3D- Riduzione Gerarchica di Modello

con le basi istruite

Matteo Aletti & Andrea Bortolossi

Politecnico di Milano

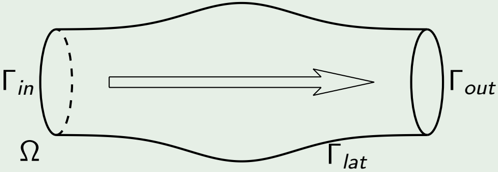
16 Ottobre 2013

1. Fondamenti teorici
   - Hierarchical Model Reduction in 3D
   - Basi istruite

Motivazione

esistenza di una direzione dominante

Vogliamo risolvere un certo tipo di problemi: quelli che presentano una direzione preferenziale



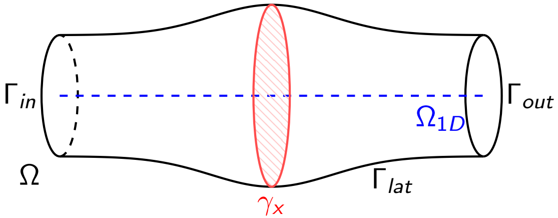
Modello 1D
Bassa precisione
Economico

HiMod

Modello 3D
Alta precisione
Costoso

- Fibra di supporto rettilinea Ω_{1D} dove avviene la dinamica dominante.
- Suddivisione del dominio in slices γ_x ortogonali alla fibra di supporto.

$$\Omega = \bigcup_{x \in \Omega_{1D}} \gamma_x$$



Idea:

- mappare Ω in un dominio di riferimento $\widehat{\Omega}$ in modo che
$$\hat{\gamma}_{\hat{x}} = \hat{\gamma} \ \forall \hat{x} \in \widehat{\Omega}_{1D}$$
- espandere, in direzione trasversale, la soluzione rispetto alla base di Fourier generalizzata
$$\{\varphi_k(\hat{y}, \hat{z})\}_{k \in \mathbb{N}}$$

Noi lavoreremo direttamente in un riferimento, quindi non utilizzeremo la notazione con i cappelli.

Spazi in direzione trasversale

$$V_\gamma^\infty = \left\{ v(y,z) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \varphi_k(y,z) \right\}$$

$$V_\gamma^m = \left\{ v(y,z) = \sum_{k=1}^{m} v_k \varphi_k(y,z) \right\}$$

Lungo la direzione principale usiamo uno spazio V_{1D} di tipo $H^1(\Omega_{1D})$ che consideri correttamente le condizioni al bordo. Possiamo ora definire gli spazi ridotti come spazi prodotto:

Spazi ridotti

$$V^{\infty}(\Omega) = V_{1D} \otimes V_{\gamma}^{\infty} := \left\{ v(x,y,z) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)\varphi_k(y,z), v_k \in V_{1D} \right\}.$$

$$V^{m}(\Omega) = V_{1D} \otimes V_{\gamma}^{m} := \left\{ v(x,y,z) = \sum_{k=1}^{m} v_k(x)\varphi_k(y,z), v_k \in V_{1D} \right\}.$$

Il problema che vogliamo risolvere ...

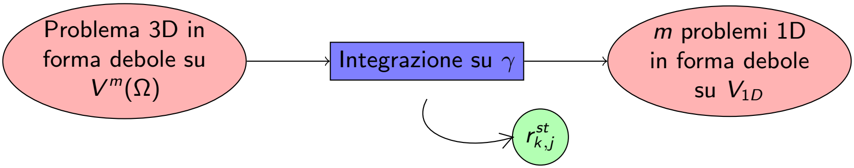
$$\begin{cases} -\mu\Delta u + \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u + \sigma u = f & \text{in}\Omega \\ u = 0 & \text{su}\partial\Omega \end{cases}$$

... e la sua formulazione debole

Trovare $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega \mu \nabla u \nabla v + \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u v + \sigma u v d\Omega = \int_\Omega f v d\Omega \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Modelli ridotti
Problemi 1D accoppiati



Trovare $\{u_k\}_{k=1}^m$ con $u_k \in V_{1D}$ $\forall k = 1 \dots m$ tale che

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{\Omega_{1D}} \Bigg[\underbrace{\hat{r}^{11}_{k,j} \frac{\partial u_k}{\partial x} \frac{\partial \theta_j}{\partial x}}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{\hat{r}^{10}_{k,j} \frac{\partial u_k}{\partial x} \theta_j}_{\text{Advection}} + \underbrace{\hat{r}^{00}_{k,j} u_k \theta_j}_{\text{Reaction}} \, dx \Bigg] = \int_{\Omega_{1D}} \theta_j f_k dx. \quad \forall j = 1 \dots m \quad \theta_j \in V_{1D}$$

I problemi 1D sono accoppiati fra di loro con i coefficienti $r^{st}_{k,j}$ che comprimono le informazioni provenienti dalla direzione trasversale tramite degli opportuni integrali su γ.

Scelta della base

Base sinusoidale e polinomi di Legendre

Letteratura

Nel caso di condizioni di Dirichlet, lungo la direzione trasversale è necessario scegliere una base opportuna. In letteratura, in 2D, sono state utilizzate delle funzioni sinusoidali

$$\sin(\pi k x) \quad \text{in}(0, 1)$$

oppure i polinomi di Legendre, moltiplicati per un fattore $(1 - x^2)$, normalizzati con un procedimento di Gram-Schmidt.

Teorema

Siano V,H spazi di Hilbert, con H separabile, V denso in H, e tali che l'immersione di V in H sia compatta. Sia a(,) una forma bilineare in V, continua, simmetrica e debolmente coerciva. Allora:

(a) $\sigma(a) = \sigma_p(a) \subset (-\lambda_0, +\infty)$. *Inoltre, se la successione degli autovalori* $\{\lambda_m\}_{m\geq 1}$ *è infinita allora* $\lambda_m \to +\infty$;

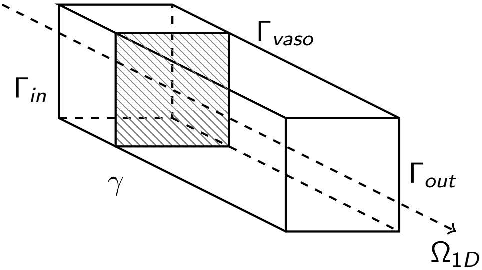
(b) *se u ,v sono autovettori corrispondenti ad autovalori differenti, allora* $a(u,v) = 0 = (u,v)$. *Inoltre, H ha una base ortonormale* $\{u_m\}_{m\geq 1}$ *di autovettori di a;*

(c) *la successione* $\{u_m/\sqrt{\lambda_0 + \lambda_m}\}_{m\geq 1}$ *costituisce una base ortonormale in V, rispetto al prodotto scalare*

$$((u,v)) = a(u,v) + \lambda_0(u,v).$$

Ipotesi geometriche

Dominio parallelepipedo



- si può fare anche con il cerchio
- condizioni al bordo a coefficienti costanti su ogni lato del quadrato

- i conti
- la tabella con i risultati

facciamo qui un esempio numerico con Ly diverso da Lz e i conti proprio
questa ultima slide ci da il la per la seconda sezione