## Q1 POSITION + ORIENTATION

**POSITION**

EQUALITY OBS $\rightsquigarrow A = 1$

OBIETTIVO ARRIVARE IN POSE $\bar{x}$

↳ METODO

$$\dot{x} = J_x \dot{q}$$

COSA CONTROLLARE

$$\underbrace{\lambda_x (\bar{x} - x)}_{\text{COME VOGLIO CONTROLLARE}} = J_x \dot{q}$$

$$\lambda_x J_x^{+} (\bar{x} - x) = \dot{q}$$

$\dot{q}$ VAR CVS

$$\underline{m} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

DoF MANIPOLATORE

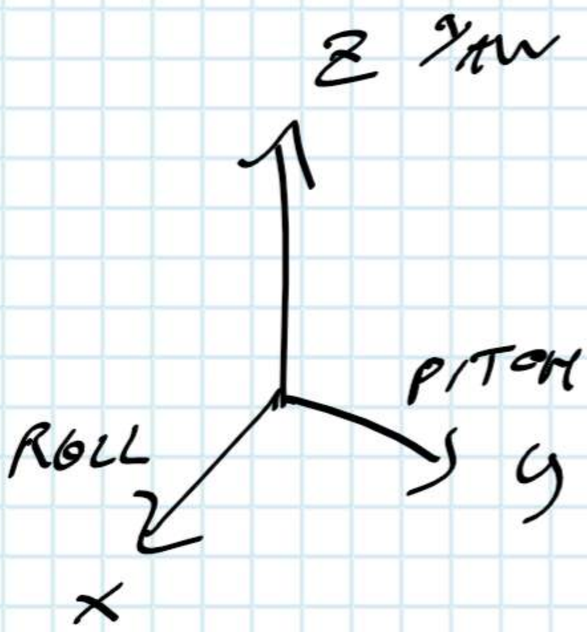
$$\underline{c} = \begin{bmatrix} q \\ \eta_L \\ \eta_A \end{bmatrix}$$

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{7 \times 1}$$

$$\dot{\underline{c}} = \dot{\underline{q}}$$

$$\eta_L = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\eta_A = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{ROLL} \\ \text{PITCH} \\ \text{YAW} \end{matrix}$$



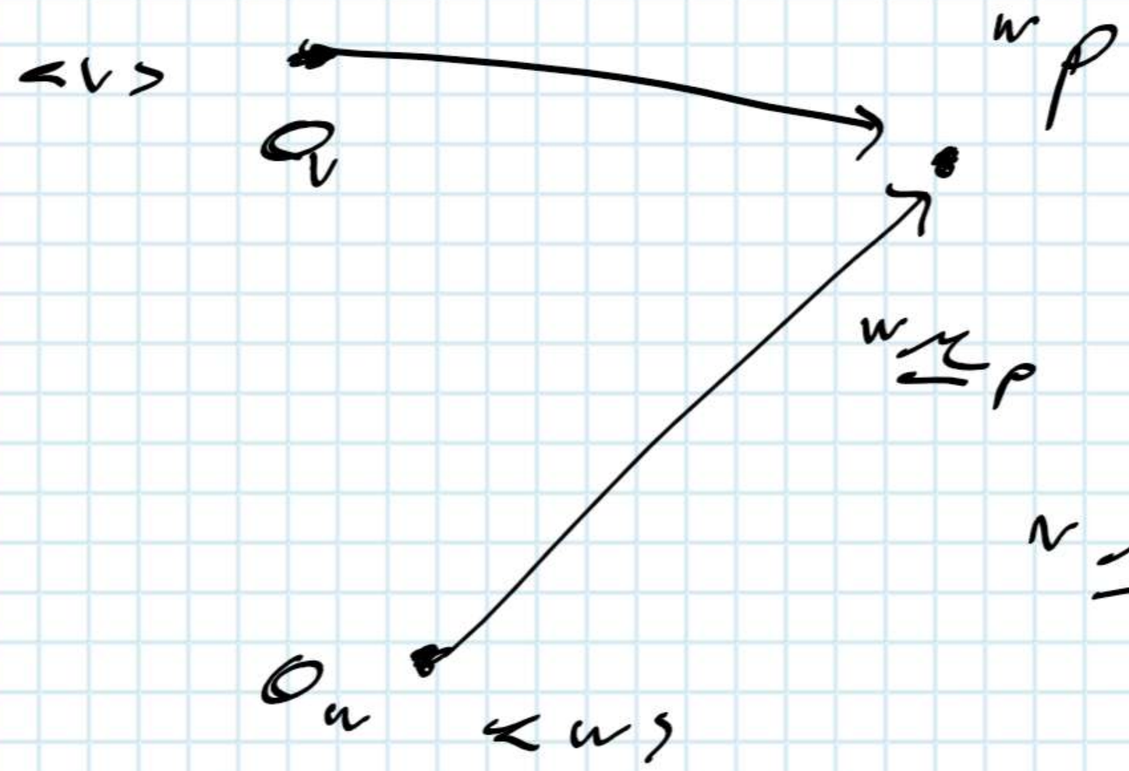
$$ {}^{v}\dot{\underline{m}} = \begin{bmatrix} {}^{v}\dot{x} \\ {}^{v}\dot{y} \\ {}^{v}\dot{z} \end{bmatrix} = $$

$$ = \underbrace{\left[ \emptyset_{3\times 7} \;\vdots\; \underset{3\times 3}{I} \;\vdots\; \emptyset_{3\times 5} \right]}_{{}^{v}\underline{S}_{m}} \begin{bmatrix} \underline{q} \\ {}^{v}\underline{\dot{\eta}}_{L} \\ {}^{v}\underline{\dot{\eta}}_{A} \end{bmatrix} \leftarrow \dot{\underline{m}} $$

$$ \overset{0.2}{\downarrow} \quad \dot{d}_{m} \left( {}^{v}\dot{\underline{m}} - {}^{v}\underline{m} \right) = -\dot{d}_{am}\, {}^{v}_{n}R\, \underline{z}_{p} $$

$$ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

$\boxed{\text{FUNZIONA?}}$




$$ {}^{v}\underline{z}_{p} = {}^{v}_{w}R\, {}^{w}\underline{z}_{p} $$

$$ {}^{v}_{w}R = {}^{v}_{u}T(1:3,\ 1:3) $$

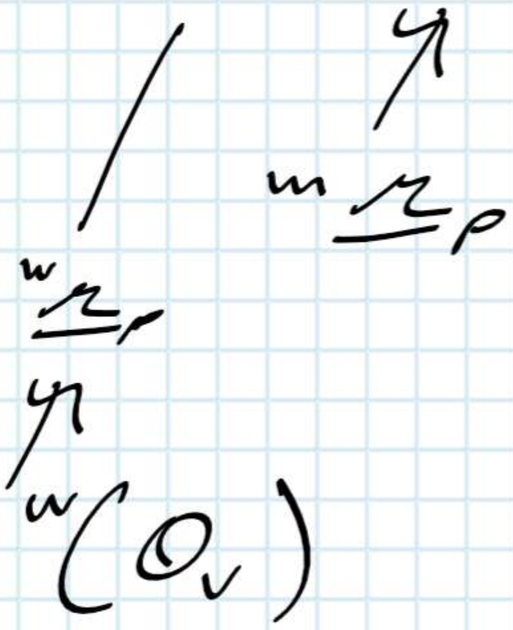
$$ {}^{v}_{u}T \quad \text{UVMS.} \quad {}^{v}T_{w} $$

$$ \left[ \begin{array}{c|c} {}^{v}_{u}R & {}^{v}O_{w} \\ \hline \underset{3\times 3}{0} & \end{array} \right] $$

$$ {}^{w}\underline{m} = \underbrace{{}^{w}_{v}R \; {}^{v}J_{m} \; {}^{v}\underline{\dot{q}}} $$

$$ {}^{w}J_{m} = \left[ \; 0_{3\times 7} \; \vdots \; {}^{w}_{v}R \; \vdots \; 0_{3\times 3} \; \right] $$

$$ \dot{d}_{m} \left( {}^{w}\underline{\bar{m}} - {}^{w}\underline{m} \right) $$




METODO DEL PROF.

PROSSIMA VOLTA:
CALCOLARE TASK JACOBIAN ANGULAR
E SIMULARE

# Regole di Derivazione

## Strap-down equations (STRD)

(derivata della orientation matrix)

① $${}^a_b\dot{R} = \left[{}^a\underline{\omega}_{b/a} \wedge\right] {}^a_bR$$

② $${}^a_b\dot{R} = {}^a_bR \left[{}^b\underline{\omega}_{b/a} \wedge\right]$$

## Proiezione della derivata del vettore (PROS DER)

Supponiamo di conoscere ${}^b\dot{\underline{s}}(t)$ ma di voler usare il frame <a> come punto di vista.

Non vale la seguente: ${}^a\dot{\underline{s}} = {}^a_bR\, {}^b\dot{\underline{s}}$ !! NO !!

La relazione corretta è

$${}^a\dot{\underline{s}}(t) = {}^a\left({}^b\dot{\underline{s}}(t)\right) + {}^a\left(\underline{\omega}_{b/a} \wedge {}^b\underline{s}(t)\right)$$

corrisponde a

① $${}^a_bR \left[{}^b\underline{\omega}_{b/a} \wedge\right] {}^b\underline{s}$$

② $$\left[{}^a\underline{\omega}_{b/a} \wedge\right] {}^a_bR\, {}^b\underline{s}$$

Nota bene: ${}^a\dot{\underline{s}} = {}^aD_a\, \underline{s}$ ${}^b\dot{\underline{s}} = {}^bD_b\, \underline{s}$

PROS

frame derivatore

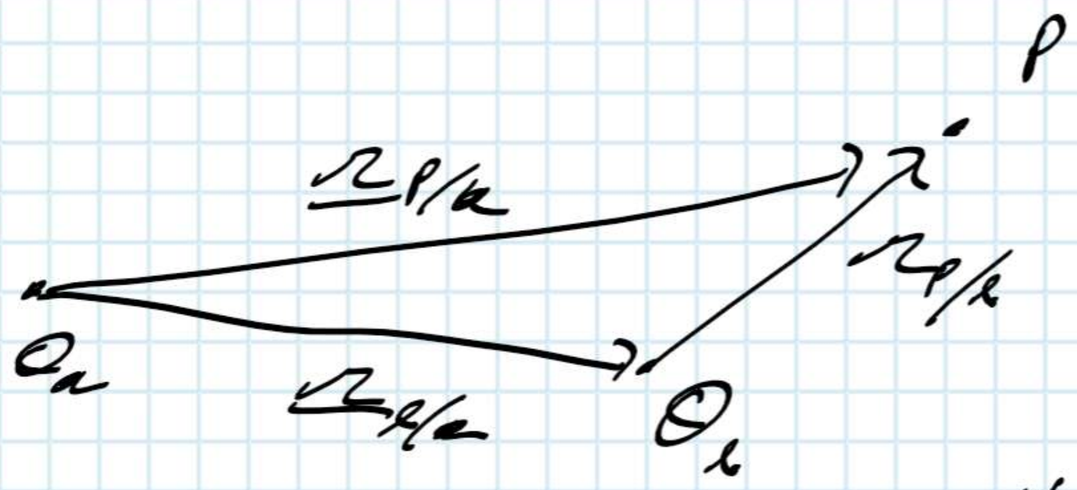
$${}^a(D_a\underline{s}) = {}^a\left(D_b\underline{s} + \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s}\right)$$

## CAMBIO DI FRAME DERIVATORE PER VETTORI (FFC DER)

SUPPONIAMO DI CONOSCERE $D_b \underline{s}$ MA DI VOLER OTTENERE DA QUESTO LA DERIVATA RISPETTO AD $\langle a \rangle$.
ALLORA, IN FFC,

$$D_a \underline{s} = D_b \underline{s} + \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s}$$

## DERIVATA DI UN RAGGIO VETTORE (RAY DER)




$$\underline{v}_{P/b} = D_b \underline{r}_{P/b}$$

$$D_a \underline{r}_{P/a} = \underbrace{\underline{v}_{b/a}}_{D_a \underline{r}_{b/a}} + \underbrace{\underline{v}_{P/b} + \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{r}_{P/b}}_{D_a \underline{r}_{P/b}}$$

$D_a(O_b - O_a)$

$D_a \underline{r}_{P/b}$ RICORDA CHE

$$D_a(P - O_b) = D_b(P - O_b) + \underline{\omega}_{b/a} \wedge (P - O_b)$$

## DERIVATA DI UN VETTORE A MODULO COSTANTE (CONST DER)

SIA $D_b \underline{s}$ TC $|\underline{s}| = \gamma \ \forall t$ HA MODULO COSTANTE

$$D_a \underline{s} = \underbrace{\cancel{D_b \underline{s}}}_{\substack{\emptyset \\ \text{PERCHÉ IL} \\ \text{MODULO È} \\ \text{COSTANTE}}} + \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s} = \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s}$$

$$\dot{\sigma} = 0$$

(CONST DER) $\quad D_a \underline{s} = \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s}$

PIÙ PRECISAMENTE SIA $\underline{s} = \underline{m}\sigma$ DOVE $\underline{m}$ È LA DIREZIONE DI $\underline{s}$ E $\sigma$ IL SUO MODULO TC $\dot{\sigma} = 0$

$$D_a \underline{s} = \left(\underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{m}\right)\sigma$$

QUESTO È DIVERSO DAL VETTORE NULLO SOLO SE I DUE VETTORI NON SONO PARALLELI

ES È ORTOGONALE SIA A $\underline{\omega}_{b/a}$ CHE A $\underline{m}$

$$D_a \underline{s} \cdot \underline{m} = m \cdot \left(\underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{m}\right) \underline{s} = \underline{\emptyset}$$

IL VETTORE NON VARIA IN DIREZ $\underline{m}$ (INFATTI IL SUO MODULO È COSTANTE)

## DERIVATA DI UN VETTORE

(AQ 1)

$$\underline{s} = \underline{n}\,\sigma$$

MODULO

VERSORE

$\dot{\sigma} \geq 0 \quad \forall t$

$|\underline{n}(t)| = 1 \quad \forall t$

$$D_a \underline{s} = \sigma \underbrace{D_a \underline{n}}_{\text{PER DIRE DI PIÙ,}} + \underline{n} \underbrace{D_a \sigma}_{\text{UGUALE PER TUTTI I FRAME}} = \dot{\sigma}$$

$D_a \underline{n} = \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{n}$

(questa non è meccanica quantistica!)

$$D_a \underline{s} = \underline{n}\, D_a |\underline{s}| + \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s} + \sigma D_a \underline{n}$$

IL RISULTATO INDIVIDUA UNA COMPONENTE PARALLELA AL VETTORE E UNA ORTOGONALE AL VETTORE

(AQ 2) $$D_a \underline{s} = \underline{n}(\underline{n}\cdot) D_a \underline{s} + \left[ I_{3\times3} - \underline{n}(\underline{n}\cdot) \right] D_a \underline{s}$$

DOVE $(\underline{n}\cdot) = \underline{n}^T$

## DERIVATA DEL DISALIGNMENT VECTOR (DAD)

$$D_a \underline{\rho}_{b/a} = \left[ \underline{n}(\underline{n}\cdot) + N_a(\theta) \right] \underline{\omega}_{b/a}$$

DOVE $\underline{\rho}_{b/a} = \underline{n}\,\theta$

# FORMULE SULLE DERIVATE

(STREP) ① $\dot{{}^a_b R} = [{}^a\underline{\omega}_{b/a}]\, {}^a_b R$

② $\dot{{}^a_b R} = {}^a_b R\, [{}^b\underline{\omega}_{b/a}]$

NOTA: LA MATRICE DI ORIENTAZ HA DERIVATA UGUALE RISPETTO A QUALSIVOGLIA FRAME

$D_a\, {}^a\underline{s} = {}^a({}^bD_b\, \underline{s}) + {}^a({}^b\underline{\omega}_{b/a} \wedge {}^b\underline{s})$

(PROD DER) ${}^a\dot{\underline{s}} = {}^a({}^b\dot{s}) + {}^a({}^b\underline{\omega}_{b/a} \wedge {}^b\underline{s})$

${}^aD_a\underline{s}$

① $= \dots + {}^a[\underline{\omega}_{b/a} \wedge]\, {}^a_b R\, {}^b\underline{s}$

② $= \dots + {}^a_b R\, [{}^b\underline{\omega}_{b/a} \wedge]\, {}^b\underline{s}$

(RFC DER) $D_a\, \underline{s} = D_b\, \underline{s} + \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s}$

(RAY DER) $D_a\, \underline{r}_{P/b} = \overbrace{D_a\, \underline{r}_{b/a}}^{\text{COINCIDONO (O, PIACE)}} + D_b\, \underline{r}_{P/b} + \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{r}_{P/b}$

NON COINCIDONO (MA O, PIACE)

$(D_a\, \underline{r}_{b/a} + D_a\, \underline{r}_{P/b})$

(CONST DER) $\underline{s}$ DI MODULO COSTANTE

$D_a\, \underline{s} = \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s}$

(AOD 1) $D_a\, \underline{s} = \dot{\sigma}\, \underline{u} + \sigma D_a\, \underline{u}$

$\underline{s} = \underline{u}\, \sigma$ $\quad \underline{u} \parallel \underline{s}$ $\quad D_a\underline{u} \perp \underline{s}$

(AOD 2) $D_a\, \underline{s} = \underbrace{\underline{u}\,(\underline{u}\cdot)\, D_a\, \underline{s}}_{\underline{u}\cdot D_a\underline{s}} + [I - \underline{u}\,(\underline{u}\cdot)]\, D_a\, \underline{s}$

DOVE $\underline{s} = \underline{u}\, \sigma$

(DAD) $D_a\, \underline{\rho}_{b/a} = [\underline{u}\,(\underline{u}\cdot) + N_k(\theta)]\, \underline{\omega}_{b/a}$

$\underline{\rho}_{b/a} = \underline{u}\, \theta$

SIA LA DISTANZA TRA IL VINCOLO E IL PUNTO DA RAGGIUNGERE

$$d = \underbrace{(P - O_v)}_{\underline{r}} \cdot \underbrace{\frac{\underline{n}}{\underline{r}}}_{} = \underline{r} \cdot \underline{n}$$

SEMPRE ALLINEATO AL RAGGIO VETTORE E COSTANTE IN MODULO, $|\underline{n}| = 1$

$$\underline{n} = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}$$

$$\dot{d} = D_v \underline{r} \cdot \underline{n} + \cancel{\underline{r} \cdot \underbrace{D_v \underline{n}}} =$$

$D_v \underline{n} \perp \underline{n}$ PERCHÉ $\underline{n}$ NON PUÒ CAMBIARE IN MODULO

$$= D_v (P - O) \cdot \underline{n}$$

E DATO CHE $\underline{r} = \underline{n} d$ ALLORA

$D_v \underline{n} \perp \underline{r}$ DA CUI

$$\underline{r} \cdot D_v \underline{n} = 0$$

MEGLIO FARE I CONTI RISPETTO AL WORLD FRAME

$$\dot{d} = {}^w\underline{n} \cdot \left( {}^w\underline{v}_{p/v} - {}^w\underline{v}_{v/w} \right)$$

$${}^w\underline{v}_{p/v} = {}^w_vR \, {}^v\underline{v}_{p/v} + \left[ {}^w\underline{\omega}_{v/w} \wedge \right] {}^w_vR \, {}^v\underline{r}_{p/v}$$

$${}^w\underline{n} = {}^w_vR \frac{{}^v\underline{r}_{p/v}}{|{}^v\underline{r}_{p/v}|} \quad \text{IN CASO...}$$

$${}^w\underline{\jmath} = -({}^w\underline{n} \cdot) \left[ O_{3\times4} \,\vdots\, O_{3\times3} \,\vdots\, {}^w_vR \right] \in \mathbb{R}^{1\times13}$$

O ANCHE MEGLIO

RESTRINGO

$${}^w\underline{v}_{v/w} = {}^w_vR \, {}^v\underline{v}_{v/w} + \text{PARTE CHE COL } \cdot \text{ NON DARÀ}$$

$${}^w\underline{\jmath}$$

$$\dot{d} = {}^w\underline{n} \cdot \left( {}^w\underline{v}_{p/w} - {}^w\underline{v}_{v/w} \right) =$$

$$= {}^w(\underline{n} \cdot) \, {}^w\underline{v}_{p/w} \underbrace{- ({}^w\underline{n} \cdot) \left[ O_{3\times7} \,\vdots\, I_{3\times3} \,\vdots\, O_{3\times3} \right]}_{{}^w\underline{\jmath}} \begin{bmatrix} \dot{\underline{q}} \\ {}^w\dot{\eta}_c \\ {}^w\dot{\eta}_A \end{bmatrix}$$

# RACCOLGERE UNA CERTA ORIENTAZ

DATO UN GRAL FRAME $\langle g \rangle$
È POSSIBILE CALCOLARE IL DISALLINEAMENTO TRA $\langle v \rangle$ E $\langle g \rangle$

$$\underline{\xi}_{g/v} = \underline{\mu} \left| \underline{\xi}_{g/v} \right|$$

POSSO TROVARE LA METRICA DIRETTAMENTE DALLA CONFIGURAZ:

$$^{v}\dot{\underline{m}} = \underbrace{\left[ \mathbb{O}_{3\times 7} \,\vdots\, \mathbb{O}_{3\times 3} \,\vdots\, \underset{3\times 3}{\Sigma} \right]}_{^{v}\mathcal{J}} \begin{bmatrix} \dot{\underline{q}} \\ \dot{\eta}_L \\ \dot{\eta}_A \end{bmatrix}$$

$$^{w}\dot{\underline{m}} = \underbrace{\left[ \mathbb{O}_{3\times 7} \,\vdots\, \mathbb{O}_{3\times 3} \,\vdots\, {}^{w}_{v}R \right]}_{^{w}\mathcal{J}} \, ^{v}\mathcal{J}$$

METODO DEL PROF

NOTA CHE LA METRICA È STATA OTTENUTA DIRETTAMENTE GUARDANDO $^{v}\mathcal{J}$ E NON IL METODO "CLASSICO" (FORMULA UNA METRICA E DERIVALA)

# NOTAZIONI SULLE DERIVATE

SIA IL VETTORE (FFC) $\underline{s}(t)$ ARBITRARIO, $\underline{s}(t) = \underline{n}(t)\,\sigma(t)$

- $\underline{n}(t)$ VERSORE
- $\sigma(t) \geq 0 \quad \forall t$

$$\boxed{{}^a\dot{\underline{s}} = {}^aD_a\,\underline{s}}$$

VETTORE ① DERIVATO IN $\langle a \rangle$

② PROIETTATO IN $\langle a \rangle$

SCRITTURA "ELEMENTARE"

NOTE DEL PROF RIGUARDO QUESTA SCRITTURA.

① $${}^a\dot{s}(t) \neq {}^a_bR\;{}^b\dot{s}(t)$$

MA $${}^a({}^b\underline{s}(t)) = {}^a_bR\;{}^b\underline{s}(t)$$

SCRITTO ESPLICITAMENTE, $${}^a({}^b\dot{\underline{s}}(t)) = {}^a({}^bD_b\,\underline{s}(t)) = {}^a_bR\;{}^bD_b\,\underline{s}(t)$$

LA PRIMA NON HA SENSO PERCHÉ IMPLICHEREBBE UN CAMBIO DI FRAME DI DERIVAZIONE (È UN ABUSO DI NOTAZIONE).

② $${}^aD_b\,\underline{s}(t) \neq {}^a({}^bD_b\,\underline{s}(t))$$

QUESTO SI SPIEGA TENENDO PRESENTI DUE NOTAZIONI:

① ${}^a\dot{\underline{s}} = {}^aD_a\,\underline{s}$ QUELLA DATA SOPRA

② $D\,{}^a\underline{s} = {}^a\dot{\underline{s}}$ PIÙ SPECIFICA: $D({}^a\underline{s}) = D_a({}^a\underline{s}) = {}^aD_a\,\underline{s}$

$= D({}^a\underline{s})$ QUESTA DERIVATA È SOTTINTESA ESSERE FATTA RISPETTO AD $\langle a \rangle$

QUINDI NON C'È A PRIORI NULLA DI SBAGLIATO NELLO SCRIVERE LA SEGUENTE:

$$ {}^a\dot{s} = \overset{{}^aD_a \underline{s}}{D_a({}^a\underline{s})} = D({}^a_bR\,{}^b\underline{s}) = D_a({}^a_bR\,{}^b\underline{s}) $$

QUESTA NOTAZIONE CORRISPONDE A UNIRE A PORTARE LA MATRICE DI ORIENTAZIONE SOTTO SEGNO DI DERIVATA!

QUINDI $ {}^aD_b\,\underline{s} \neq {}^a({}^bD_b\,\underline{s}) $

$$ = D_b(\underbrace{{}^a_bR^T}\,{}^a\underline{s}) \qquad = \underbrace{{}^a_bR\,D_b}({}^b\underline{s}) $$

# RIASSUMENDO – NOTAZIONI PER LE DERIVATE

OGNI NOTAZIONE ESPLICITA IL RAGIONAMENTO USATO PER OTTENERE LA DERIVATA INDICATA.

1. $^{a}D_{a}\underline{s}$ PRENDI IL FFC VECTOR $\underline{s}$
DERIVALO RISPETTO AD $\langle a \rangle$
E PROIETTALO RISPETTO AD $\langle a \rangle$

2. $^{a}\dot{\underline{s}} = {}^{a}D_{a}\underline{s}$ IN MANIERA PIÙ SINTETICA LA (1)

3. $D_{a}(^{a}\underline{s})$ PRENDI $\underline{s}$
PROIETTA IN $\langle a \rangle$
DERIVA LA PROJ RISPETTO AD $\langle a \rangle$

4. $^{a}D_{a}\underline{s} = D_{a}(^{a}s)$
E $^{a}D_{b}\underline{s} = D_{b}(^{a}\underline{s}) = D_{b}({}^{a}_{b}R\,{}^{b}\underline{s})$

5. $^{a}(^{b}\dot{\underline{s}}(t)) = {}^{a}_{b}R\,{}^{b}\dot{\underline{s}}(t)$

6. $^{a}D\,^{b}\underline{s} = {}^{a}_{b}R\,{}^{b}D_{b}\underline{s} = {}^{a}(^{b}\dot{\underline{s}}(t))$
OGNI TANTO SI TROVA ANCHE LA SCRITTURA
$D\,^{b}\underline{s} = {}^{b}D_{b}\underline{s} = D_{b}(^{b}\underline{s})$

7. $D_{a}\underline{s} \neq D\,^{a}\underline{s}$ PERCHÉ LA PRIMA È UNA FORMA FFC, LA SECONDA È UNA PROJ FORM.

# RAGIONAMENTI "STRANI" CON LE DERIVATE

SIA $\underline{s}$ UN VETTORE RFC,

$\underline{s} \rightsquigarrow {}^a\underline{s}$ PER FORMULAZIONE DIRETTA (MAPPA IN $\langle a \rangle$)

$\underline{s} \rightsquigarrow {}^b\underline{s}$ PER FORMULAZIONE DIRETTA (MAPPA IN $\langle b \rangle$)

TRA LE DUE PROIEZIONI VIGE LA REGOLA:

$$ {}^a\underline{s} = {}^a_bR\, {}^b\underline{s} \quad \text{E} \quad {}^b\underline{s} = {}^a_bR^T\, {}^a\underline{s} $$

DATA TRA I FRAME $\langle a \rangle$ E $\langle b \rangle$ UNA MATRICE DI ORIENTAZIONE ${}^a_bR$.

CONSIDERIAMO ORA LA DERIVATA:

"$D\underline{s}$" CHI È IL FRAME CHE DERIVA? BOH.

CHI È IL FRAME DI PROIEZIONE? NESSUNO.

QUESTA NOTAZIONE NON HA SENSO. PER FARE UNA DERIVATA CI VUOLE UN OSSERVATORE, SEMPRE.

DATI $\langle a \rangle$ E $\langle b \rangle$ ESISTONO $D_a\underline{s}$ E $D_b\underline{s}$ MA NON $D\underline{s}$.

$$ D_a\underline{s} \rightsquigarrow D_a\, {}^a\underline{s} \qquad {}^aD_a\underline{s} $$

ASSEGNAZIONE DIRETTA DI UN FRAME

$$ D_a\underline{s} \rightsquigarrow D_a\, {}^b\underline{s} = D_a\left({}^b_aR\, {}^a\underline{s}\right) = $$

$$ = D_a\left({}^b_aR\right){}^a\underline{s} + {}^b_aR\, D_a\left({}^a\underline{s}\right) $$

$$ = {}^b_aR\left[{}^a\underline{\omega}_{a/w} \wedge\right]{}^a\underline{s} + {}^b_aR\, {}^a\dot{\underline{s}} = $$

$$ = {}^b\left({}^a\underline{\omega}_{a/b} \wedge {}^a\underline{s} + {}^a\dot{\underline{s}}\right) = D_b\, {}^b\underline{s} $$

${}^bD_a\underline{s}$

LA REGOLA SCRITTA NEL PRECEDENTE SOMMARIO:

$$D_a\left({}^a\underline{s}\right) = {}^a\left({}^b\dot{\underline{s}} + {}^b\underline{\omega}_{b/a} \wedge {}^b\underline{s}\right)$$

AVREI POTUTO USARE <C> E NULLA SAREBBE CAMBIATO POICHÉ NON C'È LEGAME TRA I DUE TERMINI

QUELLA CHE HO TROVATO IO:

$$\boxed{D_a\, {}^b\underline{s} = D_b\, {}^b\underline{s}}$$

$$\cancel{D_a\left({}^b\underline{s}\right) = {}^b\left({}^a\dot{\underline{s}} + {}^a\underline{\omega}_{a/b} \wedge {}^a\underline{s}\right)}$$

$$\cancel{D_b\left({}^a\underline{s}\right) = {}^a\left({}^b\dot{\underline{s}} + {}^b\underline{\omega}_{b/a} \wedge {}^b\underline{s}\right)}$$

PERCHÉ IL TEMPO È LO STESSO PER OGNI FRAME E ${}^b\underline{s}(t)$ È UN VETTORE NUMERICO NON GEOMETRICO.

L'ALTRA REGOLA CON PPC:

$$D_a\,\underline{s} = D_b\,\underline{s} + \omega_{b/a} \wedge \underline{s}$$

DEDOTTA... COME?

$$D_a\,\underline{s} = D_b\,\underline{s}$$

$$D_a\left({}^a\underline{s}\right) = D_a\left({}^a_bR\,{}^b\underline{s}\right) =$$

$$= D_a\left({}^a_bR\right){}^b\underline{s} + {}^a_bR\, D_a\, {}^b\underline{s}$$

???

$$D_a\left({}^a_bR\right) = D_b\left({}^a_bR\right)$$

PERCHÉ IL FRAME DERIVATORE CAMBIA???

Let us now formally derive the correct relationship between the two time derivatives. Let us consider the time derivative of the projected vector ${}^a\boldsymbol{s}(t)$, but this time let us express it as the result of the projection on frame $\langle a\rangle$ of ${}^b\boldsymbol{s}(t)$, that is:

$${}^a\dot{\boldsymbol{s}}(t) = D^a\boldsymbol{s}(t) = D\left({}^a_b\boldsymbol{R}\,{}^b\boldsymbol{s}(t)\right) = {}^a_b\boldsymbol{R}\left(D^b\boldsymbol{s}(t)\right) + {}^a_b\dot{\boldsymbol{R}}\,{}^b\boldsymbol{s}(t) = {}^a_b\boldsymbol{R}\,{}^b\dot{\boldsymbol{s}}(t) + {}^a_b\dot{\boldsymbol{R}}\,{}^b\boldsymbol{s}(t), \tag{2.62}$$

$${}^aD_a\,\underline{s} = D_{??}\left({}^a_bR\,{}^b\underline{s}\right) = {}^a_bR\, D_b\left({}^b\underline{s}\right) + \ldots$$

???

$$D_a({}^a\underline{s}) = D_a({}^a_bR\,{}^b\underline{s}) \begin{cases} ① = {}^a_bR\,D_a\,{}^b\underline{s} + {}^a_bR[\omega_{b/a}\wedge]\,{}^b\underline{s} \\ ② \quad {}^a_bR\,D_b\,{}^b\underline{s} + {}^a_bR[\omega_{b/a}\wedge]\,{}^b\underline{s} \end{cases}$$

PFC: $D_a\,\underline{s} = D_b\,\underline{s}$

QUINDI $D_a\,{}^a\underline{s} = \underset{①}{D_a({}^a_bR\,{}^b\underline{s})} \overset{??}{=} \underset{②}{D_b({}^a_bR\,{}^b\underline{s})}$

$$D_a\,{}^b\underline{s} \overset{?}{=} D_b\,{}^b\underline{s}$$

① $D_a\,\underline{s} = D_b\,\underline{s} + \underline{\omega}_{b/a}\wedge\underline{s}$

② ${}^a(D_a\,\underline{s}) = {}^a(D_b\,\underline{s} + \underline{\omega}_{b/a}\wedge\underline{s}) =$

$= D_a\,{}^a\underline{s}$

$= {}^a(D_b\,\underline{s}) + {}^a(\underline{\omega}_{b/a}\wedge\underline{s}) =$

$= {}^a(D_b\,{}^b\underline{s}) + {}^a_bR[{}^b\underline{\omega}_{b/a}\wedge]\,{}^b\underline{s}$

$$D_b({}^a\underline{s}) = D_b({}^a_b R\, {}^b\underline{s}) = \qquad D_a({}^b\underline{s}) = {}^b_a R\left[{}^a\underline{\omega}_{a/b} \wedge\right]{}^b\underline{s} + {}^b_a R\, D_a({}^a\underline{s})$$

$$= D_b({}^a_b R)\,{}^b\underline{s} + {}^a_b R\, D_b({}^b\underline{s})$$

$$= {}^a_b R\left[{}^b\underline{\omega}_{b/a} \wedge\right]{}^b\underline{s} + {}^a_b R\, D_b({}^b\underline{s}) \quad *$$

$$D_b({}^a\underline{s}) = D_b({}^b_a R\, {}^a\underline{s}) =$$

$$= D_a({}^b_a R)\,{}^a\underline{s} + {}^b_a R\, D_b({}^a\underline{s}) =$$

$$= {}^b_a R\left[{}^a\underline{\omega}_{a/b} \wedge\right]{}^a\underline{s} + {}^b_a R\, \overbrace{D_b({}^a\underline{s})}^{*} =$$

$$= \underbrace{{}^b_a R\left[{}^a\underline{\omega}_{a/b} \wedge\right]{}^a\underline{s}}_{= {}^b(\underline{\omega}_{a/b} \wedge \underline{s})} + {}^b_a R\left[{}^a_b R\underbrace{\left[{}^b\underline{\omega}_{b/a} \wedge\right]{}^b\underline{s}}_{= {}^b(\underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s})} + {}^a_b R\, D_b({}^a\underline{s})\right] = X$$

$$\underline{\omega}_{a/b} = -\underline{\omega}_{b/a}$$

$$X = -\cancel{{}^b(\underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s})} + \cancel{{}^b(\underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s})} + D_b({}^a\underline{s}) =$$

$$= D_b({}^a\underline{s}) \qquad \text{ovvero} \qquad D_b({}^b\underline{s}) = D_b({}^a\underline{s})$$

ok!

$$D_b({}^a\underline{s}) = {}^a_b R\left[{}^b\underline{\omega}_{b/a}\wedge\right]{}^b\underline{s} + {}^a_b R\, D_b({}^b\underline{s}) \quad (B)$$

$$D_b({}^b\underline{s}) = {}^b_a R\left[{}^a\underline{\omega}_{a/b}\wedge\right]{}^a\underline{s} + {}^b_a R\, D_b({}^a\underline{s}) \quad (B)$$

$$D_a({}^b\underline{s}) = {}^b_a R\left[{}^a\underline{\omega}_{a/b}\wedge\right]{}^a\underline{s} + {}^b_a R\, D_a({}^a\underline{s}) \quad (A)$$

$$D_a({}^a\underline{s}) = {}^a_b R\left[{}^b\underline{\omega}_{b/a}\wedge\right]{}^b\underline{s} + {}^a_b R\, D_a({}^b\underline{s}) \quad (A)$$

(A) $D_a({}^b\underline{s}) = D_a({}^a\underline{s})$

(B) $D_b({}^a\underline{s}) = D_b({}^b\underline{s})$

$$D_a({}^a\underline{s}) = D_b({}^a\underline{s})$$

SONO UGUALI
QUINDI DALL'UGUAGLIANZA SI
ELIMINANO

$$D_a({}^a\underline{s}) = {}^a_b R\left[{}^b\underline{\omega}_{b/a}\wedge\right]{}^b\underline{s} + {}^a_b R\, D_a({}^b\underline{s})$$

$$D_b({}^a\underline{s}) = {}^a_b R\left[{}^b\underline{\omega}_{b/a}\wedge\right]{}^b\underline{s} + {}^a_b R\, D_b({}^b\underline{s})$$

FATTOR COMUNE

PERÒ CASÌ FACENDO
DOVREI DIMOSTRARE

$$D_b({}^b\underline{s}) = D_b({}^a\underline{s})$$

$D_a({}^b\underline{s}) = D_b({}^a\underline{s})$ ... CICLO

SEGUE INNOVARE

$$D_b({}^a\underline{s}) = {}^a_b R\left[{}^b\underline{u}_{A/a}\Lambda\right]{}^b\underline{s} + {}^a_b R\, D_b({}^b\underline{s}) \quad (B)1$$

$$D_b({}^b\underline{s}) = {}^b_a R\left[{}^a\underline{u}_{a/b}\Lambda\right]{}^a\underline{s} + {}^b_a R\, D_b({}^a\underline{s}) \quad (B)2$$

$$D_a({}^b\underline{s}) = {}^b_a R\left[{}^a\underline{u}_{a/b}\Lambda\right]{}^a\underline{s} + {}^b_a R\, D_a({}^a\underline{s}) \quad (A)1$$

$$D_a({}^a\underline{s}) = {}^a_b R\left[{}^b\underline{u}_{b/a}\Lambda\right]{}^b\underline{s} + {}^a_b R\, D_a({}^b\underline{s}) \quad (A)2$$

DEVO DIMOSTRARE $D_a({}^a\underline{s}) = D_b({}^a\underline{s})$

$$D_a({}^a\underline{s}) = {}^a_b R\left[{}^b\underline{u}_{b/a}\Lambda\right]{}^b\underline{s} + {}^a_b R\, D_a({}^b\underline{s}) \quad (A2)$$

NOTA: $${}^a_b R\left[{}^b\underline{u}_{A/a}\Lambda\right]{}^b\underline{s} = D_b({}^a\underline{s}) - {}^a_b R\, D_b({}^b\underline{s}) \quad (B1)$$

LA (A2) SI PUÒ RIELABORARE ALLO STESSO MODO,

$$D_a({}^a\underline{s}) - {}^a_b R\, D_a({}^b\underline{s}) = D_b({}^a\underline{s}) - {}^a_b R\, D_b({}^b\underline{s})$$

ABBIAMO DIMOSTRATO PRIMA CHE

$$D_a({}^a\underline{s}) = D_a({}^b\underline{s}) \quad \text{E} \quad D_b({}^b\underline{s}) = D_b({}^a\underline{s})$$

SI DEDUCE QUINDI CHE

$$\left[I - {}^a_b R\right] D_a({}^b\underline{s}) = \left[I - {}^a_b R\right] D_b({}^a\underline{s})$$

QUINDI $D_a({}^b\underline{s}) = D_b({}^a\underline{s})$

$$ {}^a_b\dot{R} = \left[{}^a\underline{\omega}_{b/a} \wedge\right] {}^a_bR = {}^a_bR\left[{}^b\underline{\omega}_{b/a} \wedge\right] $$

$$ {}^b_a\dot{R} = \left[{}^b\underline{\omega}_{a/b} \wedge\right] {}^b_aR = $$

$$ = -\left[{}^b\underline{\omega}_{b/a} \wedge\right] {}^b_aR = $$

$$ = -\underbrace{{}^a_bR\left[{}^b\underline{\omega}_{b/a} \wedge\right]}_{{}^a_b\dot{R}} {}^b_aR = $$

$$ = -{}^a_b\dot{R}\,{}^a_bR^T $$

$\underline{s}$ FFC VECTOR

$$ {}^a\underline{s} = {}^a(\underline{s}) $$

ASSEGNAZIONE DI UN FRAME AL VETTORE FFC $\underline{s}$

$$ {}^a_b\dot{R} = \left[{}^a\underline{\omega}_{b/a} \wedge\right] {}^a_bR $$

$$ {}^b_a\dot{R} = -{}^a_b\dot{R}\,{}^a_bR^T $$

① $ {}^a\underline{u} \cdot {}^a\underline{v} = ({}^a\underline{u} \cdot){}^a\underline{v} $

DOVE $\bullet$ DENOTA LA TRASPOSTA DEL VETTORE

② CLASSICO

$$ {}^a\underline{u} \cdot {}^a\underline{v} = {}^a\underline{u}^T\,{}^a\underline{v} $$

$\underline{u}, \underline{v}$ FFC VECTORS

$$ d = \underline{u} \cdot \underline{v} = {}^a(\underline{u} \cdot \underline{v}) $$

$\forall a \in \mathcal{A}$

$\underline{u}, \underline{v}$ FFC VECTORS

$$ {}^a(\underline{u} \wedge \underline{v}) = {}^a(\underline{u}) \wedge {}^a(\underline{v}) $$

$$ {}^a(\underline{u} \cdot \underline{v}) = {}^a(\underline{u}) \cdot {}^a(\underline{v}) $$

SULLE ASSEGNAZIONI HO PIENA LIBERTÀ IN BASE A QUANTO MI VIENE PIÙ COMODO

ES: ${}^a(\underline{u}) = {}^a\underline{u}$ NEL CASO DISPONESSI DI UNA PROIEZIONE GIÀ PRONTA DEL VETTORE

ES: ${}^a(\underline{u}) = {}^a({}^b\underline{u}) = {}^a_bR\,{}^b\underline{u}$ NEL CASO DISPONESSI DI UN'ALTRA PROIEZIONE.

$$ {}^a(\underline{u} \wedge \underline{v}) = {}^a(\underline{u}) \wedge {}^a(\underline{v}) = $$

(INUTILE MA CHIARISCE) $\rightarrow$ $= {}^a\underline{u} \wedge {}^a(\underline{v}) =$

$$ = \left[{}^a\underline{u} \wedge\right] {}^a(\underline{v}) $$

DOVE

$$ {}^a\underline{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \left[{}^a\underline{u} \wedge\right] = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^a\underline{u} \wedge {}^a\underline{v} = $$

$$ = {}^a(\underline{u}) \wedge {}^a(\underline{v}) $$

$$ = {}^a(\underbrace{\underline{u} \wedge \underline{v}}_{\text{FFC}}) $$

PROJ SN

$$ \{a\} \xrightarrow{{}^a_b R} \{b\} $$

$$ \left[{}^a\underline{u} \wedge\right] = {}^a_b R \left[{}^b\underline{u} \wedge\right] $$

$D\,\underline{s}$ o ANCHE $\frac{d}{dt}\underline{s}$

$\underline{s}$ FFC VETTORE

$$ D_a\,\underline{s} \neq D_b\,\underline{s} $$

$x$ SCALARE

$$ D\,x = D_a\,x = D_b\,x = \ldots $$

$\langle a \rangle$ FRAME OSSERVATORE

$\underline{s}$ RFC VECTOR

NOTA: ${}^a\underline{s} = {}^a(\underline{s})$

- $D_a({}^a\underline{s})$ DENOTA LA DERIVATA DELLA PROIEZIONE DI $\underline{s}$ IN $\langle a \rangle$

ALTRA NOTAZ: $D_a({}^a\underline{s}) = D_a\,{}^a(\underline{s})$

- ${}^aD_a\,\underline{s}$ DENOTA L'ASSEGNAZIONE DEL FRAME $\langle a \rangle$ ALLA DERIVATA RFC DI $\underline{s}$

ALTERNATIVA: ${}^aD_a\,\underline{s} = {}^a(D_a\,\underline{s})$

CHIARISCE IL FATTO CHE STIAMO ASSEGNANDO IL FRAME PIÙ CHE PROIETTANDO

- ${}^a\dot{\underline{s}} = D_a({}^a\underline{s})$ NOTAZIONE COMPATTA TIPICA

$$ {}^{a}\dot{\underline{s}}(t) \neq {}^{a}_{b}R\, {}^{b}\dot{\underline{s}}(t) $$

ESPLICITAMENTE

$$ {}^{a}D_{a}\,\underline{s} \neq {}^{a}_{b}R\, {}^{b}D_{b}\,\underline{s} $$

??? 

$$ {}^{b}({}^{a}\underline{s}) \qquad {}^{b}_{a}R $$

AL DI FUORI DEL SEGNO DI DERIVATA

$$ {}^{a}\dot{\underline{s}} = D_{a}({}^{a}\underline{s}) $$

L'UNICO MODO PER INTRODURRE ${}^{a}_{b}R$ È DENTRO AL SEGNO DI DERIVATA CON

$$ {}^{a}\underline{s} = {}^{a}_{b}R\, {}^{b}\underline{s} $$

$$ \underline{v}_{P/a} = \underline{v}_{b/a} + \underline{v}_{P/b} + \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{r}_{P/b} $$

$$ P = O_a \rightsquigarrow \underline{v}_{a/a} = 0 = \underline{v}_{b/a} + \underline{v}_{a/b} + \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{r}_{a/b} $$

$$ \underline{v}_{a/b} = -\underline{v}_{b/a} - \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{r}_{a/b} $$

$$ \underline{v}_{P/0} = \underline{v}_{P/1} + \underline{v}_{1/0} + \underline{\omega}_{1/0} \wedge \underline{r}_{P/1} $$

$P = 2$

0 DA 1

$$ \underline{v}_{2/0} = \underline{v}_{2/1} + \underline{v}_{1/0} + \underline{\omega}_{1/0} \wedge \underline{r}_{2/1} $$

$$ \underline{v}_{P/0} = \underline{v}_{P/2} + \underline{v}_{2/0} + \underline{\omega}_{2/0} \wedge \underline{r}_{P/2} $$

0 DA 2 $\quad P = 3$

$$ \underline{v}_{3/0} = \underline{v}_{3/2} + \underline{v}_{2/0} + \underline{\omega}_{2/0} \wedge \underline{r}_{1/2} = $$

$$ = \underline{v}_{3/2} + \underline{v}_{2/1} + v_{1/0} + \underline{\omega}_{2/0} \wedge \underline{r}_{3/2} + \underline{\omega}_{1/0} \wedge \underline{r}_{2/1} $$

$$ {}^a\dot{\underline{s}} = D_a({}^a\underline{s}) = $$ SUPPONIAMO ${}^a\underline{s} = {}^a({}^b\underline{s})$

$$ = D_a({}^a_bR\,{}^b\underline{s}) = $$ REGOLA DEL PRODOTTO

$$ = {}^a_b\dot{R}\,{}^b\underline{s} + {}^a_bR\,D_a({}^b\underline{s}) = $$

SAPENDO CHE ${}^a_b\dot{R} = [{}^a\underline{\omega}_{b/a} \wedge]\,{}^a_bR$

$$ = {}^a(\underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s}) + {}^a(D_a({}^b\underline{s})) $$

$$ D_a({}^a\underline{s}) = {}^a(D_a({}^b\underline{s})) + {}^a(\underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s}) $$

$$ D_b({}^b\underline{s}) = {}^b(D_b({}^a\underline{s})) + {}^a(\underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s}) $$

$$ D_a({}^b\underline{s}) = D_a({}^a\underline{s}) $$

$$ \begin{cases} \underline{\omega}_{i/0} = \underline{\omega}_{i/i-1} + \underline{\omega}_{i-1/0} \\ \underline{\omega}_{0/0} = \underline{0} \end{cases} $$

$$ \underline{\omega}_{a/b} = -\underline{\omega}_{b/a} $$

$$ \underline{\omega}_{2/0} = \underline{\omega}_{2/1} + \omega_{1/0} $$

$$ \underline{\omega}_{n/0} = \sum_{i=1}^{n} \underline{\omega}_{i/i-1} $$

$$D_a({}^b\underline{s}) = D_a({}^b_aR\,{}^a\underline{s})$$ REGOLA DEL PRODOTTO,

$$= {}^b_a\dot{R}\,{}^a\underline{s} + {}^b_aR\,D_a({}^a\underline{s})$$ APPLICO LA STREP ${}^b_a\dot{R} = [{}^b\omega_{a/b}\wedge]\,{}^b_aR$

$$= {}^b(\underline{\omega}_{a/b}\wedge\underline{s}) + {}^b({}^a\dot{\underline{s}})$$

$$D_a({}^b\underline{s}) = {}^b({}^a\dot{\underline{s}}) + {}^b(\underline{\omega}_{a/b}\wedge\underline{s})$$

$$D_b({}^a\underline{s}) = {}^a({}^b\dot{\underline{s}}) + {}^a(\underline{\omega}_{b/a}\wedge\underline{s})$$

$$D_a({}^a\underline{s}) = D_b({}^a\underline{s})$$

$$D_a({}^a\underline{s}) = {}^a(D_a({}^b\underline{s})) + {}^a(\underline{\omega}_{b/a}\wedge\underline{s}) =$$

$$= {}^a({}^b(D_a({}^a\underline{s})) + {}^b(\underline{\omega}_{a/b}\wedge\underline{s})) + {}^a(\underline{\omega}_{b/a}\wedge\underline{s}) =$$

$$= D_a({}^a\underline{s}) + {}^a(\underline{\omega}_{a/b}\wedge\underline{s}) + {}^a(\underline{\omega}_{b/a}\wedge\underline{s}) =$$

$$= D_a({}^a\underline{s}) - {}^a(\underline{\omega}_{b/a}\wedge\underline{s}) + {}^a(\underline{\omega}_{b/a}\wedge\underline{s}) = D_a({}^a\underline{s})$$

$$\underline{\omega}_{3/0} = \underline{\omega}_{3/2} + \underline{\omega}_{2/1} + \underline{\omega}_{1/0}$$

$$= \underline{\omega}_{3/2} - \omega_{1/2} + \underline{\omega}_{1/0}$$

$$D_a({}^a\underline{s}) = {}^a(D_a({}^b\underline{s})) + \boxed{{}^a(\underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s})}$$

$$D_b({}^a\underline{s}) = {}^a({}^b\dot{\underline{s}}) + \boxed{{}^a(\underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s})}$$

NOTA CHE QUESTO APPARE È COMUNE ALLE DUE VELOCITÀ

$$D_a({}^a\underline{s}) - {}^a(D_a({}^b\underline{s})) = D_b({}^a\underline{s}) - {}^a(D_b({}^b\underline{s}))$$

$$D_a({}^a\underline{s}) - {}^a_bR\,\underbrace{D_a({}^b\underline{s})}_{=D_a({}^a\underline{s})} = D_b({}^a\underline{s}) - {}^a_bR\,\underbrace{D_b({}^b\underline{s})}_{=D_b({}^a\underline{s})}$$

$$\left[\underset{3\times3}{I} - \cancel{{}^a_bR}\right] D_a({}^a\underline{s}) = \left[\underset{3\times3}{I} - \cancel{{}^a_bR}\right] D_b({}^a\underline{s})$$

$$D_a({}^a\underline{s}) = D_b({}^a\underline{s})$$

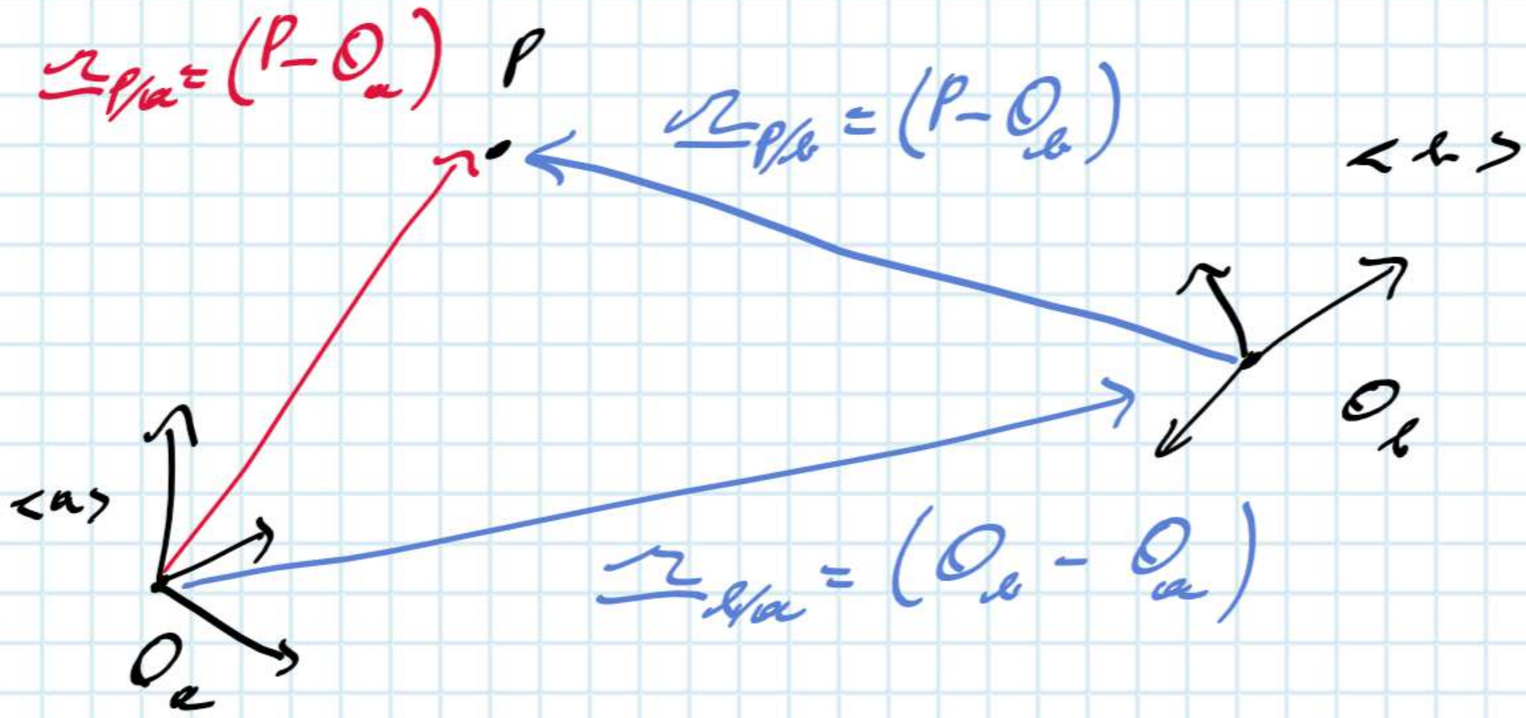
$${}^a\dot{\underline{s}} = {}^a({}^b\dot{\underline{s}}) + {}^a(\underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s})$$

$$D_a\underline{s} = D_b\underline{s} + \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s}$$

$$D_a \underline{r}_{P/a} = D_a \underline{r}_{b/a} + D_b \underline{r}_{P/b} + \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{r}_{P/b}$$

осечно! <b>

$$\underline{v}_{P/a} = \underline{v}_{b/a} + \underline{v}_{P/b} + \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{r}_{P/b}$$




$$\underline{v}_{M/O} = \sum_{i=1}^{n} \left( \underline{v}_{i/i-1} + \underline{\omega}_{i/i-1} \wedge \underline{r}_{M/i} \right)$$

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} \underline{q} \\ \underline{\eta}_L \\ \underline{\eta}_A \end{bmatrix}$$

$\underline{q}$ : ALTRI DOF DEL SISTEMA

$$\underline{\eta}_L = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ POSIZIONE

$$\underline{\eta}_A = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}$$ ORIENTAZIONE

$\underline{x}(\underline{c})$ METRICA

$$\dot{\underline{x}}(\underline{c}) = \underline{f} + J_x \dot{\underline{c}}$$

DOVUTA AD AZIONE ESTERNA

TASK JACOBIAN (DOVUTA ALLA VARIAZ DELLA CONFIGURAZIONE)

$$\underline{m}_x := \lambda_x (\hat{\underline{x}} - \underline{x})$$

$\hat{\underline{x}}$ IL "TARGET"
IL VALORE CHE LA METRICA DOVREBBE RAGGIUNGERE

$\underline{x}$ IL VALORE ATTUALE DELLA METRICA

$\lambda_x$ UN PESO CHE AUMENTA O RIDUCE IL VALORE DELLA DIFFERENZA

$$\underline{m}_x = \lambda \Delta x \qquad \dot{\underline{x}} = J_x \dot{\underline{c}}$$

PER CONTROLLARE LA METRICA SI IMPONE

$\dot{\underline{x}} = \underline{m}_x$ DA CUI

$$J_x \dot{\underline{c}} = \lambda \Delta \underline{x}$$

$$\dot{\underline{c}} = \lambda J_x^{\#} \Delta \underline{x}$$

$$\underline{m}_x = \lambda \Delta \underline{x} \qquad \dot{\underline{x}} = f + J_x \dot{\underline{q}}$$

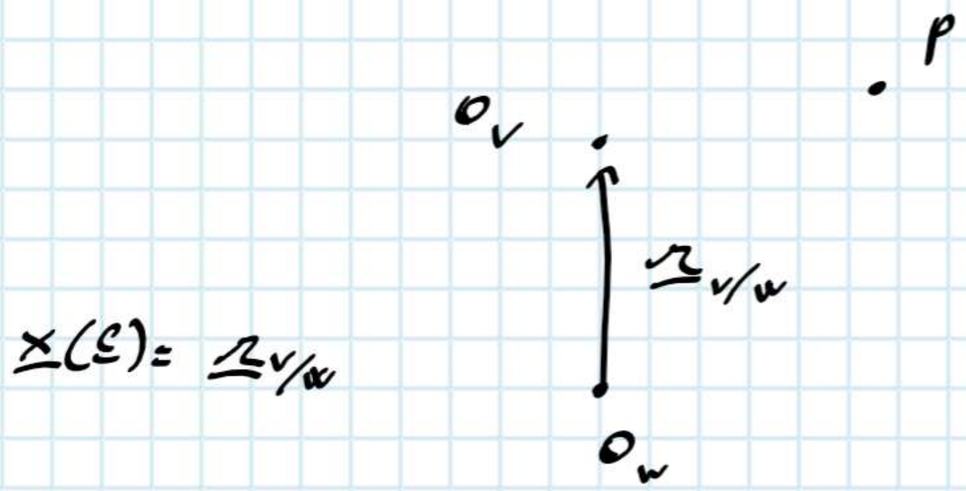
$$\downarrow$$

$$\dot{\underline{x}} - f = J_x \dot{\underline{q}}$$

QUELLO CHE SI FA:

$$\underline{m}_x = \dot{\underline{x}} - f$$

DA CUI (... COME PRIMA)




$$\underline{x}(\underline{q}) = \underline{r}_{v/w}$$

$$\dot{\underline{x}} = \dot{\underline{r}}_{v/w} = \underline{v}_{v/w}$$

GUARDA $\dot{\underline{q}}$ ...

$$^v\dot{\underline{x}} = {}^v\underline{v}_{v/w} = \underbrace{\left[\emptyset \;\vdots\; \underset{3\times3}{I} \;\vdots\; \emptyset\right]}_{^vJ_x} \begin{bmatrix} \dot{\underline{q}} \\ {}^v\underline{v}_{v/w} \\ {}^v\dot{\underline{\eta}}_{v/w} \end{bmatrix}$$

$$^w\dot{\underline{x}} = {}^w\left({}^v\underline{v}_{v/w}\right) = {}^w_vR\, {}^v\underline{v}_{v/w}$$

DA CUI $\quad {}^wJ_x = \left[0 \;\vdots\; {}^w_vR \;\vdots\; 0\right]$

$$\underline{m}_x = \lambda_x \left(\underline{r}_{p/w} - \underline{r}_{v/w}\right)$$

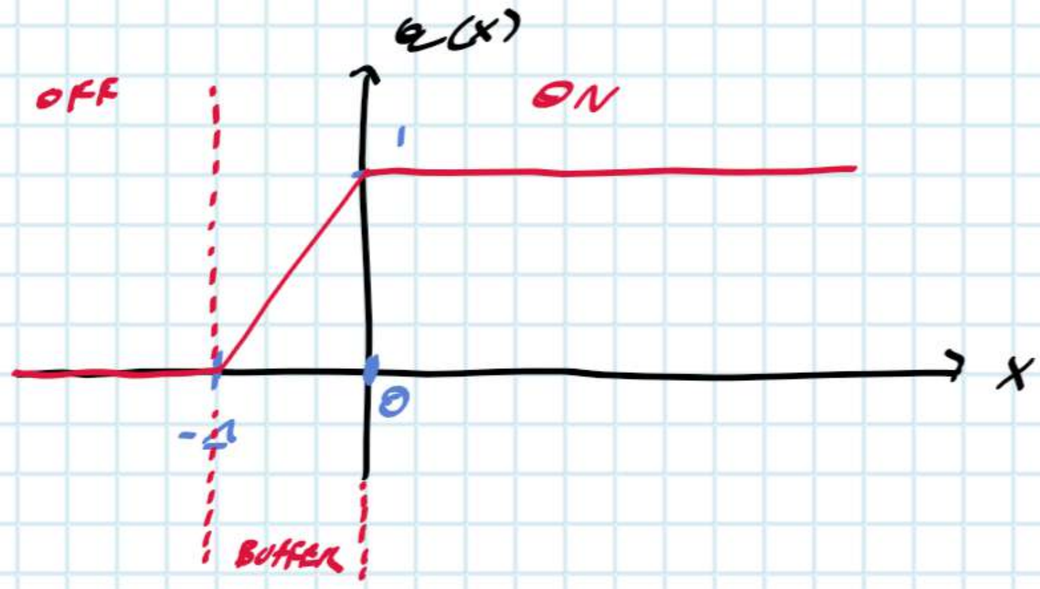
$\downarrow$ PROIETTA IN $\langle w \rangle$

$$^w\underline{m}_x = \lambda_x \left({}^w\underline{r}_{p/w} - {}^w\underline{r}_{v/w}\right)$$

$$a(x) = \begin{cases} 0 & x \le -\Delta \\ \frac{x+\Delta}{\Delta} & x \in [-\Delta, 0] \\ 1 & x \ge 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{H}_{x<3}(x) = a(x-3)$$

$$\mathcal{H}_{x>6}(x) = a(6-x)$$



# HORIZONTAL ATTITUDE

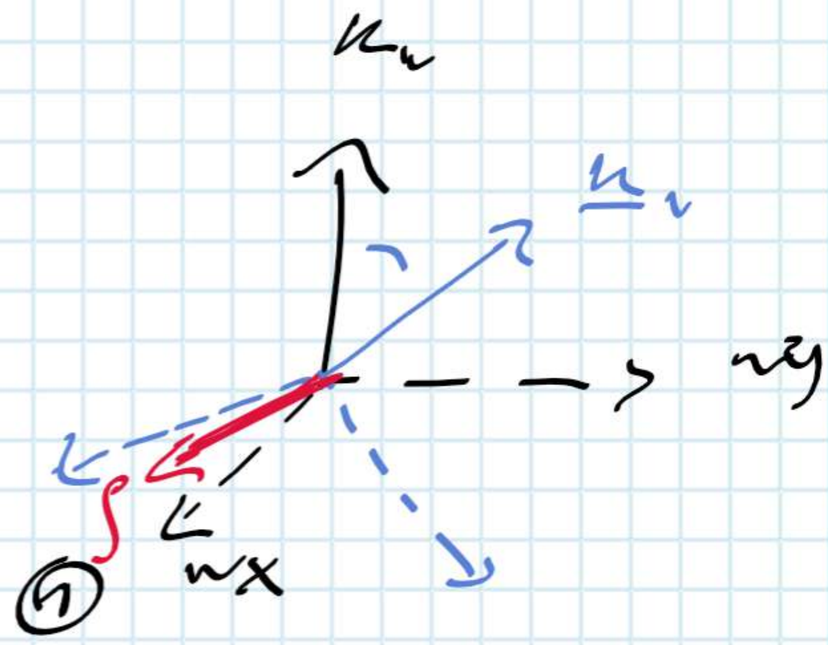
- SFRUTTIAMO IL FATTO CHE $\langle w \rangle$ NON CAMBIA ORIENTAZ

SENSO VERTICALE $\rightsquigarrow$ $\underline{k}_w$

$$|\underline{\rho}_{v/w}| = |\underline{m}\,\theta| = |\underline{m}|\,|\theta|$$

$$\dot{\underline{\rho}}_{v/w} = \overbrace{\left[m(m\cdot) + N(\theta)\right]\underline{\omega}_{v/w}}^{\text{COMPON. PARALLELA}}$$

$$x = \theta$$




$$\dot{x} = \dot{\theta} = {}^w\underline{m} \cdot {}^w\underline{\omega}_{v/w}$$

$$\underline{m}_\theta = \dot{x}$$

$$= \lambda_\theta(\bar{\theta} - \theta) = -\lambda_\theta \theta$$

(zero!)

$$^w\underline{m} = \frac{{}^w\underline{\rho}_{v/w}}{|{}^w\underline{\rho}_{v/w}|}$$

$$\theta = \left|\frac{{}^w\underline{\rho}_{v/w}}{\underline{n}}\right|$$

FUNZIONA? PROVARE.

② $\underline{m} = \underline{k}_v \wedge \underline{k}_w$

$$\dot{x} = \left(\underline{k}_v \wedge \underline{k}_w\right) \cdot \underline{\omega}_{v/w}$$

$$^w\dot{x} = {}^w\left(\underline{k}_v \wedge \underline{k}_w\right) \cdot {}^w\underline{\omega}_{v/w}$$

$$^v\underline{k}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad {}^w\underline{k}_w$$

$$^w\underline{k}_v = {}^w_vR\,{}^v\underline{k}_v \qquad {}^w_vR\,{}^v\underline{\omega}_{v/w}$$

$$= \left[\underbrace{\left({}^w_vR\left[{}^v\underline{k}_v\wedge\right]\right)}_{3\times3}\underbrace{{}^w\underline{k}_w}_{3\times1}\right]\left(\underbrace{{}^w_vR}_{3\times3}\,\underbrace{{}^v\underline{\omega}_{v/w}}_{3\times1}\right)$$

Task Jacobian

$$\overset{1\times 3}{\left[{}^{w}_{v}R\left[{}^{v}\underline{k}_{v}\wedge\right]{}^{w}\underline{k}_{w}\right]'}\overset{3\times 3}{{}^{w}_{v}R} = (1\times 3)$$

$$\dot{x} = \left[\underset{3\times 3}{\left({}^{w}_{v}R\left[\underset{3\times 3}{{}^{v}\underline{k}_{v}}\wedge\right]\right)}\underset{3\times 1}{{}^{w}\underline{k}_{w}}\right]'\left(\underset{3\times 3}{{}^{w}_{v}R}\,\underset{3\times 1}{{}^{v}\underline{w}_{v/w}}\right)$$

$$\underset{1\times 13}{{}^{w}\underline{J}} = \left[\mathbf{0}_{1\times 7} \;\vdots\; \mathbf{0}_{1\times 3} \;\vdots\; \left[{}^{w}_{v}R\left[{}^{v}\underline{n}_{v}\wedge\right]{}^{w}\underline{k}_{w}\right]{}^{w}_{v}R\right]$$

$$\dot{\theta} = {}^{w}\underline{J}\,\dot{y}$$

$$\left[\;\cdots\;\right]\begin{bmatrix}\vdots\\ \vdots\\ \vdots\end{bmatrix}$$

## Reference Rate:

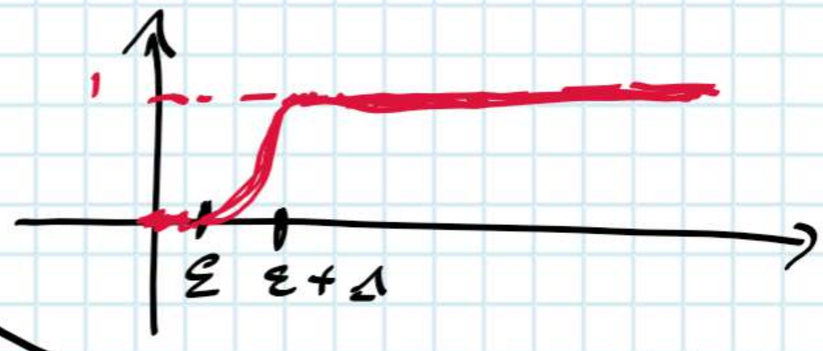
$$\lambda_{\theta}\left(\bar{\theta} - \theta\right)$$

UVMS.HORIZONTAL.TH_TARGET.

UVMS.HORIZONTAL.GAIN

$$\theta = \mathrm{NORM}\left({}^{w}\underline{\rho}_{v/w}\right)$$

## Activation Function




$\leq \varepsilon$ ← UVMS.HORIZONTAL.A_THRESHOLD

$|\underline{\rho}|$

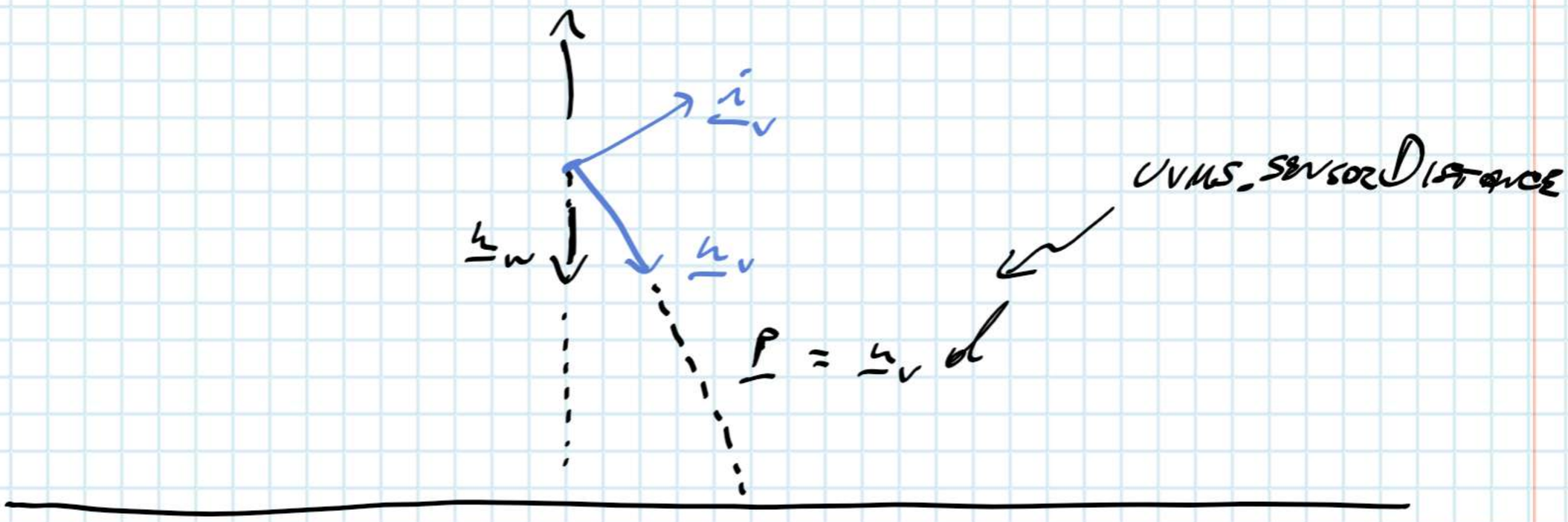
$\Delta\varepsilon$ ← UVMS.HOR...A_BUFFER

$$\underline{\rho}_{v/w} = \mathrm{REDUCEDVERSOR}\left({}^{w}R_{v}\,{}^{v}k,\; k\right)$$

$$k = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

# MINIMUM ALTITUDE TASK

ASSUMPTION: $\underline{k}_w \cdot \underline{k}_v > 0$




$$x(\underline{c}) = \underline{\rho} \cdot \underline{k}_w = d\, \underline{k}_v \cdot \underline{k}_w$$

$$\dot{x} = D_w \underline{\rho} \cdot \underline{k}_w + \cancel{\underline{\rho} \cdot D_w \underline{k}_w}$$

$d$ ora è uno scalare, ma vedi note sui disturbi (mentali)

$$D_w \underline{\rho} = D_w (d\, \underline{k}_v) = d\, \underbrace{D_w(\underline{k}_v)}_{= \underline{\omega}_{v/w} \wedge \underline{k}_v} \cdot \underline{k}_w =$$

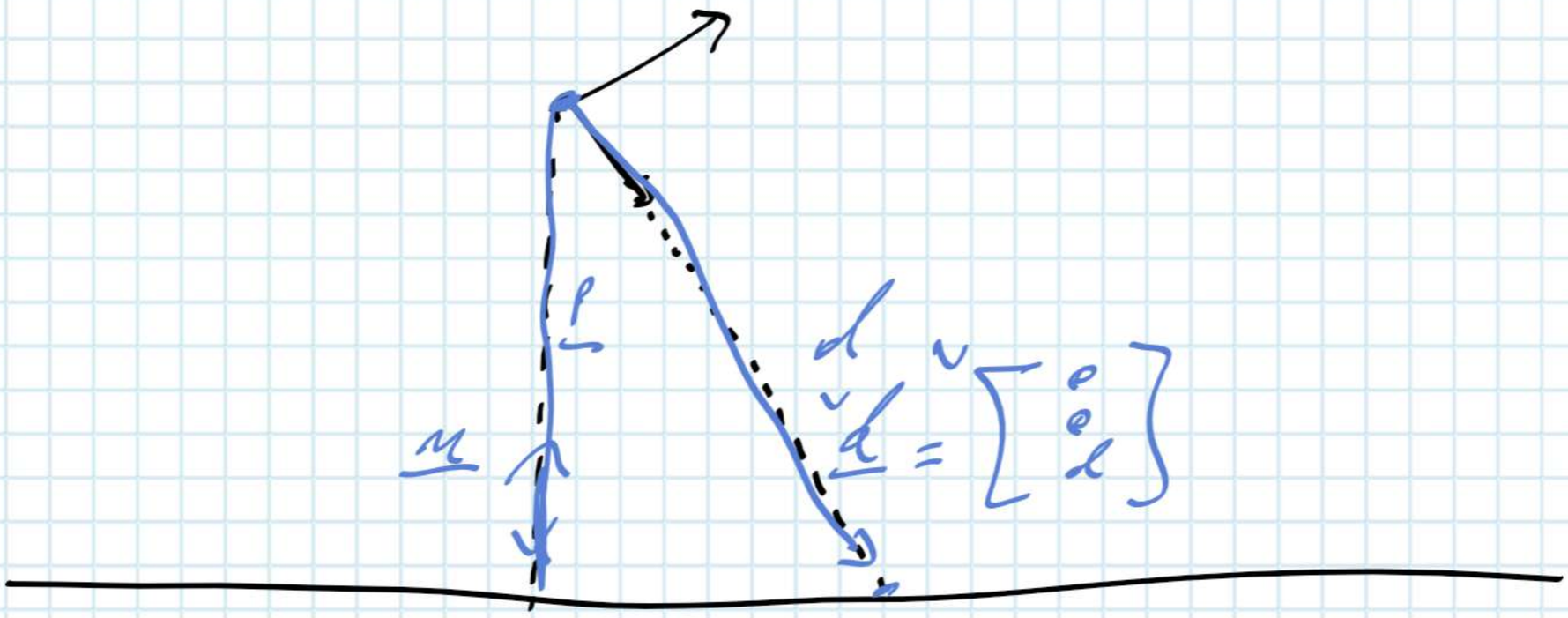
$$= d\left(\underline{\omega}_{v/w} \wedge \underline{k}_v\right) \cdot \underline{k}_w =$$

$$= -d\left(\underline{k}_v \wedge \underline{\omega}_{v/w}\right) \cdot \underline{k}_w =$$

$$= -d\, \underline{k}_w \cdot \left(\underline{k}_v \wedge \underline{\omega}_{v/w}\right)$$

(TODO)

~~Attrito Smorzamento/Lucetta~~




$$|\underline{\rho}| = \underline{d} \cdot \underline{n}$$

$$\underline{\rho} = \underline{n}\,(\underline{d} \cdot \underline{n})$$

$$\rho = \underline{n} \cdot \underline{d}$$

$$\ddot{\rho} = \cancel{(D_w \underline{n}) \cdot \underline{d}} + \underline{n} \cdot D_w \underline{d}$$

$$D_w \underline{d} = D_v \underline{d} + \underline{\omega}_{v/w} \wedge \underline{d}$$

È lo stesso modo di prima ...

UVMS.MINALT

$$ {}^{v}x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix} \qquad \dot{x} = \underline{u} \cdot \underline{v}_{v/w} $$

$$ d = \underline{d} \cdot \underline{k}_v $$

METODE SIMETTI/LUCREZIA (LUCREZIA/SIMETTI A SECONDA DEL CASO)

$$ {}^{w}\dot{x} = {}^{w}\underline{u} \cdot {}^{w}\underline{v}_{v/w} = $$

$$ = {}^{w}\underline{u} \cdot {}^{w}_{v}R \, {}^{v}\underline{v}_{v/w} $$

$$ {}^{v}\dot{x} = {}^{v}\left({}^{w}\underline{u}\right)^{T} {}^{v}\underline{v}_{v/w} $$

$$ {}^{w}\underline{u}^{T} \, {}^{w}_{v}R \qquad 1\times3 \quad 3\times3 $$

$$ {}^{v}\xi = \left[ 0_{1\times7}, \quad , \; 0_{1\times3} \right] $$

POCO PULITO MA FUNZIONA.

$$ {}^{w}\underline{u} = {}^{w}\underline{k}_w $$

$$ {}^{v}\xi = \left[ 0_{1\times7}, \underbrace{\left( \left( {}^{w}R_v \right)_{3\times3} {}^{w}\underline{k}_{3\times1} \right)'}_{1\times3}, \; 0_{1\times3} \right] $$

## REFERENCE RATE

UVMS.MINALT.MIN_D (1m)

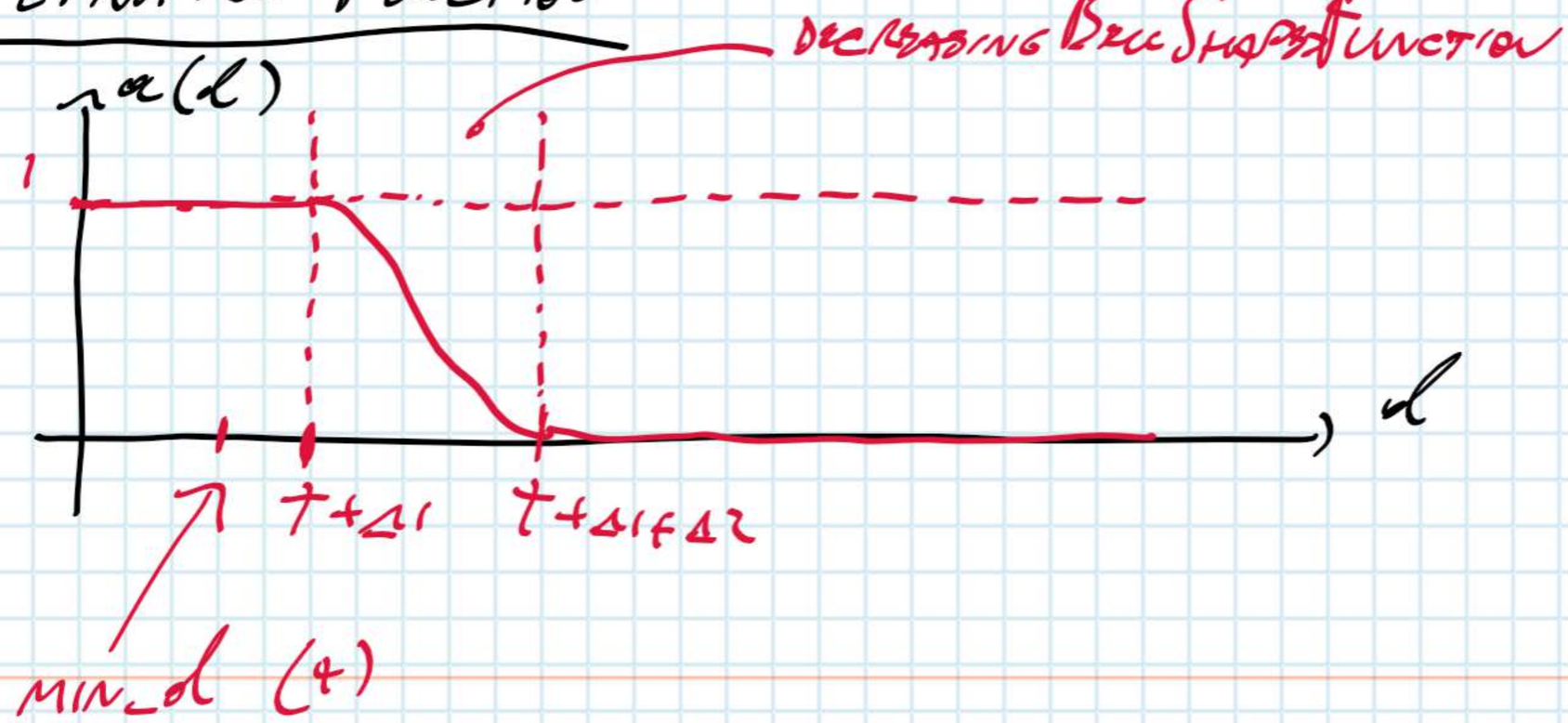
$$ {}^{v}m_d = \lambda_d \left( {}^{v}d_T - {}^{v}d \right) \leftarrow \text{SATURATE}\left( m_d, \text{UVMS.MINALT.M_MAX} \right) $$

$\lambda_d$: UVMS.MINALT.GAIN (0.2)

${}^{v}d$: UVMS.SENSOR DISTANCE

UVMS.MINALT.M_MAX (0.5)

## ACTIVATION FUNCTION



$$\dot{d} = {}^{v}\underline{z}_{w} \cdot {}^{v}\underline{v}_{v/w} = \left[ 0_{1\times 3} \;\vdots\; {}^{w}_{v}R' \, {}^{w}\underline{z}_{w} \;\vdots\; 0_{1\times 3} \right] {}^{v}\underline{\dot{\xi}}$$

$${}^{w}\underline{z}_{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

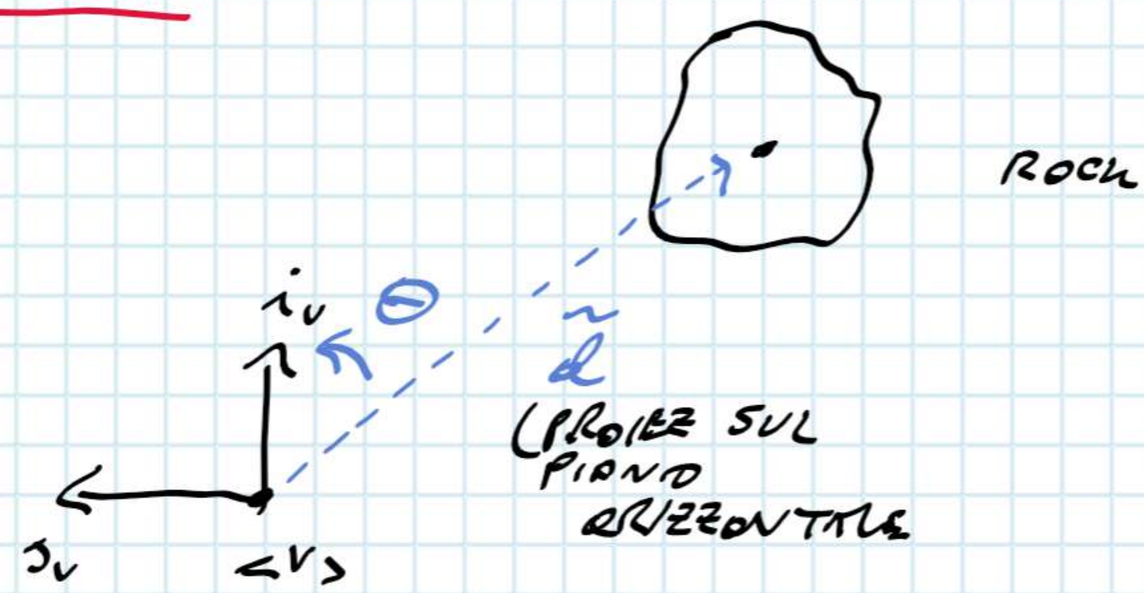
REFERENCE RATE:

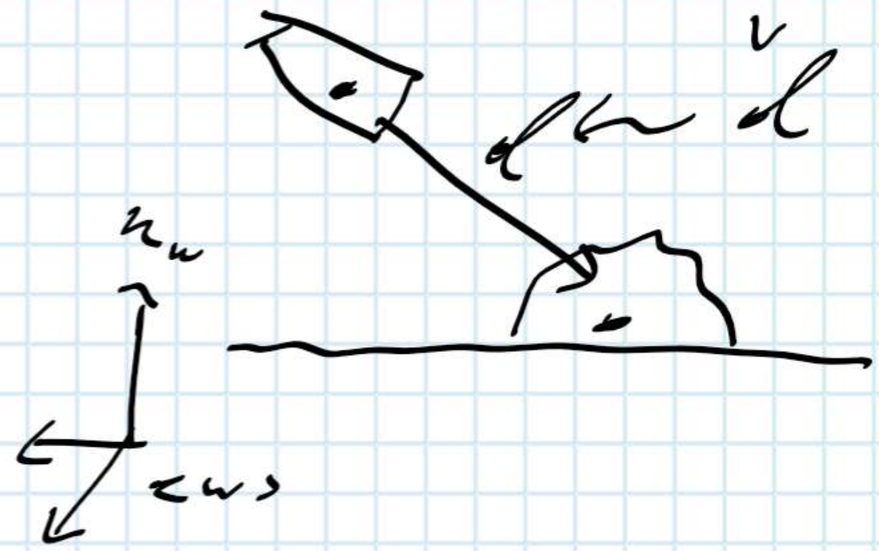
$$\dot{\hat{d}} = \lambda_d \left( d_r - d \right)$$

$d_r$: $d_m$

$d$: UVMS. SENSOR DISTANCE

# Rock Task




$$\underline{d} \begin{cases} \text{PARALLELA A } n_w : & n_w \left( n_w \cdot \underline{d} \right) \\ \text{ORTOGONALE A } n_w : & \left( \underset{3\times3}{I} - n_w n_w^T \right) \underline{d} \end{cases}$$

$$\underline{{}^v d} \rightsquigarrow \underline{{}^w d} = \cancel{{}^w_v R \, {}^v \underline{d}}$$

$$\underline{{}^w \tilde{d}} = \left( \underset{3\times3}{I} - {}^w n_w \, {}^w n_w^T \right) \underline{{}^w d}$$

$$\underline{{}^w \tilde{n}} = \frac{\underline{{}^w \tilde{d}}}{\left| \underline{{}^w \tilde{d}} \right|}$$

$$\delta_{i_v, n} = \underset{\underset{= n_w}{\uparrow}}{\underline{v}} \, \theta$$

$$\sin(\theta) \, \underline{v} = \underline{\tilde{n}} \wedge \underline{i}_v$$

$${}^w_v R \, {}^v \underline{i}_v$$

$$\underline{v} = \frac{1}{\sin(\theta)} \underline{\tilde{n}} \wedge \underline{i}_v \qquad \underline{{}^w v} = \frac{1}{\sin(\theta)} \underline{{}^w \tilde{n}} \wedge \underline{{}^w i}_v$$

$$\dot{\underline{\rho}}_{n,i_v} = \underbrace{\left[\underline{v}\,\underline{v}^T + N(\theta)\,\underline{v}\right]}_{\dot{\theta}} \underbrace{\underline{\omega}_{v/n}}$$

$$\dot{\theta} = \underline{v} \cdot \underline{\omega}_{v/n} = {}^{n}\underline{v}^T \, {}^{n}_{v}R \, {}^{v}\underline{\omega}_{v/n}$$

$$\dot{\underline{\rho}}_{//} = \underline{v}\left(\underline{v} \cdot \underline{\omega}_{v/n}\right)$$

## Recapitolando

$$({}^{n}\rho_{Rock} - {}^{n}O_v)$$

$${}^{n}\tilde{\underline{d}} = \left(\underset{3\times3}{I} - {}^{n}\underline{n}_n \, {}^{n}\underline{n}_n^T\right) {}^{n}\underline{d}$$

$${}^{n}\tilde{\underline{n}} = \frac{{}^{n}\tilde{\underline{d}}}{\left|{}^{n}\tilde{\underline{d}}\right|} \qquad {}^{n}\underline{v} = \frac{1}{\sin(\theta)}\left[{}^{n}\underline{n} \;\; \Lambda\right]\left({}^{n}_{v}R \, {}^{v}\underline{i}\right)$$

$$\theta \neq n\pi$$

$${}^{n}\rho_{Rock}$$

$$\dot{\theta} = {}^{n}\underline{v}^T \, \underline{\omega}_{v/n} = \overbrace{\left[O_{1\times4} \quad O_{1\times3} \quad {}^{n}\underline{v}^T \, {}^{n}_{v}R\right]}^{} \, {}^{v}\underline{\dot{\xi}}$$

$${}^{n}\omega_{v/n} = {}^{n}_{v}R \, {}^{v}\underline{\omega}_{v/n}$$

## Reference Rate

$$\dot{\bar{\theta}} = \underbrace{\lambda_{Rock}}_{0.9}\left(\phi - \underbrace{\left|\underline{\rho}_{n,i_v}\right|}_{\text{Reduced Vector Length}\,(\underline{n},\, \underline{i}_v)}\right)$$

ACTIVATION FUNCTION

$\boxed{\text{ZERO}}$ VELOCITY TASK

METRICA : ${}^{w}\underline{v}_{v/w}$

$$ {}^{v}y = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ {}^{v}\underline{v}_{v/w} \\ {}^{v}\underline{\omega}_{v/w} \end{bmatrix} $$

$$ {}^{w}J_{ZVT} = \begin{bmatrix} 0_{3\times 2} & {}^{w}_{v}R & 0_{3\times 3} \end{bmatrix} $$

TASK REFER. RATE

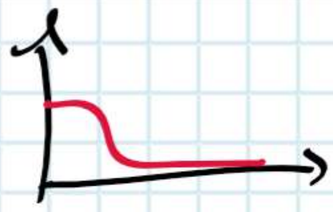
$$ {}^{w}\underline{m} = \lambda_{ZVT} \left( 0_{1\times 3} - {}^{w}V_{v/w} \right) $$

UVMS_P_DOT(1:3)

# Joint Limit Task

$\underline{q}_{min}, \ \underline{q}_{max} \in \mathbb{R}^7$

METODO 2



$\boxed{\text{NO.}}$

① $\underline{q} \geq \underline{q}_{min}$ $\qquad \underline{m}_{q,min} = \lambda_{q_{min}} (\underline{q} - \underline{q}_{min})$

② $\underline{q} \leq \underline{q}_{max}$ $\qquad \underline{m}_{q,max} = \lambda_{q_{max}} (\underline{q}_{max} - \underline{q})$

$\dot{q}$

UNMS, q_DOT

VEL. + OR. END EFF.

CONF. BRACCIO

$$\underline{\dot{y}} = J \dot{q}$$

$$\dot{q} = J^{\#} \dot{y} = \dot{q}$$

WRT <V>

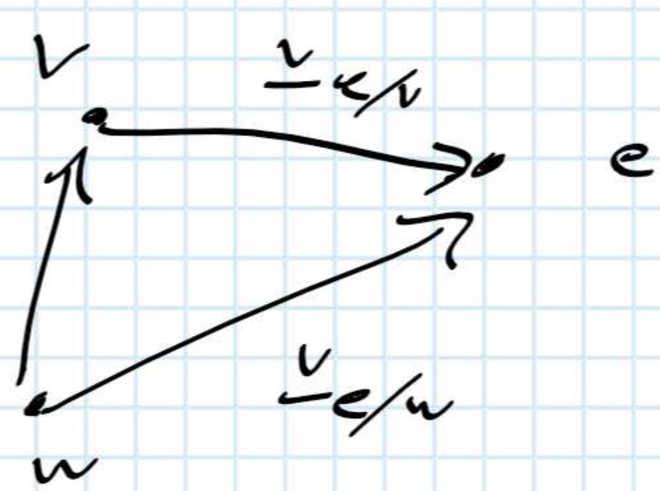
VELOCITÀ E.F. WRT <V>

$$\dot{y} = J \dot{q}$$

$$\cancel{\dot{y} = {}^{v}\underline{\dot{y}} = \begin{bmatrix} {}^{v}\underline{v}_{v/w} \\ {}^{v}\underline{\omega}_{v/w} \end{bmatrix}}$$

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} {}^{v}\underline{v}_{e/w} \\ {}^{v}\underline{\omega}_{e/w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{v}\underline{v}_{e/v} + {}^{v}\underline{v}_{v/w} \\ {}^{v}\underline{\omega}_{e/v} + {}^{v}\underline{\omega}_{v/w} \end{bmatrix}$$

$$\underline{{}^{v}\dot{y}} = \begin{bmatrix} \underline{\dot{q}} \\ {}^{v}\underline{v} \\ {}^{v}\underline{\omega} \end{bmatrix}$$



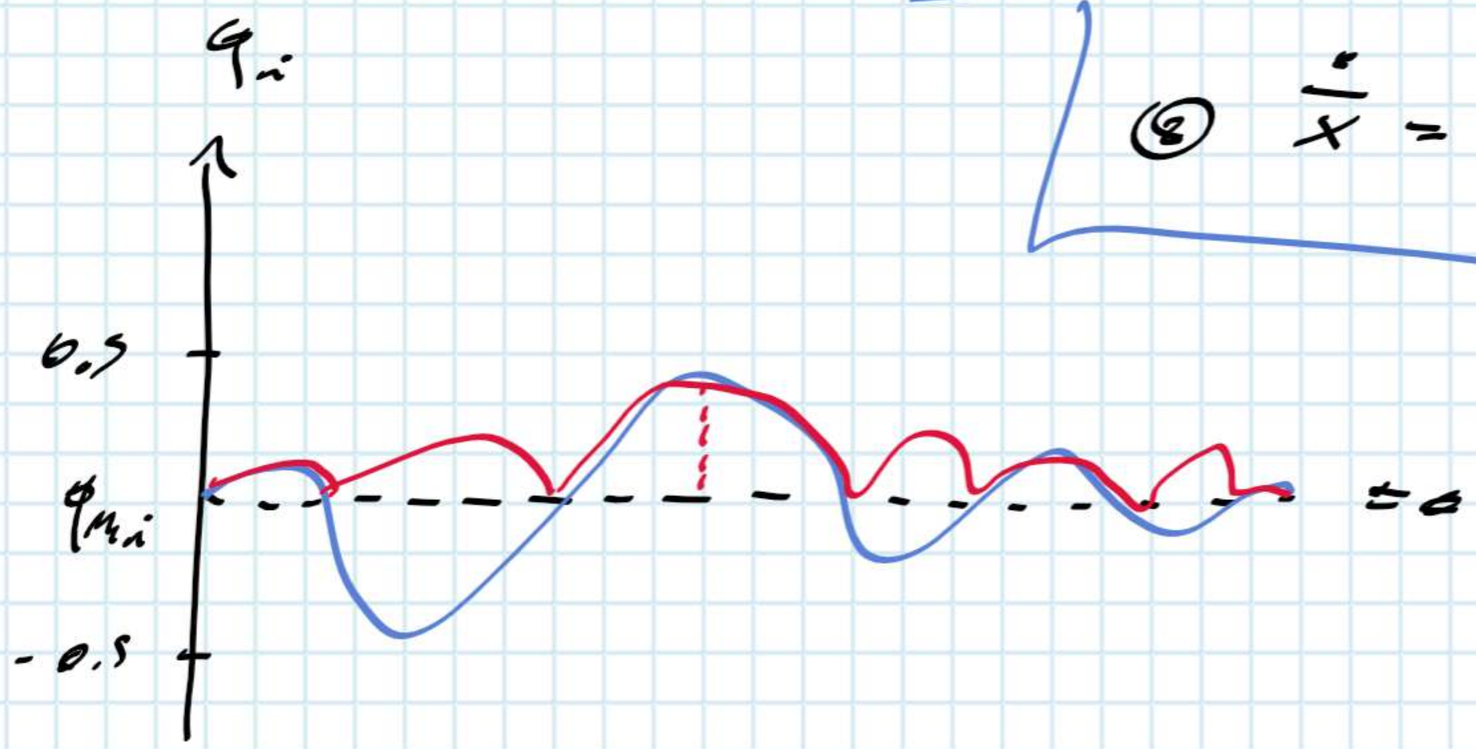

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} I_{7\times7} & \vdots & 0_{7\times6} \end{bmatrix} {}^{v}\underline{\dot{y}}$$

METODO 2 (CORRETTO):

$\underline{\varphi}_M = \underline{0}$

$$\underline{q}_M = \frac{1}{2}\left(\underline{q}_{MIN} + \underline{q}_{MAX}\right) \quad ① \quad \dot{\bar{x}} = \lambda\left(|\underline{q}_M| - |\underline{q}|\right)$$

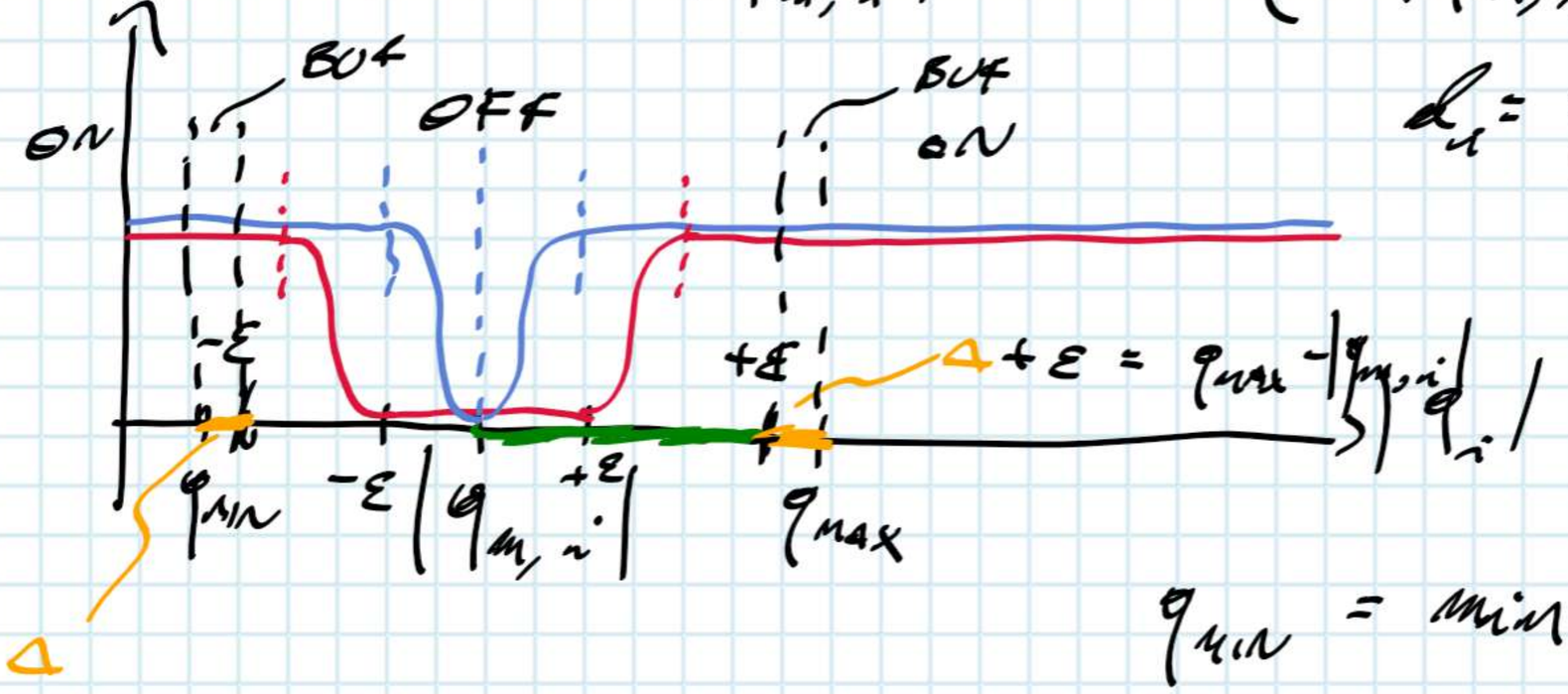
$$\boxed{② \quad \dot{\bar{x}} = \lambda\left(\underline{\varphi}_M - \underline{\varphi}\right)}$$




$\varepsilon > 0$

ATTIVAZIONE FUNZIONE:

$\alpha(|q_i|)$ $\qquad |q_{M,i}| > 0 \qquad \left(|q_{M,i}| - \varepsilon \geq 0\right)$




$d_i = q_{MAX} - |q_{M,i}|$

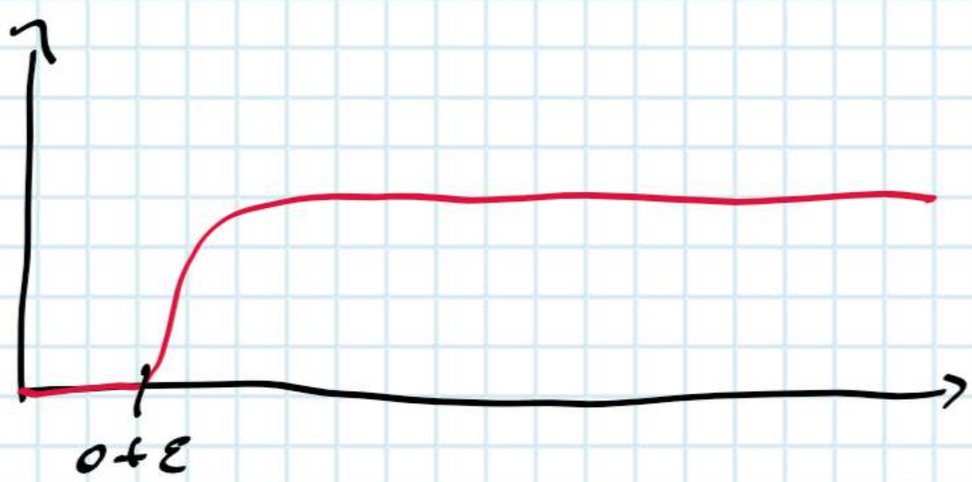
$$\boxed{\varepsilon_i = 0.75 \cdot d_i}$$

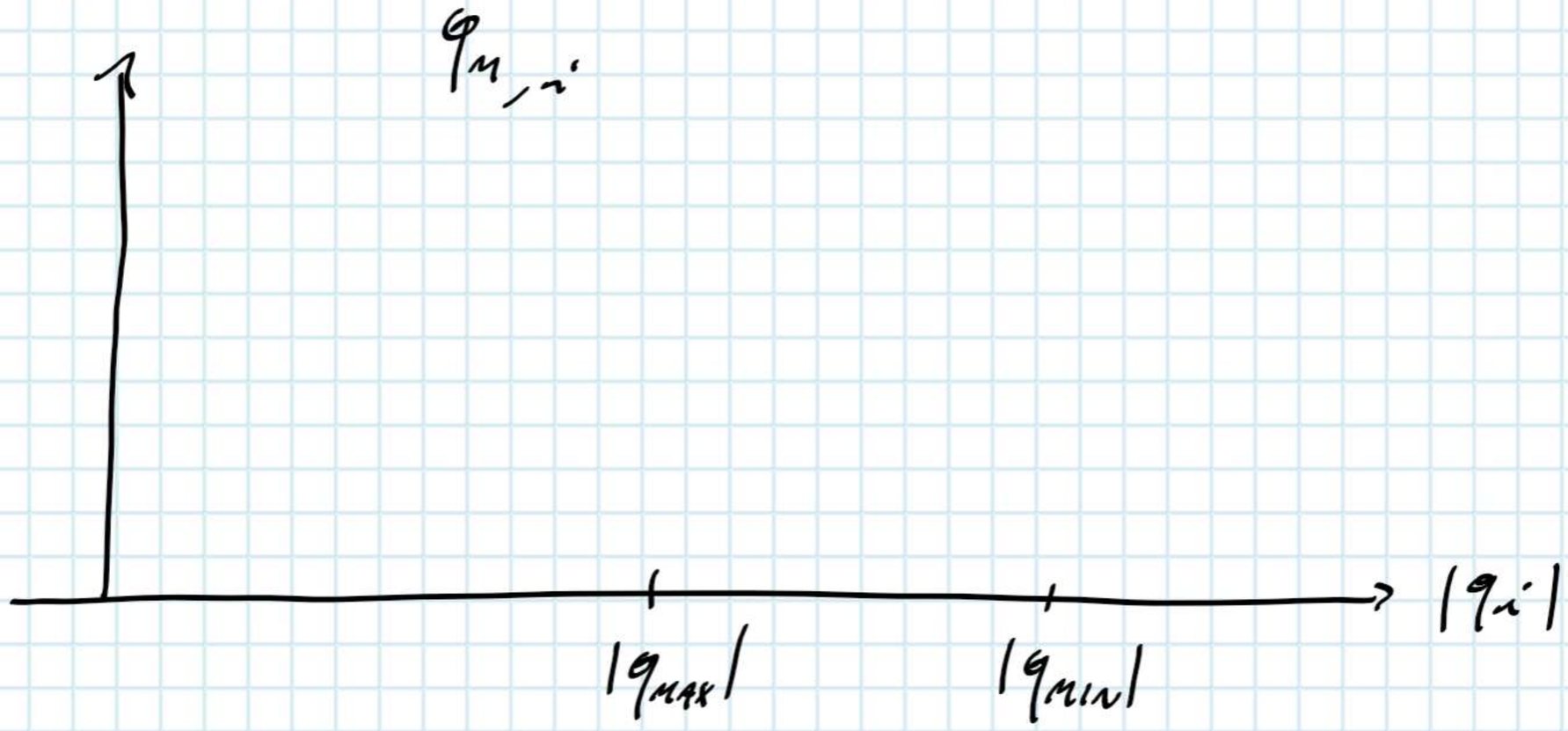
TUNING

$q_{MIN} = \min\{|q_{M,i}|, q_i\}$

$q_{MAX} = \max\{\ldots\}$

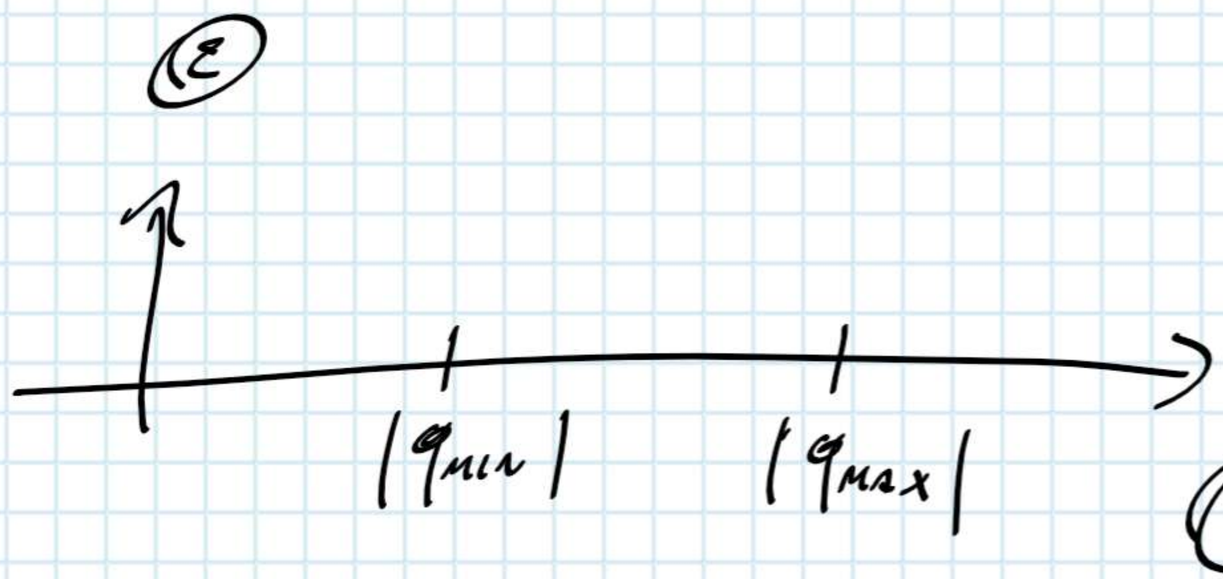
$|q_{M,i}| = 0$





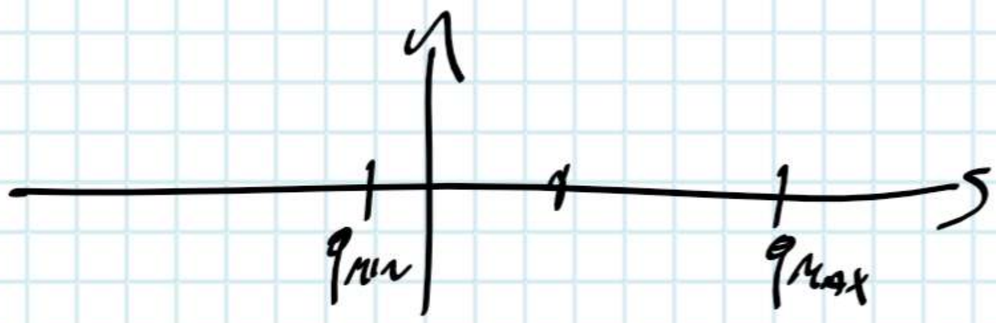

① $|q_{MIN}| > |q_{MAX}| \Rightarrow$

$\Rightarrow |q_n| < |q_{MIN}|$




② $|q_{MAX}| > |q_{MIN}| \Rightarrow$

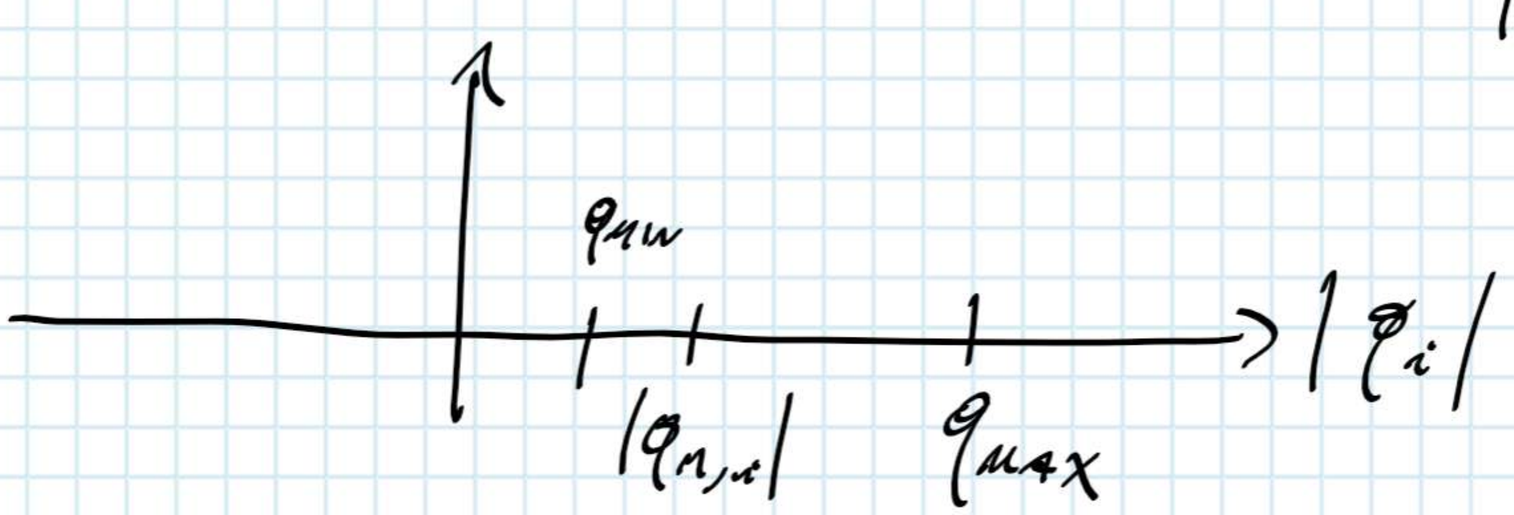
$\Rightarrow |q_n| < |q_{MAX}|$




$q_{MAX} = MAX$

$= MAX \{|q_{MIN}|, |q_{MAX}|\}$

$|q_n| \leq q_{MAX}$




NON FUNZIONA.

$$|q_{mi}| + \varepsilon \leq \min\{|q_{min,i}|, |q_{max,i}|\}$$

UNCOLD

$\varepsilon > 0$

# COOPERATIVE CONTROL OF MULTIPLE AGENTS

DUE AGENTI $a, b$

$a$ : $J_{T,a}$ JACOBIANA DEL TOOL FRAME <ea> DI $a$

$\dot{q}_a$ CONFIGURAZIONE DI $a$

$J_{Ta}\dot{q}_a = \dot{x}_{T,a}$ VELOCITÀ DELL'END EFFECTOR DELL'AGENTE $a$

MINIMUM NORM SOLUTION: $\underset{\dot{q}_a}{\arg\min} \left| \dot{x}_{T,a} - J_{T,a}\dot{q}_a \right|^2$

$$\dot{q}_a = \left(J_{T,a}\right)^{\#} \dot{x}_{T,a}$$

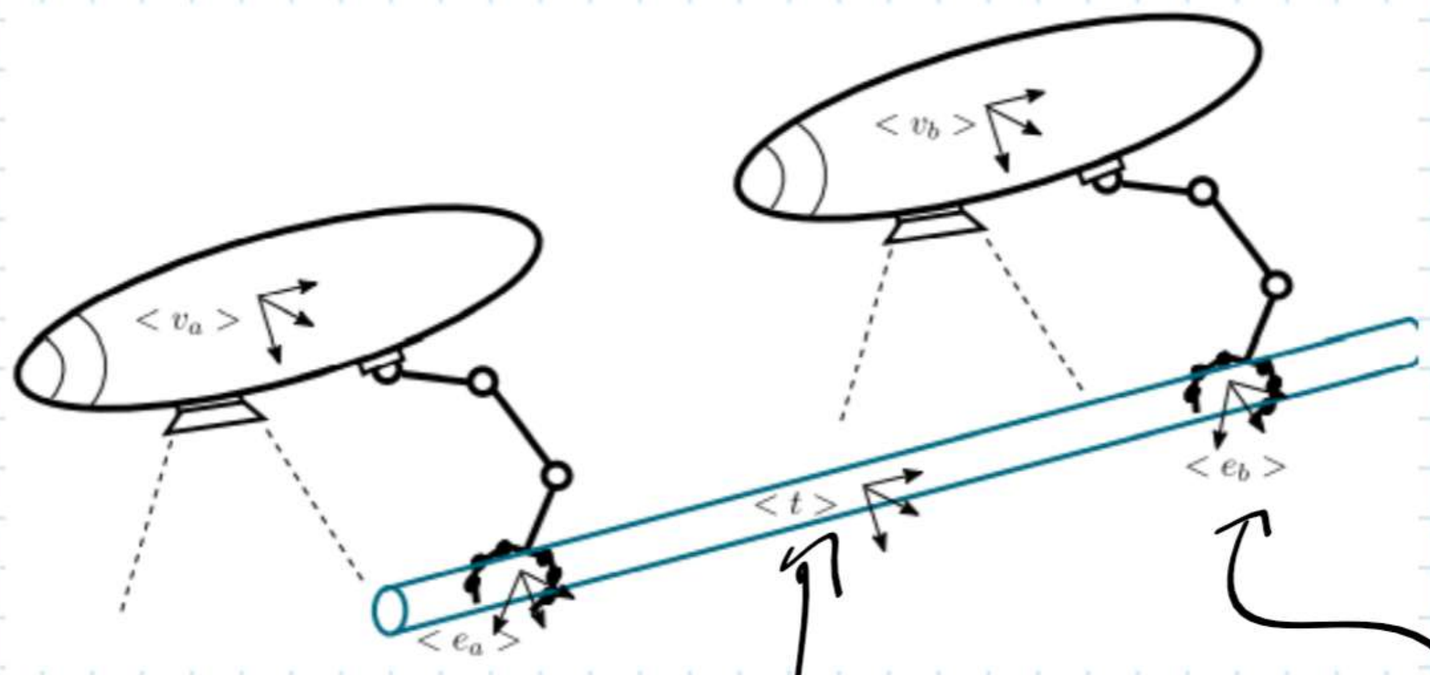
LO STESSO SI PUÒ DIRE DI $b$ $\rightarrow$ LI POSSIAMO CONTROLLARE INDIPENDENTEMENTE NEL SOLITO MODO.

MA COME FACCIAMO A FAR SÌ CHE COOPERINO?

$\rightarrow$ QUESTO NON SARÀ UN APPROCCIO GENERALE, MA LIMITATO AD UN CASO PARTICOLARE

$\rightarrow$ I DUE ROBOT DEVONO TRASPORTARE UN OGGETTO IN DUE.

LA SITUAZIONE È QUESTA:




$\dot{x}^a_{T,b}$

$\dot{x}_{T,a}$

$<T> \equiv <O>$

$\dot{x}_T$ VELOCITÀ DELL'OBIETTIVO TOOL FRAME

## FIRM GRASPING CONSTRAINT

SI PUÒ ESPRIMERE COL SEGUENTE VINCOLO DIFFERENZIALE: DATO $\dot{x}_T$ LA VELOCITÀ DELL'OBIET. TOOL FRAME, E DATI $\dot{q}_a$ E $\dot{q}_b$, DEV'ESSERE

$$\dot{x}_T = J_{T,a}\,\dot{q}_a = J_{T,b}\,\dot{q}_b$$

FORMA INTERMEDIA (VEDI PIÙ AVANTI LA FORMA FINALE)

RICORDO #1 UN MODO EQUIVALENTE DI FORMULARE IL VINCOLO (PIÙ COME PRODOTTO SCALARE)

$$J_{T,a}\,\dot{q}_a = J_{T,b}\,\dot{q}_b \longrightarrow$$

$$\longrightarrow J_{T,a}\,\dot{q}_a - J_{T,b}\,\dot{q}_b = \underline{0}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} J_{T,a} & -J_{T,b} \end{bmatrix}}_{C_{T,ab}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_a \\ \dot{q}_b \end{bmatrix}}_{\dot{q}_{ab}} = 0$$

QUINDI $C_{ab}\,\dot{q}_{ab} = 0$

DA CUI $\dot{q}_{ab} \in \mathrm{Ker}(C) = \mathrm{span}(I - C^{\#}C)$ ...

PERÒ QUESTO APPROCCIO COMPLICA LE COSE, IMPLICA UNA COMUNICAZ ECCESSIVA TRA SISTEMA CENTRALE E ROBOT (NON DIAMO ULTERIORI DETTAGLI) QUINDI NIENTE.

LA FORMULA RICHIEDE $\dot{q}_a$, $\dot{q}_b$ OGNI VOLTA, CHE BISOGNA TRASMETTERE

## ROUND #2

OSSERVAZIONE:

$$\dot{x}_T = J_{T,a}\,\dot{q}_{T,a} = J_{T,a}\,J^{\#}_{T,a}\,\dot{x}_{T,a}$$

MINIMUM NORM SOLUTION SULL'ACCENTE a

LA RELAZ LEGA UNA VELOCITÀ AD UN'ALTRA VELOCITÀ

NOTA: $J^{\#}_{T,a}\,J_{T,a} = I$ MA

$J_{T,a}\,J^{\#}_{T,a} \neq I$ !! IN GENERALE

CHIAMIAMO $H_a = J_{T,a}\,J^{\#}_{T,a}$ $(H_a, H_b)$

ALLORA POSSIAMO RISCRIVERE IL VINCOLO COME SEGUE:

$$\dot{x}_T = H_a\,\dot{x}_{T,a} = H_b\,\dot{x}_{T,b} \qquad \text{(MEGLIO)}$$

PERCHÉ ORA STIAMO USANDO UN'INFO CHE POSSO CALCOLARE E NON DEVO RICEVERE DAL ROBOT

IL DISCORSO È LO STESSO DI PRIMA, MA STAVOLTA CONSIDERANDO LE MATRICI $H_a$, $H_b$

$$\begin{bmatrix} H_a & -H_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{t,a} \\ \dot{x}_{t,b} \end{bmatrix} = 0$$

LA FORMA FINALE DEL VINCOLO!

VOGLIAMO CHE I SINGOLI E.E. REALIZZINO UNA VELOCITÀ $\dot{x}_t$, QUINDI DOBBIAMO IMPORRE

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{t,a} \\ \dot{x}_{t,b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{x}_t \end{bmatrix}$$

OTTENENDO COSÌ

$$\begin{bmatrix} H_a & -H_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{x}_t \end{bmatrix} = \underline{0}$$

LA VERA FORMA DEL VINCOLO.

NON POSSIAMO ANCORA USARLA PER IL CONTROLLO PERÒ, PERCHÉ NULLA CI DICE COME DEFINIRE UN CONTROLLO CENTRALIZZATO CHE CONSIDERI ENTRAMBI I ROBOT.

# Considerazioni aggiuntive sul Firm Grasping Constraint

Abbiamo detto

$$\begin{bmatrix} H_a & -H_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_T \\ \dot{x}_T \end{bmatrix} = 0$$

$$x_{T,ab} = x_T$$

nel caso particolare richiesto dal vincolo

Più in breve, con $C_{ab} = \begin{bmatrix} H_a & -H_b \end{bmatrix}$, si ha

$$C_{ab}\, \ddot{x}_T = 0 \quad \text{quindi}$$

$$\ddot{x}_T \in \ker(C_{ab})$$

Possiamo "ribaltare" queste considerazioni dicendo che il vettore $\ddot{x}_T \in \mathrm{span}(I - C_{ab}^{\#} C_{ab})$

il che ci permette di scrivere $\ddot{x}_T$ come soluzione di un sist. lineare, per opportuni $\bar{x}_{T,a}$, $\bar{x}_{T,b}$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_T \\ \dot{x}_T \end{bmatrix} = \left(I - C_{ab}^{\#} C_{ab}\right) \begin{bmatrix} \bar{x}_{T,a} \\ \bar{x}_{T,b} \end{bmatrix}$$

Nota che questo spazio vettoriale span(...) è molto più esteso: non contiene solo $[\dot{x}_T ; \dot{x}_T]$, perciò dobbiamo dire che esistono $\bar{x}_a$, $\bar{x}_b$ tali da produrre proprio quel tipo di vettore. (Si intravede già un controllo?)

IN PARTICOLARE, È OPPORTUNO NOTARE CHE IL VINCOLO DATO È COMPOSTO DA DUE EQUAZIONI VETTORIALI DEL TIPO

$$\dot{x}_t = \left(I - C_{ab}^{\#} C_{ab}\right) \bar{x}_{t,i} \qquad \forall i$$

QUESTO PERMETTE ANCHE DI DIRE QUESTA COSA:

RICORDI? $\quad \dot{x}_t = H_a \dot{x}_{t,a} = H_b \dot{x}_{t,b}$

PRENDIAMO $a$ (I CONTI SONO UGUALI PER TUTTI)

$$\dot{x}_t = H_a \dot{x}_{t,a} = H_a \left(I - C_{ab}^{\#} C_{ab}\right) \bar{x}_{t,a}$$

$\dot{x}_{t,a} = \dot{x}_t$ PER IL VINCOLO

$$\text{e} \quad \dot{x}_t = \left(I - C_{ab}^{\#} C_{ab}\right) \bar{x}_{t,a}$$

IN SINTESI OTTENIAMO

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{x}_t \end{bmatrix}}_{\dot{x}_{t,ab}} = \underbrace{\begin{bmatrix} H_a & 0 \\ 0 & H_b \end{bmatrix}}_{H_{ab}} \left(I - C_{ab}^{\#} C_{ab}\right) \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{x}_{t,a} \\ \bar{x}_{t,b} \end{bmatrix}}_{\bar{x}_{t,ab}}$$

LA BARRA NON CENTRA NULLA CON LA REFERENCE RATE

$$\dot{x}_{t,ab} = H_{ab} \left(I - C_{ab}^{\#} C_{ab}\right) \bar{x}_{t,ab}$$

PER REALIZZARE IL COMPORTAMENTO DESIDERATO OCCORRE FORZARE $\quad \dot{x}_{t,ab} = \begin{bmatrix} \dot{x}_t & ; & \dot{x}_t \end{bmatrix}$

# COMMENTI SUGLI SPAZI VETTORIALI

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{x}_f \end{bmatrix} = H_{ab} \left( I - C^{\#}_{a,b} C_{a,b} \right) \bar{x}_{t,ab}$$

QUINDI $[\dot{x}_t \quad \dot{x}_f]' \in \text{SPAN}\left\{ H_{ab} \left( I - C^{\#}_{ab} C_{ab} \right) \right\}$

COMMENTI RICORDO LA MATRICE $H_{ab}$:

$\text{SPAN}\{H_{ab}\}$ $\qquad \dot{x}_{f,ab} = H_{ab} \bar{x}_{f,ab}$

$\dot{x}_f \in \dots$

RAPPRESENTA LE VELOCITÀ POSSIBILI DELL'OGGETTO A PARTIRE DA QUELLE DEI DUE SINGOLI AGENTI

$$\text{KER}\{H_{ab}\} = \text{SPAN}\{ I - H^{\#}_{ab} H_{ab} \}$$

TUTTE LE VELOCITÀ NON RAGGIUNGIBILI DALL'OGGETTO.

NOTA BENE: MAGARI I SINGOLI AGENTI RIESCONO, MA NON NEL COMPLESSO.

LA MATRICE COMPLESSIVA $H_{ab} \left( I - C^{\#}_{ab} C_{ab} \right)$ SI PUÒ INTERPRETARE COME UNA OTTIMALE DIVISIONE DI $\text{SPAN}(H_{ab})$

$\text{SPAN}\left\{ H_{ab} \left( I - C^{\#}_{ab} C_{ab} \right) \right\}$ CONTIENE TUTTI I MOTI DEGLI AGENTI CHE SODDISFANO IL VINCOLO E CHE SONO FATTIBILI PER OGNI AGENTE.

$\text{SPAN}\left\{ H_{ab} C^{\#}_{ab} C_{ab} \right\}$ CONTIENE INVECE TUTTI I MOTI CHE VIOLANO I VINCOLI TRA I MOTI FATTIBILI

QUINDI IL RISPETTO DEI VINCOLI È DATO DALLA SOLA MATRICE $\left( I - C^{\#}_{ab} C_{ab} \right)$

# VERSO UNA STRATEGIA DI CONTROLLO

$$\dot{\tilde{x}}_{T,ab} = H_{ab}\left(I - C^{\#}_{ab} C_{ab}\right) \bar{x}_{T,ab}$$

IN PARTICOLARE $\dot{\tilde{x}}_{T,ab} = \begin{bmatrix} \dot{x}_T \\ \dot{x}_T \end{bmatrix}$

FATTIBILITÀ DEL MOTO

RISPETTO DEL FIRM GRASPING CONSTRAINT

VELOCITÀ DEI DUE AGENTI (SOLO I TOOL)

$$H_{ab} = \begin{bmatrix} H_a & 0 \\ 0 & H_b \end{bmatrix}$$

$$H_i = J_{T,i} J^{\#}_{T,i} \qquad i = a, b$$

$$C_{ab} = \begin{bmatrix} H_a & -H_b \end{bmatrix}$$

NOTA BENE: $\dot{\tilde{x}}_{T,ab} = \left(I - C^{\#}_{ab} C_{ab}\right) \bar{x}_{T,ab}$

CIOÈ SALVIAMO QUESTA OPERAZIONE PERMETTE DI OTTENERE LA PROIEZIONE DEL MOTO, PER OGNI EE, COMPATIBILE COL VINCOLO, MA NON NECESSARIAMENTE FATTIBILE.

## L'IDEA:

POSSO CREARE IN OGNI AGENTE UN NON REACTIVE TASK BASATO SULLA RELAZIONE

(AGENTE $i$) $\dot{\tilde{x}}_T = \underbrace{H_i \left(I - C^{\#}_{ab} C_{ab}\right)}_{\text{"JACOBIAN" (PARTE DI)}} \dot{\tilde{x}}_{T,i}$

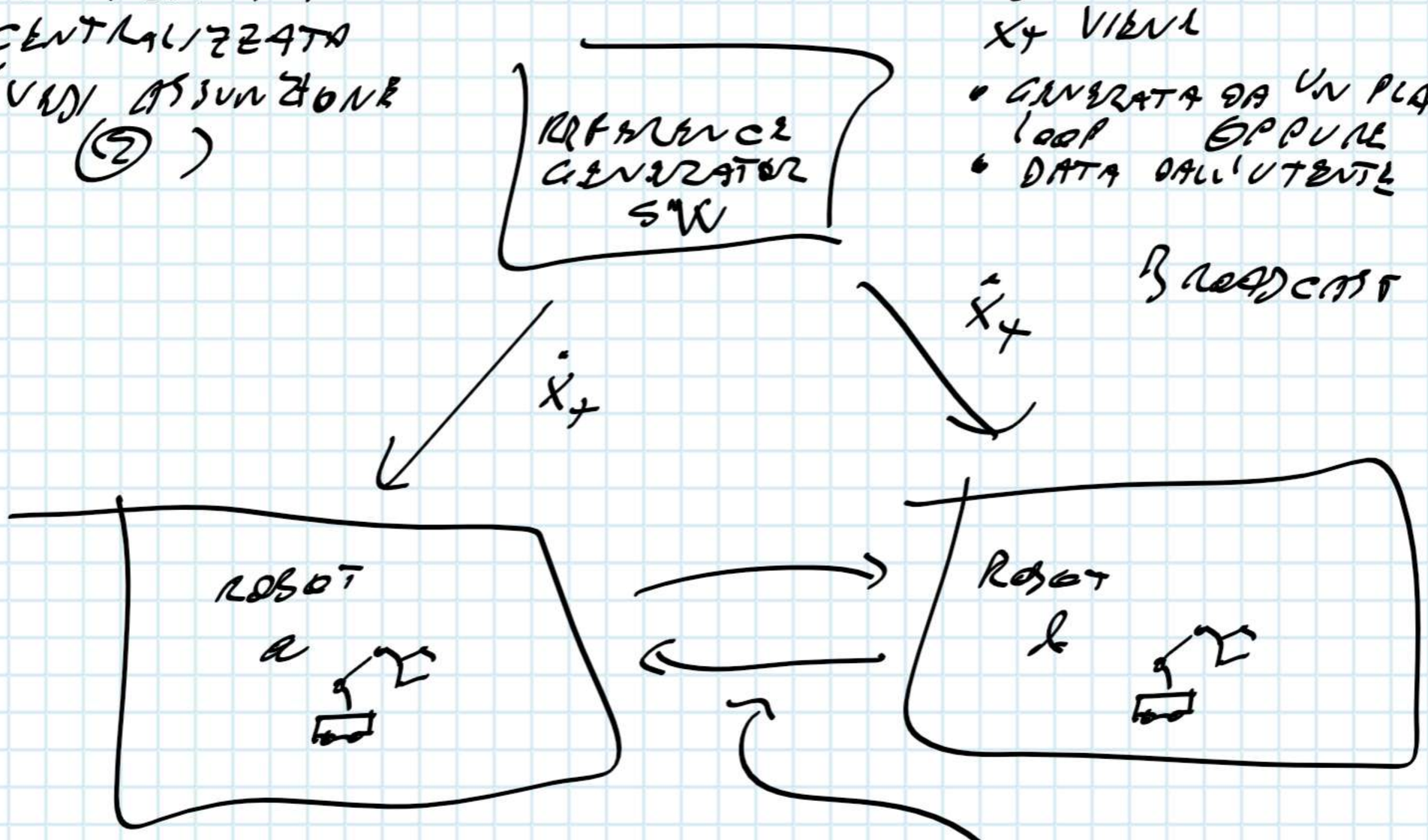
OBIETTIVO (CONTROLLO SULLA DERIVATA)

INCOGNITA, VELOCITÀ DELL'END EFFECTOR (ESPRESSA COME $J\dot{q}$)

IL TASK AVRÀ PRIORITÀ MASSIMA E VERRÀ ESEGUITO SINGOLARMENTE SU OGNI AGENTE

# ASSUNZIONI

(1) ARCHITETTURA: CENTRALIZZATA (VEDI ASSUNZIONE (2))




$\dot{x}_f$ VIENE
- GENERATA DA UN PLANNER IN LOOP OPPURE
- DATA DALL'UTENTE

BROADCAST

I ROBOT POSSONO SCAMBIARSI INFORMAZ

(2) PERFETTA CONNESSIONE WIRELESS
- NO PATHLOSS
- BANDWIDTH INFINITA
- NESSUN RITARDO DI TRASMISSIONE

(3) DUE CICLI DI TPIK PER OGNI AGENTE.

# UN ALTRO PUNTO DI VISTA

IMPORTANTE NOTARE CHE LA MATRICE $H_{ad}(I - C^{\#}C)$ PUÒ ESSERE USATA ANCHE PER FILTRARE UNA VELOCITÀ

DATA UNA VELOCITÀ INIZIALE $\dot{x}_1 \rightarrow \dot{x}_{1c} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix}$

VOGLIO TROVARNE LA PROIEZIONE TALE CHE

1. È FATTIBILE
2. NON VIOLA IL FIRM GRASPING CONSTRAINT

SE $\tilde{\dot{x}}$ È LA PROIEZ RICHIESTA, LA MATRICE PUÒ ESSERE USATA COSÌ PER "FILTRARE" $\dot{x}_1$:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\dot{x}} \\ \tilde{\dot{x}} \end{bmatrix} = H_{ad}(I - C^{\#}C) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix}$$

SIAMO SICURI CHE VENGONO FUORI QUE COSE IDENTICHE, PERCHÉ LA RELAZIONE FUNZIONA COSÌ

... E POI $H_{ad} = \begin{bmatrix} H_a & 0 \\ 0 & H_b \end{bmatrix}$ ...

# L'ALGORITMO

BASATO SU 3 FASI:

- TPIK 2 (COME SE L'AGENTE FOSSE SOLO)
- CONTRATTAZIONE (OBIETTIVO COMUNE)
- COOPERATIVE TPIK

## TPIK — FASE ①

IL SOFTWARE CENTRALE PUBBLICA $\dot{x}_t$

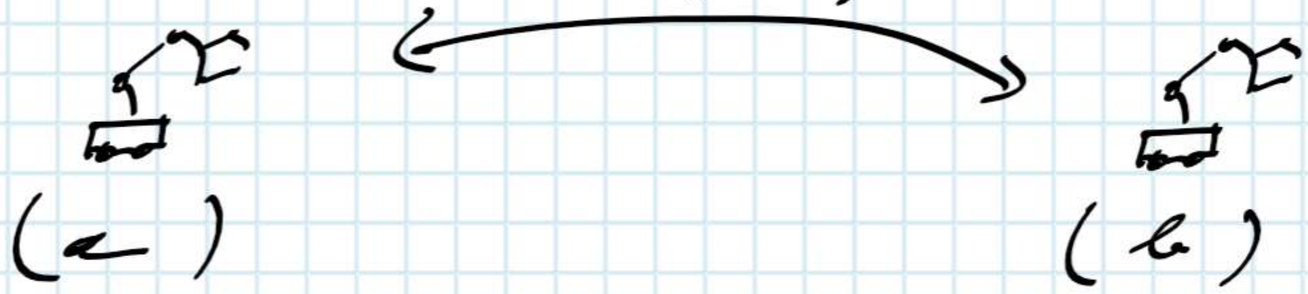
OGNI AGENTE APPLICA UN TPIK CON TARGET $\dot{x}_t$ RICAVANDO COSÌ LA PROPRIA $\dot{x}_{t,i}$

- APPLICAZ DEI SAFETY CONSTRAINTS SU $\dot{x}_{t,i}$
- L'AGENTE OTTIENE $\dot{x}_{t,i}$ COME FOSSE DA SOLO PENSANDO SOLO A SE STESSO E ALLE PROPRIE ESIGENZE

## CONTRATTAZIONE

ENTRAMBI CONOSCONO $\mu_0$ PARAMETRO

$H_i$, $\dot{x}_{t,i}$




I DUE AGENTI SI SCAMBIANO LE PROPRIE $H_i$, $\dot{x}_{t,i}$

OGNI AGENTE CALCOLA

$$\mu_a \leftarrow \mu_0 + |\dot{x}_t - x_{t,a}|$$
$$\mu_b \leftarrow \mu_0 + |\dot{x}_t - x_{t,b}|$$

OGNI AGENTE VALUTA IL SUO GRADO DI DIFFICOLTÀ NEL RAGGIUNGERE $\dot{x}_t$, E QUELLO DELL'ALTRO AGENTE

QUINDI VIENE CONCORDATA UNA VELOCITÀ TARGET COMUNE:

$$\dot{x}_n = \frac{\mu_a \dot{x}_{t,a} + \mu_b \dot{x}_{t,b}}{\mu_a + \mu_b}$$

LA VELOCITÀ TARGET TIENE CONTO DEL ROBOT PIÙ IN DIFFICOLTÀ TRA I DUE

- IL PESO DEL ROBOT PIÙ IN DIFFICOLTÀ AUMENTA, FACENDO TENDERE IL TARGET COMUNE A QUELLO DEL ROBOT PIÙ IN DIFFICOLTÀ

- LA "DIFFICOLTÀ" DI UN AGENTE VIENE MISURATA DA

$$\mu_0 + \left| \dot{x}_t - \dot{x}_{t,i} \right|$$

QUESTA DIFFERENZA TENDE AD AUMENTARE PER ROBOT CON UN ALTO NUMERO DI SAFETY TASKS O PER DINAMICHE LENTE

INFINE $\boxed{\text{TPIK COOPERATIVE}}$ — FASE 3

NOTA CHE NESSUNA DELLE $\dot{x}_{T,i}$ È STATA OTTENUTA USANDO

$$H_{ab}(I - C^{\#}C)$$

QUINDI A MAGGIOR RAGIONE $\dot{x}_M$ POTREBBE ESSERE QUALUNQUE COSA!

PER POTER ANDARE AVANTI BISOGNA PRIMA FILTRARE $\dot{x}_M$, TROVANDONE LA PARTE CHE

- RISPETTA IL CONSTRAINT
- È FATTIBILE

QUINDI

$$\dot{\tilde{x}}_M \longleftarrow \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_M \\ \dot{\tilde{x}}_M \end{bmatrix} = H_{ab}(I - C^{\#}C) \begin{bmatrix} \dot{x}_M \\ \dot{x}_M \end{bmatrix}$$

$\dot{\tilde{x}}_M$ È L'OBIETTIVO DEFINITIVO; ORA È POSSIBILE ESEGUIRE L'ULTIMO CICLO DI TPIK E TROVARE $\dot{q}_i$ PER OGNI AGENTE E FINE.