

Informatik I: Einführung in die Programmierung

7. Entwurf von Schleifen, While-Schleifen, Hilfsfunktionen und Akkumulatoren

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg



UNI
FREIBURG

Prof. Dr. Peter Thiemann

5. November 2025

Entwurf von Schleifen



Fallstudie: Rechnen mit Polynomen

Polynome



Definition

Ein *Polynom vom Grad n* ist eine Folge von Zahlen $[p_0, p_1, \dots, p_n]$, den *Koeffizienten*. Dabei ist $n \geq 0$ und der *Leitkoeffizient* $p_n \neq 0$.

Andere Schreibweise: $\sum_{i=0}^n p_i x^i$

Beispiele

$$\begin{array}{rcl} [] & \approx & 0 \\ [1] & \approx & 1 \\ [3, 2, 1] & \approx & 3 + 2x + x^2 \end{array}$$

Anwendungen

Kryptographie, fehlerkorrigierende Codes.

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplication

Verbesserte

Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Darstellung von Polynomen in Python



- Liste von Gleitkommazahlen

```
type polynom = list[float]
```

- Diese *Typdefinition* definiert einen neuen Typ mit Namen `polynom`.
- Der Typ `polynom` ist gleichwertig zum Typ `list[float]`.
- Konvention für ein Polynom `p` (Erinnerung):
`len(p) == 0 or p[-1] != 0`

Rechenoperationen auf Polynomen



- (Skalar) Multiplikation mit einer Zahl c

$$c \cdot [p_0, p_1, \dots, p_n] = [c \cdot p_0, c \cdot p_1, \dots, c \cdot p_n]$$

- Auswertung an der Stelle x_0

$$[p_0, p_1, \dots, p_n](x_0) = \sum_{i=0}^n p_i \cdot x_0^i$$

- Ableitung

$$[p_0, p_1, \dots, p_n]' = [1 \cdot p_1, 2 \cdot p_2, \dots, n \cdot p_n]$$

- Integration

$$\int [p_0, p_1, \dots, p_n] = [0, p_0, p_1/2, p_2/3, \dots, p_n/(n+1)]$$

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte

Typannotationen

Lexikographische

Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Skalarmultiplikation

$$c \cdot [p_0, p_1, \dots, p_n] = [c \cdot p_0, c \cdot p_1, \dots, c \cdot p_n]$$

Schritt 1: Bezeichner und Datentypen

Die Funktion `scalar_mult` nimmt als Eingabe

- `c : float`, den Faktor,
- `p : polynom`, ein Polynom.

Der Grad des Polynoms ergibt sich aus der Länge der Sequenz.

Skalarmultiplikation



UNI
FREIBURG

Schritt 2: Funktionsgerüst

```
def scalar_mult(  
    c : float,  
    p : polynom  
) -> polynom:  
    # fill in, initialization  
    for i in range(len(p)):  
        pass # fill in action for each element  
    return ...
```

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte
Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Skalarmultiplikation



UNI
FREIBURG

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte

Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Schritt 3: Beispiele

```
assert(scalar_mult(42, []) == [])
assert(scalar_mult(42, [1,2,3]) == [42,84,126])
assert(scalar_mult(-0.1, [1,2,4]) == [-0.1,-0.2,-0.4])
```

Skalarmultiplikation



UNI
FREIBURG

Schritt 4: Funktionsdefinition

```
def scalar_mult(  
    c : float,  
    p : polynom  
) -> polynom:  
    result = []  
    for i in range(len(p)):  
        result = result + [c * p[i]]  
    return result
```

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte
Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Muster: Akkumulator



Rumpf der Skalarmultiplikation

```
result = []      # initialization
for i in range(len(p)):
    result = result + [c * p[i]]      # update
return result
```

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen
Skalarmultiplikation

Auswertung
Ableitung

Integration

Binäre Operationen
Addition

Multiplikation

Verbesserte
Typannotationen
Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Muster: Akkumulator



Rumpf der Skalarmultiplikation

```
result = []      # initialization
for i in range(len(p)):
    result = result + [c * p[i]]      # update
return result
```

Variable `result` ist Akkumulator

- In `result` wird das Ergebnis aufgesammelt (akkumuliert).
- `result` wird vor der Schleife initialisiert auf das Ergebnis für die leere Liste.
- Jede Schleifeniteration aktualisiert das Ergebnis in `result`, indem das Ergebnis um das aktuelle Element `p[i]` erweitert wird.

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen
Skalarmultiplikation

Auswertung
Ableitung
Integration

Binäre Operationen
Addition
Multiplikation
Verbesserte
Typannotationen
Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Begründung

- $p = [p_0, p_1, \dots, p_n]$
- $r = []$
- $r = []$
- `for i in range(len(p)):`
- vorher: $r = [c \cdot p_0, \dots, c \cdot p_{i-1}]$
- $r = r + [c * p[i]]$
- nachher: $r = [c \cdot p_0, \dots, c \cdot p_i]$
- nach dem $n+1$ -ten Durchlauf (letzter Durchlauf der Schleife):
 $r = [c \cdot p_0, \dots, c \cdot p_n]$

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte
Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Ein fehlendes Beispiel



UNI
FREIBURG

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung
Ableitung

Integration

Binäre Operationen
Addition

Multiplikation

Verbesserte
Typannotationen
Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Ein fehlendes Beispiel



UNI
FREIBURG

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte
Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Skalarmultiplikation mit 0

Auswertung

$$[p_0, p_1, \dots, p_n](x_0) = \sum_{i=0}^n p_i \cdot x_0^i$$

Schritt 1: Bezeichner und Datentypen

Die Funktion `poly_eval` nimmt als Eingabe

- `p` : `polynom`, ein Polynom,
- `x` : `float`, das Argument.

Der Grad des Polynoms ergibt sich aus der Länge der Sequenz.

Auswertung



Schritt 2: Funktionsgerüst

```
def poly_eval(  
    p : polynom,  
    x : float  
) -> float:  
  
    # fill in  
    for i in range(len(p)):  
        pass # fill in action for each element  
    return ...
```

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen
Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte

Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Auswertung



UNI
FREIBURG

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte

Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Schritt 3: Beispiele

```
assert(poly_eval([], 2) == 0)
assert(poly_eval([1,2,3], 2) == 17)
assert(poly_eval([1,2,3], -0.1) == 0.83)
```

Auswertung



Schritt 4: Funktionsdefinition

```
def poly_eval(  
    p : polynom,  
    x : float  
) -> float:  
    result = 0  
    for i in range(len(p)):  
        result = result + p[i] * x ** i  
    return result
```

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen
Skalarmultiplikation

Auswertung
Ableitung
Integration
Binäre Operationen
Addition
Multiplikation
Verbesserte
Typannotationen
Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Ableitung

Schritt 1: Bezeichner und Datentypen

Die Funktion **derivative** nimmt als Eingabe

- p : polynom, ein Polynom.

Der Grad des Polynoms ergibt sich aus der Länge der Sequenz.

Schritt 2: Funktionsgerüst

```
def derivative(  
    p : polynom  
) -> polynom:  
# initialization  
for i in range(len(p)):  
    pass # fill in action for each element  
return ...
```

Schritt 3: Beispiele

```
assert derivative([])      == []
assert derivative([42])    == []
assert derivative([1,2,3])  == [2,6]
```

Schritt 4: Funktionsdefinition

```
def derivative(  
    p : polynom  
) -> polynom:  
result = []  
for i in range(len(p)):  
    if i > 0:  
        result = result + [i * p[i]]  
return result
```

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte

Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Integration

$$\int [p_0, p_1, \dots, p_n] = [0, p_0, p_1/2, p_2/3, \dots, p_n/(n+1)]$$

Schritt 1: Bezeichner und Datentypen

Die Funktion `integral` nimmt als Eingabe

- `p : polynom`, ein Polynom.

Der Grad des Polynoms ergibt sich aus der Länge der Sequenz.

Weitere Schritte

selbst

Binäre Operationen

Operationen mit zwei Polynomen



■ Addition (falls $n \leq m$)

$$\begin{aligned}[p_0, p_1, \dots, p_n] + [q_0, q_1, \dots, q_m] \\ = [p_0 + q_0, p_1 + q_1, \dots, p_n + q_n, q_{n+1}, \dots, q_m]\end{aligned}$$

■ Multiplikation von Polynomen

$$\begin{aligned}[p_0, p_1, \dots, p_n] \cdot [q_0, q_1, \dots, q_m] \\ = [p_0 \cdot q_0, p_0 \cdot q_1 + p_1 \cdot q_0, \dots, \sum_{i=0}^k p_i \cdot q_{k-i}, \dots, p_n \cdot q_m]\end{aligned}$$

Addition

$$\begin{aligned}(p_0, p_1, \dots, p_n) + (q_0, q_1, \dots, q_m) \\ = (p_0 + q_0, p_1 + q_1, \dots, p_n + q_n, q_{n+1}, \dots, q_m)\end{aligned}$$

Schritt 1: Bezeichner und Datentypen

Die Funktion `poly_add` nimmt als Eingabe

- `p` : `polynom`, ein Polynom.
- `q` : `polynom`, ein Polynom.

Die Grade der Polynome ergeben sich aus der Länge der Sequenzen.

Achtung

Die Grade der Polynome können unterschiedlich sein!

Addition



UNI
FREIBURG

Schritt 2: Funktionsgerüst

```
def poly_add(  
    p : polynom,  
    q : polynom  
) -> polynom:  
    # fill in  
    for i in range(...): # <<-----  
        pass # fill in action for each element  
    return ...
```

Frage

Was ist das Argument ... von range?

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplication

Verbesserte
Typannotationen

Lexikographische

Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Addition



UNI
FREIBURG

Schritt 3: Beispiele

```
assert(poly_add([], []) == [])
assert(poly_add([42], []) == [42])
assert(poly_add([], [11]) == [11])
assert(poly_add([1,2,3], [4,3,2,5]) == [5,5,5,5])
```

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplication

Verbesserte
Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Schritt 3: Beispiele

```
assert(poly_add([], [])) == []
assert(poly_add([42], [])) == [42])
assert(poly_add([], [11])) == [11])
assert(poly_add([1,2,3], [4,3,2,5])) == [5,5,5,5])
```

Antwort: Argument von range

```
 maxlen = max (len (p), len (q))
```

Schritt 4: Funktionsdefinition, erster Versuch

```
def poly_add(  
    p : polynom,  
    q : polynom  
) -> polynom:  
  
    maxlen = max (len (p), len (q))  
    result = []  
    for i in range(maxlen):  
        result = result + [p[i] + q[i]]  
    return result
```

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplication

Verbesserte
Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Addition



UNI
FREIBURG

Problem

Eine Assertion schlägt fehl!

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte
Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Addition



Problem

Eine Assertion schlägt fehl!

```
assert(poly_add([], []) == [])
assert(poly_add([42], []) == [42])
```

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte
Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Addition



Problem

Eine Assertion schlägt fehl!

```
assert(poly_add([], []) == [])
assert(poly_add([42], []) == [42])
```

Analyse

Zweite Assertion schlägt fehl für $i=0$!

```
Traceback (most recent call last):
  File "<outputdir>/py_default_default.py", line 124, in <module>
    assert(poly_add([42], []) == [42])
    ^^^^^^^^^^^^^^

  File "<outputdir>/py_default_default.py", line 108, in poly_add
    result = result + [p[i] + q[i]]
```

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte
Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Addition — Wunschdenken



UNI
FREIBURG

Neuer Entwurfsschritt: Wunschdenken

Abstrahiere die gewünschte Funktionalität in einer **Hilfsfunktion**.

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte
Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Neuer Entwurfsschritt: Wunschdenken

Abstrahiere die gewünschte Funktionalität in einer **Hilfsfunktion**.

Schritt 1: Bezeichner und Datentypen

Die Funktion `safe_index` nimmt als Eingabe

- `p : list[float]` eine Sequenz
- `i : int` einen Index (positiv)
- `d : float` einen Ersatzwert für ein Element von `p`

und liefert das Element `p[i]` (falls definiert) oder den Ersatzwert.

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung
Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte
Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung



Schritt 2: Funktionsgerüst

```
def safe_index(  
    p : list[float],  
    i : int,  # assume >= 0  
    d : float  
) -> float:  
  
    # fill in  
    return 0
```

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen
Skalarmultiplikation

Auswertung
Ableitung
Integration

Binäre Operationen
Addition
Multiplikation

Verbesserte
Typannotationen
Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung



Schritt 3: Beispiele

```
assert safe_index([1,2,3], 0, 0) == 1
assert safe_index([1,2,3], 2, 0) == 3
assert safe_index([1,2,3], 4, 0) == 0
assert safe_index([1,2,3], 4, 42) == 42
assert safe_index([], 0, 42) == 42
```

Sichere Indizierung | Addition



Schritt 4: Funktionsdefinition

```
def safe_index(  
    p : list[float],  
    i : int,  # assume >= 0  
    d : float  
) -> float:  
    return p[i] if i < len(p) else d
```

oder (alternative Implementierung des Funktionsrumpfes)

```
if i < len(p):  
    return p[i]  
else:  
    return d
```

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte
Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung



Bedingter Ausdruck (Conditional Expression)

```
expr_true if expr_cond else expr_false
```

- Werte zuerst *expr_cond* aus
- Falls Ergebnis kein Nullwert, dann werte *expr_true* als Ergebnis aus
- Sonst werte *expr_false* als Ergebnis aus

Beispiele

- `17 if True else 4 == 17`
- `"abc"[i] if i<3 else " "`

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplication

Verbesserte
Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Schritt 4: Funktionsdefinition mit Hilfsfunktion

```
def poly_add(  
    p : polynom,  
    q : polynom  
) -> polynom:  
    maxlen = max (len (p), len (q))  
    result = []  
    for i in range(maxlen):  
        result = result + [  
            safe_index(p,i,0) + safe_index (q,i,0)]  
    return result
```

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplication

Verbesserte

Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Multiplikation

Multiplikation



UNI
FREIBURG

$$[p_0, p_1, \dots, p_n] \cdot [q_0, q_1, \dots, q_m]$$

$$= [p_0 \cdot q_0, p_0 \cdot q_1 + p_1 \cdot q_0, \dots, \sum_{i=0}^k p_i \cdot q_{k-i}, \dots, p_n \cdot q_m]$$

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte
Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Multiplikation



UNI
FREIBURG

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation
Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen
Addition

Multiplikation

Verbesserte
Typannotationen
Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

$$[p_0, p_1, \dots, p_n] \cdot [q_0, q_1, \dots, q_m]$$

$$= [p_0 \cdot q_0, p_0 \cdot q_1 + p_1 \cdot q_0, \dots, \sum_{i=0}^k p_i \cdot q_{k-i}, \dots, p_n \cdot q_m]$$

Woher kommt diese Definition?

$$\left(\sum_{i=0}^n p_i x^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^m q_j x^j \right) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m p_i x^i \cdot q_j x^j$$

$$= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m p_i \cdot q_j \cdot x^{i+j}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+m} \sum_{i+j=k} p_i \cdot q_j \cdot x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n+m} \sum_{i=0}^k p_i \cdot q_{k-i} \cdot x^k$$

Schritt 1: Bezeichner und Datentypen

Die Funktion `poly_mult` nimmt als Eingabe

- `p : polynom` ein Polynom
- `q : polynom` ein Polynom

und liefert als Ergebnis das Produkt der Eingaben.

Multiplikation



UNI
FREIBURG

Schritt 2: Funktionsgerüst

```
def poly_mult(  
    p : polynom,  
    q : polynom  
) -> polynom:  
    # fill in  
    for k in range(...):  
        pass # fill in to compute k-th output element  
    return ...
```

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte
Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Multiplikation



Schritt 3: Beispiele

```
assert poly_mult([], []) == []
assert poly_mult([42], []) == []
assert poly_mult([], [11]) == []
assert poly_mult([1,2,3], [1]) == [1,2,3]
assert poly_mult([1,2,3], [0,1]) == [0,1,2,3]
assert poly_mult([1,2,3], [1,1]) == [1,3,5,3]
```

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen
Skalarmultiplikation
Auswertung
Ableitung
Integration
Binäre Operationen
Addition
Multiplikation
Verbesserte
Typannotationen
Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Multiplikation



Schritt 3: Beispiele

```
assert poly_mult([], []) == []
assert poly_mult([42], []) == []
assert poly_mult([], [11]) == []
assert poly_mult([1,2,3], [1]) == [1,2,3]
assert poly_mult([1,2,3], [0,1]) == [0,1,2,3]
assert poly_mult([1,2,3], [1,1]) == [1,3,5,3]
```

Beobachtungen

- Range maxlen = len (p) + len (q) - 1

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation
Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte
Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Multiplikation



Schritt 4: Funktionsdefinition

```
def poly_mult(  
    p : polynom,  
    q : polynom  
) -> polynom:  
    result = []  
    for k in range(len(p) + len(q) - 1):  
        rk = ... # k-th output element  
        result = result + [rk]  
    return result
```

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation
Auswertung
Ableitung
Integration

Binäre Operationen
Addition

Multiplikation
Verbesserte
Typannotationen
Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung



Das k-te Element

$$r_k = \sum_{i=0}^k p_i \cdot q_{k-i}$$

noch eine Schleife!

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte
Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Multiplikation



Das k-te Element

$$r_k = \sum_{i=0}^k p_i \cdot q_{k-i}$$

noch eine Schleife!

Berechnung

```
rk = 0
for i in range(k+1):
    rk = rk + safe_index(p,i,0) * safe_index(q,k-i,0)
```

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation
Auswertung
Ableitung
Integration

Binäre Operationen
Addition
Multiplikation

Verbesserte
Typannotationen
Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Multiplikation



Schritt 4: Funktionsdefinition, final

```
def poly_mult(
    p : polynom,
    q : polynom
) -> polynom:
    result = []
    for k in range(len(p) + len(q) - 1):
        rk = 0
        for i in range(k+1):
            rk = rk + safe_index(p,i,0) * safe_index(q,k-i,0)
        result = result + [rk]
    return result
```

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation
Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen
Addition

Multiplikation

Verbesserte
Typannotationen
Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Verbesserte Typannotationen

Verbesserte Typannotationen

Am Beispiel der sicheren Indizierung



```
def safe_index(  
    p : list[float],  
    i : int, # assume >= 0  
    d : float  
) -> float:  
  
    return p[i] if i < len(p) else d
```

- Laut Typannotation muss das Argument `p` immer `list[float]`, das Argument `d : float` und demzufolge das Ergebnis `float` sein.

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplication

Verbesserte

Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Verbesserte Typannotationen

Am Beispiel der sicheren Indizierung



```
def safe_index(  
    p : list[float],  
    i : int, # assume >= 0  
    d : float  
) -> float:  
  
    return p[i] if i < len(p) else d
```

- Laut Typannotation muss das Argument `p` immer `list[float]`, das Argument `d : float` und demzufolge das Ergebnis `float` sein.
- Am Code sehen wir aber, dass keine arithmetischen Operationen auf `d` oder die Elemente von `p` angewendet werden, sondern dass diese einfach durchgereicht werden!

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplication

Verbesserte

Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Verbesserte Typannotationen

Am Beispiel der sicheren Indizierung



```
def safe_index(  
    p : list[float],  
    i : int, # assume >= 0  
    d : float  
) -> float:  
  
    return p[i] if i < len(p) else d
```

- Laut Typannotation muss das Argument `p` immer `list[float]`, das Argument `d : float` und demzufolge das Ergebnis `float` sein.
- Am Code sehen wir aber, dass keine arithmetischen Operationen auf `d` oder die Elemente von `p` angewendet werden, sondern dass diese einfach durchgereicht werden!
- Eine solche Funktion heißt *parametrisch polymorph*, weil statt `float` ein beliebiger Typ verwendet werden darf.

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplication

Verbesserte

Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Verbesserte Typannotationen

Typvariable



- Schreibweise für einen genaueren **generischen Typ**:

```
def safe_index[T](  
    p : list[T],  
    i : int,  # assume >= 0  
    d : T  
) -> T:
```

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation
Auswertung
Ableitung

Integration

Binäre Operationen
Addition
Multiplikation

Verbesserte
Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Verbesserte Typannotationen

Typvariable



- Schreibweise für einen genaueren **generischen Typ**:

```
def safe_index[T](  
    p : list[T],  
    i : int, # assume >= 0  
    d : T  
) -> T:
```

- T ist eine **Typvariable**, die für einen beliebigen Typ steht.

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation
Auswertung
Ableitung

Integration
Binäre Operationen
Addition

Multiplikation
Verbesserte
Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Verbesserte Typannotationen

Typvariable



- Schreibweise für einen genaueren **generischen Typ**:

```
def safe_index[T](  
    p : list[T],  
    i : int, # assume >= 0  
    d : T  
) -> T:
```

- T ist eine **Typvariable**, die für einen beliebigen Typ steht.
- Sie wird durch [T] eingeführt und darf in den Typannotationen der Kopfzeile verwendet werden.

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte
Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Verbesserte Typannotationen

Typvariable



- Schreibweise für einen genaueren **generischen Typ**:

```
def safe_index[T](  
    p : list[T],  
    i : int, # assume >= 0  
    d : T  
) -> T:
```

- T ist eine **Typvariable**, die für einen beliebigen Typ steht.
- Sie wird durch [T] eingeführt und darf in den Typannotationen der Kopfzeile verwendet werden.
- Bei Verwendung von `safe_index` setzt der Typchecker einen passenden Typ ein, der konsistent verwendet werden muss.

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte

Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Generischer Typ



- Ein generischer Typ enthält eine oder mehrere Typvariablen (wie `list[T]`).
- Er steht als “Abkürzung” für alle Typen, die man durch Einsetzen von erlaubten konkreten Typen für die Typvariablen herstellen kann.
- Ohne weitere Beschränkung sind **alle** konkreten Typen erlaubt.

Lexikographische Ordnung

Die lexikographische Ordnung



Gegeben

Zwei Sequenzen der Längen $m, n \geq 0$:

$$\vec{a} = "a_1 a_2 \dots a_m"$$

$$\vec{b} = "b_1 b_2 \dots b_n"$$

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte
Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Die lexikographische Ordnung



Gegeben

Zwei Sequenzen der Längen $m, n \geq 0$:

$$\vec{a} = "a_1 a_2 \dots a_m"$$

$$\vec{b} = "b_1 b_2 \dots b_n"$$

$\vec{a} \leq \vec{b}$ in der lexikographischen Ordnung, falls

Es gibt $0 \leq k \leq \min(m, n)$, so dass

- $a_1 = b_1, \dots, a_k = b_k$ und

$$\vec{a} = "a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1} \dots a_m"$$

$$\vec{b} = "a_1 a_2 \dots a_k b_{k+1} \dots b_n"$$

- $k = m$

$$\vec{a} = "a_1 a_2 \dots a_m"$$

$$\vec{b} = "a_1 a_2 \dots a_m b_{m+1} \dots b_n"$$

- oder $k < m$ und $a_{k+1} < b_{k+1}$.

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung
Ableitung

Integration

Binäre Operationen
Addition

Multiplikation

Verbesserte
Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Lexikographische Ordnung



Schritt 1: Bezeichner und Datentypen

Die Funktion `lex_leq` nimmt als Eingabe

- `a : list[int]` eine Sequenz von Zahlen
- `b : list[int]` eine Sequenz von Zahlen

und liefert als Ergebnis True, falls $a \leq b$, sonst False.

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte
Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Lexikographische Ordnung



Schritt 1: Bezeichner und Datentypen

Die Funktion `lex_leq` nimmt als Eingabe

- `a : list[int]` eine Sequenz von Zahlen
- `b : list[int]` eine Sequenz von Zahlen

und liefert als Ergebnis True, falls $a \leq b$, sonst False.

Schritt 2: Funktionsgerüst

```
def lex_leq(a : list[int], b : list[int]) -> bool:  
    # fill in  
    for k in range(...):  
        pass # fill in  
    return ...
```

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multipikation

Verbesserte

Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Lexikographische Ordnung



UNI
FREIBURG

Schritt 3: Beispiele

```
assert lex_leq([], []) == True
assert lex_leq([42], []) == False
assert lex_leq([], [11]) == True
assert lex_leq([1,2,3], [1]) == False
assert lex_leq([1], [1,2,3]) == True
assert lex_leq([1,2,3], [0,1]) == False
assert lex_leq([1,2,3], [1,3]) == True
assert lex_leq([1,2,3], [1,2,3]) == True
```

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte
Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Lexikographische Ordnung



UNI
FREIBURG

Schritt 3: Beispiele

```
assert lex_leq([], []) == True
assert lex_leq([42], []) == False
assert lex_leq([], [11]) == True
assert lex_leq([1,2,3], [1]) == False
assert lex_leq([1], [1,2,3]) == True
assert lex_leq([1,2,3], [0,1]) == False
assert lex_leq([1,2,3], [1,3]) == True
assert lex_leq([1,2,3], [1,2,3]) == True
```

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte
Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Beobachtungen

- Range `minlen = min (len (a), len (b))`

Lexikographische Ordnung

Schritt 4: Funktionsdefinition



UNI
FREIBURG

```
def lex_leq(  
    a : list[int],  
    b : list[int]  
) -> bool:  
    minlen = min (len (a), len (b))  
    for k in range(minlen):  
        if a[k] < b[k]:  
            return True  
        if a[k] > b[k]:  
            return False  
    # a is prefix of b or vice versa  
    return len(a) <= len(b)
```

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen

Skalarmultiplikation

Auswertung

Ableitung

Integration

Binäre Operationen

Addition

Multiplikation

Verbesserte
Typannotationen

Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Typannotation für lexleq (1)



Problem

- Der Typ `list[int]` charakterisiert Listen von Zahlen.
- Aber der Code funktioniert viel allgemeiner, wenn nur die Elemente vergleichbar vom gleichen Typ sind!
Beispiel: `lex_leq ("abc", [1,2,3])` liefert Fehler!
- Wir müssen sicherstellen:
 - 1 die Elemente haben den gleichen Typ und
 - 2 dieser Typ unterstützt Ordnungen.

Entwurf von
Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit
Polynomen
Skalarmultiplikation

Auswertung
Ableitung

Integration
Binäre Operationen
Addition
Multiplikation

Verbesserte
Typannotationen
Lexikographische
Ordnung

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Typannotation für lexleq (2)



Verbesserung

```
def lex_leq[B : (int, float, str)](  
    a : list[B], b : list[B]) -> bool:
```

B ist eine Typvariable, aber jetzt ist bekannt, dass sie für einen der aufgelisteten Typen `int`, `float` oder `str` steht.

D.h.: a und b sind beides Listen, deren Elemente entweder `int` oder `float` oder `str` sind und daher vergleichbar!

Entwurf von Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit Polynomen
Skalarmultiplikation

Auswertung
Ableitung
Integration
Binäre Operationen
Addition
Multiplikation

Verbesserte Typannotationen
Lexikographische Ordnung

while-Schleifen

Zusammenfassung



Typannotation für lexleq (2)

Verbesserung

```
def lex_leq[B : (int, float, str)](  
    a : list[B], b : list[B]) -> bool:
```

B ist eine Typvariable, aber jetzt ist bekannt, dass sie für einen der aufgelisteten Typen `int`, `float` oder `str` steht.

D.h.: a und b sind beides Listen, deren Elemente entweder `int` oder `float` oder `str` sind und daher vergleichbar!

Bewertung: Noch nicht optimal...

ok, aber was ist mit `list[int]`, `list[list[int]]` usw? Alle diese Typen sind auch vergleichbar...

Bessere Konzepte in Rust, Haskell, Scala, ...

Entwurf von Schleifen

Fallstudie:
Rechnen mit Polynomen
Skalarmultiplikation

Auswertung
Ableitung
Integration
Binäre Operationen
Addition
Multiplikation

Verbesserte Typannotationen
Lexikographische Ordnung

while-Schleifen

Zusammenfassung

while-Schleifen



Wiederholen eines Schleifenrumpfs, ohne dass vorher klar ist, wie oft.

Beispiele

- Einlesen von mehreren Eingaben
- Das Newton-Verfahren zum Auffinden von Nullstellen
- Das Collatz-Problem

Entwurf von
Schleifen

while-
Schleifen

Einlesen einer
Liste

Das
Newton-Verfahren

Das
Collatz-Problem

Abschließende
Bemerkungen

Zusammen-
fassung



Wiederholen eines Schleifenrumpfs, ohne dass vorher klar ist, wie oft.

Beispiele

- Einlesen von mehreren Eingaben
- Das Newton-Verfahren zum Auffinden von Nullstellen
- Das Collatz-Problem

Die while-Schleife

- Syntax:

while Bedingung:

Block # Schleifenrumpf

- Semantik: Die Anweisungen im *Block* werden wiederholt, solange die *Bedingung* keinen Nullwert (z.B. True) liefert.

Entwurf von
Schleifen

while-
Schleifen

Einlesen einer
Liste

Das
Newton-Verfahren

Das
Collatz-Problem

Abschließende
Bemerkungen

Zusammen-
fassung

Einlesen einer Liste

Beispiel: Einlesen einer Liste



Schritt 1: Bezeichner und Datentypen

Die Funktion `input_list` nimmt keine Parameter,
erwartet eine beliebig lange Folge von Eingaben, die mit einer leeren Zeile
abgeschlossen ist, und liefert als Ergebnis die Liste dieser Eingaben als Strings.

Beispiel: Einlesen einer Liste



Schritt 2: Funktionsgerüst

```
def input_list() -> list[str]:  
    # fill in, initialization  
    while expr_cond:  
        pass # fill in  
    return ...
```

Entwurf von
Schleifen

while-
Schleifen

Einlesen einer
Liste

Das
Newton-Verfahren

Das
Collatz-Problem

Abschließende
Bemerkungen

Zusammen-
fassung



Beispiel: Einlesen einer Liste

Schritt 2: Funktionsgerüst

```
def input_list() -> list[str]:  
    # fill in, initialization  
    while expr_cond:  
        pass # fill in  
    return ...
```

Warum while?

- Die Anzahl der Eingaben ist nicht von vorne herein klar.
- Dafür ist eine while-Schleife erforderlich.
- Die while-Schleife führt ihren Rumpf solange aus, bis eine leere Eingabe erfolgt.

Entwurf von
Schleifen

while-
Schleifen

Einlesen einer
Liste

Das
Newton-Verfahren

Das
Collatz-Problem

Abschließende
Bemerkungen

Zusammen-
fassung

Einlesen einer Liste



Beispiele

Eingabe:

```
>>> input_list()  
  
[]  
>>> input_list()  
Bring  
mal  
das  
WLAN-Kabel!  
  
['Bring', 'mal', 'das', 'WLAN-Kabel!']
```

Entwurf von
Schleifen

while-
Schleifen

Einlesen einer
Liste

Das
Newton-Verfahren

Das
Collatz-Problem

Abschließende
Bemerkungen

Zusammen-
fassung

Einlesen einer Liste



Schritt 4: Funktionsdefinition

```
def input_list() -> list[str]:  
    result = []  
    line = input()  
    while line:  
        result = result + [line]  
        line = input()  
    return result
```

Entwurf von
Schleifen

while-
Schleifen

Einlesen einer
Liste

Das
Newton-Verfahren

Das
Collatz-Problem
Abschließende
Bemerkungen

Zusammen-
fassung



Das Newton-Verfahren



Suche Nullstellen von stetig differenzierbaren Funktionen

Verfahren

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar

- 1 Wähle $x_0 \in \mathbb{R}$, $n = 0$
- 2 Setze $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
- 3 Berechne nacheinander x_1, x_2, \dots, x_k bis $f(x_k)$ nah genug an 0.
- 4 Ergebnis ist x_k

Entwurf von
Schleifen

while-
Schleifen

Einlesen einer
Liste

Das
Newton-Verfahren

Das
Collatz-Problem

Abschließende
Bemerkungen

Zusammen-
fassung

Das Newton-Verfahren

Präzisierung

... für Polynomfunktionen

- Erfüllen die Voraussetzung
- Ableitung mit derivative



Das Newton-Verfahren

Präzisierung



... für Polynomfunktionen

- Erfüllen die Voraussetzung
- Ableitung mit derivative

Was heißt hier “nah genug”?

- Eine überraschend schwierige Frage ...

Entwurf von
Schleifen

while-
Schleifen

Einlesen einer
Liste

Das
Newton-Verfahren

Das
Collatz-Problem
Abschließende
Bemerkungen

Zusammen-
fassung

Das Newton-Verfahren

Präzisierung



... für Polynomfunktionen

- Erfüllen die Voraussetzung
- Ableitung mit derivative

Was heißt hier “nah genug”?

- Eine überraschend schwierige Frage ...
- Wir sagen: x ist nah genug an x' , falls $\frac{|x-x'|}{|x|+|x'|} < \varepsilon$

Entwurf von
Schleifen

while-
Schleifen

Einlesen einer
Liste

Das
Newton-Verfahren

Das
Collatz-Problem
Abschließende
Bemerkungen

Zusammen-
fassung

Das Newton-Verfahren

Präzisierung



... für Polynomfunktionen

- Erfüllen die Voraussetzung
- Ableitung mit derivative

Was heißt hier “nah genug”?

- Eine überraschend schwierige Frage ...
- Wir sagen: x ist nah genug an x' , falls $\frac{|x-x'|}{|x|+|x'|} < \varepsilon$
- $\varepsilon > 0$ ist eine Konstante, die von der Repräsentation von `float`, dem Verfahren und der gewünschten Genauigkeit abhängt. Dazu kommen noch Sonderfälle.

Entwurf von
Schleifen

while-
Schleifen

Einlesen einer
Liste

Das
Newton-Verfahren

Das
Collatz-Problem
Abschließende
Bemerkungen

Zusammen-
fassung

Das Newton-Verfahren

Präzisierung



... für Polynomfunktionen

- Erfüllen die Voraussetzung
- Ableitung mit derivative

Was heißt hier “nah genug”?

- Eine überraschend schwierige Frage ...
- Wir sagen: x ist nah genug an x' , falls $\frac{|x-x'|}{|x|+|x'|} < \varepsilon$
- $\varepsilon > 0$ ist eine Konstante, die von der Repräsentation von `float`, dem Verfahren und der gewünschten Genauigkeit abhängt. Dazu kommen noch Sonderfälle.
- Wir wählen: $\varepsilon = 2^{-20} \approx 10^{-6}$

Entwurf von
Schleifen

while-
Schleifen

Einlesen einer
Liste

Das
Newton-Verfahren

Das
Collatz-Problem
Abschließende
Bemerkungen

Zusammen-
fassung

Das Newton-Verfahren

Präzisierung



... für Polynomfunktionen

- Erfüllen die Voraussetzung
- Ableitung mit derivative

Was heißt hier “nah genug”?

- Eine überraschend schwierige Frage ...
- Wir sagen: x ist nah genug an x' , falls $\frac{|x-x'|}{|x|+|x'|} < \varepsilon$
- $\varepsilon > 0$ ist eine Konstante, die von der Repräsentation von `float`, dem Verfahren und der gewünschten Genauigkeit abhängt. Dazu kommen noch Sonderfälle.
- Wir wählen: $\varepsilon = 2^{-20} \approx 10^{-6}$
- Genug für eine Hilfsfunktion!

Entwurf von
Schleifen

while-
Schleifen

Einlesen einer
Liste

Das
Newton-Verfahren

Das
Collatz-Problem
Abschließende
Bemerkungen

Zusammen-
fassung

Hilfsfunktion



UNI
FREIBURG

Die freundlichen Pythonistas waren schon für uns aktiv. `pytest` ist ein Modul, das die Erstellung von Tests unterstützt.¹ Darin ist eine passende Hilfsfunktion definiert:

```
from pytest import approx
```

Die Funktion `pytest.approx` erzeugt eine approximative Zahl, bei der Operator `==` ähnlich wie “nah genug” implementiert ist.

Es reicht, wenn ein Argument approximativ ist.

Entwurf von
Schleifen

while-
Schleifen

Einlesen einer
Liste

Das
Newton-Verfahren

Das
Collatz-Problem
Abschließende
Bemerkungen

Zusammen-
fassung

¹ Falls nicht vorhanden: `pip3 install pytest`

Hilfsfunktion

Die freundlichen Pythonistas waren schon für uns aktiv. `pytest` ist ein Modul, das die Erstellung von Tests unterstützt.¹ Darin ist eine passende Hilfsfunktion definiert:

```
from pytest import approx
```

Die Funktion `pytest.approx` erzeugt eine approximative Zahl, bei der Operator `==` ähnlich wie “nah genug” implementiert ist.

Es reicht, wenn ein Argument approximativ ist.

Alternative: verwende `math.isclose()` ...

Entwurf von
Schleifen

while-
Schleifen

Einlesen einer
Liste

Das
Newton-Verfahren

Das
Collatz-Problem
Abschließende
Bemerkungen

Zusammen-
fassung

¹ Falls nicht vorhanden: `pip3 install pytest`

Schritt 1: Bezeichner und Datentypen

Die Funktion `newton` nimmt als Eingabe

- `f : polynom` ein Polynom
- `x0 : float` einen Startwert

und verwendet das Newton-Verfahren zur Berechnung einer Zahl x , sodass $f(x)$ "nah genug" an 0 ist.

Entwurf von
Schleifen

while-
Schleifen

Einlesen einer
Liste

Das
Newton-Verfahren

Das
Collatz-Problem
Abschließende
Bemerkungen

Zusammen-
fassung



Schritt 2: Funktionsgerüst

```
def newton(  
    f : polynom,  
    x0 : float  
) -> float:  
    # fill in  
    while expr_cond:  
        pass # fill in  
    return ...
```

Entwurf von
Schleifen

while-
Schleifen

Einlesen einer
Liste

Das
Newton-Verfahren

Das
Collatz-Problem

Abschließende
Bemerkungen

Zusammen-
fassung

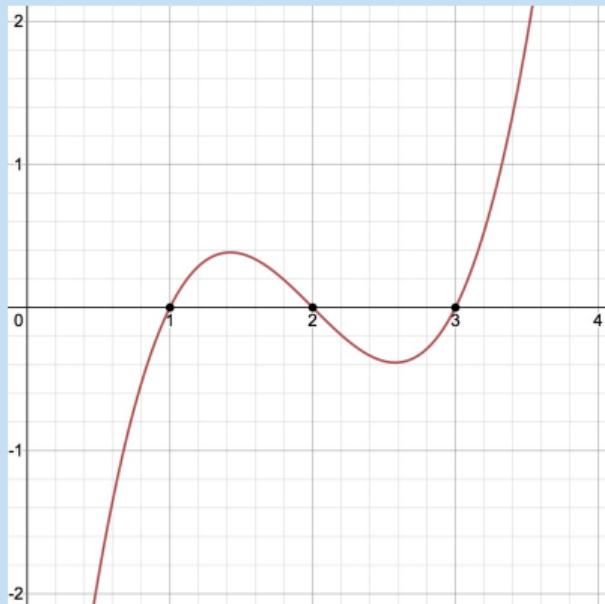
Warum while?

- Das Newton-Verfahren verwendet eine Folge x_n ,
ohne dass von vorne herein klar ist, wieviele Elemente benötigt werden.
- Zur Verarbeitung dieser Folge ist eine while-Schleife erforderlich.
- Diese while-Schleife terminiert aufgrund der mathematischen / numerischen Eigenschaften des Newton-Verfahrens. Siehe Vorlesung Mathe I.

Newton-Verfahren



Beispielfunktion: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$



Entwurf von
Schleifen

while-
Schleifen

Einlesen einer
Liste

Das
Newton-Verfahren

Das
Collatz-Problem
Abschließende
Bemerkungen

Zusammen-
fassung

Schritt 3: Beispiele

```
p = [-6, 11, -6, 1]
assert newton (p, 0)    == approx(1)
assert newton (p, 1.1)   == approx(1)
assert newton (p, 1.7)   == approx(2)
assert newton (p, 2.5)   == approx(1)
assert newton (p, 2.7)   == approx(3)
assert newton (p, 10)    == approx(3)
```

Entwurf von
Schleifen

while-
Schleifen

Einlesen einer
Liste

Das
Newton-Verfahren

Das
Collatz-Problem
Abschließende
Bemerkungen

Zusammen-
fassung



Schritt 4: Funktionsdefinition

```
def newton(  
    f : polynom,  
    x0 : float  
) -> float:  
  
    deriv_f = derivative(f)  
    xn = x0  
  
    while poly_eval (f, xn) != approx(0):  
        xn = xn - ( poly_eval (f, xn)  
                    / poly_eval (deriv_f, xn))  
  
    return xn
```

Entwurf von
Schleifen

while-
Schleifen

Einlesen einer
Liste

Das
Newton-Verfahren

Das
Collatz-Problem
Abschließende
Bemerkungen

Zusammen-
fassung



Das Collatz-Problem

Das Collatz-Problem



Verfahren (Collatz 1937)

Starte mit einer positiven ganzen Zahl n und definiere eine Folge $n = a_0, a_1, a_2, \dots$:

$$a_{i+1} = \begin{cases} a_i/2 & a_i \text{ gerade} \\ 3a_i + 1 & a_i \text{ ungerade} \end{cases}$$

Entwurf von
Schleifen

while-
Schleifen

Einlesen einer
Liste

Das
Newton-Verfahren

Das
Collatz-Problem

Abschließende
Bemerkungen

Zusammen-
fassung

Das Collatz-Problem



UNI
FREIBURG

Verfahren (Collatz 1937)

Starte mit einer positiven ganzen Zahl n und definiere eine Folge $n = a_0, a_1, a_2, \dots$:

$$a_{i+1} = \begin{cases} a_i/2 & a_i \text{ gerade} \\ 3a_i + 1 & a_i \text{ ungerade} \end{cases}$$

Offene Frage

Für welche Startwerte n gibt es ein i mit $a_i = 1$?

Entwurf von
Schleifen

while-
Schleifen

Einlesen einer
Liste

Das
Newton-Verfahren

Das
Collatz-Problem
Abschließende
Bemerkungen

Zusammen-
fassung

Das Collatz-Problem



UNI
FREIBURG

Verfahren (Collatz 1937)

Starte mit einer positiven ganzen Zahl n und definiere eine Folge $n = a_0, a_1, a_2, \dots$:

$$a_{i+1} = \begin{cases} a_i/2 & a_i \text{ gerade} \\ 3a_i + 1 & a_i \text{ ungerade} \end{cases}$$

Offene Frage

Für welche Startwerte n gibt es ein i mit $a_i = 1$?

Beispiele (Folge der durchlaufenden Zahlen)

- [3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1]
- [7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1]

Entwurf von
Schleifen

while-
Schleifen

Einlesen einer
Liste

Das
Newton-Verfahren

Das
Collatz-Problem
Abschließende
Bemerkungen

Zusammen-
fassung

Collatz-Problem

```
def collatz (n : int) -> list[int]:  
    result = [n]  
    while n > 1:  
        if n % 2 == 0:  
            n = n // 2  
        else:  
            n = 3 * n + 1  
        result = result + [n]  
    return result
```

Entwurf von
Schleifen

while-
Schleifen

Einlesen einer
Liste

Das
Newton-Verfahren

Das
Collatz-Problem

Abschließende
Bemerkungen

Zusammen-
fassung



Warum while?

- Es ist nicht bekannt, ob `collatz(n)` für jede Eingabe terminiert.
- Aber validiert für alle $n < 20 \cdot 2^{58} \approx 5.7646 \cdot 10^{18}$ (Oliveira e Silva).

Abschließende Bemerkungen

Termination einer Schleife



- Die Anzahl der Durchläufe einer `for`-Schleife ist stets durch den Schleifenkopf vorgegeben:

Entwurf von
Schleifen

while-
Schleifen

Einlesen einer
Liste

Das
Newton-Verfahren

Das
Collatz-Problem

Abschließende
Bemerkungen

Zusammen-
fassung

Termination einer Schleife



- Die Anzahl der Durchläufe einer `for`-Schleife ist stets durch den Schleifenkopf vorgegeben:

- `for element in seq:`

- Anzahl der Elemente in der Sequenz *seq*

Entwurf von
Schleifen

while-
Schleifen

Einlesen einer
Liste

Das
Newton-Verfahren

Das
Collatz-Problem

Abschließende
Bemerkungen

Zusammen-
fassung

Termination einer Schleife



- Die Anzahl der Durchläufe einer `for`-Schleife ist stets durch den Schleifenkopf vorgegeben:

- `for element in seq:`

- Anzahl der Elemente in der Sequenz `seq`

- `for i in range(...):`

- Größe des Range

Entwurf von
Schleifen

while-
Schleifen

Einlesen einer
Liste

Das
Newton-Verfahren

Das
Collatz-Problem

Abschließende
Bemerkungen

Zusammen-
fassung

Termination einer Schleife



- Die Anzahl der Durchläufe einer `for`-Schleife ist stets durch den Schleifenkopf vorgegeben:

- `for element in seq:`

- Anzahl der Elemente in der Sequenz `seq`

- `for i in range(...):`

- Größe des Range

- Daher **terminiert** die Ausführung einer `for`-Schleife i.a.

Entwurf von
Schleifen

while-
Schleifen

Einlesen einer
Liste

Das
Newton-Verfahren

Das
Collatz-Problem
Abschließende
Bemerkungen

Zusammen-
fassung

Termination einer Schleife



- Die Anzahl der Durchläufe einer `for`-Schleife ist stets durch den Schleifenkopf vorgegeben:
 - `for element in seq:`
Anzahl der Elemente in der Sequenz *seq*
 - `for i in range(...):`
Größe des Range
- Daher **terminiert** die Ausführung einer `for`-Schleife i.a.
- Bei einer `while`-Schleife ist die Anzahl der Durchläufe **nicht a-priori klar**.

Entwurf von
Schleifen

while-
Schleifen

Einlesen einer
Liste

Das
Newton-Verfahren

Das
Collatz-Problem
Abschließende
Bemerkungen

Zusammen-
fassung

Termination einer Schleife



- Die Anzahl der Durchläufe einer `for`-Schleife ist stets durch den Schleifenkopf vorgegeben:
 - `for element in seq:`
Anzahl der Elemente in der Sequenz *seq*
 - `for i in range(...):`
Größe des Range
- Daher **terminiert** die Ausführung einer `for`-Schleife i.a.
- Bei einer `while`-Schleife ist die Anzahl der Durchläufe **nicht a-priori klar**.
- Daher ist stets eine Überlegung erforderlich, ob eine `while`-Schleife terminiert (**Terminationsbedingung**).

Termination einer Schleife

- Die Anzahl der Durchläufe einer `for`-Schleife ist stets durch den Schleifenkopf vorgegeben:
 - `for element in seq:`
Anzahl der Elemente in der Sequenz *seq*
 - `for i in range(...):`
Größe des Range
- Daher **terminiert** die Ausführung einer `for`-Schleife i.a.
- Bei einer `while`-Schleife ist die Anzahl der Durchläufe **nicht a-priori klar**.
- Daher ist stets eine Überlegung erforderlich, ob eine `while`-Schleife terminiert (**Terminationsbedingung**).
- Die Terminationsbedingung **muss** im Programm z.B. als Kommentar dokumentiert werden.

Beispiel Zweierlogarithmus (Terminationsbedingung)



Zweierlogarithmus

$$\log_2 a = b$$

$$2^b = a$$

■ für $a > 0$

Beispiel Zweierlogarithmus (Terminationsbedingung)



Zweierlogarithmus

$$\log_2 a = b$$

$$2^b = a$$

■ für $a > 0$

für ganze Zahlen

$$12 \uparrow (n) = m$$

$$m = \lfloor \log_2 n \rfloor$$

■ für $n > 0$

Implementierung Zweierlogarithmus



```
def l2 (n : int) -> int:  
    m = -1  
    while n>0:  
        m = m + 1  
        n = n // 2  
    return m
```

Terminationsbedingung

- Die `while`-Schleife terminiert, weil für alle $n > 0$ gilt, dass $n > n//2$ und jede absteigende Folge von positiven ganzen Zahlen $n_1 > n_2 > \dots$ abbricht.
- Die Anzahl der Schleifendurchläufe ist durch $\log_2 n$ beschränkt.

Entwurf von
Schleifen

while-
Schleifen

Einlesen einer
Liste

Das
Newton-Verfahren

Das
Collatz-Problem

Abschließende
Bemerkungen

Zusammen-
fassung



UNI
FREIBURG

Entwurf von
Schleifen

while-
Schleifen

Zusammen-
fassung

Zusammenfassung

Zusammenfassung



- Funktionen über **Sequenzen** verwenden **for-in-Schleifen**.
- Ergebnisse werden meist in einer **Akkumulator Variable** berechnet.
- Funktionen über **mehreren Sequenzen** verwenden **for-range-Schleifen**.
- Der verwendete Range hängt von der Problemstellung ab.
- **Teilprobleme werden in Hilfsfunktionen ausgelagert**.
- **while-Schleifen** werden verwendet, wenn die Anzahl der Schleifendurchläufe nicht von vorne herein bestimmt werden kann oder soll. Typischerweise
 - zur Verarbeitung von Eingaben
 - zur Berechnung von Approximationen
- Jede while-Schleife muss eine **dokumentierte Terminationsbedingung** haben.