Problemas Básicos

Marcelo C. Gama

ICT-UNIFESP

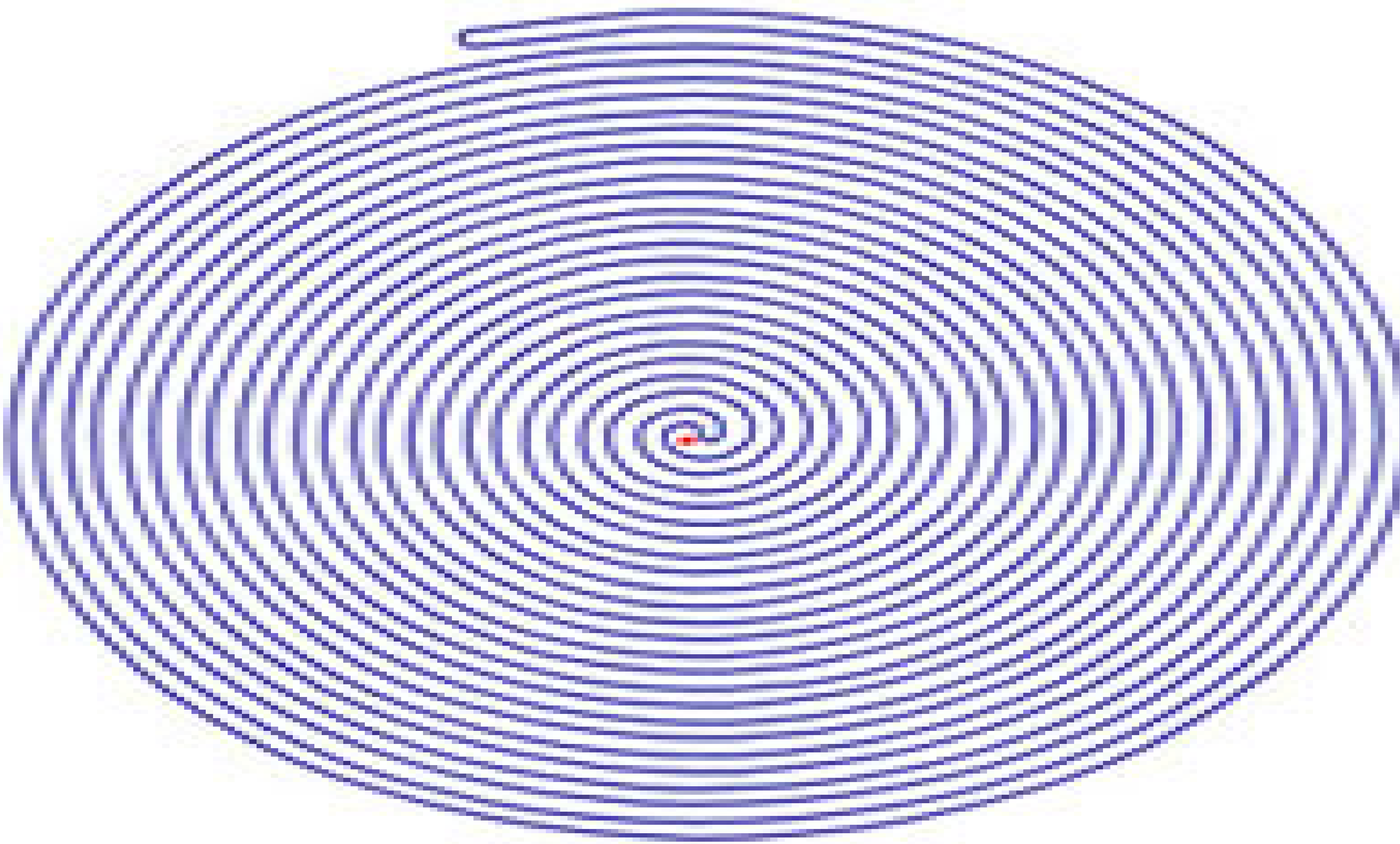
mgama@unifesp.br

12/07/2016

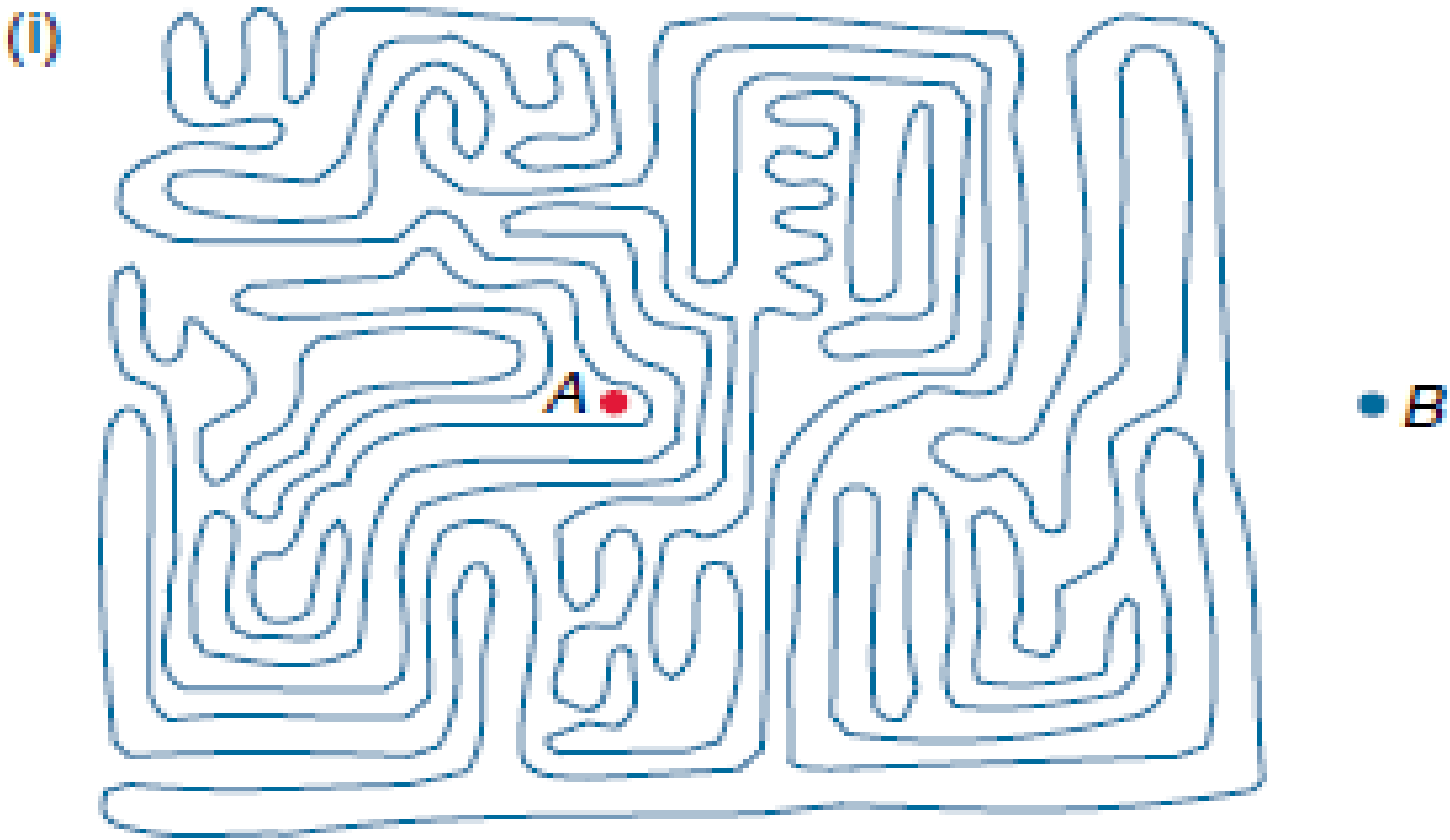
Pontos Interiores e Exteriores

Curva de Jordan: Curva simples (sem auto-interseção) e fechada.
Teorema de Jordan: Uma curva de Jordan C divide o plano em duas componentes: uma limitada, chamada interior de C, e outra ilimitada, chamada exterior de C, com fronteira comum dada pela curva C.
Seja P um ponto interior a uma curva de JOrdan. Para determinar se um ponto X qualquer do plano é interno ou externo à curva, traçamos uma reta ligando P a X. Se o número de vezes em que a reta intersecta a curva é par, então X é interno. Se o número é ímpar, então X é externo.

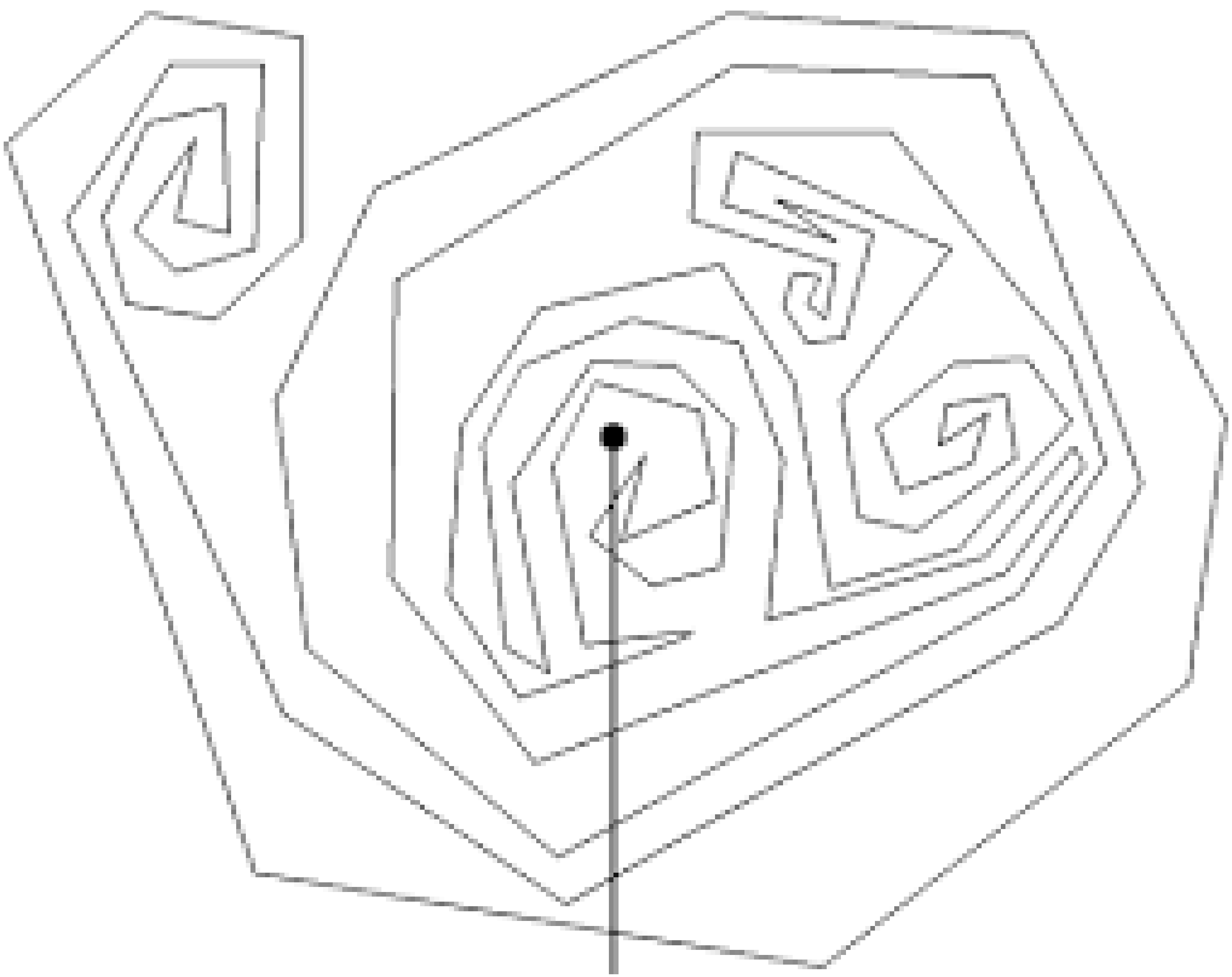
O Ponto Vermelho Está no Interior ou no Exterior da Curva?



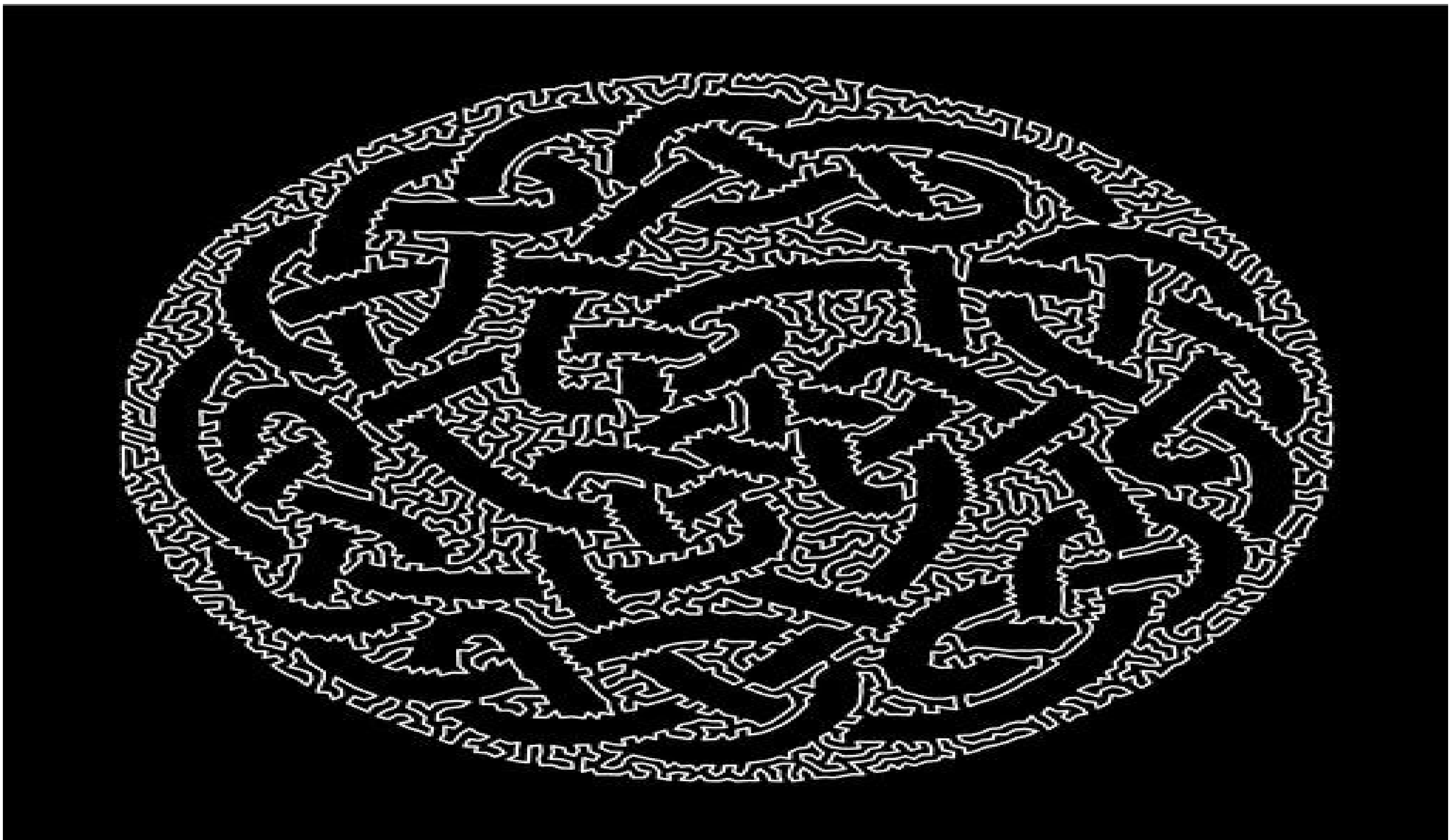
O Ponto A está no interior ou no Exterior?



Identificação de Pontos Interiores e Exteriores



Um problema um Pouco Mais Difícil
(Áreas Vizinhas estão em Lados Opostos)



Polígonos

Polígono: Região do plano limitada por uma coleção finita de segmentosde reta que formam uma curva de Jordan.
Sejam $P_1, P_2, ..., P_n$ n pontos no plano.
Os segmentos $e_1 = P_1P_2$, $e_2 = P_2P_3$, ..., $e_i = P_iP_{i+1}$, ..., $e_n = P_nP_1$, formam um polígono se, e somente se:
1) A interseção de cada par de segmentos adjacentes é um ponto, ou seja,

$$e_i \cap e_{i+1} = P_i,$$

para todo $i = 1, 2, ..., n$.
2) Segmentos não adjacentes têm interseção vazia:

$$e_i \cap e_j = \emptyset,$$

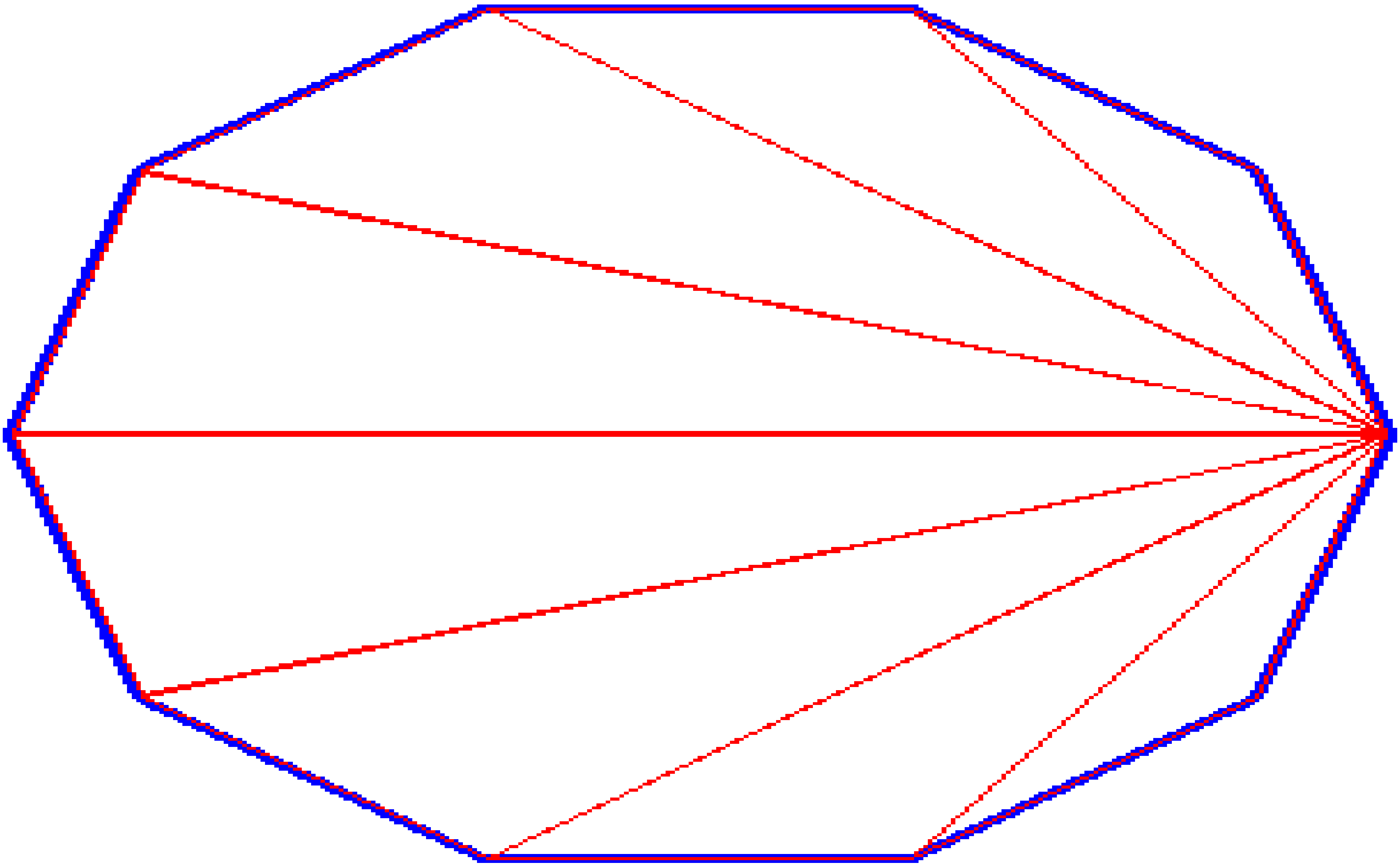
se $j \neq i + 1$.

Triangularização

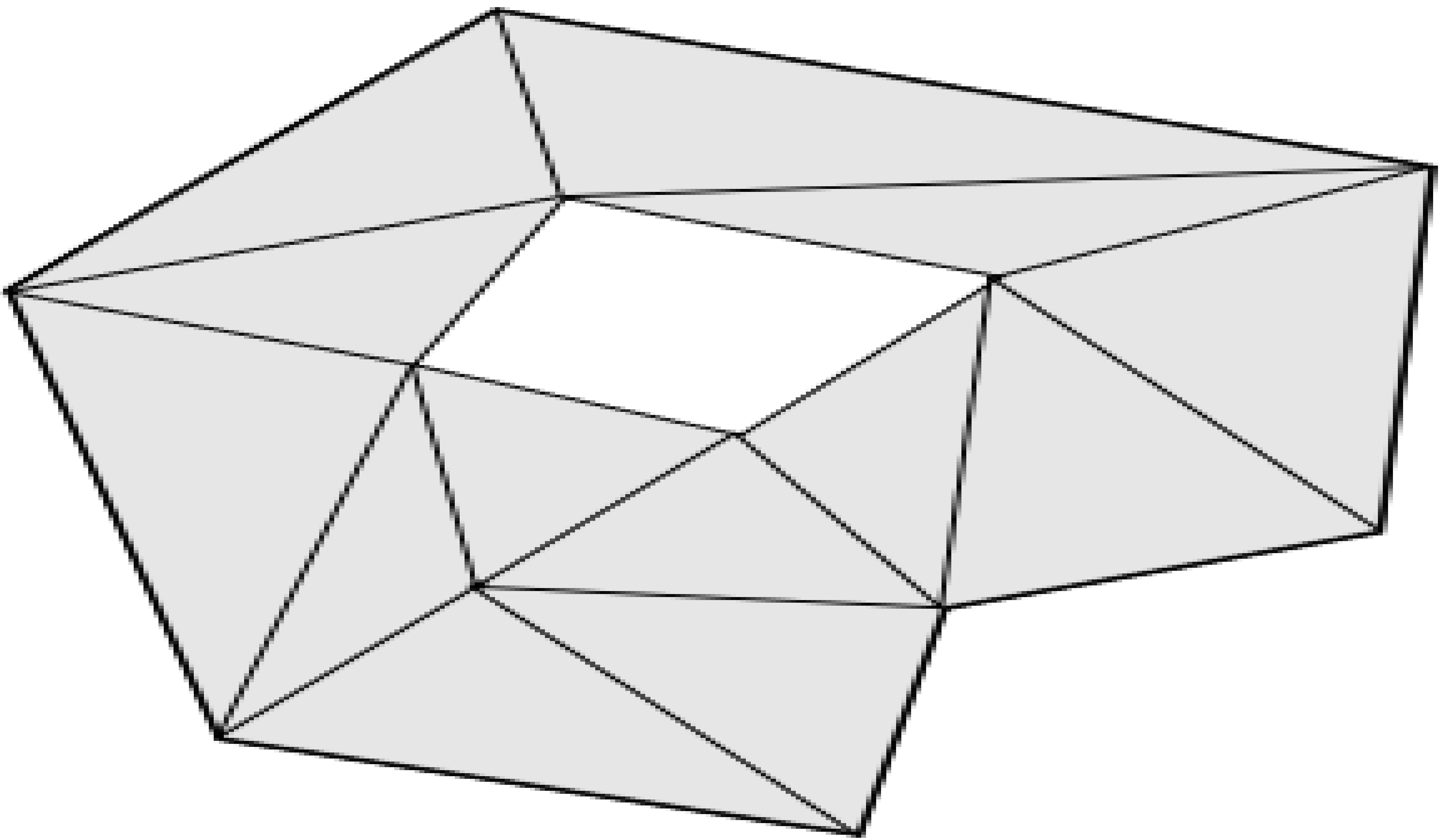
Triangularização: É o processo de dividir figuras planas, em geral polígonos, em triângulos.
Definição: Uma diagonal de um polígono é um segmento que liga vértices não-sucessivos.
Alguns resultados conhecidos:
1) Todo polígono de $n \geq 4$ lados tem uma diagonal.
2) Todo polígono pode ser particionado em triângulos pela adição de diagonais.
3) Toda triangularização de um polígono P de n lados usa $n-3$ diagonais e consiste de $n-2$ triângulos.
4) O número total de diagonais de um polígono de n lados é

$$D = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Triangularização Por Diagonais



Sem o uso de Diagonais



Área de um Polígono Pelo Processo de Triangularização:
Sejam a, b, c os vetores que representam os vértices de triângulo. A área do paralelogramo de lados A e B é dada por

$$A_P = |A \times B|,$$

e a área do triângulo é, portanto

$$A_\Delta = \frac{1}{2}|A \times B|.$$

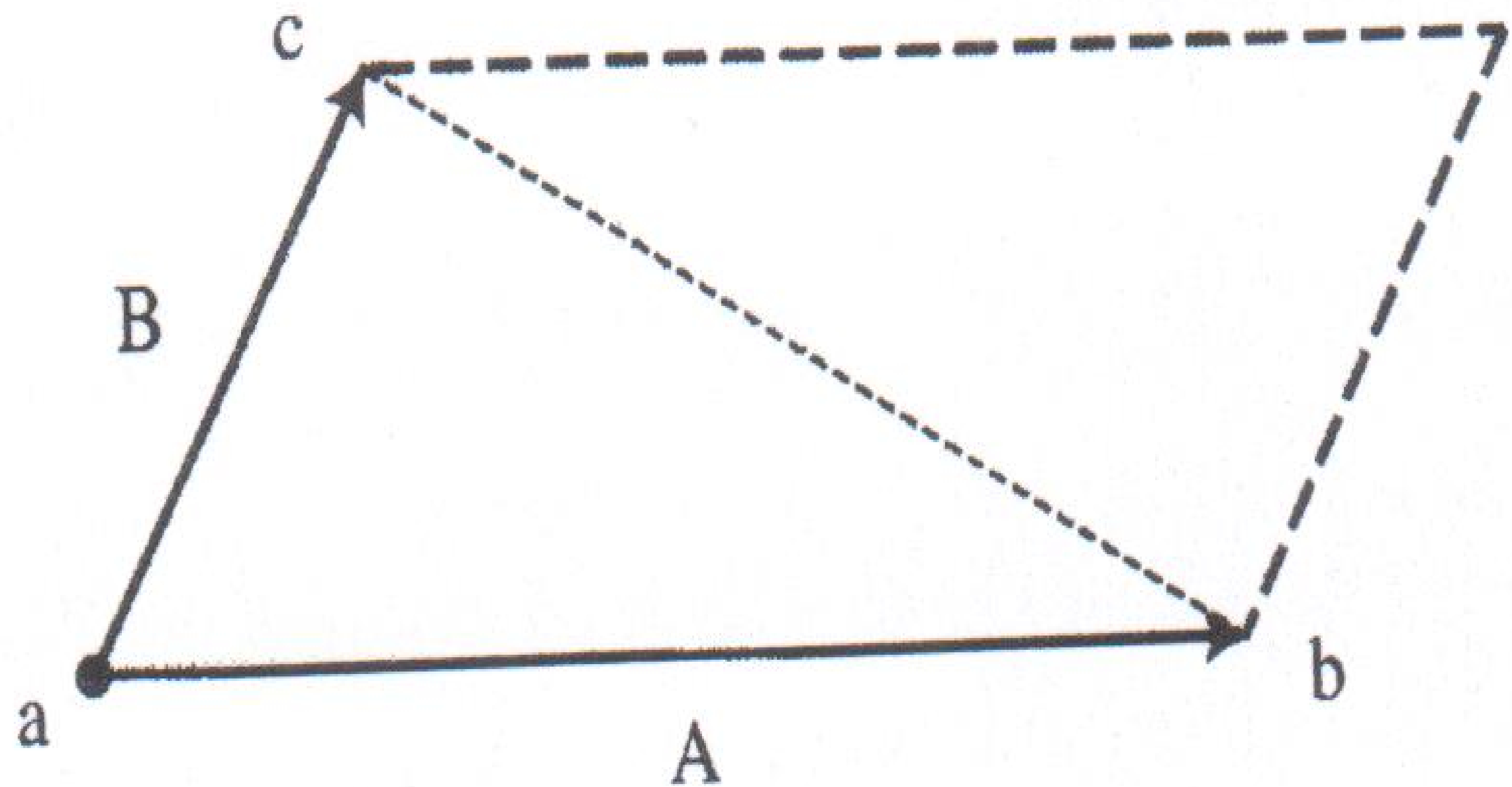
Para $A = b - a = (A_x, A_y, 0)$ e $B = c - a = (B_x, B_y, 0)$ encontramos

$$A \times B = (0, 0, A_x B_y - A_y B_x).$$

E então

$$A_\Delta = \frac{1}{2}|A_x B_y - AyB_x|.$$

Área da Triângulo



Triangularização

Os vértices a, b, c são dados, em termos de suas coordenadas, por

$$a = (a_x, a_y, 0)\,,$$

$$b = (b_x, b_y, 0)\,,$$

$$c = (c_x, c_y, 0)\,.$$

Temos, então

$$A_\Delta = A(a, b, c) = \frac{1}{2}\left\| \begin{array}{ccc} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right\|$$

Triangularização

A área de polígono com n vértices $v_1, v_2, ..., v_n$ é calculada efetuando-se a triangularização e calculando-se a ŕea de cada triângulo, ou seja,

$$A(Pol) = A(v_1, v_2, v_3) + A(v_1, v_3, v_4) + ... + A(v_1, v_{n-1}, v_n)$$

O Problema da Galeria de Arte (Problema de Klee)

Considere uma galeria de arte cujo chão tem a forma de um polígono de n lados. Quantos guardas são necessários para vigir a galeria supondo que cada guarda permanece imóvel mas pode enxergar em qualquer direção? Seja $g(P)$ o menor número de guardas necessário para cobrir o polígono P. Então

$$g(P) = min_S \left\{card\{S/S \ \ cobre \ \ P\}\right\},$$

em que S um conjunto de pontos e $cardM$ é o número de elementos do conjunto M.
Se P_n é um polígono de n lados, então a resposta que procuramos é

$$G(n) = max_{P_n} \left\{g(P_n)\right\}.$$

Restrições: Pelo menos um guarda necessário e um guarda por vértice é suficiente para cobrir o polígono. Então

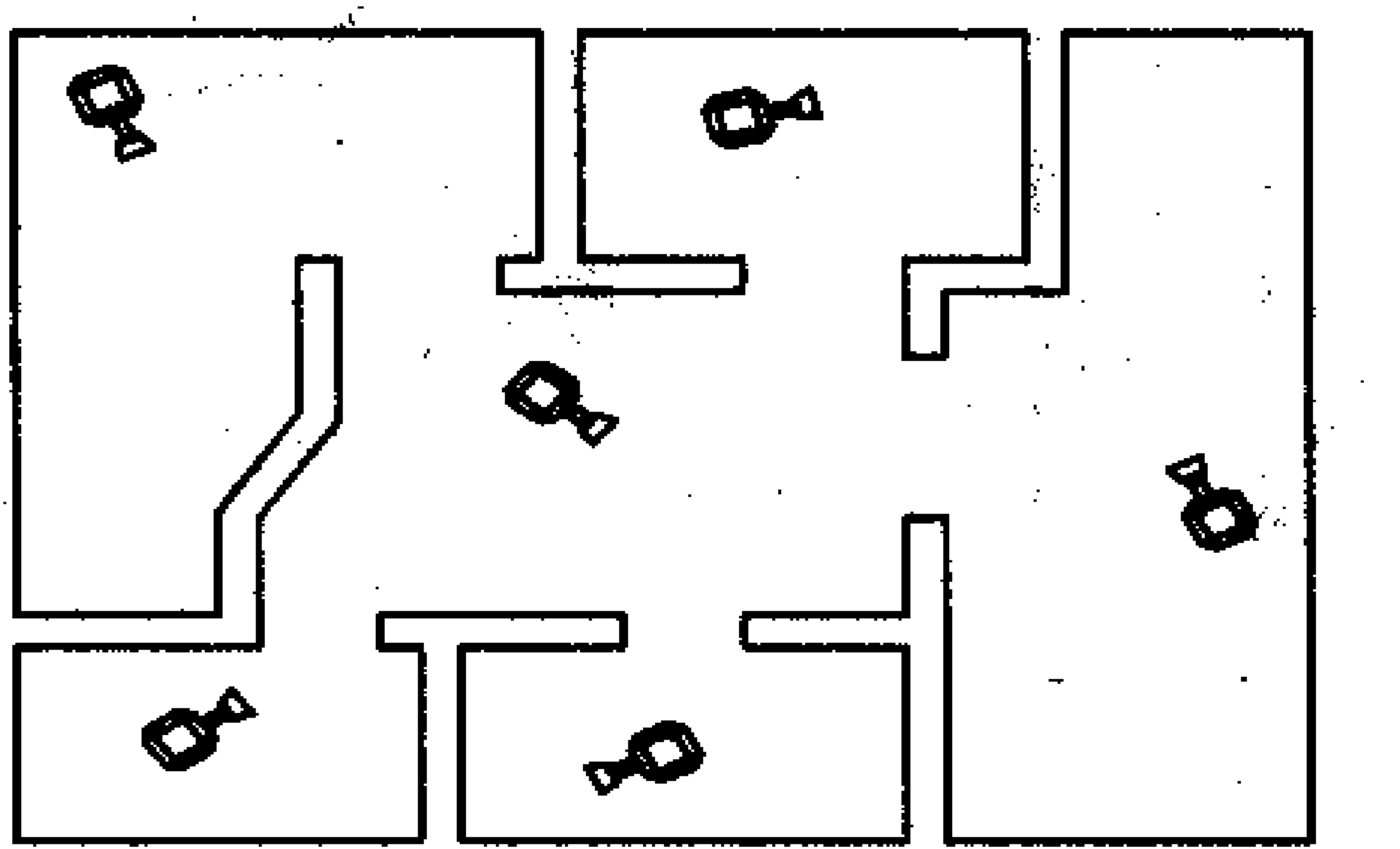
$$1 \leq G(n) \leq n.$$

Teorema de Klee (1975): Se os guardas são dispostos no interir do polígono, então

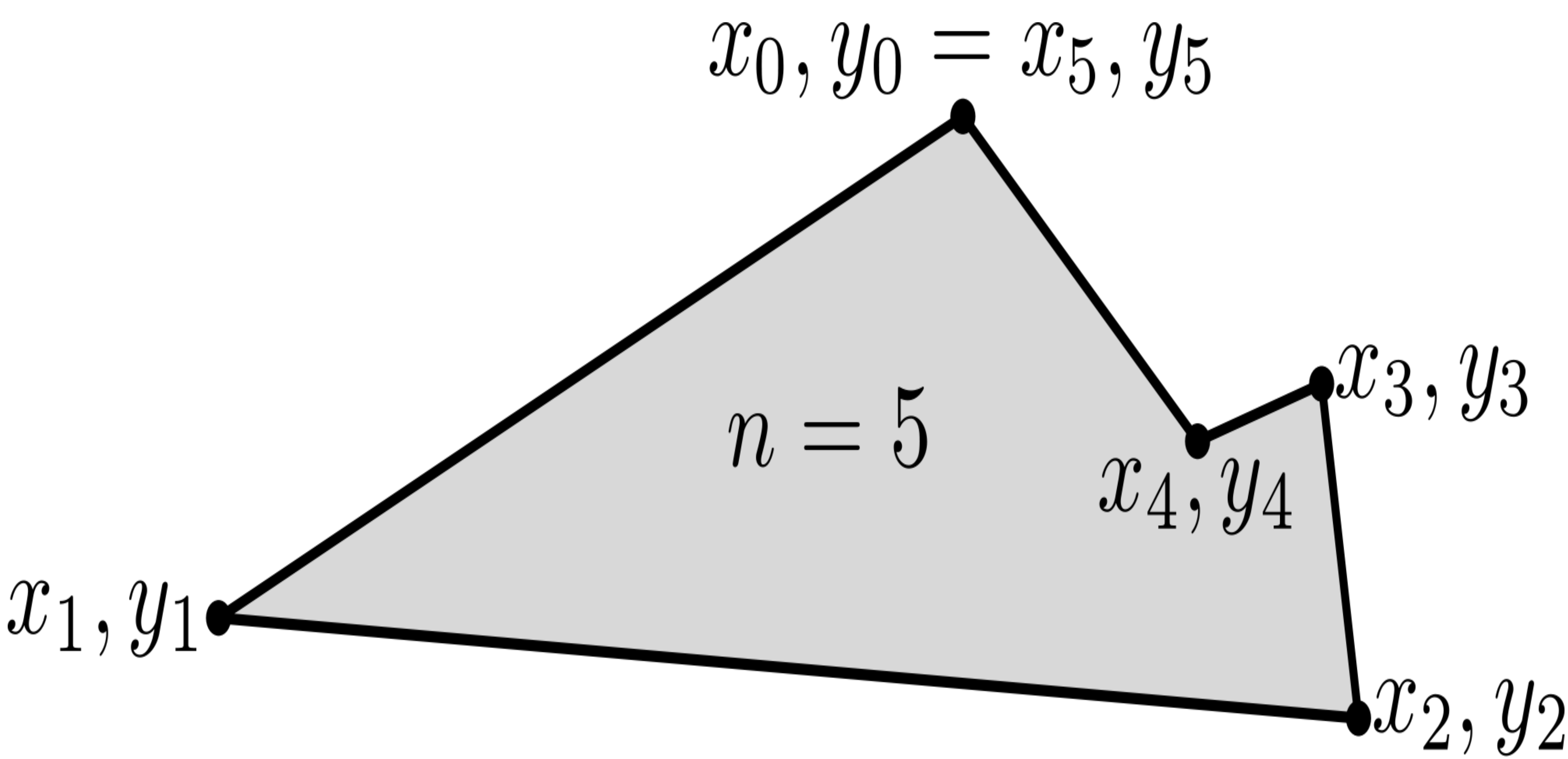
$$G(n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor.$$

Se os guardas so dispostos nos vértices ou arestas, não é possível estabelecer uma fórmula geral para $G(n)$. (Exemplos a seguir)

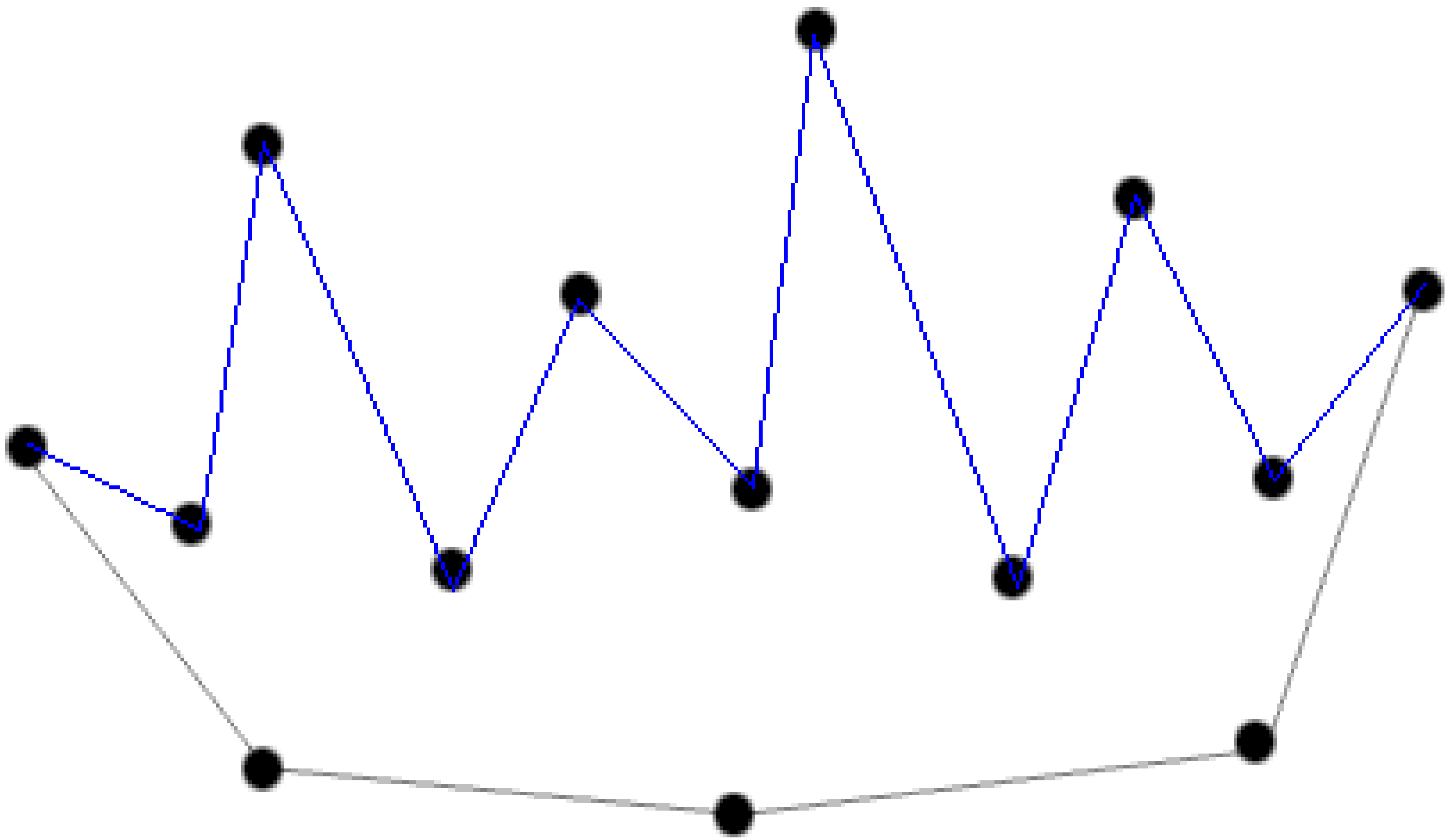
O Problema da Galeria de Arte (NP-Difícil – Tempo Exponencial)



Exemplo 1



Exemplo 2



Problemas

1) Sabendo que a equao do segmento de reta que liga os pontos X e P é

$$(x, y) = \lambda P + (1 - \lambda)X$$

com $\lambda \in [0, 1]$, escreva um programa que determine, para uma curva $C(t) = (x(t), y(t))$ e um ponto P em seu interior, a posio do ponto X.
2) Verifique que na figura abaixo, o número de guardas de arestas é

$$G(n) = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor.$$

3) Escreva um programa que calcule a área de um polígono triangularizado em função das coordenadas de seus vértices.
Dica: Use o fato de que se $v_i = (x_{i,y_i})$ então

$$A(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} |x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}|.$$