Линейная алгебра в computer science & engineering

Краткий обзор того, где элементы ЛА применимы

Введение

Когда вы сжимаете изображение, фотографируете что-нибудь на смартфон, смотрите видео на ноутбуке или играете в видеоигру - вы используете технологии, использующие различные элементы из линейной алгебры. Линейная алгебра в свою очередь построена на двух базовых элементах - это **матрица** и **вектор**.

История линейной алгебры

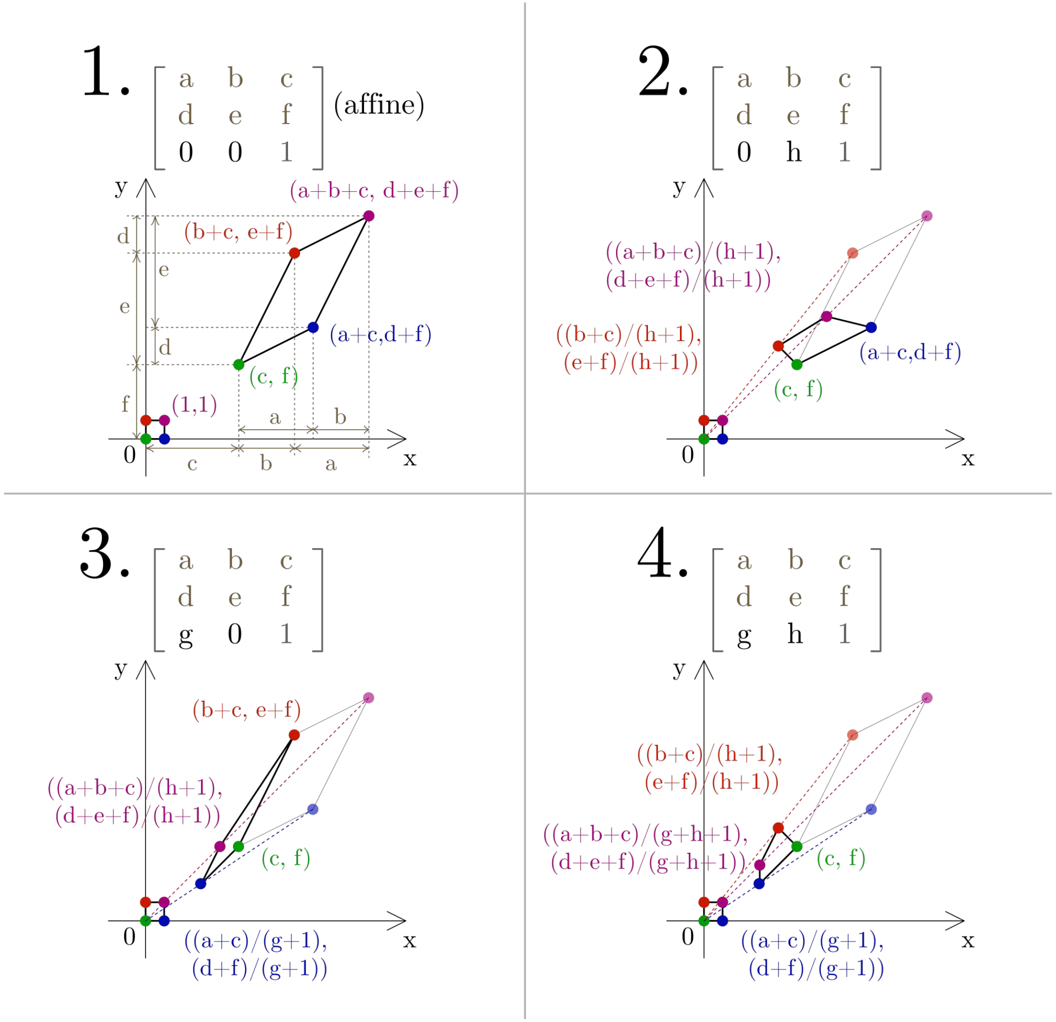
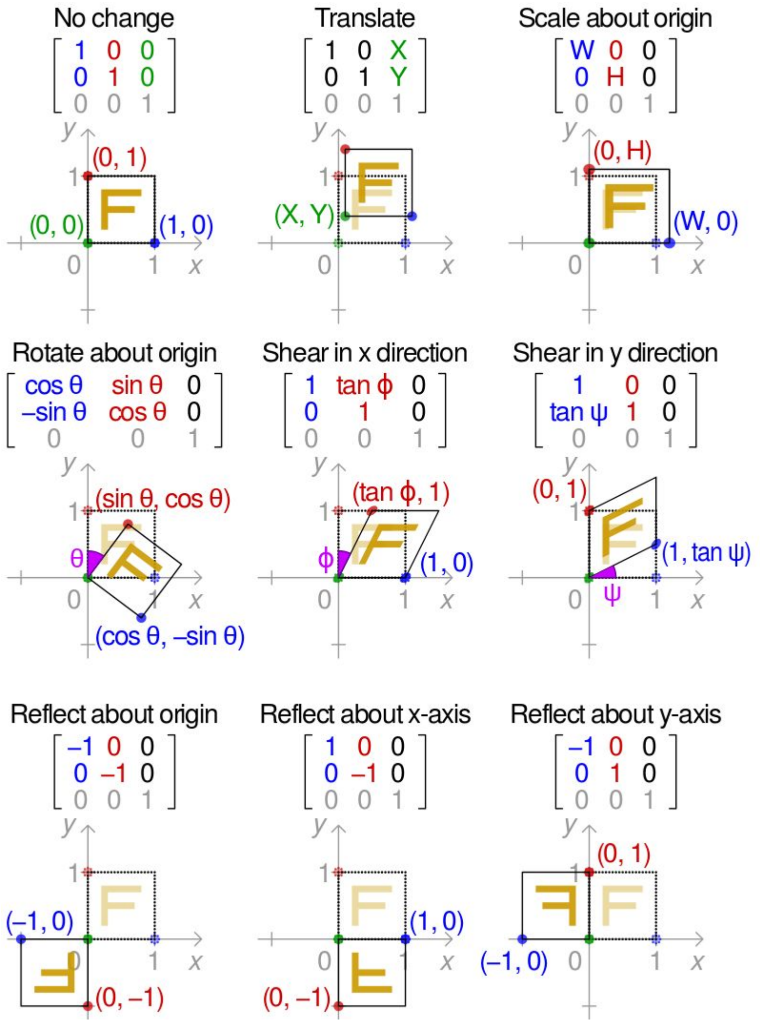
- Изучение линейной алгебры впервые началось с введения понятия определителя. Определители были рассмотрены Лейбницем в 1693 году, и в свою очередь в 1750 году Габриэль Крамер использовал их для нахождения решения в системах линейных уравнений, метод решения получил название правила Крамера. Далее, Гаусс последовательно развил теорию решения систем линейных уравнений с помощью метода исключения. Исследования в матричной алгебре начались в Британии в середине 1800х. Линейная алгебра как предмет впервые появилась в американских университетских учебниках в 1940х, и в школьных учебниках в 1950х годах.

Почему линейная алгебра важна?

- Линейная алгебра необходима во многих направлениях компьютерных наук, потому что линейные уравнения легко решаемы.
- Она позволяет привести большой набор проблем к матричному виду, и в результате мы решаем матрицу.

Применения Линейной алгебры в CS&E

- Линейная алгебра для пространственных манипуляций
  - Здесь мы работаем с 2-, 3-, 4-мерными векторными пространствами и нам необходимы операторы для вращения, проекции и других матричных операций, имеющих пространственную интерпретацию. Это подраздел линейной алгебры, использующийся, например, в компьютерной графике и симуляциях физических явлений.

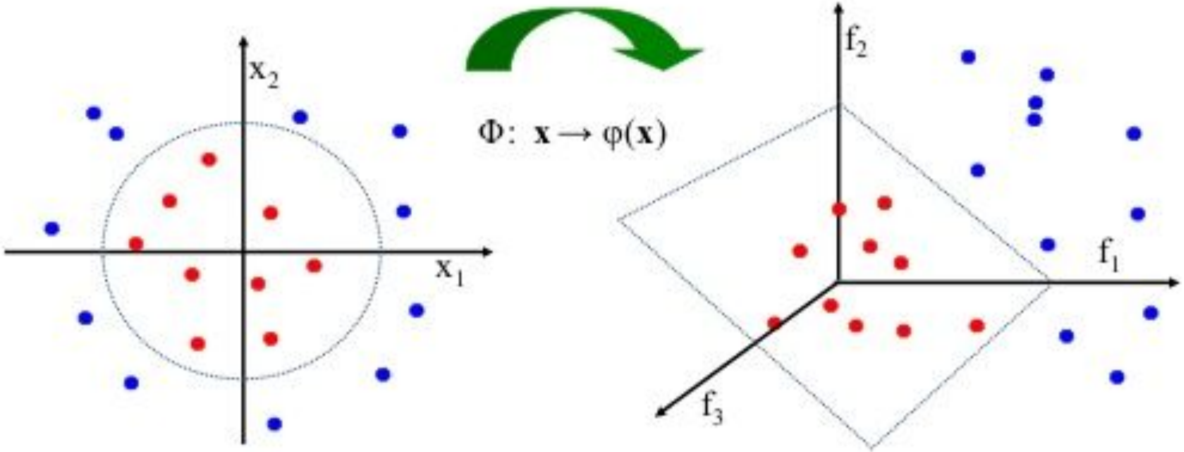

1.
a b c
d e f
0 0 1
(affine)
(a+b+c, d+e+f)
(b+c, e+f)
(a+c,d+f)
(c, f)
(1,1)
2.
a b c
d e f
0 h 1
((a+b+c)/(h+1),
(d+e+f)/(h+1))
((b+c)/(h+1),
(e+f)/(h+1))
(a+c,d+f)
(c, f)
3.
a b c
d e f
g 0 1
(b+c, e+f)
((a+b+c)/(h+1),
(d+e+f)/(h+1))
(c, f)
((a+c)/(g+1),
(d+f)/(g+1))
4.
a b c
d e f
g h 1
((b+c)/(h+1),
(e+f)/(h+1))
((a+b+c)/(g+h+1),
(d+e+f)/(g+h+1))
(c, f)
((a+c)/(g+1),
(d+f)/(g+1))

No change
1 0 0
0 1 0
0 0 1
(0, 1)
(0, 0)
(1, 0)
Translate
1 0 X
0 1 Y
0 0 1
(X, Y)
Scale about origin
W 0 0
0 H 0
0 0 1
(0, H)
(W, 0)
Rotate about origin
cos θ sin θ 0
–sin θ cos θ 0
0 0 1
(sin θ, cos θ)
(cos θ, –sin θ)
Shear in x direction
1 tan ϕ 0
0 1 0
0 0 1
(tan ϕ, 1)
(1, 0)
Shear in y direction
1 0 0
tan ψ 1 0
0 0 1
(0, 1)
(1, tan ψ)
Reflect about origin
–1 0 0
0 –1 0
0 0 1
(–1, 0)
(0, –1)
Reflect about x-axis
1 0 0
0 –1 0
0 0 1
(1, 0)
(0, –1)
Reflect about y-axis
–1 0 0
0 1 0
0 0 1
(0, 1)
(–1, 0)

Применения Линейной алгебры в CS&E

- Линейная алгебра в статистике
  - Здесь мы работаем с векторами в высокоразмерных пространствах, не имеющих пространственной интерпретации, и тут нас интересуют такие инструкменты, как разложение матрицы и т.д. Доменная область используется при обработке сигналов, статистическом машинном обучении и сжатии данных.

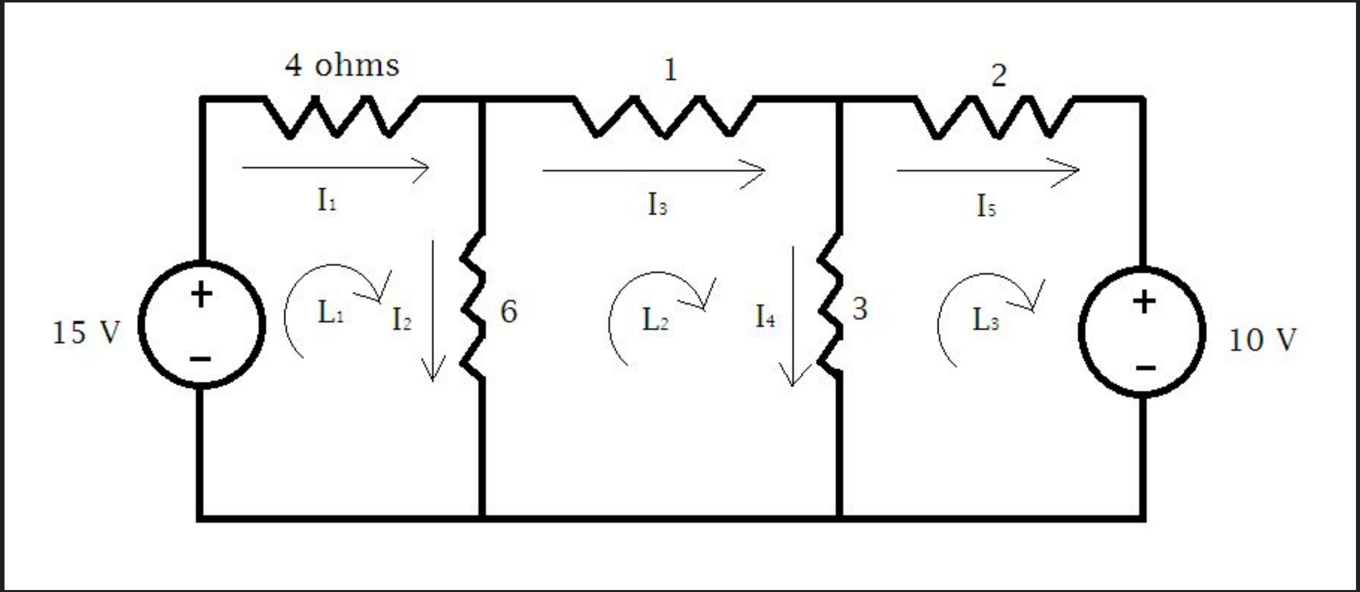
Mapping Data to High Dimensional Feature Spaces (2 / 4)

- General idea: the original input space can always be mapped to some higher dimensional feature space where the training set is separable.



Применение Линейной алгебры в CS&E

- Применение Линейной алгебры в анализе сетей и цепей
    - Задача - найти значения 5 токов вот в такой цепи:



Ответ:

$$I_1 = 1.89$$
$$I_2 = 1.24$$
$$I_3 = 0.65$$
$$I_4 = 2.26$$
$$I_5 = -1.61$$

Применение Линейной алгебры в CS&E

- По правилу Кирхгофа:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Loop 1: } 15 - 4i_1 - 6i_2 = 15 - 10i_1 + 6i_3 = 0\\
&\text{Loop 2: } 1i_3 + 3i_4 - 6i_2 = -10i_3 + 6i_1 + 3i_5 = 0\\
&\text{Loop 3: } 2i_5 + 10 - 3i_4 = 5i_5 - 3i_3 + 10 = 0
\end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{pmatrix} 10 & -6 & 0 \\ -6 & 10 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_3 \\ i_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Input:

$$\begin{pmatrix} 10 & -6 & 0 \\ -6 & 10 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}.\{i_1, i_2, i_3\} = \{15, 0, -10\}$$

Result:

$$\{10\,i_1 - 6\,i_2, -6\,i_1 + 10\,i_2 - 3\,i_3, 5\,i_3 - 3\,i_2\} = \{15, 0, -10\}$$

Solution:

$$i_1 = \frac{87}{46}, \quad i_2 = \frac{15}{23}, \quad i_3 = -\frac{37}{23}$$

Применение Линейной алгебры в CS&E

- Криптография
  - Шифрование и дешифрование применяется с использованием некоторой секретной информации, с помощью которой можно получить исходный текст, т.е. ключа.
  - Рассмотрим пример
    - У нас есть таблица символов:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

- Источник: https://sites.math.washington.edu/~king/coursedir/m308a01/Projects/Cryptography.htm

Example 8 The following Hill 2-cipher is intercepted:

$$IOSBTGXESPXHOPDE$$

Decipher the message, given that it starts with the word $DEAR$.

Solution. From Table 1, the numerical equivalent of the known plaintext is

$$\begin{array}{cc} DE & AR \\ 4\ 5 & 1\ 18 \end{array}$$

and the numerical equivalent of the corresponding ciphertext is

$$\begin{array}{cc} IO & SB \\ 9\ 15 & 19\ 2 \end{array}$$

so the corresponding plaintext and ciphertext vectors are

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \leftrightarrow \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 18 \end{bmatrix} \leftrightarrow \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 19 \\ 2 \end{bmatrix}$$

We want to reduce

$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^t \\ \mathbf{c}_2^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 19 & 2 \end{bmatrix}$$

to I by elementary row operations and simultaneously apply these operations to

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^t \\ \mathbf{p}_2^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 18 \end{bmatrix}$$

to obtain $(A^{-1})^t$ (the transpose of the deciphering matrix). This can be accomplished by adjoining P to the right of C and applying row operations to the resulting matrix $[C \mid P]$ until the left side is reduced to I. The final matrix will then have the form $[I \mid (A^{-1})^t]$. The computations can be carried out as follows:

$\left[\begin{array}{cc\|cc} 9 & 15 & 4 & 5 \\ 19 & 2 & 1 & 18 \end{array}\right]$	We formed the matrix $[C \mid P]$.
$\left[\begin{array}{cc\|cc} 1 & 45 & 12 & 15 \\ 19 & 2 & 1 & 18 \end{array}\right]$	We multiplied the first row by $9^{-1} = 3$.
$\left[\begin{array}{cc\|cc} 1 & 19 & 12 & 15 \\ 19 & 2 & 1 & 18 \end{array}\right]$	We replaced 45 by its residue modulo 26.
$\left[\begin{array}{cc\|cc} 1 & 19 & 12 & 15 \\ 0 & -359 & -227 & -267 \end{array}\right]$	We added -19 times the first row to the second.
$\left[\begin{array}{cc\|cc} 1 & 19 & 12 & 15 \\ 0 & 5 & 7 & 19 \end{array}\right]$	We replaced the entries in the second row by their residues modulo 26.
$\left[\begin{array}{cc\|cc} 1 & 19 & 12 & 15 \\ 0 & 1 & 147 & 399 \end{array}\right]$	We multiplied the second row by $5^{-1} = 21$.
$\left[\begin{array}{cc\|cc} 1 & 19 & 12 & 15 \\ 0 & 1 & 17 & 9 \end{array}\right]$	We replaced the entries in the second row by their residues modulo 26.
$\left[\begin{array}{cc\|cc} 1 & 0 & -311 & -156 \\ 0 & 1 & 17 & 9 \end{array}\right]$	We added -19 times the second row to the first.
$\left[\begin{array}{cc\|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 17 & 9 \end{array}\right]$	We replaced the entries in the first row by their residues modulo 26.

Thus,

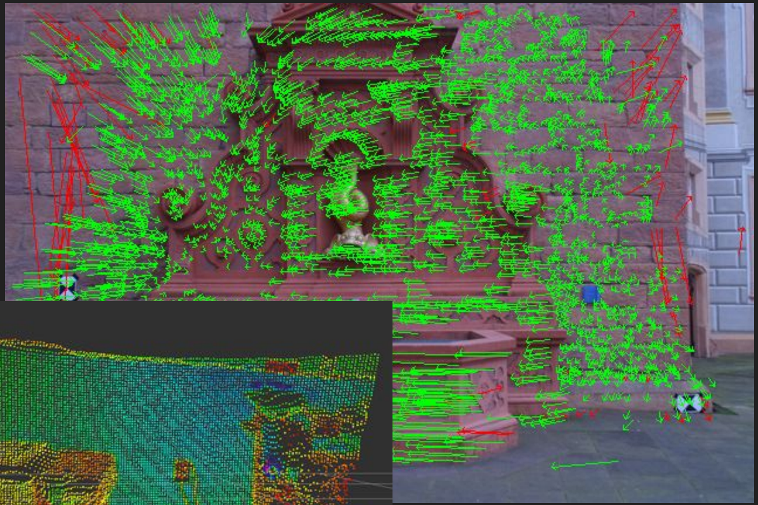
$$(A^{-1})^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 17 & 9 \end{bmatrix}$$

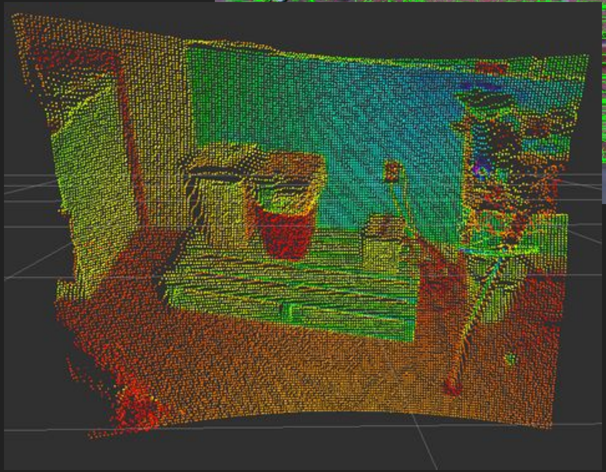
so the deciphering matrix is

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 17 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Применение Линейной алгебры в CS&E

- Компьютерное зрение
  - модель камеры
  - эпиполярная геометрия
  - калибрация и само-калибрация
  - оценка позы
  - структура из движения
  - И т.д.





Применение Линейной алгебры в CS&E

Другие области:

- Сжатие аудио-, видеоматериалов и изображений, включая MP3, JPEG и MPEG форматы.
- Модуляция и кодирование, включая сверточные коды и Wi-Fi, Gigabit Ethernet, HDTV и GPS.
- Обработка сигналов, включая быстрое преобразование Фурье и автотюн
- Статистика и машинное обучение, включая такие области как автоматизация торговли на финансовых рынках.

Применение Линейной алгебры в CS&E

- Компьютерная графика
  - В компьютерной графике каждый элемент представляется матрицей
  - Любые изображения могут быть представлены в матричном формате, включая 3D:
  - http://www.opengl-tutorial.org/beginners-tutorials/tutorial-3-matrices/
  - https://www.mathworks.com/company/newsletters/articles/how-matlab-represents-pixel-colors.html