

Podstawy logiki i teorii mnogości



Ćw. 6

opracował: dr inż. Jakub Długosz

Celem ćwiczenia jest zaznajomienie z relacjami i funkcjami

Zadanie 1

Rozważmy dwie relacje w zbiorze \mathbb{Z} :

R

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} (aRb \Leftrightarrow 3|(a - b))$$

S

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} (aSb \Leftrightarrow 3|(b - a))$$

Sprawdzić czy:

- a) $1R0$
- b) $1S0$
- c) $0R1$
- d) $0S1$
- e) $21R15$
- f) $21S15$
- g) $15R21$
- h) $15S21$
- i) $21R-15$
- j) $-17R-17$.

Zadanie 2

Sprawdzić, czy relacje **R, S** określone w zadaniu 1 są:

- a) zwrotne w \mathbb{Z}
- b) przeciwzwrotne w \mathbb{Z}
- c) symetryczne w \mathbb{Z}
- d) słabo antysymetryczne w \mathbb{Z}
- e) przeciwsymetryczne (asymetryczne) w \mathbb{Z}
- f) przechodnie w \mathbb{Z}
- g) spójne w \mathbb{Z} .

Zadanie 3

Określ czym jest relacja **identyczności** $I_{\mathbb{Z}}$ w zbiorze liczb całkowitych \mathbb{Z} .

Zadanie 4

Dla relacji S z zadania 1 określ

- a) jej dziedzinę (inaczej nazywaną 1-szą dziedziną) $D(S) = D_1(S)$
- b) jej przeciwdziedzinę (inaczej nazywaną 2-gą dziedziną) $D^*(S) = D_2(S)$
- c) zbiór $D(S) \cup D^*(S)$ zwany jej polem
- d) zbiór $S^{-1} := \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : (b, a) \in S\}$.

Zadanie 5

Czy relacja która jest przeciwsymetryczna jest

- a) zwrotna,
- b) przeciwzwrotna ?

Zadanie 6

Udowodnić, że relacja R jest symetryczna $\Leftrightarrow (R \subseteq R^{-1})$.

Zadanie 7 Znajdź dziedzinę i przeciwdziedzinę relacji R oraz relację R^{-1} jeśli:

- a) $R = \{(a, b), (a, c), (b, c)\}$
- b) $R = \{(a, a), (a, b), (b, c)\}$
- c) $R = \{(a, b, c), (a, c, b), (a, d, b)\}$
- d) $aRb \Leftrightarrow (a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{N} \wedge (a < b))$.

Zadanie 8

Sprawdzić, czy relacje określone w **Zadaniu 1** i **Zadaniu 7** są relacjami

- a) równoważności
- b) porządku.

Zadanie 9

Sprawdzić, które z relacji określonych w **Zadaniu 1** i **Zadaniu 7** są funkcjami.

Zadanie 10

Wyznaczyć **klasy abstrakcji** dla relacji równoważności R i S określonych w **Zadaniu 1**.

Dla relacji równoważności $T \subseteq X^2$ klasę abstrakcji $[a]_T$ elementu a definiujemy jako $[a]_T := \{b \in X : aTb\}$.

Zadanie 11

Niech T będzie relacją określoną w zbiorze słów wypisanych w danym słowniku języka polskiego następująco

$\forall c, d \in X (cTd \Leftrightarrow \text{słowo } c \text{ zaczyna się na tę samą literę co słowo } d)$.

Pokazać, że T jest relacją równoważności oraz wyznaczyć klasy abstrakcji relacji T .

Zadanie 12

Niech $T \subseteq X^2$ będzie relacją równoważności. Pokazać, że:

$\forall c, d \in X [([c]_T = [d]_T) \vee ([c]_T \cap [d]_T = \emptyset)]$.