

3D- Riduzione Gerarchica di Modello

con le basi istruite

Matteo Aletti & Andrea Bortolossi

Politecnico di Milano

16 Ottobre 2013



1 Fondamenti teorici

- Hierarchical Model Reduction in 3D
- Basi istruite

2 Implementazione

- Basis1DAbstract
- ModalSpace
- HiModAssembler

3 Risultati numerici

1 Fondamenti teorici

- Hierarchical Model Reduction in 3D
- Basi istruite

2 Implementazione

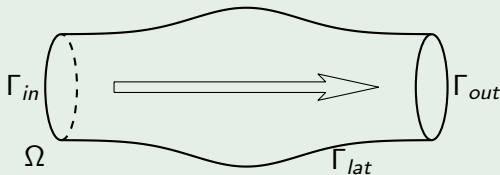
- Basis1DAbstract
- ModalSpace
- HiModAssembler

3 Risultati numerici

Motivazione

esistenza di una direzione dominante

Vogliamo risolvere un certo tipo di problemi: quelli che presentano una direzione preferenziale



Modello 3D

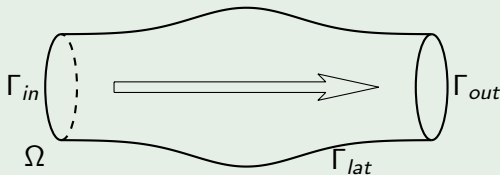
Alta precisione 😊

Costoso 😞

Motivazione

esistenza di una direzione dominante

Vogliamo risolvere un certo tipo di problemi: quelli che presentano una direzione preferenziale



Modello 1D

Bassa precisione ☹️

Economico 😊

Modello 3D

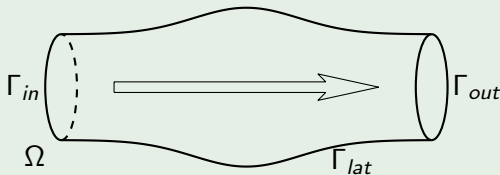
Alta precisione 😊

Costoso ☹️

Motivazione

esistenza di una direzione dominante

Vogliamo risolvere un certo tipo di problemi: quelli che presentano una direzione preferenziale



Modello 1D

Bassa precisione ☹️

Economico 😊

HiMod

Modello 3D

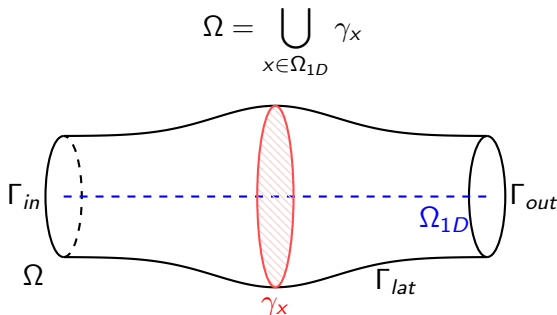
Alta precisione 😊

Costoso ☹️

Impostazione geometrica

il dominio

- Fibra di supporto rettilinea Ω_{1D} dove avviene la dinamica dominante.
- Suddivisione del dominio in slices γ_x ortogonali alla fibra di supporto.



- mappare Ω in un dominio di riferimento $\hat{\Omega}$ in modo che

$$\gamma_x \mapsto \hat{\gamma}_{\hat{x}} = \hat{\gamma} \quad \forall \hat{x} \in \hat{\Omega}_{1D} \implies \hat{\Omega} = \hat{\Omega}_{1D} \times \hat{\gamma}$$

- espandere, in direzione trasversale, la soluzione rispetto alla base di Fourier generalizzata

$$\{\hat{\varphi}_k(\hat{y}, \hat{z})\}_{k \in \mathbb{N}}$$

Notazione: lavoreremo già sul riferimento, non useremo quindi i cappelli.

Spazi in direzione trasversale

$$V_{\gamma}^{\infty} = \left\{ v(y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \varphi_k(y, z) \right\}$$

$$V_{\gamma}^m = \left\{ v(y, z) = \sum_{k=1}^m v_k \varphi_k(y, z) \right\}$$

Processo di riduzione

Spazi ridotti

Usiamo uno spazio V_{1D} di tipo $H^1(\Omega_{1D})$ lungo la **direzione principale**. Possiamo ora definire gli spazi ridotti come **spazi prodotto**

Spazi ridotti

$$V^\infty(\Omega) = V_{1D} \otimes V_\gamma^\infty := \left\{ v(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x) \varphi_k(y, z), v_k \in V_{1D} \right\}.$$

$$V^m(\Omega) = V_{1D} \otimes V_\gamma^m := \left\{ v(x, y, z) = \sum_{k=1}^m v_k(x) \varphi_k(y, z), v_k \in V_{1D} \right\}.$$

È lo spazio delle **combinazioni lineari a coefficienti in V_{1D}** delle funzioni di base della fibra trasversale.

Il problema

Caso condizioni di Dirichlet

Il **problema** che vogliamo risolvere ...

$$\begin{cases} -\mu \Delta u + \beta \cdot \nabla u + \sigma u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

... e la sua **formulazione debole**

Trovare $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_{\Omega} \mu \nabla u \nabla v + \beta \cdot \nabla uv + \sigma uv d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

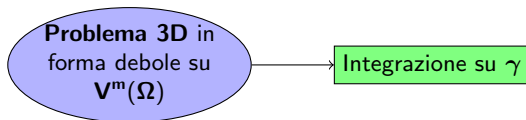
Modelli ridotti

Problemi 1D accoppiati

Problema 3D in
forma debole su
 $\mathbf{V}^m(\Omega)$

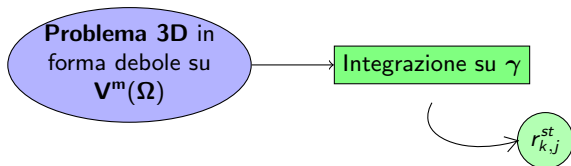
Modelli ridotti

Problemi 1D accoppiati



Modelli ridotti

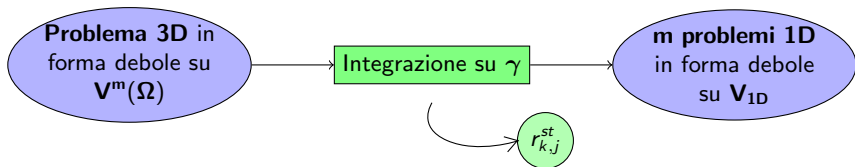
Problemi 1D accoppiati



I coefficienti $r_{k,j}^{st}$ accoppiano i problemi 1D: comprimono le informazioni nella fibra trasversale tramite opportuni integrali su γ .

Modelli ridotti

Problemi 1D accoppiati



I coefficienti $r_{k,j}^{st}$ accoppiano i problemi 1D: comprimono le informazioni nella fibra trasversale tramite opportuni integrali su γ .

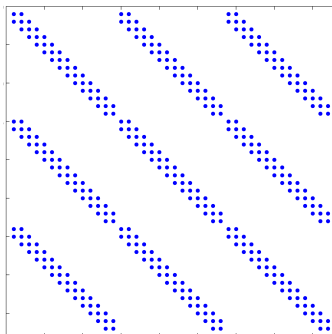
Trovare $\{u_k\}_{k=1}^m$ con $u_k \in V_{1D} \forall k = 1 \dots m$ tale che

$$\sum_{k=1}^m \int_{\Omega_{1D}} \left[\underbrace{\hat{r}_{k,j}^{11} \frac{\partial u_k}{\partial x} \frac{\partial \theta_j}{\partial x}}_{\text{Diffusione}} + \underbrace{\hat{r}_{k,j}^{10} \frac{\partial u_k}{\partial x} \theta_j}_{\text{Trasporto}} + \underbrace{\hat{r}_{k,j}^{00} u_k \theta_j}_{\text{Reazione}} dx \right] = \int_{\Omega_{1D}} \underbrace{\theta_j f_k}_{\text{Forzante}} dx. \quad \forall j = 1 \dots m \quad \theta_j \in V_{1D}$$

Struttura algebrica

Pattern di sparsità

Per V_{1D} utilizziamo una discretizzazione elementi finiti P1 ottenendo il seguente **pattern di sparsità**.



14 elementi, 3 modi.

Nota: i blocchi si riferiscono alle **frequenze**, ogni blocco ha il pattern proprio degli **elementi finiti**

Scelta della base

Basi trigonometriche e polinomi di Legendre

In **letteratura** è stato considerato il problema di **Dirichlet** in **2D**. Le basi scelte sono state

- Funzioni **trigonometriche**: $\sin(\pi kx)$ in $(0, 1)$ [Prof. Perotto]
- Polinomi di **Legendre** moltiplicati per un fattore $(1 - x^2)$ e ortogonalizzati alla Gram-Schmidt [Prof. Blanco, LNCC]

In questo progetto

abbiamo esteso l'approccio **trigonometrico** al **caso 3D** con condizioni al bordo omogenee di tipo piú **generale**.

1 Fondamenti teorici

- Hierarchical Model Reduction in 3D
- Basi istruite

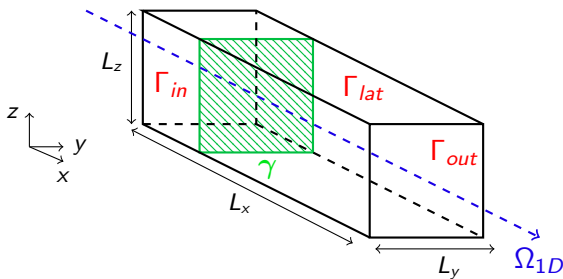
2 Implementazione

- Basis1DAbstract
- ModalSpace
- HiModAssembler

3 Risultati numerici

Ipotesi geometriche

Dominio parallelepipedo



Ipotesi per le condizioni al bordo su Γ_{lat}

- omogenee
- di ogni tipo ma con **coefficienti costanti**

Base teorica

Teorema spettrale per forme bilineari

Sia V uno spazio di tipo H^1 . Sia $a(\cdot, \cdot)$ una **forma bilineare** in V , continua, **simmetrica** e debolmente coerciva ($a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2 + \lambda_0 \|u\|_{L^2}^2$). Allora:

- (a) L'insieme degli autovalori è numerabile ed è una successione $\{\lambda_m\}_{m \geq 1}$ tale che $\lambda_m \rightarrow +\infty$;
- (b) se u, v sono autofunzioni corrispondenti ad autovalori differenti, allora

$$a(u, v) = 0 = (u, v)_{L^2}.$$

Inoltre, L^2 ha una base ortonormale $\{u_m\}_{m \geq 1}$ di autofunzioni di a ;

- (c) la successione $\{u_m / \sqrt{\lambda_0 + \lambda_m}\}_{m \geq 1}$ è anche una base ortonormale in V , rispetto al prodotto scalare

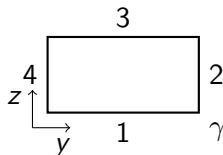
$$((u, v)) = a(u, v) + \lambda_0 (u, v)_{L^2}.$$

Problema agli autovalori ausiliario

Due sottoproblemi agli autovalori

Problema agli autovalori su γ : un caso con condizioni al bordo miste Dirichlet e Robin

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \gamma \\ u = 0 & \text{su } 1, 3, 4 \\ \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \chi u = 0 & \text{su } 2 \end{cases}$$



Ipotesi: $u(y, z) = Y(y)Z(z)$

$$\begin{cases} -\frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z} = \lambda & \longrightarrow -Y'' = K_y Y, \quad -Z'' = K_z Z, \quad \lambda = K_z + K_y \\ u = 0 \text{ su } 1, 3 & \longrightarrow Y(y)Z(1) = 0, \quad Y(y)Z(0) = 0 \quad \forall y \in (0, L_y) \\ u = 0 \text{ su } 4 & \longrightarrow Y(0)Z(z) = 0 \quad \forall z \in (0, L_z) \\ \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \chi u = 0 \text{ su } 2 & \longrightarrow \mu \frac{\partial Y}{\partial y}(1)Z(z) + \chi Y(1)Z(z) = 0 \quad \forall z \in (0, L_z) \end{cases}$$

Soluzione (semi-)analitica del problema agli autovalori

Soluzione dei due sottoproblemi e combinazione dei risultati

$$\begin{cases} -Y'' = K_y Y \text{ in } (0, L_y) \\ Y(0) = 0 \\ \mu Y'(L_y) + \chi Y(L_y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -Z'' = K_z Z \text{ in } (0, L_z) \\ Z(0) = 0 \\ Z(L_z) = 0 \end{cases}$$

$$\implies \{\varphi_{y,p}(y), K_{y,p}\}_{p=1}^{\infty}$$

$$\implies \{\varphi_{z,q}(z), K_{z,q}\}_{q=1}^{\infty}$$

Combinando queste successioni otteniamo le soluzioni del **problema 2D** agli autovalori su γ

$$\{\varphi_k(y, z), \lambda_k\} = \{\varphi_{y,p}(y)\varphi_{z,q}(z), K_{y,p} + K_{z,q}\}$$

Due questioni da affrontare...

- Come risolvere il singolo problema agli autovalori ?
- Siamo interessati ad ordinare le $\{\varphi_k(y, z)\}$ rispetto al valore di $\{\lambda_k\}$: come è possibile farlo a partire da $\{K_{y,p}\}$ e $\{K_{z,q}\}$?

Risoluzione sottoproblema agli autovalori

Ricerca degli zeri

Forma della soluzione generale

$$\phi_{y,k}(y) = A_k \sin(w_{y,k}y) + B_k \cos(w_{y,k}y), \quad w_{y,k}^2 = K_{y,k}$$

3 incognite	\longleftrightarrow	2 condizioni di bordo
$A_k, B_k, w_{y,k}$		1 normalizzazione

- Note:**
1. ortogonalità garantita dal teorema spettrale
 2. equazione spesso non lineare in $w_{y,k}$

Il problema della gerarchia

Esempio caso condizioni di Dirichlet

Esempio: condizioni di Dirichlet su Γ_{lat} con $L_y = \pi$ e $L_z = 3\pi/2$.

Si ha che

$$K_{y,p} = p^2, K_{z,q} = (2/3q)^2.$$

$K_{y,p}$	1	p=1	4	p=2	9	p=3	1	p=1	4	p=2	...
$K_{z,q}$	4/9	q=1	4/9	q=1	4/9	q=1	16/9	q=2	16/9	q=2	...
λ_k	1.44	k=1	4.44	k=3	9.44	k=5	2.77	k=2	5.77	k=4	...

Per il problema dell'ordinamento abbiamo sviluppato l'algoritmo implementato in **EigensProvider**.

1 Fondamenti teorici

- Hierarchical Model Reduction in 3D
- Basi istruite

2 Implementazione

- Basis1DAbstract
- ModalSpace
- HiModAssembler

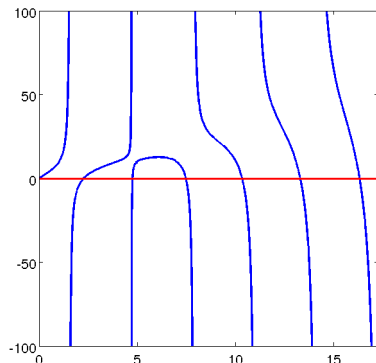
3 Risultati numerici

Basis1DAbstract

Una classe astratta per risolvere i sottoproblemi agli autovalori

Il problema viene sempre rimappato nell'intervallo $(0, 1)$

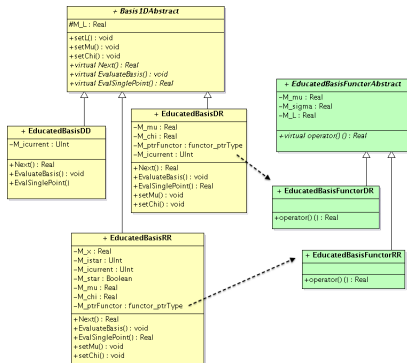
- Calcola gli autovalori
→ `Next()`
- Valuta le funzioni di base
→ `EvaluateBasis(...)`



Ricerca degli zeri con condizioni di Robin

Polimorfismo su Basis1DAbstract...

... e su EducatedBasisFuncorAbstract



Per gestire le diverse classi figlie di **Basis1DAbstract** abbiamo utilizzato una **factory**.

1 Fondamenti teorici

- Hierarchical Model Reduction in 3D
- Basi istruite

2 Implementazione

- Basis1DAbstract
- **ModalSpace**
- HiModAssembler

3 Risultati numerici

ModalSpace

Una classe che gestisce la costruzione dell'intera base modale

- Gestisce le formule di quadratura sulla slice
- Istanza i corretti generatori di base
→ `AddSliceBC(...)`
- Calcola gli autovalori del problema 2D
→ `EigensProvider(...)`
- Valuta le funzioni di base e le loro derivate nei nodi di quadratura
→ `EvaluateBasis(...)`
- Calcola i coefficient $r_{k,j}^{st}$
→ `Compute_*(...)`

AddSliceBC(...)

due metodi uno per ogni direzione

```
void ModalSpace::
AddSliceBCY (const string& left , const string& right , const
             Real& mu, const Real& chi)
{
// Creation of the correct basis generator
M_genbasisY = Basis1DFactory::instance().createObject(left+
               right);
// Setting of the parameters
M_genbasisY->setL(M_Ly);
M_genbasisY->setMu(mu);
M_genbasisY->setChi(chi);
return;
}
```

EigenServiceProvider()

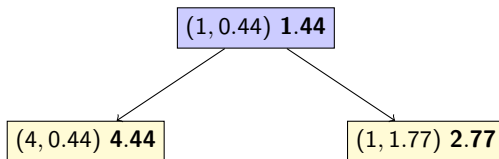
Ordinare correttamente gli autovalori non è facile

(1, 0.44) 1.44

□ Nodi già salvati in `M_eigenvalues`, è un vector il cui indice, `k`, è già associato all'`k`-esima **frequenza**.

EigenProvider()

Ordinare correttamente gli autovalori non è facile



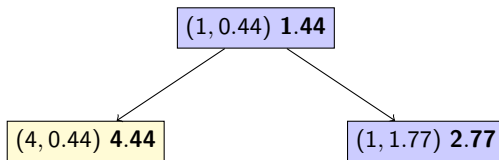
- Nodi già salvati in `M_eigenvalues`, è un vector il cui indice, `k`, è già associato all'`k`-esima **frequenza**.

Nodi temporaneamente salvati in un set.

- E esso, grazie ad un'opportuna **relazione d'ordine**, è in grado di evitare i doppioni, senza rimuovere gli autovalori doppi e mantenendo sempre in prima posizione l'autovalore più piccolo pronto per l'estrazione.

EigenProvider()

Ordinare correttamente gli autovalori non è facile



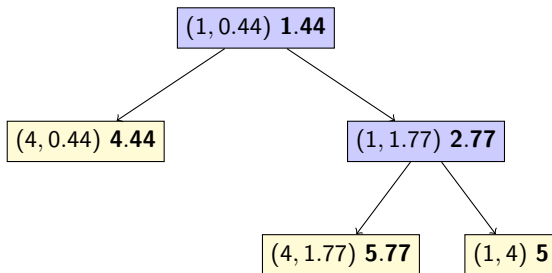
- Nodi già salvati in `M_eigenvalues`, è un vector il cui indice, `k`, è già associato all'`k`-esima **frequenza**.

Nodi temporaneamente salvati in un set.

- E esso, grazie ad un'opportuna **relazione d'ordine**, è in grado di evitare i doppioni, senza rimuovere gli autovalori doppi e mantenendo sempre in prima posizione l'autovalore più piccolo pronto per l'estrazione.

EigenProvider()

Ordinare correttamente gli autovalori non è facile



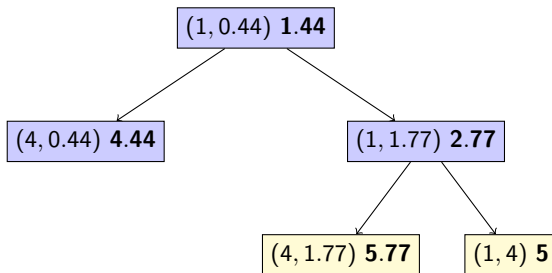
- Nodi già salvati in `M_eigenvalues`, è un vector il cui indice, `k`, è già associato all'`k`-esima **frequenza**.

Nodi temporaneamente salvati in un set.

- E esso, grazie ad un'opportuna **relazione d'ordine**, è in grado di evitare i doppioni, senza rimuovere gli autovalori doppi e mantenendo sempre in prima posizione l'autovalore più piccolo pronto per l'estrazione.

EigenProvider()

Ordinare correttamente gli autovalori non è facile



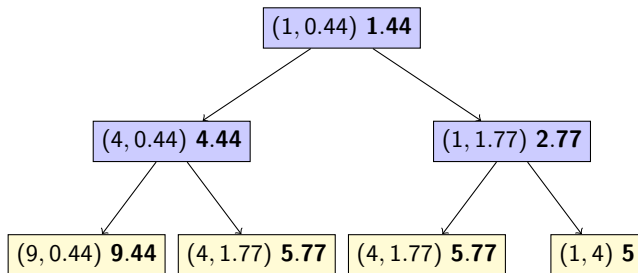
- Nodi già salvati in `M_eigenvalues`, è un vector il cui indice, `k`, è già associato all'`k`-esima **frequenza**.

Nodi temporaneamente salvati in un set.

- E esso, grazie ad un'opportuna **relazione d'ordine**, è in grado di evitare i doppioni, senza rimuovere gli autovalori doppi e mantenendo sempre in prima posizione l'autovalore più piccolo pronto per l'estrazione.

EigenProvider()

Ordinare correttamente gli autovalori non è facile



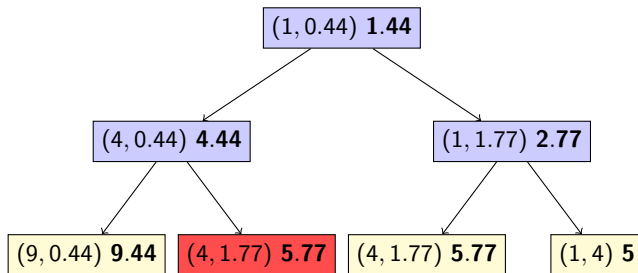
- Nodi già salvati in `M_eigenvalues`, è un vector il cui indice, `k`, è già associato all'`k`-esima **frequenza**.

Nodi temporaneamente salvati in un set.

- E esso, grazie ad un'opportuna **relazione d'ordine**, è in grado di evitare i doppioni, senza rimuovere gli autovalori doppi e mantenendo sempre in prima posizione l'autovalore più piccolo pronto per l'estrazione.

EigenProvider()

Ordinare correttamente gli autovalori non è facile



Nodi già salvati in `M_eigenvalues`, è un vector il cui indice, k , è già associato all k -esima **frequenza**.

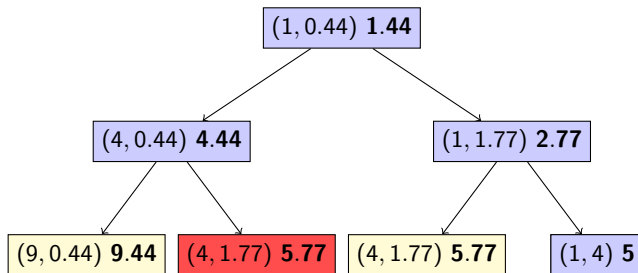
Nodi temporaneamente salvati in un set.

E esso, grazie ad un'opportuna **relazione d'ordine**, è in grado di evitare i doppioni, senza rimuovere gli autovalori doppi e mantenendo sempre in prima posizione l'autovalore più piccolo pronto per l'estrazione.

Nodi doppi **esclusi** dal set perché già presenti nell'albero.

EigenProvider()

Ordinare correttamente gli autovalori non è facile



Nodi già salvati in `M_eigenvalues`, è un vector il cui indice, `k`, è già associato all'`k`-esima **frequenza**.

Nodi temporaneamente salvati in un set.

E esso, grazie ad un'opportuna **relazione d'ordine**, è in grado di evitare i doppioni, senza rimuovere gli autovalori doppi e mantenendo sempre in prima posizione l'autovalore più piccolo pronto per l'estrazione.

Nodi doppi **esclusi** dal set perché già presenti nell'albero.

EvaluateBasis(...)

Valutare le funzioni di base sui nodi di quadratura

```
void ModalSpace::
EvaluateBasis()
{
    // Compute all the eigens from the 1D problems
    EigensProvider();

    // Fill the matrices with the evaluation of
    // the monodimensional basis and its derivatives
    M_genbasisY->EvaluateBasis (M_phiy, M_dphiy,
                                M_eigenvaluesY, M_quadruleY);
    M_genbasisZ->EvaluateBasis (M_phiz, M_dphiz,
                                M_eigenvaluesZ, M_quadruleZ);
}
```

Compute_*(..)

Sfruttando la separazione di variabili

```
Real ModalSpace::
Compute_PhiPhi (const UInt& j, const UInt& k) const
{
    // ...
    // ... (Date le frequenze estrae i sottoindici p e q)
    for (UInt n = 0; n < M_quadruleY->nbQuadPt(); ++n)
        coeff_y += M_phiy [p_j][n] * normy *
                    M_phiy [p_k][n] * normy *
                    M_Ly * M_quadruleY->weight (n);
    for (UInt n = 0; n < M_quadruleZ->nbQuadPt(); ++n)
        coeff_z += M_phiz[q_j][n] * normz *
                    M_phiz[q_k][n] * normz *
                    M_Lz * M_quadruleZ->weight (n);
    return coeff_y * coeff_z;
}
```

WIP: Abbiamo aggiunto dei metodi per considerare **coefficienti non costanti** che si occupano di calcolare i coefficienti $r_{j,k}^{st}$ **senza separare le variabili**.

Sono ancora da testare e da ottimizzare.

1 Fondamenti teorici

- Hierarchical Model Reduction in 3D
- Basi istruite

2 Implementazione

- Basis1DAbstract
- ModalSpace
- HiModAssembler

3 Risultati numerici

- **Membri principali**

- `M_modalbasis`
- `M_etfespace`

- **Metodi per l'assemblaggio**

- `AddADRProblem(...)`
- `interpolate(...)`
- `Addrhs(...)`
- `AddDirichletBC_In(...)`

- **Metodi per l'analisi**

- `evaluateBase3DGrid(...)` *//HiMod vector*
- `evaluateBase3DGrid(...)` *//Function type*
- `normL2(...)`

- **Metodi per l'export**

- `ExportStructuredVTK(...)`
- `ExportFunctionVTK(...)`

AddADRProblem(...)

Utilizzo del pacchetto ETA per assemblare i problemi 1D

```
for j {  
  for k {  
    VectorSmall<5> Coeff;  
    Coeff[0] = M_modalbasis->Compute_PhiPhi (j , k);  
    // ...  
    { using namespace ExpressionAssembly;  
      // ...  
      integrate(  
        elements( M_etfespace->mesh() ) ,  
        M_fespace->qr() ,  
        M_etfespace ,  
        M_etfespace ,  
        mu*Coeff[0]*dot( grad( phi_i ) , grad( phi_j ) )  
        // ...  
      )  
      >>(systemMatrix->block(k , j));  
    }  
    // ...  
  }  
  return ;  
}
```

1 Fondamenti teorici

- Hierarchical Model Reduction in 3D
- Basi istruite

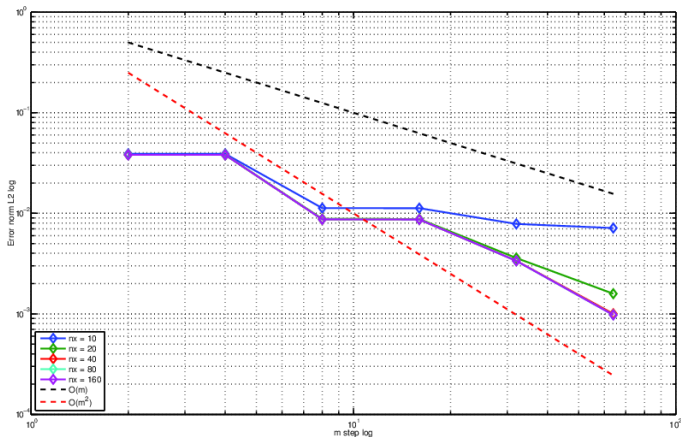
2 Implementazione

- Basis1DAbstract
- ModalSpace
- HiModAssembler

3 Risultati numerici

Convergenza DRDR

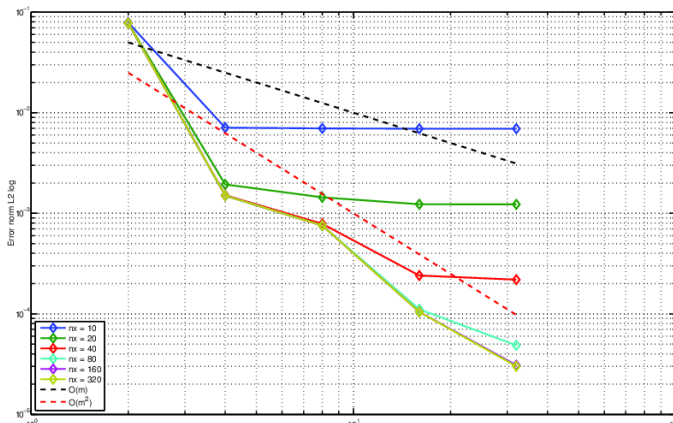
$$u_{es}(x, y, z) = 1e5(Lx - x)^2 z(L_z - z) \exp \left(70 \frac{y^2}{xz + 1} - 140 \frac{y^3}{3L_y(xz + 1)} - \chi \frac{(L_y - 2y)^2}{4L_y \mu} \right)$$



Convergenza RRRR

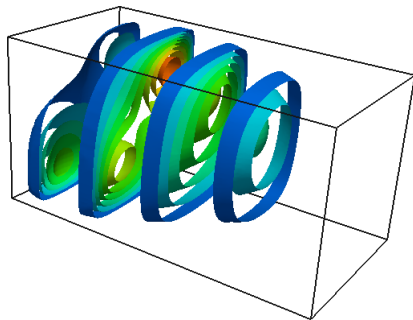
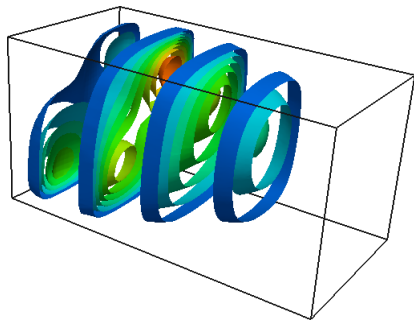
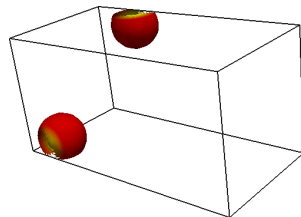
$$C_1(x, y) = \frac{70}{1+x} \left(-\frac{2}{3L_y} y^3 + y^2 \right) \quad C_2(x, z) = \frac{70}{1+x} \left(-\frac{2}{3L_z} z^3 + z^2 \right)$$

$$u_{es}(x, y, z) = 10^5 \exp\left(-\frac{\chi}{\mu L_y} (y - L_y/2)^2 + C_1 - \frac{\chi}{\mu L_z} (z - L_z/2)^2 + C_2\right) (L_x - x)^2$$

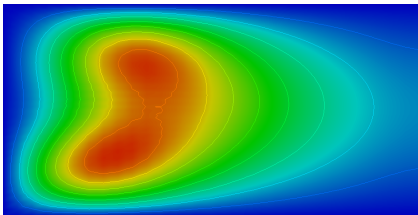


Test camini

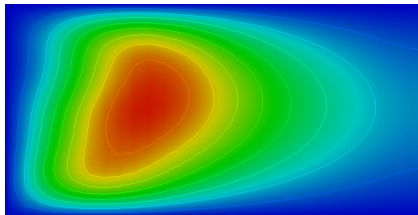
$$\begin{cases} -\mu\Delta u + b \cdot \nabla u + \sigma u = f & \text{in } \Omega \\ u = u_{in} & \text{su } \Gamma_{in} \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \Gamma_{out} \\ u = 0 & \text{su } \Gamma_{vaso} \end{cases}$$



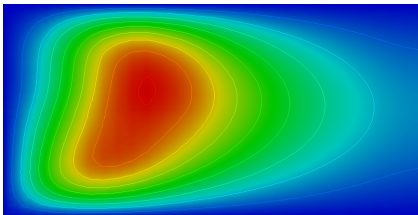
Slice XY 2D



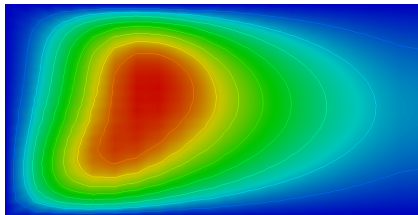
$m=9$



$m=16$

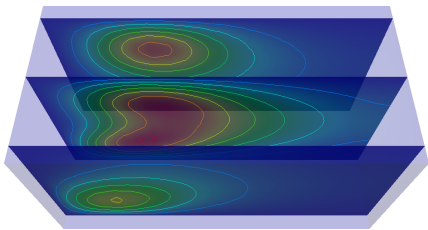


$m=25$

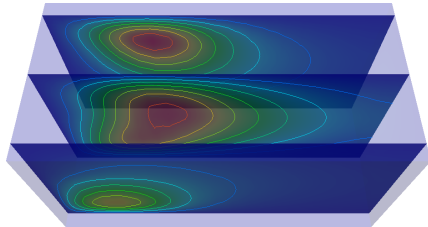


FEM

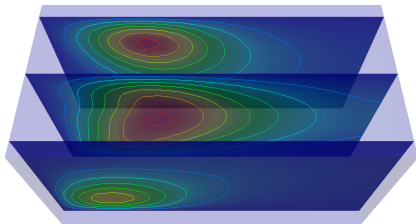
Slice XY



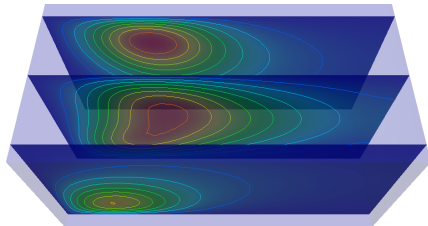
$m=9$



$m=16$



$m=25$



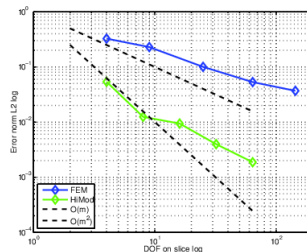
FEM

Conclusioni, sviluppi futuri

...e work in progress

Obiettivo raggiunto!

HiMod consente un notevole risparmio di gradi di libertà.



Conclusioni, sviluppi futuri

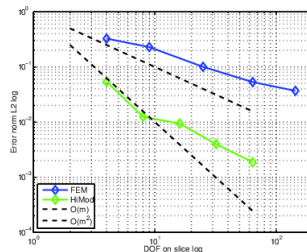
...e work in progress

Obiettivo raggiunto!

HiMod consente un notevole risparmio di gradi di libertà.

Work in progress

Generalizzazione a coefficienti non costanti e mapping.



Conclusioni, sviluppi futuri

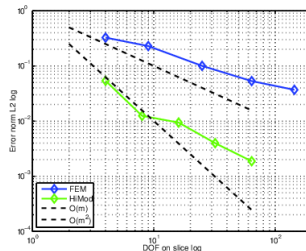
...e work in progress

Obiettivo raggiunto!

HiMod consente un notevole risparmio di gradi di libertà.

Work in progress

Generalizzazione a coefficienti non costanti e mapping.



Dove intervenire adesso?

Conclusioni, sviluppi futuri

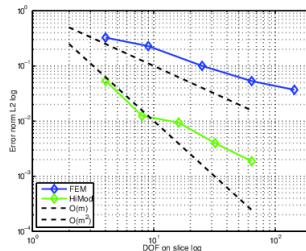
...e work in progress

Obiettivo raggiunto!

HiMod consente un notevole risparmio di gradi di libertà.

Work in progress

Generalizzazione a coefficienti non costanti e mapping.



Dove intervenire adesso?

- Sviluppo di una **struttura dati** ad hoc per la matrice di sistema

Conclusioni, sviluppi futuri

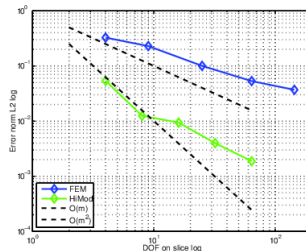
...e work in progress

Obiettivo raggiunto!

HiMod consente un notevole risparmio di gradi di libertà.

Work in progress

Generalizzazione a coefficienti non costanti e mapping.



Dove intervenire adesso?

- Sviluppo di una **struttura dati** ad hoc per la matrice di sistema
- **Parallelizzazione** del codice

Conclusioni, sviluppi futuri

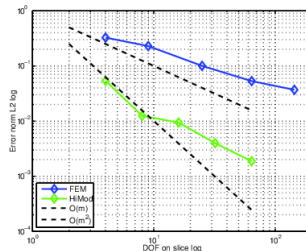
...e work in progress

Obbiettivo raggiunto!

HiMod consente un notevole risparmio di gradi di libertà.

Work in progress

Generalizzazione a coefficienti non costanti e mapping.



Dove intervenire adesso?

- Sviluppo di una **struttura dati** ad hoc per la matrice di sistema
- **Parallelizzazione** del codice
- Base modale con **polinomi di Legendre**

Conclusioni, sviluppi futuri

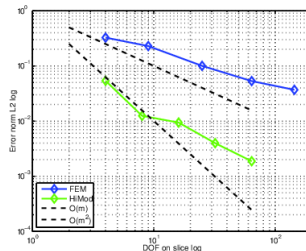
...e work in progress

Obiettivo raggiunto!

HiMod consente un notevole risparmio di gradi di libertà.

Work in progress

Generalizzazione a coefficienti non costanti e mapping.



Dove intervenire adesso?

- Sviluppo di una **struttura dati** ad hoc per la matrice di sistema
- **Parallelizzazione** del codice
- Base modale con **polinomi di Legendre**
- Estensione a un dominio a **sezione circolare**

Conclusioni, sviluppi futuri

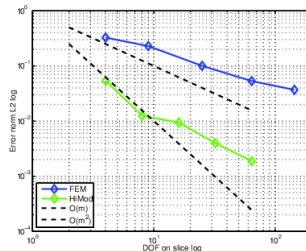
...e work in progress

Obbiettivo raggiunto!

HiMod consente un notevole risparmio di gradi di libertà.

Work in progress

Generalizzazione a coefficienti non costanti e mapping.



Dove intervenire adesso?

- Sviluppo di una **struttura dati** ad hoc per la matrice di sistema
- **Parallelizzazione** del codice
- Base modale con **polinomi di Legendre**
- Estensione a un dominio a **sezione circolare**
- **Geometria generica** con la mappa

