(y,z), v_k \in V_{1D} \right\}.$$

È lo spazio delle **combinazioni lineari a coefficienti in $\mathbf{V_{1D}}$** delle funzioni di base della fibra trasversale.

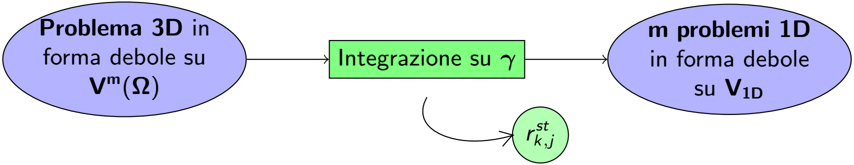
Il **problema** che vogliamo risolvere ...

$$\begin{cases} -\mu\Delta u + \boldsymbol{\beta}\cdot\nabla u + \sigma u = f \text{ in } \Omega \\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega \end{cases}$$

... e la sua **formulazione debole**

Trovare $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega \mu\nabla u\nabla v + \boldsymbol{\beta}\cdot\nabla uv + \sigma uvd\Omega = \int_\Omega fvd\Omega \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

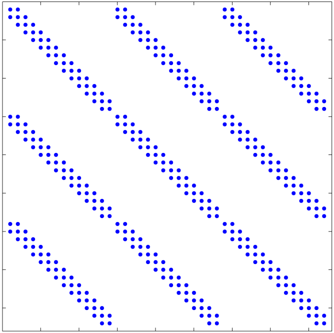


I coefficienti $r^{st}_{k,j}$ accoppiano i problemi 1D: comprimono le informazioni nella fibra trasversale tramite opportuni integrali su γ.

Trovare $\{u_k\}_{k=1}^m$ con $u_k \in V_{1D}$ $\forall k = 1 \dots m$ tale che

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{\Omega_{1D}} \Big[\underbrace{\hat{r}^{11}_{k,j} \frac{\partial u_k}{\partial x} \frac{\partial \theta_j}{\partial x}}_{\textbf{Diffusione}} + \underbrace{\hat{r}^{10}_{k,j} \frac{\partial u_k}{\partial x} \theta_j}_{\textbf{Trasporto}} + \underbrace{\hat{r}^{00}_{k,j} u_k \theta_j}_{\textbf{Reazione}} \, dx \Big] = \int_{\Omega_{1D}} \underbrace{\theta_j f_k}_{\textbf{Forzante}} \, dx. \ \forall j = 1 \dots m \quad \theta_j \in V_{1D}$$

Per V_{1D} utilizziamo una discretizzazione elementi finiti P1 ottenendo il seguende **pattern di sparsità**.



14 elementi, 3 modi.

Nota: i blocchi si riferiscono alle frequenze, ogni blocco ha il pattern proprio degli elementi finiti

In **letteratura** è stato considerato il problema di **Dirichlet** in **2D**. Le basi scelte sono state

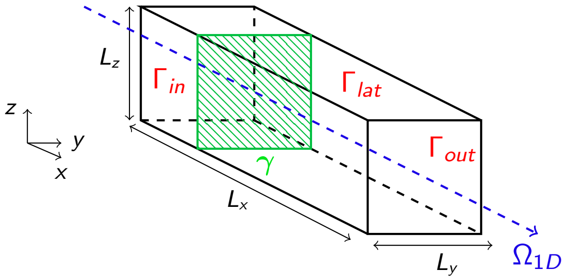
- Funzioni trigonometriche: $\sin(\pi k x)$ in $(0,1)$ [Prof. Perotto]
- Polinomi di Legendre moltiplicati per un fattore $(1-x^2)$ + Gram-Schmidt [Prof. Blanco, LNCC]

In questo progetto

abbiamo esteso l'approccio **trigonometrico** al **caso 3D** con condizioni al bordo omogenee di tipo piú **generale**.

Ipotesi geometriche

Dominio parallelepipedo



Ipotesi per le condizioni al bordo su Γ_{lat}

- **omogenee**
- di ogni tipo ma con **coefficienti costanti**

Sia V uno spazio di tipo H^1. Sia $a(\cdot,\cdot)$ una **forma bilineare** in V, continua, **simmetrica** e debolmente coerciva ($a(u,u) \geq \alpha||u||_V^2 + \lambda_0||u||_{L^2}^2$). Allora:

(a) L'insieme degli autovalori è numerabile ed è una successione $\{\lambda_m\}_{m\geq 1}$ tale che $\lambda_m \to +\infty$;

(b) se u ,v sono autofunzioni corrispondenti ad autovalori differenti, allora

$$a(u,v) = 0 = (u,v)_{L^2}.$$

Inoltre, L^2 ha una base ortonormale $\{u_m\}_{m\geq 1}$ di autofunzioni di a;

(c) la successione $\{u_m/\sqrt{\lambda_0+\lambda_m}\}_{m\geq 1}$ è anche una base ortonormale in V, rispetto al prodotto scalare

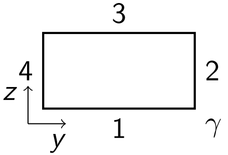
$$((u,v)) = a(u,v) + \lambda_0(u,v)_{L^2}.$$

Problema agli autovalori ausiliario

Due sottoproblemi agli autovalori

Problema agli autovalori su γ: un caso con condizioni al bordo miste Dirichlet e Robin

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \gamma \\ u = 0 & \text{su } 1, 3, 4 \\ \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \chi u = 0 & \text{su } 2 \end{cases}$$



Ipotesi: $u(y, z) = Y(y)Z(z)$

$$\begin{cases} -\frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z} = \lambda & \longrightarrow -Y'' = K_y Y, \; -Z'' = K_z Z, \; \lambda = K_z + K_y \\ u = 0 \text{ su } 1, 3 & \longrightarrow Y(y)Z(1) = 0, \; Y(y)Z(0) = 0 \;\; \forall y \in (0, L_y) \\ u = 0 \text{ su } 4 & \longrightarrow Y(0)Z(z) = 0 \;\; \forall z \in (0, L_z) \\ \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \chi u = 0 \text{ su } 2 & \longrightarrow \mu \frac{\partial Y}{\partial y}(1)Z(z) + \chi Y(1)Z(z) = 0 \;\; \forall z \in (0, L_z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -Y'' = K_y Y \text{ in } (0, L_y) \\ Y(0) = 0 \\ \mu Y'(L_y) + \chi Y(L_y) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -Z'' = K_z Z \text{ in } (0, L_z) \\ Z(0) = 0 \\ Z(L_z) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \{\varphi_{y,p}(y), K_{y,p}\}_{p=1}^{\infty} \qquad \Longrightarrow \{\varphi_{z,q}(z), K_{z,q}\}_{q=1}^{\infty}$$

Combinando queste successioni otteniamo le soluzioni del **problema iniziale** agli autovalori su γ

$$\{\varphi_k(y,z), \lambda_k\} = \{\varphi_{y,p}(y)\varphi_{z,q}(z), K_{y,p} + K_{z,q}\}$$

Due questioni da affrontare...

- Come risolvere il singolo problema agli autovalori **?**
- Siamo interessati ad ordinare le $\{\varphi_k(y,z)\}$ rispetto al valore di $\{\lambda_k\}$: come è possibile farlo a partire da $\{K_{y,p}\}$ e $\{K_{z,q}\}$ **?**

Forma della soluzione generale

$$\phi_{y,k}(y) = A_k sin(w_{y,k} y) + B_k cos(w_{y,k} y), \;\; w_{y,k}^2 = K_{y,k}$$

3 incognite $A_k, B_k, w_{y,l}$ $\Longleftrightarrow$ **2** condizioni di bordo, **1** normalizzazione

Note: 1. ortogonalità garantita dal teorema spettrale
2. equazione spesso non lineare in $w_{y,k}$

a	b	c	d	Type	λ_k	A	B
χ	μ	χ	μ	Rob-Rob	$\tan(\sqrt{\lambda_k})(\chi - \frac{\mu^2\lambda_k}{\chi}) + 2\mu\sqrt{\lambda_k} = 0$	1	$\frac{\mu\sqrt{\lambda_k}}{\chi}$
1	0	χ	μ	Dir-Rob	$\tan(\sqrt{\lambda_k}) + \frac{\mu\sqrt{\lambda_k}}{\chi} = 0$	1	$-\tan(\sqrt{\lambda_k})$
1	0	1	0	Dir-Dir	$\lambda_k = (k\pi)^2$	1	0
0	1	0	1	Neu-Neu	$\lambda_k = (k\pi)^2$	0	1

Esempio: condizioni di Dirichlet su Γ_{lat} con $L_y = \pi$ e $L_z = 3\pi/2$.
Si ha che

$$K_{y,p} = p^2, K_{z,q} = (2/3q)^2.$$

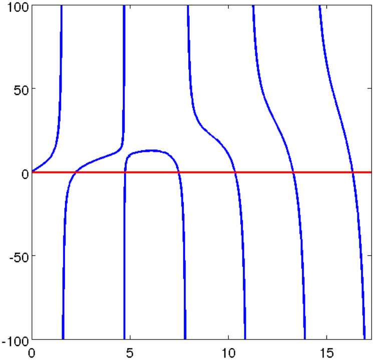
$K_{y,p}$	1	p=1	4	p=2	9	p=3	1	p=1	4	p=2	...
$K_{z,q}$	4/9	q=1	4/9	q=1	4/9	q=1	16/9	q=2	16/9	q=2	...
λ_k	1.44	k=1	4.44	k=3	9.44	k=5	2.77	k=2	5.77	k=4	...

Per il problema dell'ordinamento abbiamo sviluppato l'algoritmo implementato in `EigensProvider`.

Implementazione

Il problema viene sempre rimappato nell'intervallo $(0, 1)$

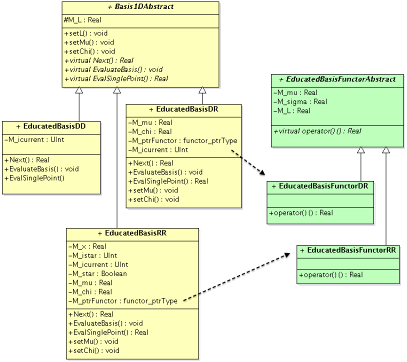
- Calcola gli autovalori $\rightarrow$ `Next()`
- Valuta le funzioni di base $\rightarrow$ `EvaluateBasis(...)`



Ricerca degli zeri con condizioni di Robin

Polimorfismo su `Basis1DAbstract`...

... e su `EducatedBasisFunctorAbstract`



Per gestire le diverse classi figlie di `Basis1DAbstract` abbiamo utilizzato una **factory**.

ModalSpace

Una classe che gestisce la costruzione dell'intera base modale

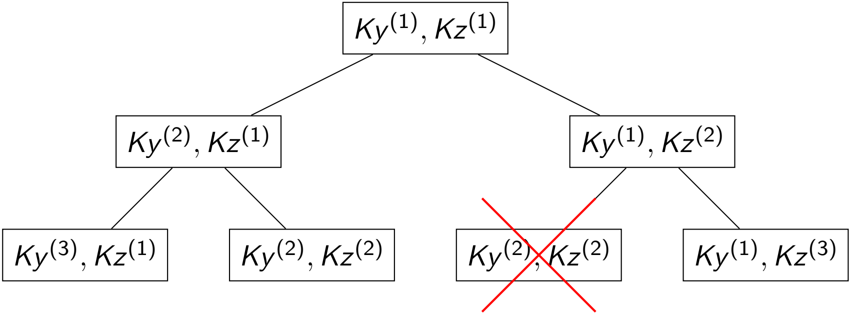
- Gestisce le formule di quadratura sulla slice
- Istanzia i corretti generatori di base
  $\rightarrow$ `AddSliceBC(...)`
- Calcola gli autovalori del problema 2D
  $\rightarrow$ `EigensProvider(...)`
- Valuta le funzioni di base e le loro derivate nei nodi di quadratura
  $\rightarrow$ `EvaluateBasis(...)`
- Calcola i coefficient $r_{k,j}^{st}$
  $\rightarrow$ `Compute_*(...)`

AddSliceBC(...)

due metodi uno per ogni direzione

```
void ModalSpace::
AddSliceBCY (const string& left, const string& right, const
    Real& mu, const Real& chi)
{
// Creation of the correct basis generator
M_genbasisY = Basis1DFactory::istance().createObject(left+
    right);
// Setting of the parameters
M_genbasisY->setL(M_Ly);
M_genbasisY->setMu(mu);
M_genbasisY->setChi(chi);
return;
}
```

Una visualizzazione dell'algoritmo ad albero



EvaluateBasis(...)

Valutare le funzioni di base sui nodi di quadratura

```
void ModalSpace::
EvaluateBasis()
{
    // Compute all the eigens from the 1D problems
    EigensProvider();

    // Fill the matrices with the evaluation of
    // the monodimensional basis and its derivatives
    M_genbasisY->EvaluateBasis (M_phiy, M_dphiy,
                                M_eigenvaluesY, M_quadruleY);
    M_genbasisZ->EvaluateBasis (M_phiz, M_dphiz,
                                M_eigenvaluesZ, M_quadruleZ);
}
```

Compute_*(..)

Sfruttando la separazione di variabili

```
Real ModalSpace::
Compute_PhiPhi (const UInt& j, const UInt& k) const
{   //...
    //... (Date le frequenze estrae i sottoindici p e q)
    for (UInt n = 0; n < M_quadruleY->nbQuadPt(); ++n)
    coeff_y += M_phiy [p_j][n] * normy *
                    M_phiy [p_k][n] * normy *
                    M_Ly * M_quadruleY->weight (n);
    for (UInt n = 0; n < M_quadruleZ->nbQuadPt(); ++n)
    coeff_z += M_phiz[q_j][n] * normz *
                    M_phiz[q_k][n] * normz *
                    M_Lz * M_quadruleZ->weight (n);
    return coeff_y * coeff_z;
}
```

WIP: Abbiamo aggiunto dei metodi per considerare **coefficienti non costanti** che si occupano di calcolare i coefficienti $r^{st}_{j,k}$ **senza separare le variabili**.

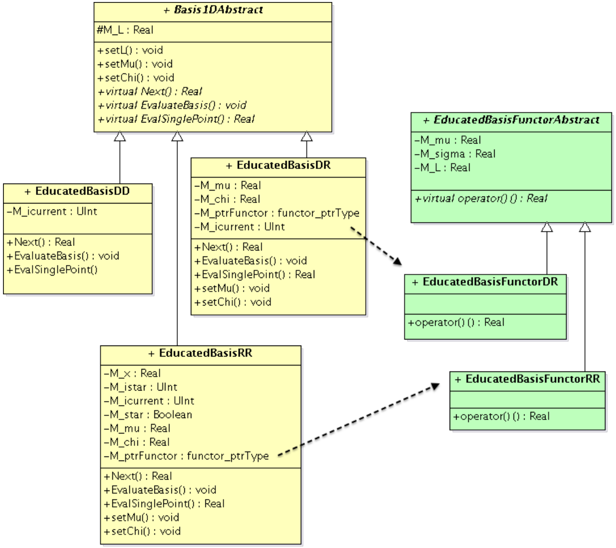
Sono ancora da testare e da ottimizzare.

HiModAssembler

La classe che combina gli elementi finiti e la base modale

- **Membri principali**
  - `M_modalbasis`
  - `M_etfespace`
- Metodi per l'**assemblaggio**
  - `AddADRProblem(...)`
  - `interpolate(...)`
  - `Addrhs(...)`
  - `AddDirichletBC_In(...)`
- Metodi per l'**analisi**
  - `evaluateBase3DGrid(...)` //HiMod vector
  - `evaluateBase3DGrid(...)` //Function type
  - `normL2(...)`
- Metodi per l'**export**
  - `ExportStructuredVTK(...)`
  - `ExportFunctionVTK(...)`

```
for j {
for k {
VectorSmall<5> Coeff;
Coeff[0] = M_modalbasis->Compute_PhiPhi (j, k);
// ...
{ using namespace ExpressionAssembly;
  // ...
  integrate(
      elements(M_etfespace->mesh()),
      M_fespace->qr(),
      M_etfespace,
      M_etfespace,
      mu*Coeff[0]*dot(grad(phi_i),grad(phi_j))
      // ...
      )
  >>(systemMatrix->block(k,j));
}
// ...
return;
```


+ Basis1DAbstract
#M_L : Real
+setL() : void
+setMu() : void
+setChi() : void
+virtual Next() : Real
+virtual EvaluateBasis() : void
+virtual EvalSinglePoint() : Real
+ EducatedBasisDD
-M_icurrent : UInt
+Next() : Real
+EvaluateBasis() : void
+EvalSinglePoint()
+ EducatedBasisDR
-M_mu : Real
-M_chi : Real
-M_ptrFunctor : functor_ptrType
-M_icurrent : UInt
+Next() : Real
+EvaluateBasis() : void
+EvalSinglePoint() : Real
+setMu() : void
+setChi() : void
+ EducatedBasisFunctorAbstract
-M_mu : Real
-M_sigma : Real
-M_L : Real
+virtual operator() () : Real
+ EducatedBasisFunctorDR
+operator() () : Real
+ EducatedBasisRR
-M_x : Real
-M_istar : UInt
-M_icurrent : UInt
-M_star : Boolean
-M_mu : Real
-M_chi : Real
-M_ptrFunctor : functor_ptrType
+Next() : Real
+EvaluateBasis() : void
+EvalSinglePoint() : Real
+setMu() : void
+setChi() : void
+ EducatedBasisFunctorRR
+operator() () : Real