Podstawy logiki i teorii mnogości

Ćw. 5

opracował: dr inż. Jakub Długosz

Celem ćwiczenia jest zaznajomienie z algebrą zbiorów

Zadanie 1

Podać elementy zbiorów

a) $\emptyset$
b) $\{\emptyset\}$
c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
d) $\{x \in \mathbb{N}: x < 5\}$
e) $\{x \in \mathbb{N}: x^2 < 5\}$
f) $\{x \in \mathbb{R}: x^2 + 1 = 4\}$
g) $\{x \in \mathbb{Q}: x^2 + 1 = 4\}$
h) $\{x \in \mathbb{R}: x^2 + 1 > 4\}$
i) $\{x \in \mathbb{Z}: x^2 + 1 > 4\}$
j) $\{x \in \mathbb{R}: |x| > 4\}$
k) $\{x \in \mathbb{Z}: |x| > 4\}$
l) $\big\{\{a, b\}, \{\{a, b\}\}, \emptyset\big\}$
m) $\{\,\{\{a\}\}, \{a\}, a\}$

Zadanie 2

Obliczyć:

a) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{N}: \boldsymbol{x} < 5\} \setminus \{x \in \mathbb{N}: x^2 < 5\}$
b) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{N}: \boldsymbol{x} < 5\} \cup \{x \in \mathbb{N}: x^2 < 5\}$
c) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{N}: \boldsymbol{x} < 5\} \cap \{x \in \mathbb{N}: x^2 < 5\}$
d) $\{3,5\} \setminus \{5,7\}$
dd) $\{3,5\} \cup \{5,7\}$
ddd) $\{3,5\} \cap \{5,7\}$
e) $\{3,5\} \dot{-} \{5,7\}$
f) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{N}: \boldsymbol{x} < 5\}'$przyjmując jako zbiór uniwersalny (przestrzeń) $\mathbb{N}$
g) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{N}: \boldsymbol{x} < 5\}'$ przyjmując jako zbiór uniwersalny (przestrzeń) $\mathbb{Z}$
h) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{N}: \boldsymbol{x} < 5\}'$ przyjmując jako zbiór uniwersalny (przestrzeń) $\mathbb{R}$
i) $\{x \in \mathbb{Z}: x^2 + 1 > 4\}'$ przyjmując jako zbiór uniwersalny (przestrzeń) $\mathbb{Z}$

Zadanie 3

Niech X będzie zbiorem uniwersalnym (przestrzenią), a 2^A niech oznacza zbiór potęgowy zbioru A.
Pokazać, że:

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
b) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
c) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow [B = A \cup (B \setminus A)]$
d) $((A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D)) \Rightarrow (A \setminus D \subseteq B \setminus C)$

e) $((A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D)) \Rightarrow (A \cap C \subseteq B \cap D)$
f) $A \dotminus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
g) $(A \subseteq B) \Rightarrow (2^A \subseteq 2^B)$
h) $\emptyset \dotminus A = A$
i) $A \cap (B \dotminus C) = (A \cap B) \dotminus (A \cap C)$

Zadanie 4

Niech X będzie zbiorem uniwersalnym (przestrzenią). Czemu są równe:

a) $A \cup \emptyset$
b) $A \cap \emptyset$
c) $\emptyset'$
d) $A \cup A'$
e) $A \cap A'$
f) $(A \cup B)'$
g) $(A \cap B)'$
h) $A \cup (A \cap B)$
i) $A \cap (A \cup B)$

Zadanie 5

Jakie zależności muszą zachodzić pomiędzy a, b, c, d jeśli żadne z nich nie jest zbiorem pustym oraz:

a) $\{a, b, a\} = \{a, b\}$
b) $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$
c) {{a,b},c}={{a},c}?

Zadanie 6

Określić jakie zależności muszą zachodzić pomiędzy zbiorami A, B, C jeśli:

a) $(A \setminus C) \cup B = A \cup B$
b) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$

Zadanie 7

Wymień kilka aksjomatów teorii mnogości (np. aksjomat sumy, istnienia, zbioru potęgowego, pewnik wyboru, regularności).

Zadanie 8

Czy istnieją zbiory A i B takie, że:

a) A ∈ A
b) A ∈ B ∧ B ∈ A ?

Zadanie 9

Czy istnieje zbiór $\{x \in A : x \neq x\}$?

Zadanie 10

Jak skonstruować zbiór liczb naturalnych za pomocą algebry zbiorów?

Zadanie 11

Pewnik abstrakcji głosi, że dla dowolnej formuły zdaniowej φ istnieje zbiór wszystkich i tylko tych przedmiotów, które tę formułę spełniają. Udowodnij, że przyjęcie tego pewnika prowadzi do sprzeczności (antynomii).