Podstawy logiki i teorii mnogości

Ćw. 6

opracował: dr inż. Jakub Długosz

Celem ćwiczenia jest zaznajomienie z relacjami i funkcjami

Zadanie 1

Rozważmy dwie relacje w zbiorze $\mathbb{Z}$:

R

$\forall a, b \in \mathbb{Z}\ (aRb \iff 3|(a-b))$

S

$\forall a, b \in \mathbb{Z}\ (aSb \iff 3|(b-a))$

Sprawdzić czy:

a) 1R0
b) 1S0
c) 0R1
d) 0S1
e) 21R15
f) 21S15
g) 15R21
h) 15S21
i) 21R-15
j) -17R-17 .

Zadanie 2

Sprawdzić, czy **relacje R,S określone w zadaniu 1** są:

a) zwrotne w $\mathbb{Z}$
b) przeciwzwrotne w $\mathbb{Z}$
c) symetryczne w $\mathbb{Z}$
d) słabo antysymetryczne w $\mathbb{Z}$
e) przeciwsymetryczne (asymetryczne) w $\mathbb{Z}$
f) przechodnie w $\mathbb{Z}$
g) spójne w $\mathbb{Z}$.

Zadanie 3

Określ czym jest **relacja identyczności $I_{\mathbb{Z}}$** w zbiorze liczb całkowitych $\mathbb{Z}$.

Zadanie 4

Dla relacji S z zadania 1 określ

a) jej dziedzinę (inaczej nazywaną 1-szą dziedziną) $D(S) = D_1(S)$
b) jej przeciwdziedzinę (inaczej nazywaną 2-gą dziedziną) $D^*(S) = D_2(S)$
c) zbiór $D(S) \cup D^*(S)$ zwany jej polem
d) zbiór $S^{-1} := \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : (b,a) \epsilon S\}$.

Zadanie 5

Czy relacja która jest przeciwsymetryczna jest

a) zwrotna,
b) przeciwzwrotna ?

Zadanie 6

Udowodnić, że relacja R jest symetryczna $\Leftrightarrow (R \subseteq R^{-1})$.

Zadanie 7

Znajdź dziedzinę i przeciwdziedzinę relacji R oraz relację R^{-1} jeśli:

a) R = {(a,b), (a,c), (b,c)}
b) R = {(a,a), (a,b), (b,c)}
c) R = {(a,b,c),(a,c,b), (a,d,b)}
d) aRb $\Leftrightarrow$ $\big(a \epsilon \mathbb{N} \wedge b \epsilon \mathbb{N} \wedge (a<b)\big)$.

Zadanie 8

Sprawdzić, czy relacje określone w **Zadaniu 1** i **Zadaniu 7** są relacjami

a) równoważności
b) porządku.

Zadanie 9

Sprawdzić, które z relacji określonych w **Zadaniu 1** i **Zadaniu 7** są funkcjami.

Zadanie 10

Wyznaczyć **klasy abstrakcji** dla relacji równoważności R i S określonych w **Zadaniu 1**.
Dla relacji równoważności $T \subseteq X^2$ klasę abstrakcji $[a]_T$ elementu a definiujemy jako $[a]_T := \{b \epsilon X : aTb\}$.

Zadanie 11

Niech $T \subseteq X^2$ będzie relacją równoważności. Pokazać, że:
$\forall \mathrm{c}, \mathrm{d} \epsilon \mathrm{X} \, [\, ([\mathrm{c}]_\mathrm{T} = [\mathrm{d}]_\mathrm{T}) \vee ([\mathrm{c}]_\mathrm{T} \cap [\mathrm{d}]_\mathrm{T} = \emptyset)]$.