Podstawy logiki i teorii mnogości

Ćw. 7

opracował: dr inż. Jakub Długosz

Celem ćwiczenia jest zaznajomienie z funkcjami oraz mocami zbiorów.

Zadanie 1

Sprawdź, które z poniższych funkcji są surjekcjami (funkcjami „na"), iniekcjami (funkcjami „w"), które z nich są różnowartościowe (1-1) oraz jeśli jest to możliwe wyznacz funkcję odwrotną:

a) $f\colon \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1,2,3\}$
   $f(1) = 2,\ f(2) = 3,\ f(3) = 1$

b) $g\colon \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1,2,3\}$
   $g(1) = 2,\ g(2) = 3,\ g(3) = 2$

c) $h\colon \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\} \longrightarrow \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}$
   $h(a) = a + 1$

d) $s\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \{0, 1, 2\}$
   $s(a) = a \,\%\, 3$,
   $a \,\%\, 3$ oznacza resztę z dzielenia liczby *a* przez *3*.

Zadanie 2

Dla funkcji z **zad. 1** wyznacz:

a) $f \circ g$
b) $g \circ f$.

Zadanie 3

Czy dla funkcji f i s z **zad. 1** **możemy określić** $f \circ s$?

Zadanie 4

Niech $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami określonymi następująco:
$f(x) = 5x + 9,\ g(x) = -3x^2$. Czym są:
a) $f \circ g$ b) $g \circ f$?

Zadanie 5

Uzasadnij, że **zachodzą** bądź **nie zachodzą** następujące relacje:

a) $\{5\} \sim \{12\}$ b) $\{1, 2\} \sim \{5, 12\}$ c) $\{-3, 4\} \sim \{5, 12\}$ d) $\{5\} \sim \{5, 12\}$
e) $\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\} \sim \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}$ f) $\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\} \sim \{1, 2, 3, 4\}$
g) $\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\} \sim \mathbb{N}$ h) $\{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\} \sim \mathbb{N}$

Zadanie 6

Podaj wartości:

a) $\overline{\overline{\{1,2\}}}$ b) $\overline{\overline{\{1,2\}\setminus\{2\}}}$ c) $\overline{\overline{\{5,\ 12\}}}$ d) $\overline{\overline{\{-4,\ 2\} \cup \{5,12\}}}$ e) $\overline{\overline{\emptyset}}$

Zadanie 7

Czy między jakimiś zapisami podanymi w punktach a)–f) **możemy postawić znak równości (=)**? Jeśli tak, to wypisz wszystkie takie równości.

a) $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$ b) $\overline{\overline{\mathbb{Z}}}$ c) $\overline{\overline{\mathbb{N}}}$ d) $\overline{\overline{\{1,2,3,\dots\}}}$ e) $\aleph_0$ f) c

Zadanie 8

Podaj wartości:

a) $\aleph_0 + 3$ b) $\aleph_0 + \aleph_0$ c) $3 \cdot \aleph_0$ d) $\aleph_0 \cdot \aleph_0$ e) $\aleph_0^3$ f) $4 \cdot \aleph_0^3 + 5 \cdot \aleph_0 + 3$

Zadanie 9

Niech $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ będą dwoma **liczbami kardynalnymi**. Co to znaczy, że:

a) $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ b) $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$?

Zadanie 10

Jak uzasadnić, że:

a) $\overline{\overline{(2,3)}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}}$ b) $\overline{\overline{[2,3]}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}}$?

Uwaga: Zamiast oznaczenia [2,3] stosuje się też oznaczenie <2,3>.