

# Informatik I: Einführung in die Programmierung

## 7. Entwurf von Schleifen, While-Schleifen, Hilfsfunktionen und Akkumulatoren

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg



UNI  
FREIBURG

Prof. Dr. Peter Thiemann

5. November 2025

# 1 Entwurf von Schleifen

- Fallstudie: Rechnen mit Polynomen
- Skalarmultiplikation
- Auswertung
- Ableitung
- Integration
- Binäre Operationen
- Addition
- Multiplikation
- Verbesserte Typannotationen
- Lexikographische Ordnung

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation  
Auswertung

Ableitung  
Integration

Binäre Operationen  
Addition

Multiplikation  
Verbesserte  
Typannotationen

Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

# 1 Entwurf von Schleifen

- Fallstudie: Rechnen mit Polynomen
- Skalarmultiplikation
- Auswertung
- Ableitung
- Integration
- Binäre Operationen
- Addition
- Multiplikation
- Verbesserte Typannotationen
- Lexikographische Ordnung

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte

Typannotationen

Lexikographische

Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

## Definition

Ein *Polynom vom Grad n* ist eine Folge von Zahlen  $[p_0, p_1, \dots, p_n]$ , den *Koeffizienten*. Dabei ist  $n \geq 0$  und der *Leitkoeffizient*  $p_n \neq 0$ .

Andere Schreibweise:  $\sum_{i=0}^n p_i x^i$

## Beispiele

$$\begin{array}{rcl} [] & \approx & 0 \\ [1] & \approx & 1 \\ [3, 2, 1] & \approx & 3 + 2x + x^2 \end{array}$$

## Anwendungen

Kryptographie, fehlerkorrigierende Codes.

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplication

Verbesserte  
Typannotationen

Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

# Darstellung von Polynomen in Python

- Liste von Gleitkommazahlen

```
type polynom = list[float]
```

- Diese *Typdefinition* definiert einen neuen Typ mit Namen `polynom`.
- Der Typ `polynom` ist gleichwertig zum Typ `list[float]`.
- Konvention für ein Polynom `p` (Erinnerung):  
`len(p) == 0 or p[-1] != 0`

# Rechenoperationen auf Polynomen

- (Skalar) Multiplikation mit einer Zahl  $c$

$$c \cdot [p_0, p_1, \dots, p_n] = [c \cdot p_0, c \cdot p_1, \dots, c \cdot p_n]$$

- Auswertung an der Stelle  $x_0$

$$[p_0, p_1, \dots, p_n](x_0) = \sum_{i=0}^n p_i \cdot x_0^i$$

- Ableitung

$$[p_0, p_1, \dots, p_n]' = [1 \cdot p_1, 2 \cdot p_2, \dots, n \cdot p_n]$$

- Integration

$$\int [p_0, p_1, \dots, p_n] = [0, p_0, p_1/2, p_2/3, \dots, p_n/(n+1)]$$

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte

Typannotationen

Lexikographische

Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

# 1 Entwurf von Schleifen

- Fallstudie: Rechnen mit Polynomen
- Skalarmultiplikation
- Auswertung
- Ableitung
- Integration
- Binäre Operationen
- Addition
- Multiplikation
- Verbesserte Typannotationen
- Lexikographische Ordnung

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte

Typannotationen

Lexikographische

Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

# Skalarmultiplikation

$$c \cdot [p_0, p_1, \dots, p_n] = [c \cdot p_0, c \cdot p_1, \dots, c \cdot p_n]$$

## Schritt 1: Bezeichner und Datentypen

Die Funktion `scalar_mult` nimmt als Eingabe

- `c : float`, den Faktor,
- `p : polynom`, ein Polynom.

Der Grad des Polynoms ergibt sich aus der Länge der Sequenz.

# Skalarmultiplikation

## Schritt 2: Funktionsgerüst

```
def scalar_mult(  
    c : float,  
    p : polynom  
) -> polynom:  
  
    # fill in, initialization  
    for i in range(len(p)):  
        pass # fill in action for each element  
    return ...
```

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung  
Ableitung  
Integration

Binäre Operationen  
Addition  
Multiplikation

Verbesserte  
Typannotationen  
Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

# Skalarmultiplikation

## Schritt 3: Beispiele

```
assert(scalar_mult(42, []) == [])
assert(scalar_mult(42, [1,2,3]) == [42,84,126])
assert(scalar_mult(-0.1, [1,2,4]) == [-0.1,-0.2,-0.4])
```

# Skalarmultiplikation

## Schritt 4: Funktionsdefinition

```
def scalar_mult(  
    c : float,  
    p : polynom  
) -> polynom:  
    result = []  
    for i in range(len(p)):  
        result = result + [c * p[i]]  
    return result
```

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte

Typannotationen

Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

## Rumpf der Skalarmultiplikation

```
result = []      # initialization
for i in range(len(p)):
    result = result + [c * p[i]]      # update
return result
```

### Variable `result` ist Akkumulator

- In `result` wird das Ergebnis aufgesammelt (akkumuliert).
- `result` wird vor der Schleife initialisiert auf das Ergebnis für die leere Liste.
- Jede Schleifeniteration aktualisiert das Ergebnis in `result`, indem das Ergebnis um das aktuelle Element `p[i]` erweitert wird.

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte  
Typannotationen

Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

# Begründung

- $p = [p_0, p_1, \dots, p_n]$
- `r = []`
- $r = []$
- `for i in range(len(p)):`
- vorher:  $r = [c \cdot p_0, \dots, c \cdot p_{i-1}]$
- `r = r + [c * p[i]]`
- nachher:  $r = [c \cdot p_0, \dots, c \cdot p_i]$
- nach dem  $n+1$ -ten Durchlauf (letzter Durchlauf der Schleife):  
 $r = [c \cdot p_0, \dots, c \cdot p_n]$

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte  
Typannotationen

Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

# Ein fehlendes Beispiel



Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte  
Typannotationen

Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

## Skalarmultiplikation mit 0

# 1 Entwurf von Schleifen

- Fallstudie: Rechnen mit Polynomen
- Skalarmultiplikation
- Auswertung
- Ableitung
- Integration
- Binäre Operationen
- Addition
- Multiplikation
- Verbesserte Typannotationen
- Lexikographische Ordnung

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation  
Auswertung

Ableitung  
Integration

Binäre Operationen  
Addition

Multiplikation  
Verbesserte  
Typannotationen  
Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

$$[p_0, p_1, \dots, p_n](x_0) = \sum_{i=0}^n p_i \cdot x_0^i$$

## Schritt 1: Bezeichner und Datentypen

Die Funktion `poly_eval` nimmt als Eingabe

- `p` : `polynom`, ein Polynom,
- `x` : `float`, das Argument.

Der Grad des Polynoms ergibt sich aus der Länge der Sequenz.

# Auswertung

## Schritt 2: Funktionsgerüst

```
def poly_eval(  
    p : polynom,  
    x : float  
) -> float:  
  
    # fill in  
    for i in range(len(p)):  
        pass # fill in action for each element  
    return ...
```

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte

Typannotationen

Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

## Schritt 3: Beispiele

```
assert(poly_eval([], 2) == 0)
assert(poly_eval([1,2,3], 2) == 17)
assert(poly_eval([1,2,3], -0.1) == 0.83)
```

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte

Typannotationen

Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

# Auswertung

## Schritt 4: Funktionsdefinition

```
def poly_eval(  
    p : polynom,  
    x : float  
) -> float:  
  
    result = 0  
  
    for i in range(len(p)):  
        result = result + p[i] * x ** i  
  
    return result
```

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte

Typannotationen

Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

# 1 Entwurf von Schleifen

- Fallstudie: Rechnen mit Polynomen
- Skalarmultiplikation
- Auswertung
- Ableitung
- Integration
- Binäre Operationen
- Addition
- Multiplikation
- Verbesserte Typannotationen
- Lexikographische Ordnung

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation  
Auswertung

Ableitung  
Integration

Binäre Operationen  
Addition

Multiplikation  
Verbesserte  
Typannotationen  
Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

$$[p_0, p_1, \dots, p_n]' = [1 \cdot p_1, 2 \cdot p_2, \dots, n \cdot p_n]$$

## Schritt 1: Bezeichner und Datentypen

Die Funktion `derivative` nimmt als Eingabe

- `p : polynom`, ein Polynom.

Der Grad des Polynoms ergibt sich aus der Länge der Sequenz.

## Schritt 2: Funktionsgerüst

```
def derivative(  
    p : polynom  
) -> polynom:  
# initialization  
for i in range(len(p)):  
    pass # fill in action for each element  
return ...
```

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte  
Typannotationen

Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

## Schritt 3: Beispiele

```
assert derivative([])      == []
assert derivative([42])    == []
assert derivative([1,2,3])  == [2,6]
```

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation  
Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen  
Addition

Multiplikation

Verbesserte  
Typannotationen  
Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

# Ableitung

## Schritt 4: Funktionsdefinition

```
def derivative(  
    p : polynom  
) -> polynom:  
result = []  
for i in range(len(p)):  
    if i > 0:  
        result = result + [i * p[i]]  
return result
```

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte

Typannotationen

Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

# 1 Entwurf von Schleifen

- Fallstudie: Rechnen mit Polynomen
- Skalarmultiplikation
- Auswertung
- Ableitung
- Integration
- Binäre Operationen
- Addition
- Multiplikation
- Verbesserte Typannotationen
- Lexikographische Ordnung

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation  
Auswertung

Ableitung  
Integration

Binäre Operationen  
Addition

Multiplikation  
Verbesserte  
Typannotationen

Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

$$\int [p_0, p_1, \dots, p_n] = [0, p_0, p_1/2, p_2/3, \dots, p_n/(n+1)]$$

## Schritt 1: Bezeichner und Datentypen

Die Funktion `integral` nimmt als Eingabe

- `p : polynom`, ein Polynom.

Der Grad des Polynoms ergibt sich aus der Länge der Sequenz.

Weitere Schritte  
selbst

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte  
Typannotationen

Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

# 1 Entwurf von Schleifen

- Fallstudie: Rechnen mit Polynomen
- Skalarmultiplikation
- Auswertung
- Ableitung
- Integration
- Binäre Operationen
- Addition
- Multiplikation
- Verbesserte Typannotationen
- Lexikographische Ordnung

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation  
Auswertung

Ableitung  
Integration

Binäre Operationen  
Addition

Multiplikation  
Verbesserte  
Typannotationen

Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

# Operationen mit zwei Polynomen

## ■ Addition (falls $n \leq m$ )

$$\begin{aligned}[p_0, p_1, \dots, p_n] + [q_0, q_1, \dots, q_m] \\ = [p_0 + q_0, p_1 + q_1, \dots, p_n + q_n, q_{n+1}, \dots, q_m]\end{aligned}$$

## ■ Multiplikation von Polynomen

$$\begin{aligned}[p_0, p_1, \dots, p_n] \cdot [q_0, q_1, \dots, q_m] \\ = [p_0 \cdot q_0, p_0 \cdot q_1 + p_1 \cdot q_0, \dots, \sum_{i=0}^k p_i \cdot q_{k-i}, \dots, p_n \cdot q_m]\end{aligned}$$

# 1 Entwurf von Schleifen

- Fallstudie: Rechnen mit Polynomen
- Skalarmultiplikation
- Auswertung
- Ableitung
- Integration
- Binäre Operationen
- Addition
- Multiplikation
- Verbesserte Typannotationen
- Lexikographische Ordnung

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation  
Auswertung

Ableitung  
Integration

Binäre Operationen  
Addition

Multiplikation  
Verbesserte  
Typannotationen

Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

$$\begin{aligned}(p_0, p_1, \dots, p_n) + (q_0, q_1, \dots, q_m) \\= (p_0 + q_0, p_1 + q_1, \dots, p_n + q_n, q_{n+1}, \dots, q_m)\end{aligned}$$

## Schritt 1: Bezeichner und Datentypen

Die Funktion `poly_add` nimmt als Eingabe

- `p` : `polynom`, ein Polynom.
- `q` : `polynom`, ein Polynom.

Die Grade der Polynome ergeben sich aus der Länge der Sequenzen.

## Achtung

Die Grade der Polynome können unterschiedlich sein!

# Addition

## Schritt 2: Funktionsgerüst

```
def poly_add(  
    p : polynom,  
    q : polynom  
) -> polynom:  
    # fill in  
    for i in range(...):  # <<-----  
        pass # fill in action for each element  
    return ...
```

## Frage

Was ist das Argument ... von `range`?

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation  
Auswertung  
Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplication

Verbesserte  
Typannotationen

Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

## Schritt 3: Beispiele

```
assert(poly_add([], []) == [])
assert(poly_add([42], []) == [42])
assert(poly_add([], [11]) == [11])
assert(poly_add([1,2,3], [4,3,2,5]) == [5,5,5,5])
```

## Antwort: Argument von range

```
maxlen = max (len (p), len (q))
```

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung  
Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplication

Verbesserte  
Typannotationen

Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

# Addition

## Schritt 4: Funktionsdefinition, erster Versuch

```
def poly_add(  
    p : polynom,  
    q : polynom  
) -> polynom:  
  
maxlen = max (len (p), len (q))  
result = []  
for i in range(maxlen):  
    result = result + [p[i] + q[i]]  
return result
```

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation  
Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte  
Typannotationen

Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

# Addition

## Problem

Eine Assertion schlägt fehl!

```
assert(poly_add([], []) == [])
assert(poly_add([42], []) == [42])
```

## Analyse

Zweite Assertion schlägt fehl für  $i=0$ !

```
Traceback (most recent call last):
  File "<outputdir>/py_default_default.py", line 124, in <module>
    assert(poly_add([42], []) == [42])
    ^^^^^^^^^^^^^^^^^^
  File "<outputdir>/py_default_default.py", line 108, in poly_add
    result = result + [p[i] + q[i]]
```

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen  
Skalarmultiplikation  
Auswertung  
Ableitung  
Integration  
Binäre Operationen  
Addition  
Multiplikation  
Verbesserte  
Typannotationen  
Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

## Neuer Entwurfsschritt: Wunschdenken

**Abstrahiere** die gewünschte Funktionalität in einer **Hilfsfunktion**.

### Schritt 1: Bezeichner und Datentypen

Die Funktion `safe_index` nimmt als Eingabe

- `p : list[float]` eine Sequenz
- `i : int` einen Index (positiv)
- `d : float` einen Ersatzwert für ein Element von `p`

und liefert das Element `p[i]` (falls definiert) oder den Ersatzwert.

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte

Typannotationen

Lexikographische

Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

## Schritt 2: Funktionsgerüst

```
def safe_index(  
    p : list[float],  
    i : int,  # assume >= 0  
    d : float  
) -> float:  
  
    # fill in  
    return 0
```

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen  
Skalarmultiplikation

Auswertung  
Ableitung  
Integration

Binäre Operationen  
Addition  
Multiplikation

Verbesserte  
Typannotationen  
Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

## Schritt 3: Beispiele

```
assert safe_index([1,2,3], 0, 0) == 1
assert safe_index([1,2,3], 2, 0) == 3
assert safe_index([1,2,3], 4, 0) == 0
assert safe_index([1,2,3], 4, 42) == 42
assert safe_index([], 0, 42) == 42
```

# Sichere Indizierung | Addition

## Schritt 4: Funktionsdefinition

```
def safe_index(  
    p : list[float],  
    i : int,  # assume >= 0  
    d : float  
) -> float:  
    return p[i] if i < len(p) else d
```

oder (alternative Implementierung des Funktionsrumpfes)

```
if i < len(p):  
    return p[i]  
else:  
    return d
```

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation  
Auswertung  
Ableitung

Integration  
Binäre Operationen  
Addition

Multiplikation  
Verbesserte  
Typannotationen

Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

## Bedingter Ausdruck (Conditional Expression)

```
expr_true if expr_cond else expr_false
```

- Werte zuerst *expr\_cond* aus
- Falls Ergebnis kein Nullwert, dann werte *expr\_true* als Ergebnis aus
- Sonst werte *expr\_false* als Ergebnis aus

## Beispiele

- `17 if True else 4 == 17`
- `"abc"[i] if i<3 else " "`

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte

Typannotationen

Lexikographische

Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

## Schritt 4: Funktionsdefinition mit Hilfsfunktion

```
def poly_add(  
    p : polynom,  
    q : polynom  
) -> polynom:  
  
    maxlen = max (len (p), len (q))  
    result = []  
    for i in range(maxlen):  
        result = result + [  
            safe_index(p,i,0) + safe_index (q,i,0)]  
    return result
```

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen  
Skalarmultiplikation  
Auswertung  
Ableitung  
Integration  
Binäre Operationen  
Addition  
Multiplikation  
Verbesserte  
Typannotationen  
Lexikographische  
Ordnung  
  
while-  
Schleifen  
  
Zusammen-  
fassung

# 1 Entwurf von Schleifen

- Fallstudie: Rechnen mit Polynomen
- Skalarmultiplikation
- Auswertung
- Ableitung
- Integration
- Binäre Operationen
- Addition
- Multiplikation
- Verbesserte Typannotationen
- Lexikographische Ordnung

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation  
Auswertung

Ableitung  
Integration

Binäre Operationen  
Addition

Multiplikation  
Verbesserte  
Typannotationen

Lexikographische

Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

# Multiplikation

$$[p_0, p_1, \dots, p_n] \cdot [q_0, q_1, \dots, q_m]$$

$$= [p_0 \cdot q_0, p_0 \cdot q_1 + p_1 \cdot q_0, \dots, \sum_{i=0}^k p_i \cdot q_{k-i}, \dots, p_n \cdot q_m]$$

Woher kommt diese Definition?

$$\left( \sum_{i=0}^n p_i x^i \right) \cdot \left( \sum_{j=0}^m q_j x^j \right) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m p_i x^i \cdot q_j x^j$$

$$= \sum_{k=0}^{n+m} \sum_{i+j=k} p_i \cdot q_j \cdot x^k$$

$$= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m p_i \cdot q_j \cdot x^{i+j}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+m} \sum_{i=0}^k p_i \cdot q_{k-i} \cdot x^k$$

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation  
Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen  
Addition

Multiplikation

Verbesserte  
Typannotationen  
Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

# Multiplikation

## Schritt 1: Bezeichner und Datentypen

Die Funktion `poly_mult` nimmt als Eingabe

- `p : polynom` ein Polynom
- `q : polynom` ein Polynom

und liefert als Ergebnis das Produkt der Eingaben.

# Multiplikation

## Schritt 2: Funktionsgerüst

```
def poly_mult(  
    p : polynom,  
    q : polynom  
) -> polynom:  
  
    # fill in  
    for k in range(...):  
        pass # fill in to compute k-th output element  
    return ...
```

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte

Typannotationen

Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

# Multiplikation

## Schritt 3: Beispiele

```
assert poly_mult([], []) == []
assert poly_mult([42], []) == []
assert poly_mult([], [11]) == []
assert poly_mult([1,2,3], [1]) == [1,2,3]
assert poly_mult([1,2,3], [0,1]) == [0,1,2,3]
assert poly_mult([1,2,3], [1,1]) == [1,3,5,3]
```

## Beobachtungen

- Range maxlen = len (p) + len (q) - 1

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte  
Typannotationen

Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

# Multiplikation

## Schritt 4: Funktionsdefinition

```
def poly_mult(  
    p : polynom,  
    q : polynom  
) -> polynom:  
    result = []  
    for k in range(len(p) + len(q) - 1):  
        rk = ... # k-th output element  
        result = result + [rk]  
    return result
```

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation  
Auswertung  
Ableitung

Integration

Binäre Operationen  
Addition

Multiplikation

Verbesserte  
Typannotationen  
Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

# Multiplikation

## Das k-te Element

$$r_k = \sum_{i=0}^k p_i \cdot q_{k-i}$$

noch eine Schleife!

## Berechnung

```
rk = 0
for i in range(k+1):
    rk = rk + safe_index(p,i,0) * safe_index(q,k-i,0)
```

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation  
Auswertung  
Ableitung

Integration  
Binäre Operationen  
Addition

Multiplikation  
Verbesserte  
Typannotationen

Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

# Multiplikation



## Schritt 4: Funktionsdefinition, final

```
def poly_mult(  
    p : polynom,  
    q : polynom  
) -> polynom:  
    result = []  
    for k in range(len(p) + len(q) - 1):  
        rk = 0  
        for i in range(k+1):  
            rk = rk + safe_index(p,i,0) * safe_index(q,k-i,0)  
        result = result + [rk]  
    return result
```

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation  
Auswertung  
Ableitung

Integration

Binäre Operationen  
Addition

Multiplikation

Verbesserte  
Typannotationen  
Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

# 1 Entwurf von Schleifen

- Fallstudie: Rechnen mit Polynomen
- Skalarmultiplikation
- Auswertung
- Ableitung
- Integration
- Binäre Operationen
- Addition
- Multiplikation
- Verbesserte Typannotationen
- Lexikographische Ordnung

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation  
Auswertung

Ableitung  
Integration

Binäre Operationen  
Addition

Multiplikation  
Verbesserte  
Typannotationen

Lexikographische

Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

# Verbesserte Typannotationen

Am Beispiel der sicheren Indizierung



```
def safe_index(  
    p : list[float],  
    i : int, # assume >= 0  
    d : float  
) -> float:  
  
    return p[i] if i < len(p) else d
```

- Laut Typannotation muss das Argument `p` immer `list[float]`, das Argument `d : float` und demzufolge das Ergebnis `float` sein.
- Am Code sehen wir aber, dass keine arithmetischen Operationen auf `d` oder die Elemente von `p` angewendet werden, sondern dass diese einfach durchgereicht werden!
- Eine solche Funktion heißt *parametrisch polymorph*, weil statt `float` ein beliebiger Typ verwendet werden darf.

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation  
Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen  
Addition

Multiplication

Verbesserte  
Typannotationen  
Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

# Verbesserte Typannotationen

## Typvariable



- Schreibweise für einen genaueren **generischen Typ**:

```
def safe_index[T] (
    p : list[T],
    i : int, # assume >= 0
    d : T
) -> T:
```

- T ist eine **Typvariable**, die für einen beliebigen Typ steht.
- Sie wird durch [T] eingeführt und darf in den Typannotationen der Kopfzeile verwendet werden.
- Bei Verwendung von `safe_index` setzt der Typchecker einen passenden Typ ein, der konsistent verwendet werden muss.

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte  
Typannotationen

Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

# Generischer Typ

- Ein generischer Typ enthält eine oder mehrere Typvariablen (wie `list[T]`).
- Er steht als “Abkürzung” für alle Typen, die man durch Einsetzen von erlaubten konkreten Typen für die Typvariablen herstellen kann.
- Ohne weitere Beschränkung sind **alle** konkreten Typen erlaubt.

# 1 Entwurf von Schleifen

- Fallstudie: Rechnen mit Polynomen
- Skalarmultiplikation
- Auswertung
- Ableitung
- Integration
- Binäre Operationen
- Addition
- Multiplikation
- Verbesserte Typannotationen
- Lexikographische Ordnung

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation  
Auswertung

Ableitung  
Integration

Binäre Operationen  
Addition

Multiplikation  
Verbesserte  
Typannotationen

Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

# Die lexikographische Ordnung



## Gegeben

Zwei Sequenzen der Längen  $m, n \geq 0$ :

$$\vec{a} = "a_1 a_2 \dots a_m"$$

$$\vec{b} = "b_1 b_2 \dots b_n"$$

$\vec{a} \leq \vec{b}$  in der lexikographischen Ordnung, falls

Es gibt  $0 \leq k \leq \min(m, n)$ , so dass

- $a_1 = b_1, \dots, a_k = b_k$  und

$$\vec{a} = "a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1} \dots a_m"$$

$$\vec{b} = "a_1 a_2 \dots a_k b_{k+1} \dots b_n"$$

- $k = m$

$$\vec{a} = "a_1 a_2 \dots a_m"$$

$$\vec{b} = "a_1 a_2 \dots a_m b_{m+1} \dots b_n"$$

- oder  $k < m$  und  $a_{k+1} < b_{k+1}$ .

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung  
Ableitung

Integration

Binäre Operationen  
Addition

Multiplikation

Verbesserte  
Typannotationen

Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

# Lexikographische Ordnung



UNI  
FREIBURG

## Schritt 1: Bezeichner und Datentypen

Die Funktion `lex_leq` nimmt als Eingabe

- `a : list[int]` eine Sequenz von Zahlen
- `b : list[int]` eine Sequenz von Zahlen

und liefert als Ergebnis True, falls  $a \leq b$ , sonst False.

## Schritt 2: Funktionsgerüst

```
def lex_leq(a : list[int], b : list[int]) -> bool:  
    # fill in  
    for k in range(...):  
        pass # fill in  
    return ...
```

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation  
Auswertung

Ableitung  
Integration

Binäre Operationen  
Addition

Multiplikation  
Verbesserte  
Typannotationen

Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

## Schritt 3: Beispiele

```
assert lex_leq([], []) == True
assert lex_leq([42], []) == False
assert lex_leq([], [11]) == True
assert lex_leq([1,2,3], [1]) == False
assert lex_leq([1], [1,2,3]) == True
assert lex_leq([1,2,3], [0,1]) == False
assert lex_leq([1,2,3], [1,3]) == True
assert lex_leq([1,2,3], [1,2,3]) == True
```

## Beobachtungen

- Range `minlen = min (len (a), len (b))`

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation  
Auswertung  
Ableitung

Integration  
Binäre Operationen  
Addition  
Multiplikation

Verbesserte  
Typannotationen  
Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

# Lexikographische Ordnung

## Schritt 4: Funktionsdefinition

```
def lex_leq(  
    a : list[int],  
    b : list[int]  
) -> bool:  
    minlen = min (len (a), len (b))  
    for k in range(minlen):  
        if a[k] < b[k]:  
            return True  
        if a[k] > b[k]:  
            return False  
    # a is prefix of b or vice versa  
    return len(a) <= len(b)
```



Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen

Skalarmultiplikation  
Auswertung

Ableitung  
Integration

Binäre Operationen  
Addition

Multiplikation  
Verbesserte  
Typannotationen

Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

# Typannotation für lexleq (1)

## Problem

- Der Typ `list[int]` charakterisiert Listen von Zahlen.
- Aber der Code funktioniert viel allgemeiner, wenn nur die Elemente vergleichbar vom gleichen Typ sind!  
Beispiel: `lex_leq ("abc", [1,2,3])` liefert Fehler!
- Wir müssen sicherstellen:
  - 1 die Elemente haben den gleichen Typ und
  - 2 dieser Typ unterstützt Ordnungen.

Entwurf von  
Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit  
Polynomen  
Skalarmultiplikation

Auswertung  
Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplication

Verbesserte  
Typannotationen

Lexikographische  
Ordnung

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

# Typannotation für lexleq (2)

## Verbesserung

```
def lex_leq[B : (int, float, str)](  
    a : list[B], b : list[B]) -> bool:
```

B ist eine Typvariable, aber jetzt ist bekannt, dass sie für einen der aufgelisteten Typen `int`, `float` oder `str` steht.

D.h.: a und b sind beides Listen, deren Elemente entweder `int` oder `float` oder `str` sind und daher vergleichbar!

Bewertung: Noch nicht optimal...

ok, aber was ist mit `list[int]`, `list[list[int]]` usw? Alle diese Typen sind auch vergleichbar...

Bessere Konzepte in Rust, Haskell, Scala, ...

Entwurf von Schleifen

Fallstudie:  
Rechnen mit Polynomen  
Skalarmultiplikation

Auswertung  
Ableitung  
Integration  
Binäre Operationen  
Addition  
Multiplikation  
Verbesserte Typannotationen

Lexikographische Ordnung

while-Schleifen

Zusammenfassung

## 2 while-Schleifen

- Einlesen einer Liste
- Das Newton-Verfahren
- Das Collatz-Problem
- Abschließende Bemerkungen

# while-Schleifen

Wiederholen eines Schleifenrumpfs, ohne dass vorher klar ist, wie oft.

## Beispiele

- Einlesen von mehreren Eingaben
- Das Newton-Verfahren zum Auffinden von Nullstellen
- Das Collatz-Problem

## Die while-Schleife

- Syntax:

*while Bedingung:*

*Block* # Schleifenrumpf

- Semantik: Die Anweisungen im *Block* werden wiederholt, solange die *Bedingung* keinen Nullwert (z.B. True) liefert.

Entwurf von  
Schleifen

while-  
Schleifen

Einlesen einer  
Liste

Das  
Newton-Verfahren

Das  
Collatz-Problem

Abschließende  
Bemerkungen

Zusammen-  
fassung

## 2 while-Schleifen

- Einlesen einer Liste
- Das Newton-Verfahren
- Das Collatz-Problem
- Abschließende Bemerkungen

Entwurf von  
Schleifen

while-  
Schleifen

Einlesen einer  
Liste

Das  
Newton-Verfahren

Das  
Collatz-Problem

Abschließende  
Bemerkungen

Zusammen-  
fassung

# Beispiel: Einlesen einer Liste

## Schritt 1: Bezeichner und Datentypen

Die Funktion `input_list` nimmt keine Parameter,  
erwartet eine beliebig lange Folge von Eingaben, die mit einer leeren Zeile  
abgeschlossen ist, und liefert als Ergebnis die Liste dieser Eingaben als Strings.

# Beispiel: Einlesen einer Liste

## Schritt 2: Funktionsgerüst

```
def input_list() -> list[str]:  
    # fill in, initialization  
    while expr_cond:  
        pass # fill in  
    return ...
```

### Warum while?

- Die Anzahl der Eingaben ist nicht von vorne herein klar.
- Dafür ist eine while-Schleife erforderlich.
- Die while-Schleife führt ihren Rumpf solange aus, bis eine leere Eingabe erfolgt.

Entwurf von  
Schleifen

while-  
Schleifen

Einlesen einer  
Liste

Das  
Newton-Verfahren

Das  
Collatz-Problem  
Abschließende  
Bemerkungen

Zusammen-  
fassung

# Einlesen einer Liste



UNI  
FREIBURG

## Beispiele

Eingabe:

```
>>> input_list()  
  
[]  
>>> input_list()  
Bring  
mal  
das  
WLAN-Kabel!  
  
['Bring', 'mal', 'das', 'WLAN-Kabel!']
```

Entwurf von  
Schleifen

while-  
Schleifen

Einlesen einer  
Liste

Das  
Newton-Verfahren

Das  
Collatz-Problem

Abschließende  
Bemerkungen

Zusammen-  
fassung

# Einlesen einer Liste

## Schritt 4: Funktionsdefinition

```
def input_list() -> list[str]:  
    result = []  
    line = input()  
    while line:  
        result = result + [line]  
        line = input()  
    return result
```

Entwurf von  
Schleifen

while-  
Schleifen

Einlesen einer  
Liste

Das  
Newton-Verfahren

Das  
Collatz-Problem  
Abschließende  
Bemerkungen

Zusammen-  
fassung

## 2 while-Schleifen

- Einlesen einer Liste
- Das Newton-Verfahren
- Das Collatz-Problem
- Abschließende Bemerkungen

Entwurf von  
Schleifen

while-  
Schleifen

Einlesen einer  
Liste

Das  
Newton-Verfahren

Das  
Collatz-Problem

Abschließende  
Bemerkungen

Zusammen-  
fassung

Suche Nullstellen von stetig differenzierbaren Funktionen

## Verfahren

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig differenzierbar

- 1 Wähle  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $n = 0$
- 2 Setze  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
- 3 Berechne nacheinander  $x_1, x_2, \dots, x_k$  bis  $f(x_k)$  nah genug an 0.
- 4 Ergebnis ist  $x_k$

Entwurf von  
Schleifen

while-  
Schleifen

Einlesen einer  
Liste

Das  
Newton-Verfahren

Das  
Collatz-Problem

Abschließende  
Bemerkungen

Zusammen-  
fassung

# Das Newton-Verfahren

## Präzisierung



### ... für Polynomfunktionen

- Erfüllen die Voraussetzung
- Ableitung mit derivative

### Was heißt hier “nah genug”?

- Eine überraschend schwierige Frage ...
- Wir sagen:  $x$  ist nah genug an  $x'$ , falls  $\frac{|x-x'|}{\max(|x|,|x'|)} < \varepsilon$
- $\varepsilon > 0$  ist eine Konstante, die von der Repräsentation von `float`, dem Verfahren und der gewünschten Genauigkeit abhängt. Dazu kommen noch Sonderfälle.
- Wir wählen:  $\varepsilon = 2^{-30} \approx 10^{-9}$
- Genug für eine Hilfsfunktion!

Entwurf von  
Schleifen

while-  
Schleifen

Einlesen einer  
Liste

Das  
Newton-Verfahren

Das  
Collatz-Problem  
Abschließende  
Bemerkungen

Zusammen-  
fassung

# Hilfsfunktion

Die freundlichen Pythonistas waren schon für uns aktiv. Das Modul `math` enthält eine passende Hilfsfunktion:

```
math.isclose(a, b, *, rel_tol=1e-09, abs_tol=0.0)
```

*Return True if the values a and b are close to each other and False otherwise.*

*Whether two values are considered close is determined according to given absolute and relative tolerances. If no errors occur, the result will be:*

```
abs(a-b) <= max(rel_tol * max(abs(a), abs(b)), abs_tol).
```

Entwurf von  
Schleifen

while-  
Schleifen

Einlesen einer  
Liste

Das  
Newton-Verfahren

Das  
Collatz-Problem  
Abschließende  
Bemerkungen

Zusammen-  
fassung

## Schritt 1: Bezeichner und Datentypen

Die Funktion `newton` nimmt als Eingabe

- `f : polynom` ein Polynom
- `x0 : float` einen Startwert

und verwendet das Newton-Verfahren zur Berechnung einer Zahl  $x$ , sodass  $f(x)$  "nah genug" an 0 ist.

### Bemerkung

Es reicht zu prüfen, ob  $x_{n+1}$  nah genug an  $x_n$  ist, weil  
 $|x_{n+1} - x_n| = |(x_n - f(x_n)/f'(x_n)) - x_n| = |f(x_n)/f'(x_n)|$ .

Entwurf von  
Schleifen

while-  
Schleifen

Einlesen einer  
Liste

Das  
Newton-Verfahren

Das  
Collatz-Problem  
Abschließende  
Bemerkungen

Zusammen-  
fassung

## Schritt 2: Funktionsgerüst

```
def newton(  
    f : polynom,  
    x0 : float  
    ) -> float:  
    # fill in  
    while expr_cond:  
        pass # fill in  
    return ...
```

Entwurf von  
Schleifen

while-  
Schleifen

Einlesen einer  
Liste

Das  
Newton-Verfahren

Das  
Collatz-Problem  
Abschließende  
Bemerkungen

Zusammen-  
fassung

## Warum while?

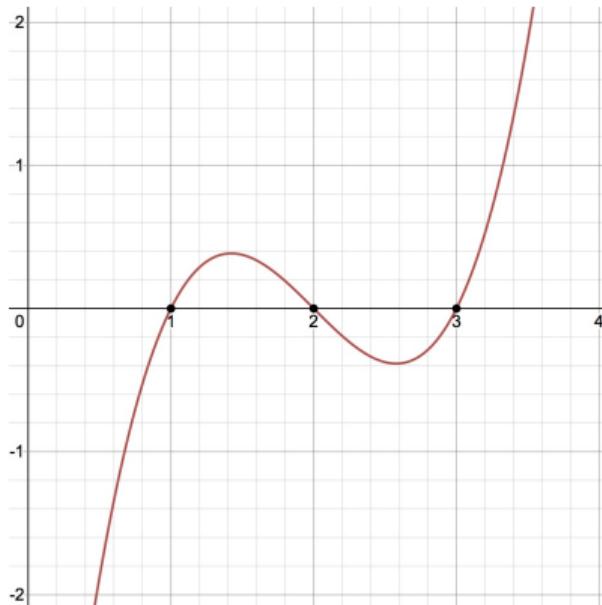
- Das Newton-Verfahren verwendet eine Folge  $x_n$ ,  
ohne dass von vorne herein klar ist, wieviele Elemente benötigt werden.
- Zur Verarbeitung dieser Folge ist eine while-Schleife erforderlich.
- Diese while-Schleife terminiert aufgrund der mathematischen / numerischen Eigenschaften des Newton-Verfahrens. Siehe Vorlesung Mathe I.

# Newton-Verfahren



UNI  
FREIBURG

Beispielfunktion:  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$



Entwurf von  
Schleifen

while-  
Schleifen

Einlesen einer  
Liste

Das  
Newton-Verfahren

Das  
Collatz-Problem  
Abschließende  
Bemerkungen

Zusammen-  
fassung

## Schritt 3: Beispiele

```
p = [-6, 11, -6, 1]
assert math.isclose(newton (p, 0), 1)
assert math.isclose(newton (p, 1.1), 1)
assert math.isclose(newton (p, 1.7), 2)
assert math.isclose(newton (p, 2.5), 1)
assert math.isclose(newton (p, 2.7), 3)
assert math.isclose(newton (p, 10), 3)
```

Entwurf von  
Schleifen

while-  
Schleifen

Einlesen einer  
Liste

Das  
Newton-Verfahren

Das  
Collatz-Problem  
Abschließende  
Bemerkungen

Zusammen-  
fassung

# Newton-Verfahren

## Schritt 4: Funktionsdefinition

```
def newton(  
    f : polynom,  
    x0 : float  
) -> float:  
  
    deriv_f = derivative(f)  
    xn = x0  
    last_xn = xn + 1 # force at least one iteration  
    while not math.isclose( last_xn, xn):  
        last_xn = xn  
        xn = xn - ( poly_eval (f, xn)  
                     / poly_eval (deriv_f, xn))  
  
    return xn
```

Entwurf von  
Schleifen

while-  
Schleifen

Einlesen einer  
Liste

Das  
Newton-Verfahren

Das  
Collatz-Problem  
Abschließende  
Bemerkungen

Zusammen-  
fassung

## 2 while-Schleifen

- Einlesen einer Liste
- Das Newton-Verfahren
- Das Collatz-Problem
- Abschließende Bemerkungen

# Das Collatz-Problem

## Verfahren (Collatz 1937)

Starte mit einer positiven ganzen Zahl  $n$  und definiere eine Folge  $n = a_0, a_1, a_2, \dots$ :

$$a_{i+1} = \begin{cases} a_i/2 & a_i \text{ gerade} \\ 3a_i + 1 & a_i \text{ ungerade} \end{cases}$$

## Offene Frage

Für welche Startwerte  $n$  gibt es ein  $i$  mit  $a_i = 1$ ?

## Beispiele (Folge der durchlaufenen Zahlen)

- [3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1]
- [7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1]

# Collatz-Problem

```
def collatz (n : int) -> list[int]:  
    result = [n]  
    while n > 1:  
        if n % 2 == 0:  
            n = n // 2  
        else:  
            n = 3 * n + 1  
        result = result + [n]  
    return result
```

Entwurf von  
Schleifen

while-  
Schleifen

Einlesen einer  
Liste

Das  
Newton-Verfahren

Das  
Collatz-Problem

Abschließende  
Bemerkungen

Zusammen-  
fassung

## Warum while?

- Es ist nicht bekannt, ob `collatz(n)` für jede Eingabe terminiert.
- Aber validiert für alle  $n < 2^{71} \approx 2.36 \cdot 10^{21}$ !

Barina, David (2025). Improved verification limit for the convergence of the Collatz conjecture. *The Journal of Supercomputing*. 81 (7) 810.  
doi:10.1007/s11227-025-07337-0.

## 2 while-Schleifen

- Einlesen einer Liste
- Das Newton-Verfahren
- Das Collatz-Problem
- Abschließende Bemerkungen

# Termination einer Schleife

- Die Anzahl der Durchläufe einer `for`-Schleife ist stets durch den Schleifenkopf vorgegeben:
  - `for element in seq:`  
Anzahl der Elemente in der Sequenz *seq*
  - `for i in range(...):`  
Größe des Range
- Daher **terminiert** die Ausführung einer `for`-Schleife i.a.
- Bei einer `while`-Schleife ist die Anzahl der Durchläufe **nicht a-priori klar**.
- Daher ist stets eine Überlegung erforderlich, ob eine `while`-Schleife terminiert (**Terminationsbedingung**).
- Die Terminationsbedingung **muss** im Programm z.B. als Kommentar dokumentiert werden.

Entwurf von  
Schleifen

while-  
Schleifen

Einlesen einer  
Liste

Das  
Newton-Verfahren

Das  
Collatz-Problem  
Abschließende  
Bemerkungen

Zusammen-  
fassung

# Beispiel Zweierlogarithmus (Terminationsbedingung)

Zweierlogarithmus

für ganze Zahlen

$$\log_2 a = b$$

$$12(n) = m$$

$$2^b = a$$

$$m = \lfloor \log_2 n \rfloor$$

■ für  $a > 0$

■ für  $n > 0$

# Implementierung Zweierlogarithmus



```
def l2 (n : int) -> int:  
    m = -1  
    while n>0:  
        m = m + 1  
        n = n // 2  
    return m
```

## Terminationsbedingung

- Die **while**-Schleife terminiert, weil für alle  $n > 0$  gilt, dass  $n > n//2$  und jede absteigende Folge von positiven ganzen Zahlen  $n_1 > n_2 > \dots$  abbricht.
- Die Anzahl der Schleifendurchläufe ist durch  $\log_2 n$  beschränkt.

Entwurf von  
Schleifen

while-  
Schleifen

Einlesen einer  
Liste

Das  
Newton-Verfahren

Das  
Collatz-Problem

Abschließende  
Bemerkungen

Zusammen-  
fassung

# 3 Zusammenfassung



UNI  
FREIBURG

Entwurf von  
Schleifen

while-  
Schleifen

Zusammen-  
fassung

# Zusammenfassung



- Funktionen über **Sequenzen** verwenden **for-in-Schleifen**.
- Ergebnisse werden meist in einer **Akkumulator Variable** berechnet.
- Funktionen über **mehreren Sequenzen** verwenden **for-range-Schleifen**.
- Der verwendete Range hängt von der Problemstellung ab.
- **Teilprobleme werden in Hilfsfunktionen ausgelagert**.
- **while-Schleifen** werden verwendet, wenn die Anzahl der Schleifendurchläufe nicht von vorne herein bestimmt werden kann oder soll. Typischerweise
  - zur Verarbeitung von Eingaben
  - zur Berechnung von Approximationen
- Jede while-Schleife muss eine **dokumentierte Terminationsbedingung** haben.