Informatik I: Einführung in die Programmierung

17. Funktionale Programmierung

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

UNI FREIBURG

Prof. Dr. Peter Thiemann

14.01.2024

UNI FREIBURG

Funktionale Programmierung

Programmierparadigmen

UNI FREIBURG

- Es gibt verschiedene Programmierparadigmen oder Programmierstile.
- Imperative Programmierung beschreibt, wie etwas erreicht werden soll.
- Deklarative Programmierung beschreibt, was erreicht werden soll.

Imperative Programmierparadigmen

UNI FREIBURG

Imperative Programmierung

- Zum Programm gehört ein Zustand (aktuelle Werte der Variablen, Laufzeitkeller, etc), der sich während der Ausführung ändert.
- Denkansatz beim Programmieren: Modifikation des Zustands.
- Programm besteht aus **Anweisungen** (Zuweisung, ...).

Imperative Programmierparadigmen

UNI FREIBURG

Imperative Programmierung

- Zum Programm gehört ein Zustand (aktuelle Werte der Variablen, Laufzeitkeller, etc), der sich während der Ausführung ändert.
- Denkansatz beim Programmieren: Modifikation des Zustands.
- Programm besteht aus **Anweisungen** (Zuweisung, ...).

Organisation von imperativen Programmen

- Prozedural: Die Aufgabe wird in kleinere Teile – Prozeduren – zerlegt, die auf den Daten arbeiten. (Sprachen: Pascal, C, ...)
- Objekt-orientiert: Die Aufgabe wird in Klassen zerlegt, die lokal Daten und die Methoden darauf enthalten. (Sprachen: Smalltalk, Eiffel, Java, ...)

Deklarative Programmierparadigmen

UNI FREIBURG

Deklarative Programmierung

- Keine explizite Bearbeitung eines Berechnungszustands.
- Logische Programmierung (LP) beschreibt die Aufgabe durch logische Formeln: Prolog, constraint programming, ASP.
- Funktionale Programmierung (FP) beschreibt die Aufgabe durch mathematische Funktionen: Haskell, OCaml, Racket, Clojure, Lisp
- Abfragesprachen wie SQL oder XQuery sind ebenfalls deklarativ und bauen auf der Relationenalgebra bzw. der XML-Algebra auf.

Eigenschaften funktionaler Programmierung

UNI FREIBURG

- Es gibt Funktionen höherer Ordnung, d.h. Funktionen, deren Argumente und/oder Ergebnisse selbst wieder Funktionen sind.

Eigenschaften funktionaler Programmierung

- Es gibt Funktionen höherer Ordnung, d.h. Funktionen, deren Argumente und/oder Ergebnisse selbst wieder Funktionen sind.
- Keine Schleifen, sondern nur Rekursion.

Eigenschaften funktionaler Programmierung

- Es gibt Funktionen höherer Ordnung, d.h. Funktionen, deren Argumente und/oder Ergebnisse selbst wieder Funktionen sind.
- Keine Schleifen, sondern nur Rekursion.
- Keine Anweisungen, sondern nur Ausdrücke.

Eigenschaften funktionaler Programmierung

- Es gibt Funktionen höherer Ordnung, d.h. Funktionen, deren Argumente und/oder Ergebnisse selbst wieder Funktionen sind.
- Keine Schleifen, sondern nur Rekursion.
- Keine Anweisungen, sondern nur Ausdrücke.
  - Auch Funktionen sind als Ausdrücke definierbar.

Eigenschaften funktionaler Programmierung

UNI FREIBURG

- Es gibt Funktionen höherer Ordnung, d.h. Funktionen, deren Argumente und/oder Ergebnisse selbst wieder Funktionen sind.
- Keine Schleifen, sondern nur Rekursion.
- Keine Anweisungen, sondern nur Ausdrücke.
  - Auch Funktionen sind als Ausdrücke definierbar.
- In rein funktionalen Sprachen: keine Zuweisungen und keine Seiteneffekte.

Eigenschaften funktionaler Programmierung

- Es gibt Funktionen höherer Ordnung, d.h. Funktionen, deren Argumente und/oder Ergebnisse selbst wieder Funktionen sind.
- Keine Schleifen, sondern nur Rekursion.
- Keine Anweisungen, sondern nur Ausdrücke.
  - Auch Funktionen sind als Ausdrücke definierbar.
- In rein funktionalen Sprachen: keine Zuweisungen und keine Seiteneffekte.
  - $\Rightarrow$ Eine Variable erhält zu Beginn ihren Wert, der sich nicht mehr ändert.

Eigenschaften funktionaler Programmierung

- Es gibt Funktionen höherer Ordnung, d.h. Funktionen, deren Argumente und/oder Ergebnisse selbst wieder Funktionen sind.
- Keine Schleifen, sondern nur Rekursion.
- Keine Anweisungen, sondern nur Ausdrücke.
  - Auch Funktionen sind als Ausdrücke definierbar.
- In rein funktionalen Sprachen: keine Zuweisungen und keine Seiteneffekte.
  - $\Rightarrow$ Eine Variable erhält zu Beginn ihren Wert, der sich nicht mehr ändert.
  - $\Rightarrow$ Alle Datenstrukturen sind unveränderlich.

Eigenschaften funktionaler Programmierung

- Es gibt Funktionen höherer Ordnung, d.h. Funktionen, deren Argumente und/oder Ergebnisse selbst wieder Funktionen sind.
- Keine Schleifen, sondern nur Rekursion.
- Keine Anweisungen, sondern nur Ausdrücke.
  - Auch Funktionen sind als Ausdrücke definierbar.
- In rein funktionalen Sprachen: keine Zuweisungen und keine Seiteneffekte.
  - $\Rightarrow$ Eine Variable erhält zu Beginn ihren Wert, der sich nicht mehr ändert.
  - $\Rightarrow$ Alle Datenstrukturen sind unveränderlich.
  - $\Rightarrow$ Referentielle Transparenz: Eine Funktion liefert bei gleichen Argumenten immer das gleiche Ergebnis.

Eigenschaften funktionaler Programmierung

UNI FREIBURG

- Es gibt Funktionen höherer Ordnung, d.h. Funktionen, deren Argumente und/oder Ergebnisse selbst wieder Funktionen sind.
- Keine Schleifen, sondern nur Rekursion.
- Keine Anweisungen, sondern nur Ausdrücke.
  - Auch Funktionen sind als Ausdrücke definierbar.
- In rein funktionalen Sprachen: keine Zuweisungen und keine Seiteneffekte.
  - $\Rightarrow$ Eine Variable erhält zu Beginn ihren Wert, der sich nicht mehr ändert.
  - $\Rightarrow$ Alle Datenstrukturen sind unveränderlich.
  - $\Rightarrow$ Referentielle Transparenz: Eine Funktion liefert bei gleichen Argumenten immer das gleiche Ergebnis.
- Die meisten funktionalen Sprachen besitzen ein starkes statisches Typsystem, sodass zur Laufzeit kein `TypeError` auftreten kann.

Attribute von Typsystemen

UNI FREIBURG

Stark vs. schwach

- In einem **starken** Typsystem besitzt jeder Wert einen unveränderlichen Typ.
- In einem **schwachen** Typsystem kann ein Wert je nach Kontext unterschiedliche Typen annehmen.

Statisch vs. dynamisch

- In einem **statischen** Typsystem wird vor Ausführung eines Programms eine Typüberprüfung durchgeführt. Das Programm kommt nur zur Ausführung, wenn diese Prüfung erfolgreich ist.
- In einem **dynamischen** Typsystem erfolgt die Typüberprüfung zur Laufzeit, vor Ausführung jeder Operation.
  - Flexibler als statische Typüberprüfung, aber meist weniger effizient!

UNI FREIBURG

Funktionale Programmierung in Python

FP in Python

UNI FREIBURG

- Funktionen werden durch Objekte repräsentiert.

FP in Python

UNI FREIBURG

- Funktionen werden durch Objekte repräsentiert.
- Funktionen höherer Ordnung werden voll unterstützt.

FP in Python

UNI FREIBURG

- Funktionen werden durch Objekte repräsentiert.
- Funktionen höherer Ordnung werden voll unterstützt.
- Python besitzt ein starkes dynamisches Typsystem.

FP in Python: Defizite

UNI FREIBURG

- Referentielle Transparenz kann in Python verletzt werden.
  Abhilfe: lokale Variablen nur einmal zuweisen, keine globalen Variablen nutzen, keine Mutables ändern.
  Die meisten Beispiele sind “mostly functional” in diesem Sinn.
  Vereinfacht Überlegungen zum aktuellen Zustand der Berechnung.

FP in Python: Defizite

UNI FREIBURG

- Referentielle Transparenz kann in Python verletzt werden.
  Abhilfe: lokale Variablen nur einmal zuweisen, keine globalen Variablen nutzen, keine Mutables ändern.
  Die meisten Beispiele sind “mostly functional” in diesem Sinn.
  Vereinfacht Überlegungen zum aktuellen Zustand der Berechnung.
- Rekursion.
  Python limitiert die Rekursionstiefe, während funktionale Sprachen beliebige Rekursion erlauben und Endrekursion automatisch in Schleifen umwandeln.

FP in Python: Defizite

UNI FREIBURG

- Referentielle Transparenz kann in Python verletzt werden.
  Abhilfe: lokale Variablen nur einmal zuweisen, keine globalen Variablen nutzen, keine Mutables ändern.
  Die meisten Beispiele sind “mostly functional” in diesem Sinn.
  Vereinfacht Überlegungen zum aktuellen Zustand der Berechnung.
- Rekursion.
  Python limitiert die Rekursionstiefe, während funktionale Sprachen beliebige Rekursion erlauben und Endrekursion automatisch in Schleifen umwandeln.
- Ausdrücke.
  Python erlaubt bei `lambda`-Funktionen nur einen Ausdruck statt eines Blocks von Anweisungen.

UNI FREIBURG

Funktionen definieren und verwenden

Funktionsdefinition und -verwendung

UNI FREIBURG

- Eine Funktion ist ein Python-Objekt.

```
>>> def simple() -> None:
...     print('invoked')
...
>>> simple   # keine Klammern -> Funktionsobjekt
<function simple at 0x109ececa0>
>>> simple() # mit Klammern -> Funktionsaufruf
invoked
```

Funktionsdefinition und -verwendung

UNI FREIBURG

- Eine Funktion ist ein Python-Objekt.

```
>>> def simple() -> None:
...     print('invoked')
...
>>> simple   # keine Klammern -> Funktionsobjekt
<function simple at 0x109eceb60>
>>> simple() # mit Klammern -> Funktionsaufruf
invoked
```

- Es kann zugewiesen werden, als Argument übergeben werden und als Funktionsresultat zurückgegeben werden.

Funktionsdefinition und -verwendung

UNI FREIBURG

- Eine Funktion ist ein Python-Objekt.

```
>>> def simple() -> None:
...     print('invoked')
...
>>> simple   # keine Klammern -> Funktionsobjekt
<function simple at 0x109eceac0>
>>> simple() # mit Klammern -> Funktionsaufruf
invoked
```

- Es kann zugewiesen werden, als Argument übergeben werden und als Funktionsresultat zurückgegeben werden.
- Und es ist aufrufbar vom Typ `Callable`...

Funktionsverwendung

```
>>> from typing import Callable
>>> spam = simple; print(spam)
<function simple at 0x109eceac0>
>>> def call_twice(fun : Callable[[],None]) -> None:
...     fun(); fun()
...
>>> call_twice(spam) # keine Klammern hinter spam
invoked
invoked
>>> def gen_fun() -> Callable[[], None]:
...     return spam
...
>>> gen_fun()
<function simple at 0x109eceac0>
>>> gen_fun()()
invoked
```

UNI FREIBURG

Lambda-Notation

Funktionen mit Lambda-Notation definieren

UNI FREIBURG

- Der `lambda`-Operator definiert eine namenlose Funktion, deren Rumpf durch einen Ausdruck gegeben ist.

```
>>> lambda x, y: x * y # multipliziere 2 Zahlen
<function <lambda> at 0x109eceb60>
>>> (lambda x, y: x * y)(3, 8)
24
>>> mul = lambda x, y: x * y
```

Der Typ `Callable`

UNI FREIBURG

- Der Typ von `mul` kann nicht wie bei einer Funktionsdefinition geschrieben werden. Stattdessen verwende `typing.Callable`:

```
>>> from typing import Callable
>>> mul: Callable[[int, int], int] = lambda x, y: x * y
```

Der Typ `Callable`

UNI FREIBURG

- Der Typ von `mul` kann nicht wie bei einer Funktionsdefinition geschrieben werden. Stattdessen verwende `typing.Callable`:

```
>>> from typing import Callable
>>> mul: Callable[[int, int], int] = lambda x, y: x * y
```

- Der allgemeine Typ einer Funktion ist `Callable[`*`ArgTypes`*`, `*`RetType`*`]` mit

Der Typ `Callable`

UNI FREIBURG

- Der Typ von `mul` kann nicht wie bei einer Funktionsdefinition geschrieben werden. Stattdessen verwende `typing.Callable`:

```
>>> from typing import Callable
>>> mul: Callable[[int, int], int] = lambda x, y: x * y
```

- Der allgemeine Typ einer Funktion ist `Callable[`*`ArgTypes`*`, `*`RetType`*`]` mit
  - *`ArgTypes`* ist die Liste der Typen der Parameter,

Der Typ `Callable`

UNI FREIBURG

- Der Typ von `mul` kann nicht wie bei einer Funktionsdefinition geschrieben werden. Stattdessen verwende `typing.Callable`:

```
>>> from typing import Callable
>>> mul: Callable[[int, int], int] = lambda x, y: x * y
```

- Der allgemeine Typ einer Funktion ist `Callable[`*`ArgTypes`*`, `*`RetType`*`]` mit
  - *`ArgTypes`* ist die Liste der Typen der Parameter,
  - *`RetType`* ist der Typ des Rückgabewerts.

Der Typ `Callable`

UNI FREIBURG

- Der Typ von `mul` kann nicht wie bei einer Funktionsdefinition geschrieben werden. Stattdessen verwende `typing.Callable`:

```
>>> from typing import Callable
>>> mul: Callable[[int, int], int] = lambda x, y: x * y
```

- Der allgemeine Typ einer Funktion ist `Callable[`*`ArgTypes`*`, `*`RetType`*`]` mit
  - *`ArgTypes`* ist die Liste der Typen der Parameter,
  - *`RetType`* ist der Typ des Rückgabewerts.
- Wird auch für Funktionsparameter verwendet, die selbst Funktionen sind.

Verwendung von Lambda-Funktionen (1)

```
>>> def mul2(x: int, y: int) -> int:
...     return x * y
...
>>> mul(4, 5) == mul2(4, 5)
True
```

- `mul2` ist äquivalent zu `mul`!

Verwendung von Lambda-Funktionen (1)

UNI FREIBURG


```
>>> def mul2(x: int, y: int) -> int:
...     return x * y
...
>>> mul(4, 5) == mul2(4, 5)
True
```

- `mul2` ist äquivalent zu `mul`!
- Lambda-Funktionen werden hauptsächlich als Argumente für Funktionen (höherer Ordnung) benutzt.

Verwendung von Lambda-Funktionen (1)

UNI FREIBURG


```
>>> def mul2(x: int, y: int) -> int:
...     return x * y
...
>>> mul(4, 5) == mul2(4, 5)
True
```

- `mul2` ist äquivalent zu `mul`!
- Lambda-Funktionen werden hauptsächlich als Argumente für Funktionen (höherer Ordnung) benutzt.
- Solche Funktionen werden oft nur einmal verwendet und sind kurz, sodass sich die Vergabe eines Namens nicht lohnt.

Verwendung von Lambda-Funktionen (2): Funktionsfabriken

UNI FREIBURG

- Funktionen können Funktionen zurückgeben. Auch das Ergebnis einer Funktion kann durch einen Lambda-Ausdruck definiert werden.

Verwendung von Lambda-Funktionen (2): Funktionsfabriken

UNI FREIBURG

- Funktionen können Funktionen zurückgeben. Auch das Ergebnis einer Funktion kann durch einen Lambda-Ausdruck definiert werden.
- Beispiel: Eine Funktion, die einen Addierer erzeugt, der immer eine vorgegebene Konstante addiert:

```
>>> def gen_adder(c : int) -> Callable[[int], int]:
...     return lambda x: x + c
...
>>> add5: Callable[[int], int] = gen_adder(5)
>>> add5(15)
20
```

UNI FREIBURG

Nützliche Funktionen höherer Ordnung: `map`, `filter` und `reduce`

`map`: Anwendung einer Funktion auf Iteratierbares

UNI FREIBURG

- `map` hat zwei Argumente: eine Funktion und ein iterierbares Objekt.

map: Anwendung einer Funktion auf Iteratierbares

UNI FREIBURG

- `map` hat zwei Argumente: eine Funktion und ein iterierbares Objekt.
- `map` wendet die Funktion auf jedes Element der Eingabe an und liefert die Funktionswerte als Iterator ab.

```
>>> list(map(lambda x: x**2, range(10)))
[0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81]
```

map: Anwendung einer Funktion auf Iteratierbares

UNI FREIBURG

- map hat zwei Argumente: eine Funktion und ein iterierbares Objekt.
- map wendet die Funktion auf jedes Element der Eingabe an und liefert die Funktionswerte als Iterator ab.

```
>>> list(map(lambda x: x**2, range(10)))
[0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81]
```

- Eine getypte Definition für map:

```
def map[A, B](f : Callable[[A], B]
              , xs : Iterable[A]) -> Iterator[B]:
    for x in xs:
        yield f (x)
```

Anwendungsbeispiel für `map`

UNI FREIBURG

- Wir wollen eine Liste `c_list` von Temperaturen von Celsius nach Fahrenheit konvertieren. Nach dem Muster zur Verarbeitung von Sequenzen:

ctof.py

```
def ctof(temp : float) -> float:
    return ((9 / 5) * temp + 32)
def list_ctof(cl : list[float]) -> list[float]:
    result = []
    for c in cl:
        result += [ctof(c)]
    return result
c_list = [16, 3, -2, -1, 2, 4]
f_list = list_ctof(c_list)
```

Anwendungsbeispiel für `map` (2)

UNI FREIBURG

- Mit `map` wesentlich knapper:

```
f_list = list(map(ctof, c_list))
```

- Oder mit einer lambda Funktion:

```
f_list = list(map(lambda c: 1.8 * c + 32, c_list))
```

`map` mit mehreren Eingaben

UNI FREIBURG

- Die eingebaute `map`-Funktion kann auch mit einer k-stelligen Funktion und k weiteren iterierbaren Eingaben aufgerufen werden ($k > 0$).

`map` mit mehreren Eingaben

UNI FREIBURG

- Die eingebaute `map`-Funktion kann auch mit einer k-stelligen Funktion und k weiteren iterierbaren Eingaben aufgerufen werden ($k > 0$).
- Für jeden Funktionsaufruf wird ein Argument von jeder der k Eingaben angefordert. Stop, falls eine der Eingaben keinen Wert mehr liefert.

map mit mehreren Eingaben

UNI FREIBURG

- Die eingebaute `map`-Funktion kann auch mit einer k-stelligen Funktion und k weiteren iterierbaren Eingaben aufgerufen werden ($k > 0$).
- Für jeden Funktionsaufruf wird ein Argument von jeder der k Eingaben angefordert. Stop, falls eine der Eingaben keinen Wert mehr liefert.
- Ein Beispiel (vgl. convolute0)

```
def convolute_0(
    xs : list[float], ys : list[float]
    ) -> float:
    return sum(map(lambda x, y: x*y,
                   xs,
                   reversed(ys)))
```

Der wirkliche Typ von map

UNI FREIBURG

- Der Typ der eingebauten `map` Funktion kann mit den bisherigen Typannotationen nicht hingeschrieben werden.
- Wir brauchen eine unbekannten Anzahl von Typvariablen, die sich nach der Zahl der Argumente richtet.

```
def map[*As, B](f : Callable[[*As], B], *xs : Iterable[*As]
                ) -> Iterator[B]:
    ...
```

- Dabei ist `*As` eine **Tupeltypvariable**, die für ein Tupel von Typen steht. Sie kann nur zusammen mit Tupelunpacking (wie im Beispiel) verwendet werden.

Zip aus map

UNI FREIBURG

- Ein einfaches `zip` mit `map` programmiert:

```
>>> list(map(lambda x, y: (x, y),
...          range(5), range(0, 50, 10)))
[(0, 0), (1, 10), (2, 20), (3, 30), (4, 40)]
```

Zip aus map

UNI FREIBURG

- Ein einfaches `zip` mit `map` programmiert:

```
>>> list(map(lambda x, y: (x, y),
...          range(5), range(0, 50, 10)))
[(0, 0), (1, 10), (2, 20), (3, 30), (4, 40)]
```

- Das originale `zip` funktioniert auch mit > 2 Argumenten...

Zip aus map

UNI FREIBURG

- Ein einfaches `zip` mit `map` programmiert:

```
>>> list(map(lambda x, y: (x, y),
...          range(5), range(0, 50, 10)))
[(0, 0), (1, 10), (2, 20), (3, 30), (4, 40)]
```

- Das originale `zip` funktioniert auch mit > 2 Argumenten...
- Volle Funktionalität von `zip` selbst gemacht:

```
def myzip[*As](*args : Iterable[*As]) -> Iterator[tuple[*As]]:
  return map(lambda *args: args, *args)
```

*arg?

Wiederholung: Variable Parameterlisten

UNI FREIBURG

- Eine Funktion kann eine variable Zahl von Argumenten akzeptieren.
- Schreibweise dafür

```
def func(a1, a2, a3, *args):
    for a in args:
        pass # process arguments 4, 5, ...
    goo(a1, *args)
```

- `func` muss mit mindestens drei Argumenten aufgerufen werden.
- Weitere Argumente werden als Tupel zusammengefasst der Variablen `args` zugewiesen.
- Der `*`-Operator kann auch in einer Liste von Ausdrücken auf ein iterierbares Argument angewendet werden.
- Er fügt die Elemente aus dem Iterator der Liste hinzu.

`filter`: Filtert unpassende Objekte aus

UNI FREIBURG

- `filter` erwartet als Argumente eine Funktion mit einem Parameter und ein iterierbares Objekt.

`filter`: Filtert unpassende Objekte aus

UNI FREIBURG

- `filter` erwartet als Argumente eine Funktion mit einem Parameter und ein iterierbares Objekt.
- Es liefert einen Iterator zurück, der die Objekte aufzählt, bei denen die Funktion nicht `False` (oder äquivalente Werte) zurück gibt.

```
>>> list(filter(lambda x: x > 0, [0, 3, -7, 9,  2]))
[3, 9, 2]
```

`filter`: Filtert unpassende Objekte aus

UNI FREIBURG

- `filter` erwartet als Argumente eine Funktion mit einem Parameter und ein iterierbares Objekt.
- Es liefert einen Iterator zurück, der die Objekte aufzählt, bei denen die Funktion nicht `False` (oder äquivalente Werte) zurück gibt.

```
>>> list(filter(lambda x: x > 0, [0, 3, -7, 9,  2]))
[3, 9, 2]
```

- Eine Definition dazu

```
def filter[A](p : Callable[[A], bool], xs: Iterable[A]) -> Iterator[A]:
    for x in xs:
        if p(x):
            yield x
```

`partial`: Partielle Anwendung von Funktionen

UNI FREIBURG

- `from functools import partial`
- `partial (f, *args, **kwargs)` nimmt eine Funktion *f*, Argumente für *f* und Keywordargumente für *f*
- Ergebnis: Funktion, die die verbleibenden Argumente und Keywordargumente für *f* nimmt und dann *f* mit sämtlichen Argumenten aufruft.

Beispiel

- `int` besitzt einen Keywordparameter `base=`, mit dem die Basis der Zahlendarstellung festgelegt wird.
- `int ("10011", base=2)` liefert 19
- Definiere `int2 = partial (int, base=2)`
- `assert int2 ("10011") == 19`

`reduce`: Reduktion eines iterierbaren Objekts auf ein Element

UNI FREIBURG

```
>>> from functools import reduce
```

- `reduce` wendet eine Funktion $\oplus$ mit zwei Argumenten auf ein iterierbares Objekt und einen Startwert an.

`reduce`: Reduktion eines iterierbaren Objekts auf ein Element

UNI FREIBURG

```
>>> from functools import reduce
```

- `reduce` wendet eine Funktion $\oplus$ mit zwei Argumenten auf ein iterierbares Objekt und einen Startwert an.
- Der Startwert fungiert als akkumulierender Parameter:

`reduce`: Reduktion eines iterierbaren Objekts auf ein Element

UNI FREIBURG

```
>>> from functools import reduce
```

- `reduce` wendet eine Funktion $\oplus$ mit zwei Argumenten auf ein iterierbares Objekt und einen Startwert an.
- Der Startwert fungiert als akkumulierender Parameter:
  - Bei jedem Iterationsschritt wird der Akkumulator ersetzt durch (alter Akkumulator $\oplus$ nächster Iterationswert).

`reduce`: Reduktion eines iterierbaren Objekts auf ein Element

UNI FREIBURG

```
>>> from functools import reduce
```

- `reduce` wendet eine Funktion $\oplus$ mit zwei Argumenten auf ein iterierbares Objekt und einen Startwert an.
- Der Startwert fungiert als akkumulierender Parameter:
  - Bei jedem Iterationsschritt wird der Akkumulator ersetzt durch (alter Akkumulator $\oplus$ nächster Iterationswert).
  - Der finale Wert des Akkumulators ist das Ergebnis.

reduce: Reduktion eines iterierbaren Objekts auf ein Element

UNI FREIBURG

```
>>> from functools import reduce
```

- `reduce` wendet eine Funktion $\oplus$ mit zwei Argumenten auf ein iterierbares Objekt und einen Startwert an.
- Der Startwert fungiert als akkumulierender Parameter:
  - Bei jedem Iterationsschritt wird der Akkumulator ersetzt durch (alter Akkumulator $\oplus$ nächster Iterationswert).
  - Der finale Wert des Akkumulators ist das Ergebnis.
- Falls kein Startwert angegeben wird, verwende das erste Element der Iteration.

```
>>> from typing import Iterable
>>> reduce(lambda x, y: x * y, range(1, 5))
24
>>> def product(it: Iterable[float]) -> float:
...     return reduce (lambda x,y: x*y, it, 1)
...
```

Anwendung von `reduce` (1)

UNI FREIBURG

```
>>> def to_dict(d: dict[int,int], key:int) -> dict[int,int]:
...     d[key] = key**2
...     return d
...
>>> reduce (to_dict, range(5), {})
{0: 0, 1: 1, 2: 4, 3: 9, 4: 16}
```

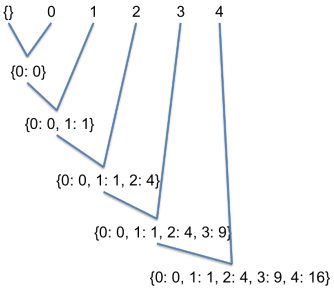
Anwendung von `reduce` (2)

UNI FREIBURG

- Was genau wird da schrittweise reduziert?

Anwendung von `reduce` (2)

- Was genau wird da schrittweise reduziert?



Einschub: Der echte Reduktionsoperator ist parallel!

UNI FREIBURG

- Pythons `reduce` ist ein sogenannter **Fold Operator**.
  `https://en.wikipedia.org/wiki/Fold_(higher-order_function)`

Einschub: Der echte Reduktionsoperator ist parallel!

UNI FREIBURG

- Pythons `reduce` ist ein sogenannter **Fold Operator**.
  `https://en.wikipedia.org/wiki/Fold_(higher-order_function)`
- Das echte `reduce`$(\oplus, [x_0, \ldots, x_{m-1}])$ rechnet **parallel** und zwar so:

Einschub: Der echte Reduktionsoperator ist parallel!

UNI FREIBURG

- Pythons `reduce` ist ein sogenannter **Fold Operator**.
  `https://en.wikipedia.org/wiki/Fold_(higher-order_function)`
- Das echte `reduce`$(\oplus, [x_0, \ldots, x_{m-1}])$ rechnet **parallel** und zwar so:
  - Arbeitet auf einem Array mit $m = 2^n$ Elementen.

Einschub: Der echte Reduktionsoperator ist parallel!

UNI FREIBURG

- Pythons `reduce` ist ein sogenannter **Fold Operator**.
  `https://en.wikipedia.org/wiki/Fold_(higher-order_function)`
- Das echte `reduce`$(\oplus, [x_0, \ldots, x_{m-1}])$ rechnet **parallel** und zwar so:
  - Arbeitet auf einem Array mit $m = 2^n$ Elementen.
  - Parameter ist assoziative Funktion $\oplus$.

Einschub: Der echte Reduktionsoperator ist parallel!

UNI FREIBURG

- Pythons `reduce` ist ein sogenannter **Fold Operator**.
  `https://en.wikipedia.org/wiki/Fold_(higher-order_function)`
- Das echte `reduce`$(\oplus, [x_0, \ldots, x_{m-1}])$ rechnet **parallel** und zwar so:
  - Arbeitet auf einem Array mit $m = 2^n$ Elementen.
  - Parameter ist assoziative Funktion $\oplus$.
  - Berechnet $r = ((x_0 \oplus x_1) \oplus x_2) \cdots \oplus x_{m-1}$.

Einschub: Der echte Reduktionsoperator ist parallel!

UNI FREIBURG

- Pythons `reduce` ist ein sogenannter **Fold Operator**.
  `https://en.wikipedia.org/wiki/Fold_(higher-order_function)`
- Das echte `reduce`$(\oplus, [x_0, \ldots, x_{m-1}])$ rechnet **parallel** und zwar so:
  - Arbeitet auf einem Array mit $m = 2^n$ Elementen.
  - Parameter ist assoziative Funktion $\oplus$.
  - Berechnet $r = ((x_0 \oplus x_1) \oplus x_2) \cdots \oplus x_{m-1}$.
- Anstatt r mit $\oplus$-Operationen in $m - 1$ Schritten zu berechnen ...

Einschub: Der echte Reduktionsoperator ist parallel (2)

UNI FREIBURG

- Berechne $r = ((x_0 \oplus x_1) \oplus x_2) \cdots \oplus x_{m-1}$ ($m-1$ Operationen $\oplus$).

Einschub: Der echte Reduktionsoperator ist parallel (2)

- Berechne $r = ((x_0 \oplus x_1) \oplus x_2) \cdots \oplus x_{m-1}$ ($m-1$ Operationen $\oplus$).
- Beginne mit $x_0, x_2, \ldots, x_{m-2} \leftarrow (x_0 \oplus x_1), (x_2 \oplus x_3), \ldots, (x_{m-2} \oplus x_{m-1})$.

Einschub: Der echte Reduktionsoperator ist parallel (2)

- Berechne $r = ((x_0 \oplus x_1) \oplus x_2) \cdots \oplus x_{m-1}$ ($m-1$ Operationen $\oplus$).
- Beginne mit $x_0, x_2, \ldots, x_{m-2} \leftarrow (x_0 \oplus x_1), (x_2 \oplus x_3), \ldots, (x_{m-2} \oplus x_{m-1})$.
- D.h. $m/2$ Operationen parallel in einem Schritt!

Einschub: Der echte Reduktionsoperator ist parallel (2)

UNI FREIBURG

- Berechne $r = ((x_0 \oplus x_1) \oplus x_2) \cdots \oplus x_{m-1}$ ($m-1$ Operationen $\oplus$).
- Beginne mit $x_0, x_2, \ldots, x_{m-2} \leftarrow (x_0 \oplus x_1), (x_2 \oplus x_3), \ldots, (x_{m-2} \oplus x_{m-1})$.
- D.h. $m/2$ Operationen parallel in einem Schritt!
- Dann: $x_0, x_4, \ldots, x_{m-4} \leftarrow (x_0 \oplus x_2), (x_4 \oplus x_6), \ldots, (x_{m-4} \oplus x_{m-2})$.

Einschub: Der echte Reduktionsoperator ist parallel (2)

- Berechne $r = ((x_0 \oplus x_1) \oplus x_2) \cdots \oplus x_{m-1}$ ($m-1$ Operationen $\oplus$).
- Beginne mit $x_0, x_2, \ldots, x_{m-2} \leftarrow (x_0 \oplus x_1), (x_2 \oplus x_3), \ldots, (x_{m-2} \oplus x_{m-1})$.
- D.h. $m/2$ Operationen parallel in einem Schritt!
- Dann: $x_0, x_4, \ldots, x_{m-4} \leftarrow (x_0 \oplus x_2), (x_4 \oplus x_6), \ldots, (x_{m-4} \oplus x_{m-2})$.
- Jetzt $m/4$ Operationen parallel in einem Schritt!

Einschub: Der echte Reduktionsoperator ist parallel (2)

UNI FREIBURG

- Berechne $r = ((x_0 \oplus x_1) \oplus x_2) \cdots \oplus x_{m-1}$ ($m-1$ Operationen $\oplus$).
- Beginne mit $x_0, x_2, \ldots, x_{m-2} \leftarrow (x_0 \oplus x_1), (x_2 \oplus x_3), \ldots, (x_{m-2} \oplus x_{m-1})$.
- D.h. $m/2$ Operationen parallel in einem Schritt!
- Dann: $x_0, x_4, \ldots, x_{m-4} \leftarrow (x_0 \oplus x_2), (x_4 \oplus x_6), \ldots, (x_{m-4} \oplus x_{m-2})$.
- Jetzt $m/4$ Operationen parallel in einem Schritt!
- Dann weiter so bis zum Ergebnis $x_0 \leftarrow (x_0 \oplus x_{m/2})$.

Einschub: Der echte Reduktionsoperator ist parallel (2)

- Berechne $r = ((x_0 \oplus x_1) \oplus x_2) \cdots \oplus x_{m-1}$ ($m-1$ Operationen $\oplus$).
- Beginne mit $x_0, x_2, \ldots, x_{m-2} \leftarrow (x_0 \oplus x_1), (x_2 \oplus x_3), \ldots, (x_{m-2} \oplus x_{m-1})$.
- D.h. $m/2$ Operationen parallel in einem Schritt!
- Dann: $x_0, x_4, \ldots, x_{m-4} \leftarrow (x_0 \oplus x_2), (x_4 \oplus x_6), \ldots, (x_{m-4} \oplus x_{m-2})$.
- Jetzt $m/4$ Operationen parallel in einem Schritt!
- Dann weiter so bis zum Ergebnis $x_0 \leftarrow (x_0 \oplus x_{m/2})$.
- ... in $n = \log_2 m$ Schritten

Einschub: Der echte Reduktionsoperator ist parallel (2)

UNI FREIBURG

- Berechne $r = ((x_0 \oplus x_1) \oplus x_2) \cdots \oplus x_{m-1}$ ($m-1$ Operationen $\oplus$).
- Beginne mit $x_0, x_2, \ldots, x_{m-2} \leftarrow (x_0 \oplus x_1), (x_2 \oplus x_3), \ldots, (x_{m-2} \oplus x_{m-1})$.
- D.h. $m/2$ Operationen parallel in einem Schritt!
- Dann: $x_0, x_4, \ldots, x_{m-4} \leftarrow (x_0 \oplus x_2), (x_4 \oplus x_6), \ldots, (x_{m-4} \oplus x_{m-2})$.
- Jetzt $m/4$ Operationen parallel in einem Schritt!
- Dann weiter so bis zum Ergebnis $x_0 \leftarrow (x_0 \oplus x_{m/2})$.
- $\ldots$ in $n = \log_2 m$ Schritten
- Falls m keine Zweierpotenz, werden fehlende Argumente durch die (Rechts-) Einheit von $\oplus$ ersetzt.

UNI FREIBURG

Komprehensionen

Listen-*Komprehension*

UNI FREIBURG

- *Komprehensionen* können Listen deklarativ und kompakt beschreiben.

Listen-*Komprehension*

UNI FREIBURG

- *Komprehensionen* können Listen deklarativ und kompakt beschreiben.
- Inspiriert von der mathematischen Mengenschreibweise:
  $\{x \in U \mid \phi(x)\}$ (alle x aus U, die die Bedingung ϕ erfüllen).
  Beispiel:

```
>>> [str(x) for x in range(10) if x % 2 == 0]
['0', '2', '4', '6', '8']
```

Listen-*Komprehension*

- *Komprehensionen* können Listen deklarativ und kompakt beschreiben.
- Inspiriert von der mathematischen Mengenschreibweise:
  $\{x \in U \mid \phi(x)\}$ (alle x aus U, die die Bedingung ϕ erfüllen).
  Beispiel:

```
>>> [str(x) for x in range(10) if x % 2 == 0]
['0', '2', '4', '6', '8']
```

- Bedeutung: Erstelle eine Liste aus allen `str(x)`, wobei `x` über das iterierbare Objekt `range(10)` läuft und nur die geraden Zahlen berücksichtigt werden.

Listen-*Komprehension*

UNI FREIBURG

- *Komprehensionen* können Listen deklarativ und kompakt beschreiben.
- Inspiriert von der mathematischen Mengenschreibweise:
  $\{x \in U \mid \phi(x)\}$ (alle x aus U, die die Bedingung ϕ erfüllen).
  Beispiel:

```
>>> [str(x) for x in range(10) if x % 2 == 0]
['0', '2', '4', '6', '8']
```

- Bedeutung: Erstelle eine Liste aus allen `str(x)`, wobei `x` über das iterierbare Objekt `range(10)` läuft und nur die geraden Zahlen berücksichtigt werden.
- Kurzschreibweise für Kombination aus `map` und `filter`.

```
>>> list(map(lambda y: str(y), filter(lambda x: x%2 == 0, range(10))))
['0', '2', '4', '6', '8']
```

Allgemeine Syntax von Listen-*Komprehensionen*

UNI FREIBURG

```
[ expr  for tup_1  in seq_1  if cond_1
        for tup_2  in seq_2  if cond_2
        ...
        for tup_n  in seq_n  if cond_n  ]
```

- Jedes tup_i ist ein Tupel (vgl. Tupel-Unpacking).

Allgemeine Syntax von Listen-*Komprehensionen*

UNI FREIBURG

```
[ expr  for tup_1  in seq_1  if cond_1
        for tup_2  in seq_2  if cond_2
        ...
        for tup_n  in seq_n  if cond_n  ]
```

- Jedes tup_i ist ein Tupel (vgl. Tupel-Unpacking).
- Jedes seq_i ist ein iterierbares Objekt.

Allgemeine Syntax von Listen-*Komprehensionen*

UNI FREIBURG


```
[ expr  for tup_1  in seq_1  if cond_1
        for tup_2  in seq_2  if cond_2
        ...
        for tup_n  in seq_n  if cond_n  ]
```

- Jedes tup_i ist ein Tupel (vgl. Tupel-Unpacking).
- Jedes seq_i ist ein iterierbares Objekt.
- Die `if`-Klauseln mit den booleschen Ausdrücken $cond_1, \ldots$ sind optional.

Allgemeine Syntax von Listen-*Komprehensionen*

UNI FREIBURG


```
[ expr  for tup_1  in seq_1  if cond_1
        for tup_2  in seq_2  if cond_2
        ...
        for tup_n  in seq_n  if cond_n  ]
```

- Jedes tup_i ist ein Tupel (vgl. Tupel-Unpacking).
- Jedes seq_i ist ein iterierbares Objekt.
- Die `if`-Klauseln mit den booleschen Ausdrücken $cond_1, \ldots$ sind optional.
- Ist *expr* ein Tupel, muss es in Klammern stehen!

Zusammenhang Komprehensionen vs `map` und `filter`

UNI FREIBURG

- Betrachte

```
[ expr for tup in seq if cond ]
```

mit *tup* ::= $x_1, x_2, \ldots, x_n$ für $n > 0$

Zusammenhang Komprehensionen vs `map` und `filter`

UNI FREIBURG

- Betrachte

```
[ expr for tup in seq if cond ]
```

mit *tup* ::= $x_1, x_2, \ldots, x_n$ für $n > 0$

- Entspricht

```
list (map (lambda tup: expr, filter (lambda tup: cond, seq)))
```

Zusammenhang Komprehensionen vs `map` und `filter`

- Betrachte

```
[ expr for tup in seq if cond ]
```

  mit *tup* ::= $x_1, x_2, \ldots, x_n$ für $n > 0$

- Entspricht

```
list (map (lambda tup: expr, filter (lambda tup: cond, seq)))
```

- Falls `if` *cond* fehlt, kann das Filter weggelassen werden:

```
list (map (lambda tup: expr, seq))
```

Geschachtelte Listen-*Komprehensionen* (1)

UNI FREIBURG

- Konstruiere die Matrix `[[0,1,2,3],[0,1,2,3],[0,1,2,3]]`:

```
>>> matrix: list[list[int]] = []
>>> for y in range(3):
...     matrix += [list(range(4))]
...
>>> matrix
[[0, 1, 2, 3], [0, 1, 2, 3], [0, 1, 2, 3]]
```

Geschachtelte Listen-*Komprehensionen* (1)

UNI FREIBURG

- Konstruiere die Matrix `[[0,1,2,3],[0,1,2,3],[0,1,2,3]]`:

```
>>> matrix: list[list[int]] = []
>>> for y in range(3):
...     matrix += [list(range(4))]
...
>>> matrix
[[0, 1, 2, 3], [0, 1, 2, 3], [0, 1, 2, 3]]
```

- Lösung mit Listen-*Komprehensionen*:

```
>>> [list (range (4)) for y in range(3)]
[[0, 1, 2, 3], [0, 1, 2, 3], [0, 1, 2, 3]]
```

Geschachtelte Listen-*Komprehensionen* (2)

UNI FREIBURG

- Konstruiere `[[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]]`:

```
>>> matrix: list[list[int]] = []
>>> for rownum in range(3):
...     row = []
...     for x in range(rownum*3, rownum*3 + 3):
...         row += [x+1]
...     matrix += [row]
...
```

Geschachtelte Listen-*Komprehensionen* (2)

UNI FREIBURG

- Konstruiere `[[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]]`:

```
>>> matrix: list[list[int]] = []
>>> for rownum in range(3):
...     row = []
...     for x in range(rownum*3, rownum*3 + 3):
...         row += [x+1]
...     matrix += [row]
...
```

- Lösung mit Listen-*Komprehensionen*:

```
>>> [list (range (3*y+1, 3*y+4)) for y in range(3)]
[[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]]
```

Listen-*Komprehensionen*: Kartesisches Produkt

- Erzeuge das kartesische Produkt aus `[0, 1, 2]` und `['a', 'b', 'c']`:

```
>>> prod: list[tuple[int, str]] = []
>>> for x in range(3):
...     for y in ['a', 'b', 'c']:
...         prod += [(x, y)]
...
```

Listen-*Komprehensionen*: Kartesisches Produkt

- Erzeuge das kartesische Produkt aus `[0, 1, 2]` und `['a', 'b', 'c']`:

```
>>> prod: list[tuple[int, str]] = []
>>> for x in range(3):
...     for y in ['a', 'b', 'c']:
...         prod += [(x, y)]
...
```

- Lösung mit Listen-*Komprehensionen*:

```
>>> [(x, y) for x in range(3) for y in ['a','b','c']]
[(0, 'a'), (0, 'b'), (0, 'c'), (1, 'a'), (1, 'b'), (1, 'c'), (2, 'a'), (2
```

Kartesisches Produkt mit `map` und `filter`

UNI FREIBURG

- Erster Versuch

```
>>> map (lambda y: map (lambda x: (x,y), range(3)), "abc")
<map object at 0x109f2e260>
```

Kartesisches Produkt mit `map` und `filter`

UNI FREIBURG

- Erster Versuch

```
>>> map (lambda y: map (lambda x: (x,y), range(3)), "abc")
<map object at 0x109f2e890>
```

- ... etwas später

```
[[(0, 'a'), (1, 'a'), (2, 'a')], [(0, 'b'), (1, 'b'), (2, 'b')], [(0, 'c
```

Kartesisches Produkt mit `map` und `filter`

UNI FREIBURG

- Erster Versuch

```
>>> map (lambda y: map (lambda x: (x,y), range(3)), "abc")
<map object at 0x109f2e290>
```

- ... etwas später

```
[[(0, 'a'), (1, 'a'), (2, 'a')], [(0, 'b'), (1, 'b'), (2, 'b')], [(0, 'c
```

- eine Liste von Listen, weil das `map` von `map` einen Iterator von Iteratoren liefert.

Kartesisches Produkt mit `map`, `filter` und `flatten`

UNI FREIBURG

- Lösung: `flatten` entfernt eine Ebene von Iteration

```
def flatten[X](iix : Iterable[Iterable[X]]) -> Iterator[X]:
    """flattens a nested iterable to a single iterator"""
    for ix in iix:
        for x in ix:
            yield x
```

Kartesisches Produkt mit `map`, `filter` und `flatten`

UNI FREIBURG

- Lösung: `flatten` entfernt eine Ebene von Iteration

```
def flatten[X](iix : Iterable[Iterable[X]]) -> Iterator[X]:
    """flattens a nested iterable to a single iterator"""
    for ix in iix:
        for x in ix:
            yield x
```

- Damit

```
print(list(flatten(map (lambda y: map (lambda x: (x,y)
                                       , range(3))
                       , "abc"))))
```

Kartesisches Produkt mit `map`, `filter` und `flatten`

UNI FREIBURG

- Lösung: `flatten` entfernt eine Ebene von Iteration

```
def flatten[X](iix : Iterable[Iterable[X]]) -> Iterator[X]:
    """flattens a nested iterable to a single iterator"""
    for ix in iix:
        for x in ix:
            yield x
```

- Damit

```
print(list(flatten(map (lambda y: map (lambda x: (x,y)
                                       , range(3))
                       , "abc"))))
```

- Ergebnis: [(0, 'a'), (1, 'a'), (2, 'a'), (0, 'b'), (1, 'b'), (2, 'b'), (0, 'c'), (1, 'c'), (2, 'c')]

Allgemein: Elimination von Listen-Komprehensionen

UNI FREIBURG

Wiederhole die Elimination des innersten `for`

[*expr* **for** *tup* **in** *seq* **if** *cond* **for** ...] =

`flatten`(`map`(**lambda** *tup* : [*expr* **for** ...], `filter`(**lambda** *tup* : *cond*, *seq*)))

Allgemein: Elimination von Listen-Komprehensionen

UNI FREIBURG

Wiederhole die Elimination des innersten `for`

[*expr* **for** *tup* **in** *seq* **if** *cond* **for** ...] =

`flatten`(`map`(**lambda** *tup* : [*expr* **for** ...], `filter`(**lambda** *tup* : *cond*, *seq*)))

Beispiel schematisch

```
[(x, y) for x in range(3) for y in "abc"]
```

Elimination von “`for x`” ergibt

```
flatten (map (lambda x: [(x, y) for y in "abc"], range(3)))
```

Elimination von “`for y`” ergibt

```
flatten (map (lambda x: flatten (map (lambda y: [(x, y)], "abc")), range(3)))
```

Generator-*Komprehension*

UNI FREIBURG

- Eine Generator-Komprehension baut keine Liste auf, sondern liefert einen Iterator, der die spezifizierten Objekte nacheinander generiert.

Generator-*Komprehension*

UNI FREIBURG

- Eine Generator-Komprehension baut keine Liste auf, sondern liefert einen Iterator, der die spezifizierten Objekte nacheinander generiert.
- Syntaktischer Unterschied zur Listen-Komprehension:
  Runde statt eckige Klammern.

Generator-*Komprehension*

UNI FREIBURG

- Eine Generator-Komprehension baut keine Liste auf, sondern liefert einen Iterator, der die spezifizierten Objekte nacheinander generiert.
- Syntaktischer Unterschied zur Listen-Komprehension:
  Runde statt eckige Klammern.
- Die runden Klammern können weggelassen werden, wenn der Ausdruck als Argument einer Funktion mit nur einem Parameter dient.
  Beispiel:

```
>>> sum(x**2 for x in range(11))
385
```

Generator-*Komprehension*

UNI FREIBURG

- Eine Generator-Komprehension baut keine Liste auf, sondern liefert einen Iterator, der die spezifizierten Objekte nacheinander generiert.
- Syntaktischer Unterschied zur Listen-Komprehension:
  Runde statt eckige Klammern.
- Die runden Klammern können weggelassen werden, wenn der Ausdruck als Argument einer Funktion mit nur einem Parameter dient.
  Beispiel:

```
>>> sum(x**2 for x in range(11))
385
```

- Braucht weniger Speichplatz als `sum([x**2 for x in range(11)])`!

Komprehension für Dictionaries und Mengen

UNI FREIBURG

Auch Mengen und Dictionaries können durch Komprehension-Ausdrücke definiert werden. Nachfolgend ein paar Beispiele:

```
>>> evens = set(range(0, 20, 2))
>>> {x for x in evens if x % 3 == 0}
{0, 18, 12, 6}

>>> text = 'Management Training Course'
>>> {x for x in text if x >= 'a'}
{'n', 'e', 'u', 'a', 'o', 'g', 'i', 's', 'r', 'm', 't'}

>>> { x: x**2 for x in range(1, 10)}
{1: 1, 2: 4, 3: 9, 4: 16, 5: 25, 6: 36, 7: 49, 8: 64, 9: 81}
```