Informatik I: Einführung in die Programmierung

19. Automaten, Zustandsmodellierung mit abstrakten und generischen Klassen

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. Peter Thiemann

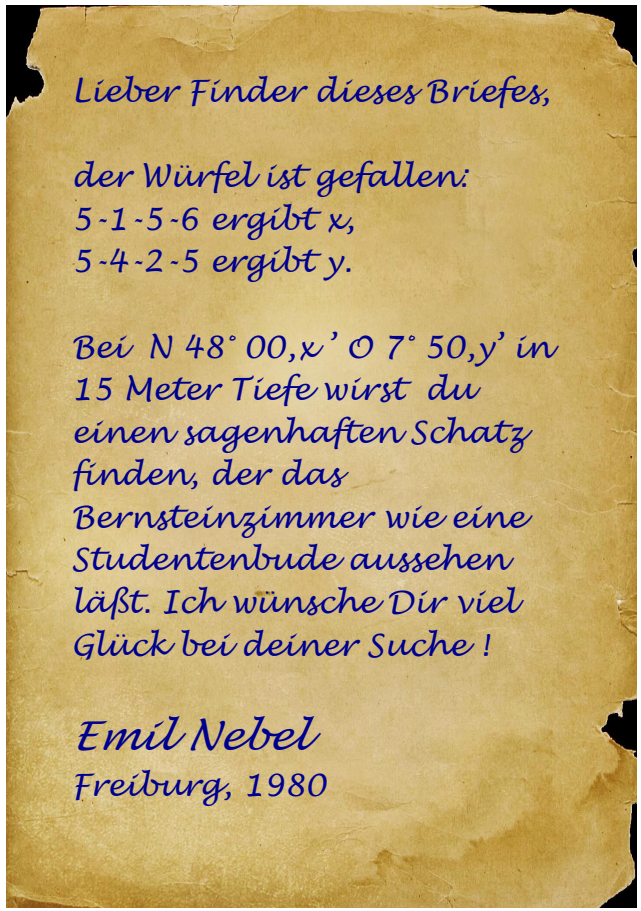
22.01.2025

1 Deterministische endliche Automaten

- Motivierendes Beispiel
- Formale Grundlagen
- Verhalten eines Automaten
- Teilwort-Erkennung

Vorweg …

Vor kurzem fand ich auf dem Dachboden eines Kollegen einen Würfel und einen Brief.



Was steckt in dem Würfel?

- In dem Würfel gibt es einen Mechanismus, der die Abfolge der nach oben gerichteten Würfelseiten erkennt.
- Nachdem die richtige Folge „gewürfelt“ wurde, klopft von innen ein Hämmerchen die Koordinaten.
- Wie erkennt der Würfel solche Folgen von Ereignissen?
- Hierfür ist ein endlicher Automat geeignet.
- Ein endlicher Automat ist ein sehr einfaches und eingeschränktes Berechnungsmodell, das für viele Anwendungen adäquat ist.
- Wir können ihn durch eine Klasse definieren.

Automaten akzeptieren Sprachen

Ein deterministischer Automat ist ein Quintupel (Q, E, δ, q_0, F)

```
@dataclass(frozen=True)
class Automaton[Q,                      # Menge von Zuständen
                E]:                     # Eingabealphabet
  delta  : Callable[[Q, E], Q]          # Transitionsfunktion
  start  : Q                            # Startzustand q0
  finals : frozenset[Q]                 # Menge von Endzuständen F

  def accept (self, input: Iterable[E]) -> bool:
    state = self.start
    for c in input:
      state = self.delta(state, c)
    return state in self.finals
```

Die `accept` Methode nimmt ein Eingabewort, lässt den Automaten vom Startzustand bis zum Ende des Worts laufen. Das Wort wird akzeptiert, wenn der Automat einen Endzustand erreicht.

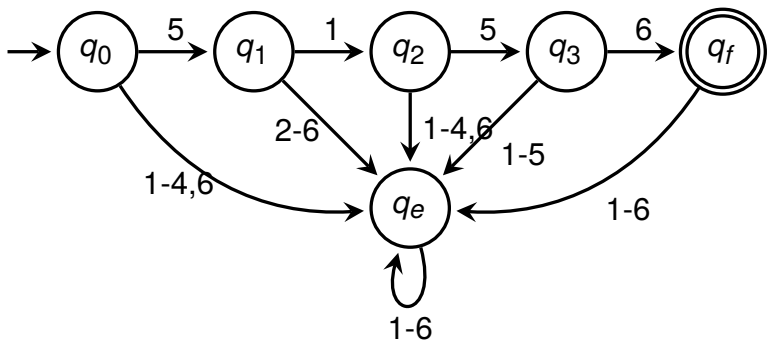
Transitionsfunktion

Die Transitionsfunktion wird entweder durch eine Transitionstabelle oder durch ein Transitionsdiagramm (Transitionsdiagramm) angegeben.

Beispiel: Transitionsfunktion zur Erkennung von 5156

(q_e bezeichnet einen Fehlerzustand und $F = \{q_f\}$).

	1	2	3	4	5	6
q_0	q_e	q_e	q_e	q_e	q_1	q_e
q_1	q_2	q_e	q_e	q_e	q_e	q_e
q_2	q_e	q_e	q_e	q_e	q_3	q_e
q_3	q_e	q_e	q_e	q_e	q_e	q_f
q_f	q_e	q_e	q_e	q_e	q_e	q_e
q_e	q_e	q_e	q_e	q_e	q_e	q_e



Beachte: Im Transitionsdiagramm wird der absorbierende Fehlerzustand q_e mit allen Übergängen dorthin in der Regel nicht angegeben.

Implementierung der Transitionsfunktion

```
class State (Enum):
  Q0 = auto(); Q1 = auto(); Q2 = auto(); Q3 = auto()
  Qf = auto(); Qe = auto()
type Alphabet = Literal['1','2','3','4','5','6']
def delta_dice (q:State, c:Alphabet) -> State:
  match (q, c):
    case (State.Q0, '5'):
      return State.Q1
    case (State.Q1, '1'):
      return State.Q2
    case (State.Q2, '5'):
      return State.Q3
    case (State.Q3, '6'):
      return State.Qf
    case _:
      return State.Qe
```

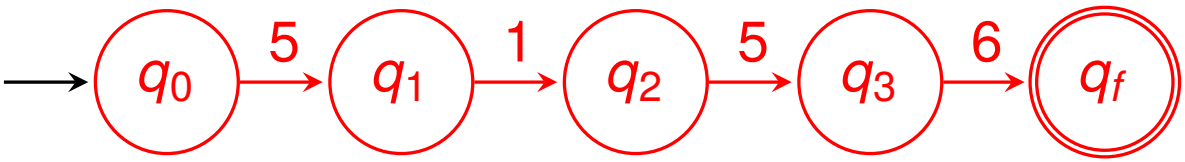
Der Typ `Literal['1','2','3','4','5','6']` bestimmt das Eingabealphabet!

Verhalten eines Automaten

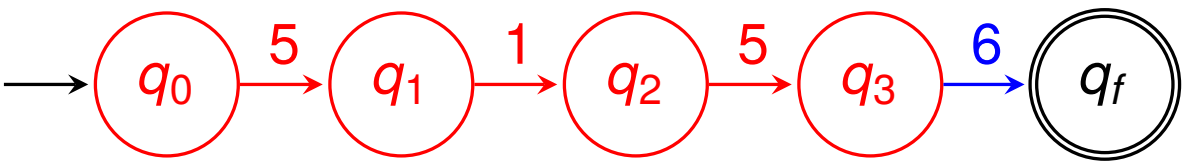
- Anfänglich befindet sich der Automat im Startzustand q_0.
- Der Automat erhält ein Wort $w = "a_1 a_2 \ldots a_n"$ als Eingabe (darf auch leer sein, d.h. $n \geq 0$).
- Der Automat liest im Zustand q_i das Eingabesymbol a_{i+1} und wechselt in den Folgezustand $q_{i+1} = \delta(q_i, a_{i+1})$.
- Das macht der Automat, so lange Eingabezeichen gelesen werden können, das heißt für $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.
- Am Ende der Eingabe befindet sich der Automat in einem Zustand q_n. Das Eingabewort w wird genau dann akzeptiert, wenn $q_n \in F$ ein Endzustand ist.
- Die Sprache von A, $\mathscr{L}(A)$, ist die Menge aller von A akzeptierten Worte.

Beispiele

Eingabe: 5156 5156 156 156 56 56 6 6
Eingabe akzeptiert



Eingabe: 515156 515156 15156 15156 5156 5156 156 156 156
Kein Transition von q_3 aus möglich! Eingabe nicht akzeptiert.



Implementierung des Automaten

```
dice : Automaton[State, Alphabet] = Automaton(
  delta  = delta_dice,
  start  = State.Q0,
  finals = frozenset ({State.Qf})
)
print(dice.accept("5156"))
```

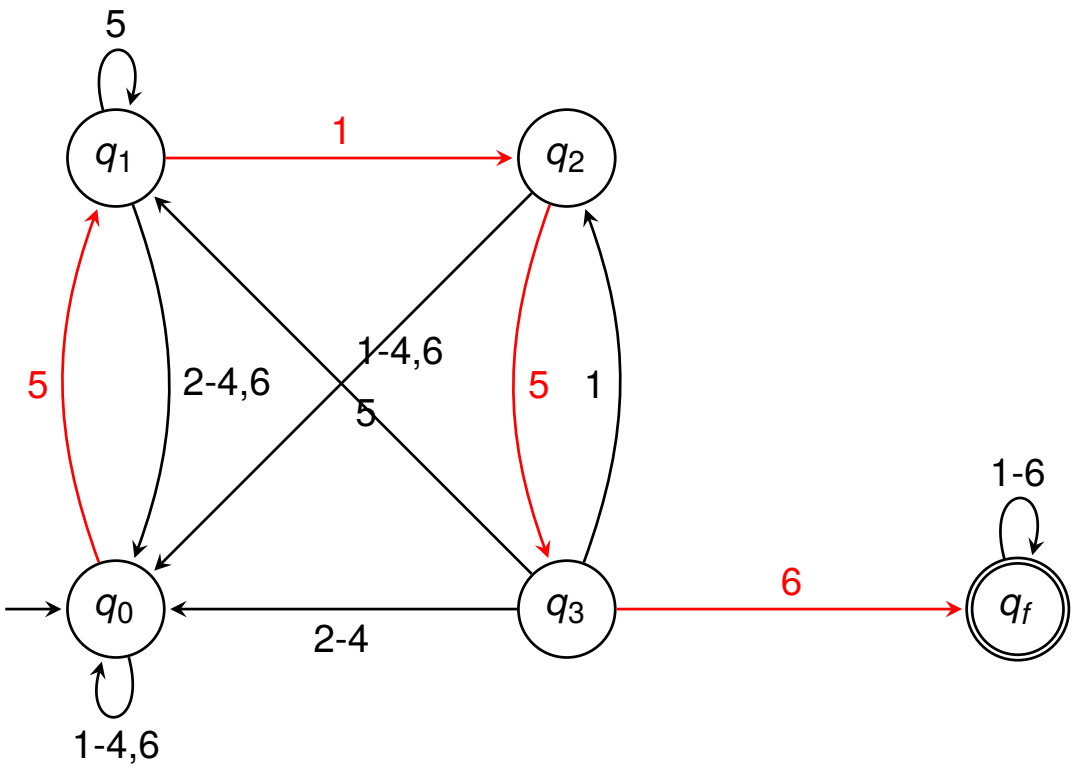
Ausgabe: `True`

```
print(dice.accept("5155"))
```

Ausgabe: `False`

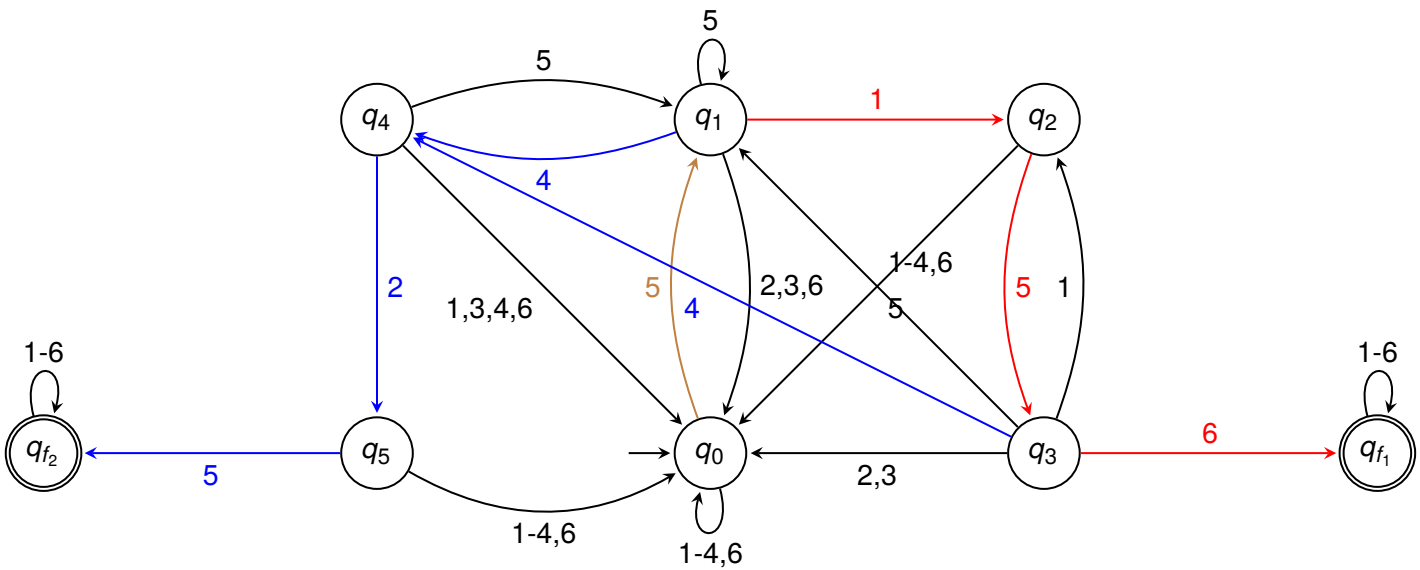
Teilwort-Erkennung

Der Würfel soll letztlich alle Folgen akzeptieren, die 5156 als Teilwort enthalten, z.B. auch 55156, oder 5155156, oder 515156 oder . . . 5156. . .



Nord- und Ostkode integrieren

Zusätzlich muss der Würfel noch 5425 als Teilstring erkennen!
Der Automat ändert sich wie folgt:



2 Transduktoren

- Moore-Automat
- Umsetzung
- Python-Skript für Beispiel

Nach der Akzeptanz ist vor der Akzeptanz!

- Der bisher konstruierte Automat akzeptiert alle Wörter, die 5156 oder 5425 als Teilwort enthalten.
- Eigentlich ist eine Maschine gesucht, die „ewig“ läuft und die jeweils nach einem akzeptierten Teilwort eine Ausgabe macht.
- Eine solche Maschine heißt Transduktor, das ist ein Automat, der auch Ausgaben macht.
- Transduktoren werden oft verwendet um das Verhalten eingebetteter Systeme zu beschreiben.

Moore-Automaten

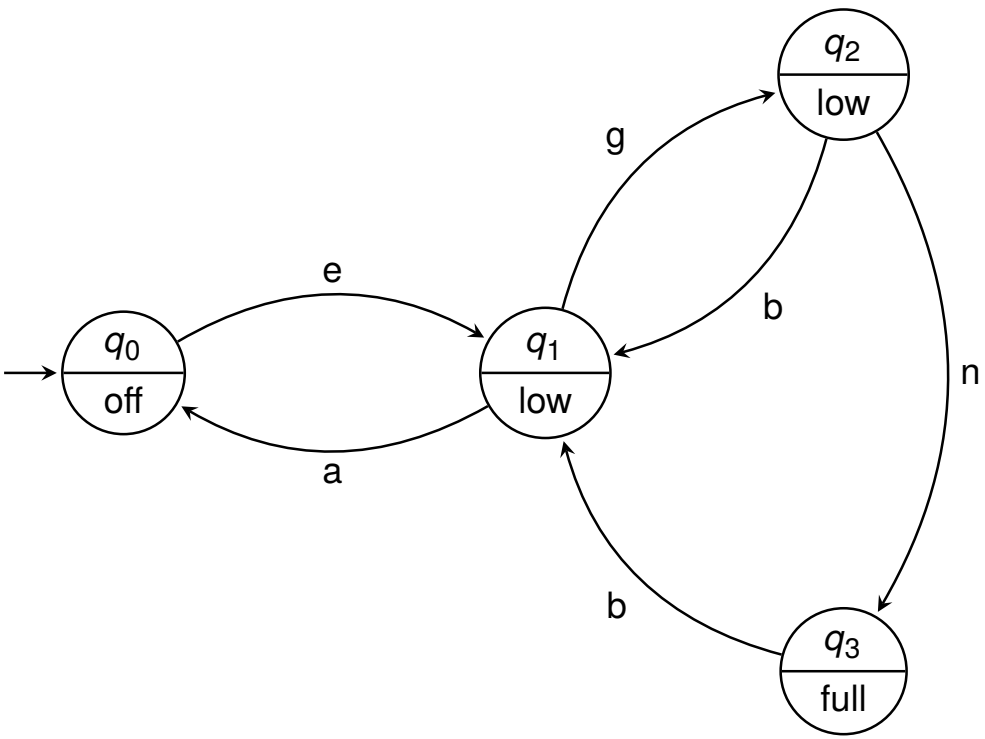
```python
@dataclass(frozen=True)
class MooreAutomaton[Q,          # Menge von Zuständen
                     E,          # Eingabealphabet
                     A]:         # Ausgabealphabet
  dl : Callable[[Q, E], Q]       # Transitionsfunktion
  lm : Callable[[Q], A]          # Ausgabefunktion
  st : Q                         # Startzustand

  def translate (self, input: Iterable[E]) -> Iterator[A]:
    state = self.st
    yield self.lm(state)
    for c in input:
      state = self.dl(state, c)
      yield self.lm(state)
    return
```

Verhalten des Moore-Automaten

- Im Startzustand q_0 gibt der Automat $\lambda(q_0)$ aus.
- Der Automat erhält ein Wort $w = "a_1 a_2 \ldots"$ als Eingabe.
- Der Automat liest im Zustand q_i das Eingabesymbol a_{i+1}, wechselt in den Folgezustand $q_{i+1} = \delta(q_i, a_{i+1})$ und gibt dann $\lambda(q_{i+1})$ aus.
- Das macht der Automat, so lange wie Eingabezeichen verfügbar sind. (Ggf. mit offenem Ende.)
- Dabei wird das Eingabewort w in das Ausgabewort $\lambda(q_0)\lambda(q_1)\ldots$ übersetzt. Daher auch der Name Transduktor.

Beispiel: Ein hypothetische Motorsteuerung

$E = \{e, a, g, b, n\}$, wobei e für „ein“, a für „aus“, g für „Gas geben“, b für „bremsen“, n für „nicht drehende Räder“ steht.
$A = \{\text{off}, \text{low}, \text{full}\}$.



Implementierung der Motorsteuerung

```
class MState (Enum):
  Q0 = auto(); Q1 = auto(); Q2 = auto(); Q3 = auto()
type Input = Literal['e','g','a','b','n']
type Output = Literal['off','low','full']

def delta_m (q : MState, c : Input) -> MState:
  match (q, c):
    case (MState.Q0, "e"): return MState.Q1
    case (MState.Q1, "g"): return MState.Q2
    case (MState.Q1, "a"): return MState.Q0
    case (MState.Q2, "b"): return MState.Q1
    case (MState.Q2, "n"): return MState.Q3
    case (MState.Q3, "b"): return MState.Q1
    case _:                return q

def lambda_m (q : MState) -> Output:
  match q:
    case MState.Q0:              return "off"
    case MState.Q1 | MState.Q2: return "low"
    case MState.Q3:              return "full"
```

Implementierung der Motorsteuerung (2)

```
mcontrol : MooreAutomaton[MState, Input, Output] = MooreAutomaton(
  dl= delta_m,
  lm= lambda_m,
  st= MState.Q0
)
```

Ein Testlauf:

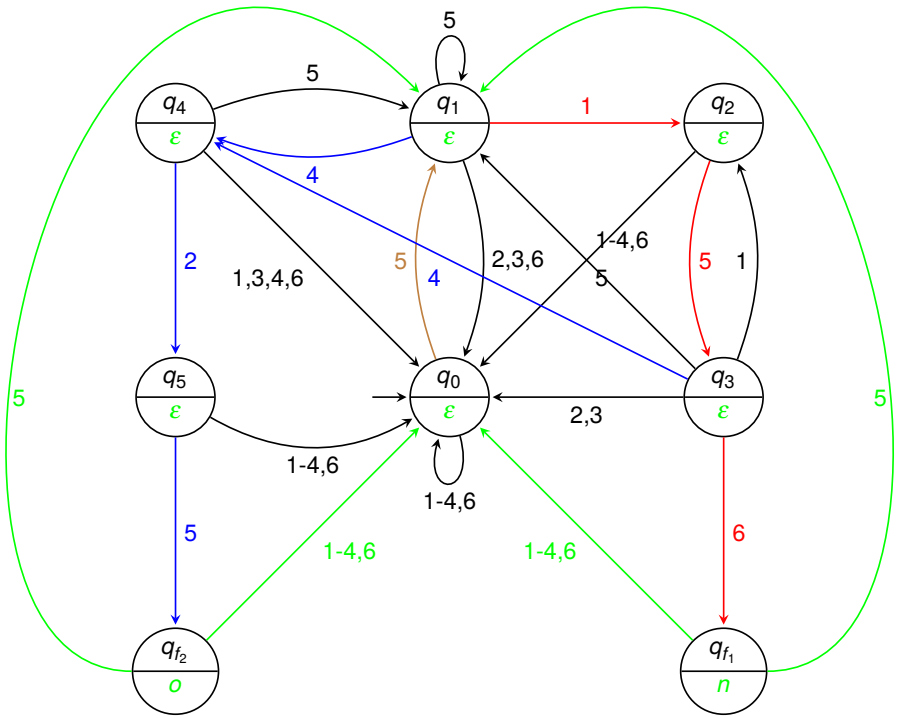
```
output = mcontrol.translate ("egbgnba")
print (list (output))
```

Ausgabe:

```
['off', 'low', 'low', 'low', 'low', 'full', 'low', 'off']
```

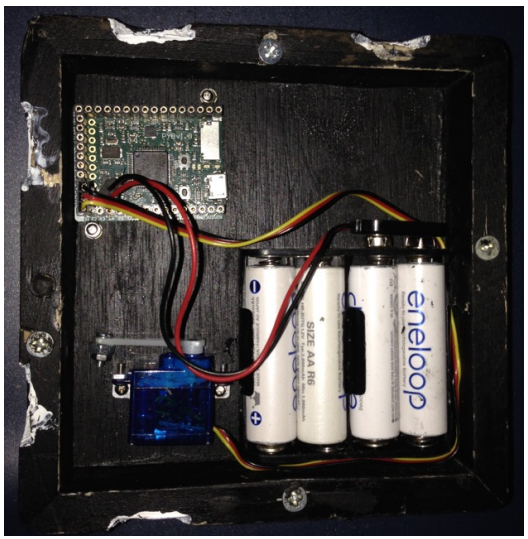
Beispiel: Der Würfel-Moore-Automat

Sei $A = \{n, o, \varepsilon\}$, dann könnte der Würfelautomat so ausschauen (die grünen Teile sind neu):



Die Innereien des Würfels

- Wie sieht die Implementierung eines solchen abstrakten Automaten aus?
- Das Innere des Würfels:



  - Batterien (4×AA-Akkus, also 4,5-6 Volt),
  - Servomotor,
  - pyboard (mit einem ARM-5 Prozessor, Beschleunigungsmesser, usw.), auf dem Micropython läuft

Das Würfel-Programm

- `side_up()`:
  Bestimmt mit Hilfe des Beschleunigsmessers, welche Seite oben liegt. Bei unklaren Werten wartet die Funktion, bis eine stabile Lage eingetreten ist.
- `new_input()`:
  Erzeugt ein neues Eingabesymbol (Zahl zwischen 1 und 6), wenn der Würfel 500 Millisekunden stabil lag.
- `next_state(state, input)`:
  Die Transitionsfunktion.
- `output_symbol(state)`:
  Berechnet das zum Zustand gehörige Ausgabesymbol.
- `automaton()`:
  Die Endlosschleife zur Ausführung des Automaten.
- `code_knock(code)`:
  Klopft entsprechend dem angeforderten Code.

Der Seitenerkenner mittels Beschleunigungssensor

Die Erdbeschleunigung von 1g entspricht einem Messwert von rund 20.

Seitenerkenner

```
thres = 12
def side_up():
    while True:
        x = acc.x(); y = acc.y(); z = acc.z()
        if x > thres: return 5 #x up
        if x < -thres: return 2 #x down
        if y > thres: return 6 #y up
        if y < -thres: return 1 #y down
        if z > thres: return 3 #z up
        if z < -thres: return 4 #z down
        # no stable situation yet
```

Symbolerzeugung

Symbolerzeugung

```
def new_input():
    while True:
        curr = side_up()
        new = curr
        start = pyb.millis()
        while (curr == new and
               pyb.elapsed_millis(start) <= 500):
            new = side_up()
        if curr == new:
            return curr
```

Erzeugt ca. alle 0,5 Sekunden ein neues Eingabesymbol. Nicht nur, wenn die Seite gewechselt wird. Daher muss der Automat etwas anders aussehen!

Die Transitionsfunktion

Transitionsfunktion

```
def next_state(state, input):
    if state == 0: # intial state
        if input == 5: return 1
        return 0
    elif state == 1: # '5' read
        if input == 5: return 1
        if input == 1: return 2
        if input == 4: return 4
        return 0
    elif state == 2: # '51' read
        if input == 1: return 2 # repetition!
        if input == 5: return 3
        return 0
    elif ...
```

Beachte: Jeder Zustand hat eine Schleife für das Zeichen, das dafür notwendig war, in den Zustand zu kommen.

Der Automat & die Ausgabefunktion

```
def automaton():
    state = 0
    while True:
        if sw(): return # if switch is pressed, exit
        state = next_state(state, new_input())
        code_knock(output_symbol(state))

def output_symbol(state):
    if state == 10:
        return "north"
    elif state == 11:
        return "east"
    else:
        return None
```

3 Modellierung von Automaten

Verbesserte Modellierung von Automaten

- Im Vergleich zu Standard-Python hat Micropython einige Einschränkungen.
- Die Modellierung der Zustände durch Zahlen ist kompakt und effizient, aber fehleranfällig.
- Besserer Ansatz: Verwende Aufzählungstypen.

Zustandstyp

```
from enum import Enum, auto

class State(Enum):
    INIT = auto()
    AFTER_5 = auto()
    AFTER_51 = auto()
    AFTER_515 = auto()
    AFTER_5156 = auto()
    AFTER_54 = auto()
    AFTER_542 = auto()
    AFTER_5425 = auto()
```

- Bessere Dokumentation für die Zustände.
- `enum.auto()` erzeugt automatisch einen neuen internen Code, sodass die Zustände durchnummeriert werden.

Transitionsfunktion

```
S = State
def next_state(q: State, i: int) -> State:
    match (q, i):
        case (S.INIT,       5): return S.AFTER_5
        case (S.AFTER_5,    1): return S.AFTER_51
        case (S.AFTER_5,    4): return S.AFTER_54
        case (S.AFTER_5,    5): return S.AFTER_5
        case (S.AFTER_51,   5): return S.AFTER_515
        case (S.AFTER_515,  6): return S.AFTER_5156
        case (S.AFTER_515,  1): return S.AFTER_51
        case (S.AFTER_515,  4): return S.AFTER_54
        case (S.AFTER_54,   2): return S.AFTER_542
        case (S.AFTER_542,  5): return S.AFTER_5425
    return S.INIT
```

- Hier ist ein Fehler!

Allgemeiner Ansatz: Das Zustandsmuster

- Falls die Zustände selbst noch weitere Information beinhalten, können sie als “richtige” Objekte betrachtet werden.
- Die Zustandsfunktion wird nun als Methode implementiert.
- So ist auch die Menge der Zustände einfach erweiterbar.
- Wegen des Speicherbedarfs allerdings für eingebettete Systeme weniger geeignet.
- Das Zustandsmuster ist ein sogenanntes design pattern.
- Siehe *Design Patterns: Elements of Reusable Object-Oriented Software* von der “Gang of Four” (Gamma, Helm, Johnson, Vlissides).

Zustandsmuster: Basisklasse

```python
# base class for all states
@dataclass
class State:
    def next(self, input: int) -> 'State':
        return self
    @abstractmethod
    def output(self) -> str:
        ...
```

- Die Basisklasse `State` dient nur als Superklasse, von der konkrete Zustandsklassen erben.
- Sie soll nicht instanziert werden, d.h. `State()` soll nicht verwendet werden.
- Auch die Methoden sollen eigentlich nicht verwendet werden, sondern nur anzeigen, was in den Subklassen implementiert werden soll.
- Eine solche Klasse heißt abstrakte Klasse und die Methoden abstrakte Methoden

Zustandsmuster: Startzustand

```
@dataclass
class S_Init(State):
    def next(self, input: int) -> State:
        match input:
            case 5:
                return S_After([5])
        return self
```

- Subklasse von `State`.
- Methode `next()` wird überschrieben.
- Methode `output()` wird aus der Superklasse übernommen (keine Ausgabe).

Zustandsmuster: Prefixzustände

```
@dataclass
class S_After(State):
    prefix: list[int]
    def next(self, input: int) -> State:
        self.prefix = self.prefix + [input]
        match self.prefix:
            case ([5, 1] | [5, 1, 5] | [5, 1, 5, 6] |
                  [5, 4] | [5, 4, 2] | [5, 4, 2, 5]):
                return self
        match self.prefix[-1:]:
            case [5]:
                return S_After(self.prefix[-1:])
        match self.prefix[-2:]:
            case [5, 1] | [5, 4]:
                return S_After(self.prefix[-2:])
        return S_Init()
```

Zustandsmuster: Prefixzustände (2)

```
def output(self) -> str:
    match self.prefix:
        case [5, 1, 5, 6]:
            return "north"
        case [5, 4, 2, 5]:
            return "east"
        case _:
            return ""
```

- Die Klasse `S_After` verwaltet das bisher gelesene Präfix der Eingabe im Feld `prefix`.
- Zustandsübergang durch Änderung des Präfixes (soweit möglich).

4 Abstrakte und generische Klassen

- Modellierung mit abstrakter, generischer Klasse

Modellierung mit abstrakter, generischer Klasse

Die Basisklasse `State` hat einige Nachteile, die dazu führen, dass der Code schlecht wiederverwendbar ist.

Zu konkret

- Die Klasse sollte abstrakt sein, aber wir konnten das nicht ausdrücken.
- D.h., direkte Instanzen von `State` sind nicht erwünscht und jede Subklasse muss die Methoden `next` und `output` überschreiben.

Zu spezifisch

- Die Klasse legt die Typen von Eingabe und Ausgabe bereits fest, obwohl diese Typen den Code nicht beeinflussen.
- Sie muss kopiert werden um einen Automatenzustand in einem anderen Automaten zu verwenden.

Abstrakte Klassen und generische Klassen

Abstrakte Klasse

- Eine abstrakte Klasse besitzt keine eigenen Instanzen, sondern dient nur als Muster für Subklassen.
- Sie kann die Signaturen von abstrakte Methoden definieren, aber ohne eine Implementierung anzugeben. Daher muss jede (konkrete) Subklasse alle abstrakten Methoden implementieren.

Generische Klasse

- Eine generische Klasse besitzt einen oder mehrere Typparameter, angezeigt durch Typvariablen.
- Die Typparameter können als Typen von Feldern sowie Parametern und Ergebnissen von Methoden verwendet werden.
- Bei Verwendung einer generischen Klasse müssen die Typparameter in eckigen Klammeren angegeben werden.
- Beispiel: `list` ist generische Klasse mit einem Parameter; Verwendung als `list[int]`, `list[str]` usw.

Eine abstrakte Klasse

```
from abc import ABC, abstractmethod
@dataclass
class State(ABC):
    def next(self, input: int) -> 'State':
        return self
    @abstractmethod
    def output(self) -> str:
        ...
```

Um `State` zur abstrakten Klasse zu machen...

- Zur Subklasse von `abc.ABC` (ABC = abstract base class) machen.
- Abstrakte Methoden mit `@abstractmethod` dekorieren.
- Als Rumpf einer abstrakten Methode dient die Ellipse `...`, da unter Umständen kein sinnvoller Code möglich ist.

Eine generische abstrakte Klasse

```
from abc import ABC, abstractmethod
@dataclass
class State[INP,OUT](ABC):
    def next(self, input: INP) -> 'State':
        return self
    @abstractmethod
    def output(self) -> OUT:
        ...
```

- Die Typparameter der Klasse dürfen in den Typannotationen der Methoden verwendet werden.

Verwendung von generischen Klassen

```
@dataclass
class S_Init(State[int,str]):
    def next(self, input: int) -> State[int,str]:
        match input:
            case 5:
                return S_After([5])
        return self
    def output(self) -> str:
        return ""
```

- Erbt von `State[int,str]`. Dadurch wird `INP = int` und `OUT = str` eingesetzt.
- Methodensignaturen werden entsprechend eingesetzt.
- Der restliche Code der Implementierung ändert sich nicht.

Beispiel: Ausführung des Moore-Automaten

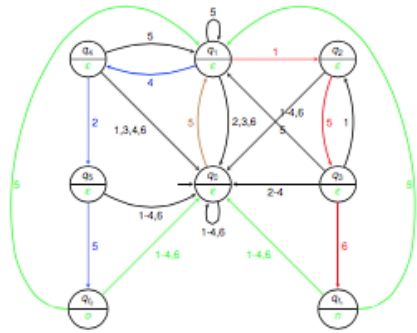
```
def moore_generator[I,O](
        state: State[I, O], inp: Iterable[I]
        ) -> Iterable[O]:
    yield state.output()
    for x in inp:
        state = state.next(x)
        yield state.output()
```

- Basis: die abstrakte Klasse `State[I,O]`.

5 Welt & Modell

Die reale Welt & formale Modelle

Interpretation



Aktion

Vor dem Einsatz formaler Modelle (wie Moore-Automaten) müssen die Messwerte/Eingaben interpretiert und in Symbole umgesetzt werden. Die Interpretation und das Modell beeinflussen sich dabei gegenseitig (Beispiel: Würfelseitenerkennung und Automat).

$\Rightarrow$ Siehe Vorlesung Embedded Systems.

6 Zusammenfassung & Ausblick

Zusammenfassung

- Eine formale Sprache ist eine Menge von Wörtern.
- Automaten sind ein einfaches Berechnungsmodell.
- Sie können Sprachen erkennen (Akzeptoren) und übersetzen (Transduktoren).
- Determinstische endliche Automaten (DEAs) und Transduktoren (Moore-Automaten) werden zur Beschreibung von eingebetteten Systemen verwendet.
- Einfache Implementierung.