Q1 POSITION + ORIENTATION

POSITION

EQUALITY OBS $\rightsquigarrow A = 1$

OBIETTIVO ARRIVARE IN POSE $\bar{x}$

↳ METODO

$$\dot{x} = J_x \dot{q}$$

COSA CONTROLLARE

$$\underbrace{\lambda_x (\bar{x} - x)}_{\text{COME VOGLIO CONTROLLARE}} = J_x \dot{q}$$

$$\lambda_x J_x^{+} (\bar{x} - x) = \dot{q}$$

$\dot{q}$ VAR CVS

$$\underline{m} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

DoF MANIPOLATORE

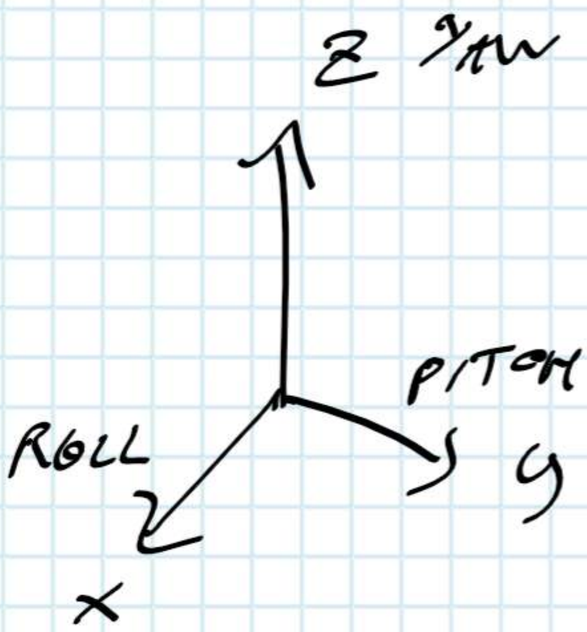
$$\underline{c} = \begin{bmatrix} q \\ \eta_L \\ \eta_A \end{bmatrix}$$

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{7 \times 1}$$

$$\dot{\underline{c}} = \dot{\underline{q}}$$

$$\eta_L = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\eta_A = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{ROLL} \\ \text{PITCH} \\ \text{YAW} \end{matrix}$$



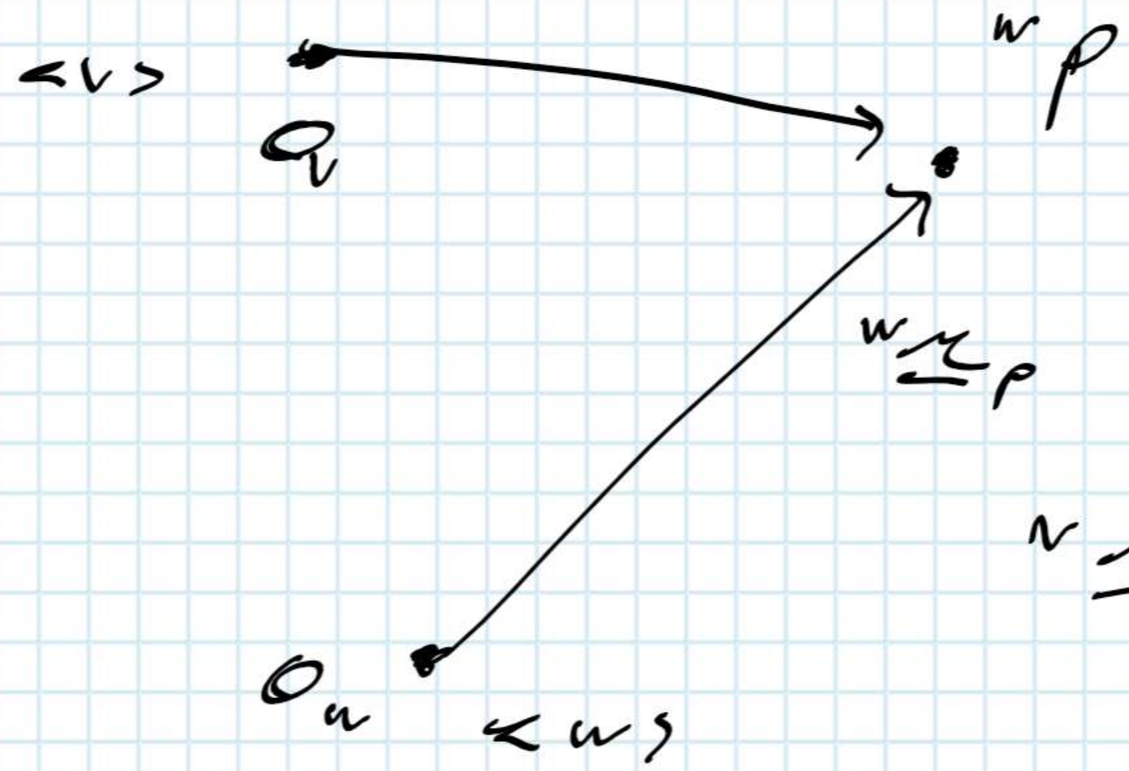
$$ {}^{v}\dot{\underline{m}} = \begin{bmatrix} {}^{v}\dot{x} \\ {}^{v}\dot{y} \\ {}^{v}\dot{z} \end{bmatrix} = $$

$$ = \underbrace{\left[\emptyset_{3\times 7} \;\vdots\; \underset{3\times 3}{I} \;\vdots\; \emptyset_{3\times 5} \right]}_{{}^{v}\underline{S}_{m}} \begin{bmatrix} \underline{q} \\ {}^{v}\underline{\dot{\eta}}_{L} \\ {}^{v}\underline{\dot{\eta}}_{A} \end{bmatrix} \leftarrow \dot{\underline{m}} $$

$$ \overset{0.2}{\downarrow} \quad \dot{d}_{m} \left({}^{v}\dot{\underline{m}} - {}^{v}\underline{m} \right) = -\dot{d}_{am}\, {}^{v}_{n}R\, \underline{z}_{p} $$

$$ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

$\boxed{\text{FUNZIONA?}}$



$$ {}^{v}\underline{z}_{p} = {}^{v}_{w}R\, {}^{w}\underline{z}_{p} $$

$$ {}^{v}_{w}R = {}^{v}_{u}T(1:3,\ 1:3) $$

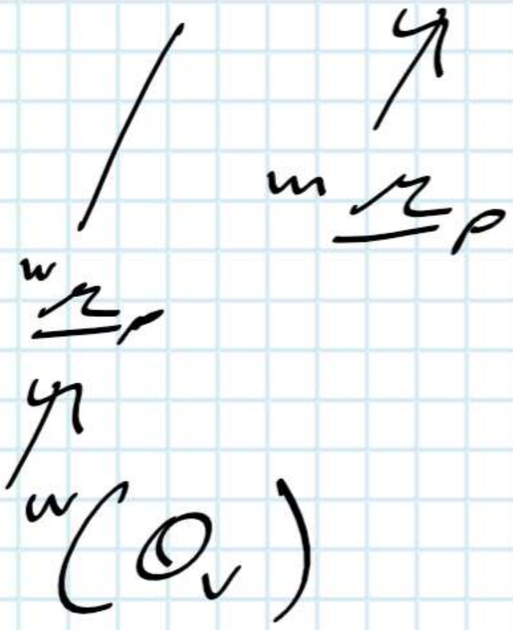
$$ {}^{v}_{u}T \quad \text{UVMS.} \quad {}^{v}T_{w} $$

$$ \left[\begin{array}{c|c} {}^{v}_{u}R & {}^{v}O_{w} \\ \hline \underset{3\times 3}{0} & \end{array} \right] $$

$$ {}^{w}\underline{m} = \underbrace{{}^{w}_{v}R \; {}^{v}J_{m} \; {}^{v}\underline{\dot{q}}} $$

$$ {}^{w}J_{m} = \left[\; 0_{3\times 7} \; \vdots \; {}^{w}_{v}R \; \vdots \; 0_{3\times 3} \; \right] $$

$$ \dot{d}_{m} \left({}^{w}\underline{\bar{m}} - {}^{w}\underline{m} \right) $$



METODO DEL PROF.

PROSSIMA VOLTA:
CALCOLARE TASK JACOBIAN ANGULAR
E SIMULARE

Regole di Derivazione

Strap-down equations (STRD)

(derivata della orientation matrix)

① $${}^a_b\dot{R} = \left[{}^a\underline{\omega}_{b/a} \wedge\right] {}^a_bR$$

② $${}^a_b\dot{R} = {}^a_bR \left[{}^b\underline{\omega}_{b/a} \wedge\right]$$

Proiezione della derivata del vettore (PROS DER)

Supponiamo di conoscere ${}^b\dot{\underline{s}}(t)$ ma di voler usare il frame <a> come punto di vista.

Non vale la seguente: ${}^a\dot{\underline{s}} = {}^a_bR\, {}^b\dot{\underline{s}}$!! NO !!

La relazione corretta è

$${}^a\dot{\underline{s}}(t) = {}^a\left({}^b\dot{\underline{s}}(t)\right) + {}^a\left(\underline{\omega}_{b/a} \wedge {}^b\underline{s}(t)\right)$$

corrisponde a

① $${}^a_bR \left[{}^b\underline{\omega}_{b/a} \wedge\right] {}^b\underline{s}$$

② $$\left[{}^a\underline{\omega}_{b/a} \wedge\right] {}^a_bR\, {}^b\underline{s}$$

Nota bene: ${}^a\dot{\underline{s}} = {}^aD_a\, \underline{s}$ ${}^b\dot{\underline{s}} = {}^bD_b\, \underline{s}$

PROS

frame derivatore

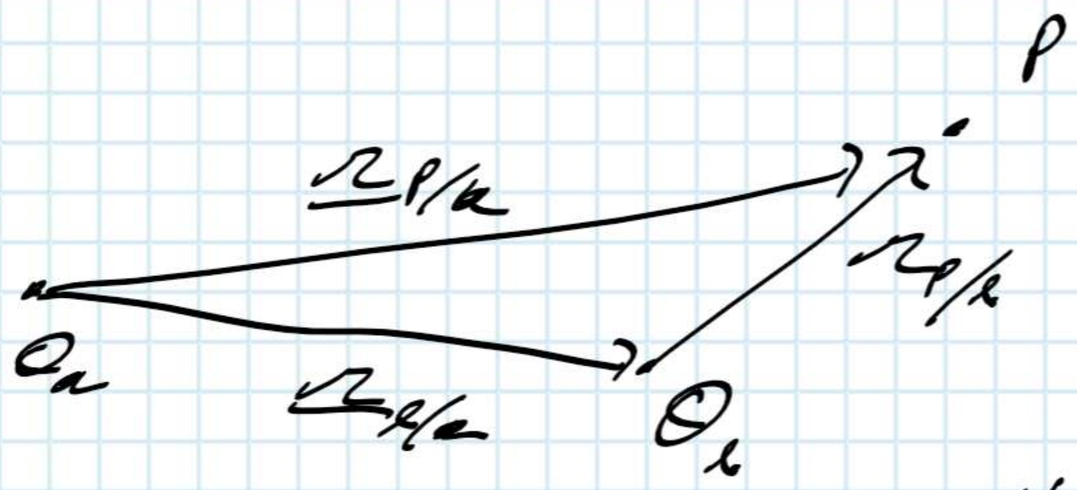
$${}^a(D_a\underline{s}) = {}^a\left(D_b\underline{s} + \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s}\right)$$

CAMBIO DI FRAME DERIVATORE PER VETTORI (FFC DER)

SUPPONIAMO DI CONOSCERE $D_b \underline{s}$ MA DI VOLER OTTENERE DA QUESTO LA DERIVATA RISPETTO AD $\langle a \rangle$.
ALLORA, IN FFC,

$$D_a \underline{s} = D_b \underline{s} + \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s}$$

DERIVATA DI UN RAGGIO VETTORE (RAY DER)



$$\underline{v}_{P/b} = D_b \underline{r}_{P/b}$$

$$D_a \underline{r}_{P/a} = \underbrace{\underline{v}_{b/a}}_{D_a \underline{r}_{b/a}} + \underbrace{\underline{v}_{P/b} + \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{r}_{P/b}}_{D_a \underline{r}_{P/b}}$$

$D_a(O_b - O_a)$

$D_a \underline{r}_{P/b}$ RICORDA CHE

$$D_a(P - O_b) = D_b(P - O_b) + \underline{\omega}_{b/a} \wedge (P - O_b)$$

DERIVATA DI UN VETTORE A MODULO COSTANTE (CONST DER)

SIA $D_b \underline{s}$ TC $|\underline{s}| = \gamma \ \forall t$ HA MODULO COSTANTE

$$D_a \underline{s} = \underbrace{\cancel{D_b \underline{s}}}_{\substack{\emptyset \\ \text{PERCHÉ IL} \\ \text{MODULO È} \\ \text{COSTANTE}}} + \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s} = \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s}$$

$$\dot{\sigma} = 0$$

(CONST DER) $\quad D_a \underline{s} = \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s}$

PIÙ PRECISAMENTE SIA $\underline{s} = \underline{m}\sigma$ DOVE $\underline{m}$ È LA DIREZIONE DI $\underline{s}$ E σ IL SUO MODULO TC $\dot{\sigma} = 0$

$$D_a \underline{s} = \left(\underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{m}\right)\sigma$$

QUESTO È DIVERSO DAL VETTORE NULLO SOLO SE I DUE VETTORI NON SONO PARALLELI

ES È ORTOGONALE SIA A $\underline{\omega}_{b/a}$ CHE A $\underline{m}$

$$D_a \underline{s} \cdot \underline{m} = m \cdot \left(\underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{m}\right) \underline{s} = \underline{\emptyset}$$

IL VETTORE NON VARIA IN DIREZ $\underline{m}$ (INFATTI IL SUO MODULO È COSTANTE)

DERIVATA DI UN VETTORE

(AQ 1)

$$\underline{s} = \underline{n}\,\sigma$$

MODULO

VERSORE

$\dot{\sigma} \geq 0 \quad \forall t$

$|\underline{n}(t)| = 1 \quad \forall t$

$$D_a \underline{s} = \sigma \underbrace{D_a \underline{n}}_{\text{PER DIRE DI PIÙ,}} + \underline{n} \underbrace{D_a \sigma}_{\text{UGUALE PER TUTTI I FRAME}} = \dot{\sigma}$$

$D_a \underline{n} = \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{n}$

(questa non è meccanica quantistica!)

$$D_a \underline{s} = \underline{n}\, D_a |\underline{s}| + \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s} + \sigma D_a \underline{n}$$

IL RISULTATO INDIVIDUA UNA COMPONENTE PARALLELA AL VETTORE E UNA ORTOGONALE AL VETTORE

(AQ 2) $$D_a \underline{s} = \underline{n}(\underline{n}\cdot) D_a \underline{s} + \left[I_{3\times3} - \underline{n}(\underline{n}\cdot) \right] D_a \underline{s}$$

DOVE $(\underline{n}\cdot) = \underline{n}^T$

DERIVATA DEL DISALIGNMENT VECTOR (DAD)

$$D_a \underline{\rho}_{b/a} = \left[\underline{n}(\underline{n}\cdot) + N_a(\theta) \right] \underline{\omega}_{b/a}$$

DOVE $\underline{\rho}_{b/a} = \underline{n}\,\theta$

FORMULE SULLE DERIVATE

(STREP) ① $\dot{{}^a_b R} = [{}^a\underline{\omega}_{b/a}]\, {}^a_b R$

② $\dot{{}^a_b R} = {}^a_b R\, [{}^b\underline{\omega}_{b/a}]$

NOTA: LA MATRICE DI ORIENTAZ HA DERIVATA UGUALE RISPETTO A QUALSIVOGLIA FRAME

$D_a\, {}^a\underline{s} = {}^a({}^bD_b\, \underline{s}) + {}^a({}^b\underline{\omega}_{b/a} \wedge {}^b\underline{s})$

(PROD DER) ${}^a\dot{\underline{s}} = {}^a({}^b\dot{s}) + {}^a({}^b\underline{\omega}_{b/a} \wedge {}^b\underline{s})$

${}^aD_a\underline{s}$

① $= \dots + {}^a[\underline{\omega}_{b/a} \wedge]\, {}^a_b R\, {}^b\underline{s}$

② $= \dots + {}^a_b R\, [{}^b\underline{\omega}_{b/a} \wedge]\, {}^b\underline{s}$

(RFC DER) $D_a\, \underline{s} = D_b\, \underline{s} + \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s}$

(RAY DER) $D_a\, \underline{r}_{P/b} = \overbrace{D_a\, \underline{r}_{b/a}}^{\text{COINCIDONO (O, PIACE)}} + D_b\, \underline{r}_{P/b} + \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{r}_{P/b}$

NON COINCIDONO (MA O, PIACE)

$(D_a\, \underline{r}_{b/a} + D_a\, \underline{r}_{P/b})$

(CONST DER) $\underline{s}$ DI MODULO COSTANTE

$D_a\, \underline{s} = \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s}$

(AOD 1) $D_a\, \underline{s} = \dot{\sigma}\, \underline{u} + \sigma D_a\, \underline{u}$

$\underline{s} = \underline{u}\, \sigma$ $\quad \underline{u} \parallel \underline{s}$ $\quad D_a\underline{u} \perp \underline{s}$

(AOD 2) $D_a\, \underline{s} = \underbrace{\underline{u}\,(\underline{u}\cdot)\, D_a\, \underline{s}}_{\underline{u}\cdot D_a\underline{s}} + [I - \underline{u}\,(\underline{u}\cdot)]\, D_a\, \underline{s}$

DOVE $\underline{s} = \underline{u}\, \sigma$

(DAD) $D_a\, \underline{\rho}_{b/a} = [\underline{u}\,(\underline{u}\cdot) + N_k(\theta)]\, \underline{\omega}_{b/a}$

$\underline{\rho}_{b/a} = \underline{u}\, \theta$

SIA LA DISTANZA TRA IL VINCOLO E IL PUNTO DA RAGGIUNGERE

$$d = \underbrace{(P - O_v)}_{\underline{r}} \cdot \underbrace{\frac{\underline{n}}{\underline{r}}}_{} = \underline{r} \cdot \underline{n}$$

SEMPRE ALLINEATO AL RAGGIO VETTORE E COSTANTE IN MODULO, $|\underline{n}| = 1$

$$\underline{n} = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}$$

$$\dot{d} = D_v \underline{r} \cdot \underline{n} + \cancel{\underline{r} \cdot \underbrace{D_v \underline{n}}} =$$

$D_v \underline{n} \perp \underline{n}$ PERCHÉ $\underline{n}$ NON PUÒ CAMBIARE IN MODULO

$$= D_v (P - O) \cdot \underline{n}$$

E DATO CHE $\underline{r} = \underline{n} d$ ALLORA

$D_v \underline{n} \perp \underline{r}$ DA CUI

$$\underline{r} \cdot D_v \underline{n} = 0$$

MEGLIO FARE I CONTI RISPETTO AL WORLD FRAME

$$\dot{d} = {}^w\underline{n} \cdot \left({}^w\underline{v}_{p/v} - {}^w\underline{v}_{v/w} \right)$$

$${}^w\underline{v}_{p/v} = {}^w_vR \, {}^v\underline{v}_{p/v} + \left[{}^w\underline{\omega}_{v/w} \wedge \right] {}^w_vR \, {}^v\underline{r}_{p/v}$$

$${}^w\underline{n} = {}^w_vR \frac{{}^v\underline{r}_{p/v}}{|{}^v\underline{r}_{p/v}|} \quad \text{IN CASO...}$$

$${}^w\underline{\jmath} = -({}^w\underline{n} \cdot) \left[O_{3\times4} \,\vdots\, O_{3\times3} \,\vdots\, {}^w_vR \right] \in \mathbb{R}^{1\times13}$$

O ANCHE MEGLIO

RESTRINGO

$${}^w\underline{v}_{v/w} = {}^w_vR \, {}^v\underline{v}_{v/w} + \text{PARTE CHE COL } \cdot \text{ NON DARÀ}$$

$${}^w\underline{\jmath}$$

$$\dot{d} = {}^w\underline{n} \cdot \left({}^w\underline{v}_{p/w} - {}^w\underline{v}_{v/w} \right) =$$

$$= {}^w(\underline{n} \cdot) \, {}^w\underline{v}_{p/w} \underbrace{- ({}^w\underline{n} \cdot) \left[O_{3\times7} \,\vdots\, I_{3\times3} \,\vdots\, O_{3\times3} \right]}_{{}^w\underline{\jmath}} \begin{bmatrix} \dot{\underline{q}} \\ {}^w\dot{\eta}_c \\ {}^w\dot{\eta}_A \end{bmatrix}$$

RACCOLGERE UNA CERTA ORIENTAZ

DATO UN GRAL FRAME $\langle g \rangle$
È POSSIBILE CALCOLARE IL DISALLINEAMENTO TRA $\langle v \rangle$ E $\langle g \rangle$

$$\underline{\xi}_{g/v} = \underline{\mu} \left| \underline{\xi}_{g/v} \right|$$

POSSO TROVARE LA METRICA DIRETTAMENTE DALLA CONFIGURAZ:

$$^{v}\dot{\underline{m}} = \underbrace{\left[\mathbb{O}_{3\times 7} \,\vdots\, \mathbb{O}_{3\times 3} \,\vdots\, \underset{3\times 3}{\Sigma} \right]}_{^{v}\mathcal{J}} \begin{bmatrix} \dot{\underline{q}} \\ \dot{\eta}_L \\ \dot{\eta}_A \end{bmatrix}$$

$$^{w}\dot{\underline{m}} = \underbrace{\left[\mathbb{O}_{3\times 7} \,\vdots\, \mathbb{O}_{3\times 3} \,\vdots\, {}^{w}_{v}R \right]}_{^{w}\mathcal{J}} \, ^{v}\mathcal{J}$$

METODO DEL PROF

NOTA CHE LA METRICA È STATA OTTENUTA DIRETTAMENTE GUARDANDO $^{v}\mathcal{J}$ E NON IL METODO "CLASSICO" (FORMULA UNA METRICA E DERIVALA)

NOTAZIONI SULLE DERIVATE

SIA IL VETTORE (FFC) $\underline{s}(t)$ ARBITRARIO, $\underline{s}(t) = \underline{n}(t)\,\sigma(t)$

- $\underline{n}(t)$ VERSORE
- $\sigma(t) \geq 0 \quad \forall t$

$$\boxed{{}^a\dot{\underline{s}} = {}^aD_a\,\underline{s}}$$

VETTORE ① DERIVATO IN $\langle a \rangle$

② PROIETTATO IN $\langle a \rangle$

SCRITTURA "ELEMENTARE"

NOTE DEL PROF RIGUARDO QUESTA SCRITTURA.

① $${}^a\dot{s}(t) \neq {}^a_bR\;{}^b\dot{s}(t)$$

MA $${}^a({}^b\underline{s}(t)) = {}^a_bR\;{}^b\underline{s}(t)$$

SCRITTO ESPLICITAMENTE, $${}^a({}^b\dot{\underline{s}}(t)) = {}^a({}^bD_b\,\underline{s}(t)) = {}^a_bR\;{}^bD_b\,\underline{s}(t)$$

LA PRIMA NON HA SENSO PERCHÉ IMPLICHEREBBE UN CAMBIO DI FRAME DI DERIVAZIONE (È UN ABUSO DI NOTAZIONE).

② $${}^aD_b\,\underline{s}(t) \neq {}^a({}^bD_b\,\underline{s}(t))$$

QUESTO SI SPIEGA TENENDO PRESENTI DUE NOTAZIONI:

① ${}^a\dot{\underline{s}} = {}^aD_a\,\underline{s}$ QUELLA DATA SOPRA

② $D\,{}^a\underline{s} = {}^a\dot{\underline{s}}$ PIÙ SPECIFICA: $D({}^a\underline{s}) = D_a({}^a\underline{s}) = {}^aD_a\,\underline{s}$

$= D({}^a\underline{s})$ QUESTA DERIVATA È SOTTINTESA ESSERE FATTA RISPETTO AD $\langle a \rangle$

QUINDI NON C'È A PRIORI NULLA DI SBAGLIATO NELLO SCRIVERE LA SEGUENTE:

$$ {}^a\dot{s} = \overset{{}^aD_a \underline{s}}{D_a({}^a\underline{s})} = D({}^a_bR\,{}^b\underline{s}) = D_a({}^a_bR\,{}^b\underline{s}) $$

QUESTA NOTAZIONE CORRISPONDE A UNIRE A PORTARE LA MATRICE DI ORIENTAZIONE SOTTO SEGNO DI DERIVATA!

QUINDI $ {}^aD_b\,\underline{s} \neq {}^a({}^bD_b\,\underline{s}) $

$$ = D_b(\underbrace{{}^a_bR^T}\,{}^a\underline{s}) \qquad = \underbrace{{}^a_bR\,D_b}({}^b\underline{s}) $$

RIASSUMENDO – NOTAZIONI PER LE DERIVATE

OGNI NOTAZIONE ESPLICITA IL RAGIONAMENTO USATO PER OTTENERE LA DERIVATA INDICATA.

1. $^{a}D_{a}\underline{s}$ PRENDI IL FFC VECTOR $\underline{s}$
DERIVALO RISPETTO AD $\langle a \rangle$
E PROIETTALO RISPETTO AD $\langle a \rangle$

2. $^{a}\dot{\underline{s}} = {}^{a}D_{a}\underline{s}$ IN MANIERA PIÙ SINTETICA LA (1)

3. $D_{a}(^{a}\underline{s})$ PRENDI $\underline{s}$
PROIETTA IN $\langle a \rangle$
DERIVA LA PROJ RISPETTO AD $\langle a \rangle$

4. $^{a}D_{a}\underline{s} = D_{a}(^{a}s)$
E $^{a}D_{b}\underline{s} = D_{b}(^{a}\underline{s}) = D_{b}({}^{a}_{b}R\,{}^{b}\underline{s})$

5. $^{a}(^{b}\dot{\underline{s}}(t)) = {}^{a}_{b}R\,{}^{b}\dot{\underline{s}}(t)$

6. $^{a}D\,^{b}\underline{s} = {}^{a}_{b}R\,{}^{b}D_{b}\underline{s} = {}^{a}(^{b}\dot{\underline{s}}(t))$
OGNI TANTO SI TROVA ANCHE LA SCRITTURA
$D\,^{b}\underline{s} = {}^{b}D_{b}\underline{s} = D_{b}(^{b}\underline{s})$

7. $D_{a}\underline{s} \neq D\,^{a}\underline{s}$ PERCHÉ LA PRIMA È UNA FORMA FFC, LA SECONDA È UNA PROJ FORM.

RAGIONAMENTI "STRANI" CON LE DERIVATE

SIA $\underline{s}$ UN VETTORE RFC,

$\underline{s} \rightsquigarrow {}^a\underline{s}$ PER FORMULAZIONE DIRETTA (MAPPA IN $\langle a \rangle$)

$\underline{s} \rightsquigarrow {}^b\underline{s}$ PER FORMULAZIONE DIRETTA (MAPPA IN $\langle b \rangle$)

TRA LE DUE PROIEZIONI VIGE LA REGOLA:

$$ {}^a\underline{s} = {}^a_bR\, {}^b\underline{s} \quad \text{E} \quad {}^b\underline{s} = {}^a_bR^T\, {}^a\underline{s} $$

DATA TRA I FRAME $\langle a \rangle$ E $\langle b \rangle$ UNA MATRICE DI ORIENTAZIONE ${}^a_bR$.

CONSIDERIAMO ORA LA DERIVATA:

"$D\underline{s}$" CHI È IL FRAME CHE DERIVA? BOH.

CHI È IL FRAME DI PROIEZIONE? NESSUNO.

QUESTA NOTAZIONE NON HA SENSO. PER FARE UNA DERIVATA CI VUOLE UN OSSERVATORE, SEMPRE.

DATI $\langle a \rangle$ E $\langle b \rangle$ ESISTONO $D_a\underline{s}$ E $D_b\underline{s}$ MA NON $D\underline{s}$.

$$ D_a\underline{s} \rightsquigarrow D_a\, {}^a\underline{s} \qquad {}^aD_a\underline{s} $$

ASSEGNAZIONE DIRETTA DI UN FRAME

$$ D_a\underline{s} \rightsquigarrow D_a\, {}^b\underline{s} = D_a\left({}^b_aR\, {}^a\underline{s}\right) = $$

$$ = D_a\left({}^b_aR\right){}^a\underline{s} + {}^b_aR\, D_a\left({}^a\underline{s}\right) $$

$$ = {}^b_aR\left[{}^a\underline{\omega}_{a/w} \wedge\right]{}^a\underline{s} + {}^b_aR\, {}^a\dot{\underline{s}} = $$

$$ = {}^b\left({}^a\underline{\omega}_{a/b} \wedge {}^a\underline{s} + {}^a\dot{\underline{s}}\right) = D_b\, {}^b\underline{s} $$

${}^bD_a\underline{s}$

LA REGOLA SCRITTA NEL PRECEDENTE SOMMARIO:

$$D_a\left({}^a\underline{s}\right) = {}^a\left({}^b\dot{\underline{s}} + {}^b\underline{\omega}_{b/a} \wedge {}^b\underline{s}\right)$$

AVREI POTUTO USARE <C> E NULLA SAREBBE CAMBIATO POICHÉ NON C'È LEGAME TRA I DUE TERMINI

QUELLA CHE HO TROVATO IO:

$$\boxed{D_a\, {}^b\underline{s} = D_b\, {}^b\underline{s}}$$

$$\cancel{D_a\left({}^b\underline{s}\right) = {}^b\left({}^a\dot{\underline{s}} + {}^a\underline{\omega}_{a/b} \wedge {}^a\underline{s}\right)}$$

$$\cancel{D_b\left({}^a\underline{s}\right) = {}^a\left({}^b\dot{\underline{s}} + {}^b\underline{\omega}_{b/a} \wedge {}^b\underline{s}\right)}$$

PERCHÉ IL TEMPO È LO STESSO PER OGNI FRAME E ${}^b\underline{s}(t)$ È UN VETTORE NUMERICO NON GEOMETRICO.

L'ALTRA REGOLA CON PPC:

$$D_a\,\underline{s} = D_b\,\underline{s} + \omega_{b/a} \wedge \underline{s}$$

DEDOTTA... COME?

$$D_a\,\underline{s} = D_b\,\underline{s}$$

$$D_a\left({}^a\underline{s}\right) = D_a\left({}^a_bR\,{}^b\underline{s}\right) =$$

$$= D_a\left({}^a_bR\right){}^b\underline{s} + {}^a_bR\, D_a\, {}^b\underline{s}$$

???

$$D_a\left({}^a_bR\right) = D_b\left({}^a_bR\right)$$

PERCHÉ IL FRAME DERIVATORE CAMBIA???

Let us now formally derive the correct relationship between the two time derivatives. Let us consider the time derivative of the projected vector ${}^a\boldsymbol{s}(t)$, but this time let us express it as the result of the projection on frame $\langle a\rangle$ of ${}^b\boldsymbol{s}(t)$, that is:

$${}^a\dot{\boldsymbol{s}}(t) = D^a\boldsymbol{s}(t) = D\left({}^a_b\boldsymbol{R}\,{}^b\boldsymbol{s}(t)\right) = {}^a_b\boldsymbol{R}\left(D^b\boldsymbol{s}(t)\right) + {}^a_b\dot{\boldsymbol{R}}\,{}^b\boldsymbol{s}(t) = {}^a_b\boldsymbol{R}\,{}^b\dot{\boldsymbol{s}}(t) + {}^a_b\dot{\boldsymbol{R}}\,{}^b\boldsymbol{s}(t), \tag{2.62}$$

$${}^aD_a\,\underline{s} = D_{??}\left({}^a_bR\,{}^b\underline{s}\right) = {}^a_bR\, D_b\left({}^b\underline{s}\right) + \ldots$$

???

$$D_a({}^a\underline{s}) = D_a({}^a_bR\,{}^b\underline{s}) \begin{cases} ① = {}^a_bR\,D_a\,{}^b\underline{s} + {}^a_bR[\omega_{b/a}\wedge]\,{}^b\underline{s} \\ ② \quad {}^a_bR\,D_b\,{}^b\underline{s} + {}^a_bR[\omega_{b/a}\wedge]\,{}^b\underline{s} \end{cases}$$

PFC: $D_a\,\underline{s} = D_b\,\underline{s}$

QUINDI $D_a\,{}^a\underline{s} = \underset{①}{D_a({}^a_bR\,{}^b\underline{s})} \overset{??}{=} \underset{②}{D_b({}^a_bR\,{}^b\underline{s})}$

$$D_a\,{}^b\underline{s} \overset{?}{=} D_b\,{}^b\underline{s}$$

① $D_a\,\underline{s} = D_b\,\underline{s} + \underline{\omega}_{b/a}\wedge\underline{s}$

② ${}^a(D_a\,\underline{s}) = {}^a(D_b\,\underline{s} + \underline{\omega}_{b/a}\wedge\underline{s}) =$

$= D_a\,{}^a\underline{s}$

$= {}^a(D_b\,\underline{s}) + {}^a(\underline{\omega}_{b/a}\wedge\underline{s}) =$

$= {}^a(D_b\,{}^b\underline{s}) + {}^a_bR[{}^b\underline{\omega}_{b/a}\wedge]\,{}^b\underline{s}$

$$D_b({}^a\underline{s}) = D_b({}^a_b R\, {}^b\underline{s}) = \qquad D_a({}^b\underline{s}) = {}^b_a R\left[{}^a\underline{\omega}_{a/b} \wedge\right]{}^b\underline{s} + {}^b_a R\, D_a({}^a\underline{s})$$

$$= D_b({}^a_b R)\,{}^b\underline{s} + {}^a_b R\, D_b({}^b\underline{s})$$

$$= {}^a_b R\left[{}^b\underline{\omega}_{b/a} \wedge\right]{}^b\underline{s} + {}^a_b R\, D_b({}^b\underline{s}) \quad *$$

$$D_b({}^a\underline{s}) = D_b({}^b_a R\, {}^a\underline{s}) =$$

$$= D_a({}^b_a R)\,{}^a\underline{s} + {}^b_a R\, D_b({}^a\underline{s}) =$$

$$= {}^b_a R\left[{}^a\underline{\omega}_{a/b} \wedge\right]{}^a\underline{s} + {}^b_a R\, \overbrace{D_b({}^a\underline{s})}^{*} =$$

$$= \underbrace{{}^b_a R\left[{}^a\underline{\omega}_{a/b} \wedge\right]{}^a\underline{s}}_{= {}^b(\underline{\omega}_{a/b} \wedge \underline{s})} + {}^b_a R\left[{}^a_b R\underbrace{\left[{}^b\underline{\omega}_{b/a} \wedge\right]{}^b\underline{s}}_{= {}^b(\underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s})} + {}^a_b R\, D_b({}^a\underline{s})\right] = X$$

$$\underline{\omega}_{a/b} = -\underline{\omega}_{b/a}$$

$$X = -\cancel{{}^b(\underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s})} + \cancel{{}^b(\underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s})} + D_b({}^a\underline{s}) =$$

$$= D_b({}^a\underline{s}) \qquad \text{ovvero} \qquad D_b({}^b\underline{s}) = D_b({}^a\underline{s})$$

ok!

$$D_b({}^a\underline{s}) = {}^a_b R\left[{}^b\underline{\omega}_{b/a}\wedge\right]{}^b\underline{s} + {}^a_b R\, D_b({}^b\underline{s}) \quad (B)$$

$$D_b({}^b\underline{s}) = {}^b_a R\left[{}^a\underline{\omega}_{a/b}\wedge\right]{}^a\underline{s} + {}^b_a R\, D_b({}^a\underline{s}) \quad (B)$$

$$D_a({}^b\underline{s}) = {}^b_a R\left[{}^a\underline{\omega}_{a/b}\wedge\right]{}^a\underline{s} + {}^b_a R\, D_a({}^a\underline{s}) \quad (A)$$

$$D_a({}^a\underline{s}) = {}^a_b R\left[{}^b\underline{\omega}_{b/a}\wedge\right]{}^b\underline{s} + {}^a_b R\, D_a({}^b\underline{s}) \quad (A)$$

(A) $D_a({}^b\underline{s}) = D_a({}^a\underline{s})$

(B) $D_b({}^a\underline{s}) = D_b({}^b\underline{s})$

$$D_a({}^a\underline{s}) = D_b({}^a\underline{s})$$

SONO UGUALI
QUINDI DALL'UGUAGLIANZA SI
ELIMINANO

$$D_a({}^a\underline{s}) = {}^a_b R\left[{}^b\underline{\omega}_{b/a}\wedge\right]{}^b\underline{s} + {}^a_b R\, D_a({}^b\underline{s})$$

$$D_b({}^a\underline{s}) = {}^a_b R\left[{}^b\underline{\omega}_{b/a}\wedge\right]{}^b\underline{s} + {}^a_b R\, D_b({}^b\underline{s})$$

FATTOR COMUNE

PERÒ CASÌ FACENDO
DOVREI DIMOSTRARE

$$D_b({}^b\underline{s}) = D_b({}^a\underline{s})$$

$D_a({}^b\underline{s}) = D_b({}^a\underline{s})$ ... CICLO

SEGUE INNOVARE

$$D_b({}^a\underline{s}) = {}^a_b R\left[{}^b\underline{u}_{A/a}\Lambda\right]{}^b\underline{s} + {}^a_b R\, D_b({}^b\underline{s}) \quad (B)1$$

$$D_b({}^b\underline{s}) = {}^b_a R\left[{}^a\underline{u}_{a/b}\Lambda\right]{}^a\underline{s} + {}^b_a R\, D_b({}^a\underline{s}) \quad (B)2$$

$$D_a({}^b\underline{s}) = {}^b_a R\left[{}^a\underline{u}_{a/b}\Lambda\right]{}^a\underline{s} + {}^b_a R\, D_a({}^a\underline{s}) \quad (A)1$$

$$D_a({}^a\underline{s}) = {}^a_b R\left[{}^b\underline{u}_{b/a}\Lambda\right]{}^b\underline{s} + {}^a_b R\, D_a({}^b\underline{s}) \quad (A)2$$

DEVO DIMOSTRARE $D_a({}^a\underline{s}) = D_b({}^a\underline{s})$

$$D_a({}^a\underline{s}) = {}^a_b R\left[{}^b\underline{u}_{b/a}\Lambda\right]{}^b\underline{s} + {}^a_b R\, D_a({}^b\underline{s}) \quad (A2)$$

NOTA: $${}^a_b R\left[{}^b\underline{u}_{A/a}\Lambda\right]{}^b\underline{s} = D_b({}^a\underline{s}) - {}^a_b R\, D_b({}^b\underline{s}) \quad (B1)$$

LA (A2) SI PUÒ RIELABORARE ALLO STESSO MODO,

$$D_a({}^a\underline{s}) - {}^a_b R\, D_a({}^b\underline{s}) = D_b({}^a\underline{s}) - {}^a_b R\, D_b({}^b\underline{s})$$

ABBIAMO DIMOSTRATO PRIMA CHE

$$D_a({}^a\underline{s}) = D_a({}^b\underline{s}) \quad \text{E} \quad D_b({}^b\underline{s}) = D_b({}^a\underline{s})$$

SI DEDUCE QUINDI CHE

$$\left[I - {}^a_b R\right] D_a({}^b\underline{s}) = \left[I - {}^a_b R\right] D_b({}^a\underline{s})$$

QUINDI $D_a({}^b\underline{s}) = D_b({}^a\underline{s})$

$$ {}^a_b\dot{R} = \left[{}^a\underline{\omega}_{b/a} \wedge\right] {}^a_bR = {}^a_bR\left[{}^b\underline{\omega}_{b/a} \wedge\right] $$

$$ {}^b_a\dot{R} = \left[{}^b\underline{\omega}_{a/b} \wedge\right] {}^b_aR = $$

$$ = -\left[{}^b\underline{\omega}_{b/a} \wedge\right] {}^b_aR = $$

$$ = -\underbrace{{}^a_bR\left[{}^b\underline{\omega}_{b/a} \wedge\right]}_{{}^a_b\dot{R}} {}^b_aR = $$

$$ = -{}^a_b\dot{R}\,{}^a_bR^T $$

$\underline{s}$ FFC VECTOR

$$ {}^a\underline{s} = {}^a(\underline{s}) $$

ASSEGNAZIONE DI UN FRAME AL VETTORE FFC $\underline{s}$

$$ {}^a_b\dot{R} = \left[{}^a\underline{\omega}_{b/a} \wedge\right] {}^a_bR $$

$$ {}^b_a\dot{R} = -{}^a_b\dot{R}\,{}^a_bR^T $$

① $ {}^a\underline{u} \cdot {}^a\underline{v} = ({}^a\underline{u} \cdot){}^a\underline{v} $

DOVE $\bullet$ DENOTA LA TRASPOSTA DEL VETTORE

② CLASSICO

$$ {}^a\underline{u} \cdot {}^a\underline{v} = {}^a\underline{u}^T\,{}^a\underline{v} $$

$\underline{u}, \underline{v}$ FFC VECTORS

$$ d = \underline{u} \cdot \underline{v} = {}^a(\underline{u} \cdot \underline{v}) $$

$\forall a \in \mathcal{A}$

$\underline{u}, \underline{v}$ FFC VECTORS

$$ {}^a(\underline{u} \wedge \underline{v}) = {}^a(\underline{u}) \wedge {}^a(\underline{v}) $$

$$ {}^a(\underline{u} \cdot \underline{v}) = {}^a(\underline{u}) \cdot {}^a(\underline{v}) $$

SULLE ASSEGNAZIONI HO PIENA LIBERTÀ IN BASE A QUANTO MI VIENE PIÙ COMODO

ES: ${}^a(\underline{u}) = {}^a\underline{u}$ NEL CASO DISPONESSI DI UNA PROIEZIONE GIÀ PRONTA DEL VETTORE

ES: ${}^a(\underline{u}) = {}^a({}^b\underline{u}) = {}^a_bR\,{}^b\underline{u}$ NEL CASO DISPONESSI DI UN'ALTRA PROIEZIONE.

$$ {}^a(\underline{u} \wedge \underline{v}) = {}^a(\underline{u}) \wedge {}^a(\underline{v}) = $$

(INUTILE MA CHIARISCE) $\rightarrow$ $= {}^a\underline{u} \wedge {}^a(\underline{v}) =$

$$ = \left[{}^a\underline{u} \wedge\right] {}^a(\underline{v}) $$

DOVE

$$ {}^a\underline{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \left[{}^a\underline{u} \wedge\right] = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^a\underline{u} \wedge {}^a\underline{v} = $$

$$ = {}^a(\underline{u}) \wedge {}^a(\underline{v}) $$

$$ = {}^a(\underbrace{\underline{u} \wedge \underline{v}}_{\text{FFC}}) $$

PROJ SN

$$ \{a\} \xrightarrow{{}^a_b R} \{b\} $$

$$ \left[{}^a\underline{u} \wedge\right] = {}^a_b R \left[{}^b\underline{u} \wedge\right] $$

$D\,\underline{s}$ o ANCHE $\frac{d}{dt}\underline{s}$

$\underline{s}$ FFC VETTORE

$$ D_a\,\underline{s} \neq D_b\,\underline{s} $$

x SCALARE

$$ D\,x = D_a\,x = D_b\,x = \ldots $$

$\langle a \rangle$ FRAME OSSERVATORE

$\underline{s}$ RFC VECTOR

NOTA: ${}^a\underline{s} = {}^a(\underline{s})$

- $D_a({}^a\underline{s})$ DENOTA LA DERIVATA DELLA PROIEZIONE DI $\underline{s}$ IN $\langle a \rangle$

ALTRA NOTAZ: $D_a({}^a\underline{s}) = D_a\,{}^a(\underline{s})$

- ${}^aD_a\,\underline{s}$ DENOTA L'ASSEGNAZIONE DEL FRAME $\langle a \rangle$ ALLA DERIVATA RFC DI $\underline{s}$

ALTERNATIVA: ${}^aD_a\,\underline{s} = {}^a(D_a\,\underline{s})$

CHIARISCE IL FATTO CHE STIAMO ASSEGNANDO IL FRAME PIÙ CHE PROIETTANDO

- ${}^a\dot{\underline{s}} = D_a({}^a\underline{s})$ NOTAZIONE COMPATTA TIPICA

$$ {}^{a}\dot{\underline{s}}(t) \neq {}^{a}_{b}R\, {}^{b}\dot{\underline{s}}(t) $$

ESPLICITAMENTE

$$ {}^{a}D_{a}\,\underline{s} \neq {}^{a}_{b}R\, {}^{b}D_{b}\,\underline{s} $$

???

$$ {}^{b}({}^{a}\underline{s}) \qquad {}^{b}_{a}R $$

AL DI FUORI DEL SEGNO DI DERIVATA

$$ {}^{a}\dot{\underline{s}} = D_{a}({}^{a}\underline{s}) $$

L'UNICO MODO PER INTRODURRE ${}^{a}_{b}R$ È DENTRO AL SEGNO DI DERIVATA CON

$$ {}^{a}\underline{s} = {}^{a}_{b}R\, {}^{b}\underline{s} $$

$$ \underline{v}_{P/a} = \underline{v}_{b/a} + \underline{v}_{P/b} + \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{r}_{P/b} $$

$$ P = O_a \rightsquigarrow \underline{v}_{a/a} = 0 = \underline{v}_{b/a} + \underline{v}_{a/b} + \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{r}_{a/b} $$

$$ \underline{v}_{a/b} = -\underline{v}_{b/a} - \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{r}_{a/b} $$

$$ \underline{v}_{P/0} = \underline{v}_{P/1} + \underline{v}_{1/0} + \underline{\omega}_{1/0} \wedge \underline{r}_{P/1} $$

$P = 2$

0 DA 1

$$ \underline{v}_{2/0} = \underline{v}_{2/1} + \underline{v}_{1/0} + \underline{\omega}_{1/0} \wedge \underline{r}_{2/1} $$

$$ \underline{v}_{P/0} = \underline{v}_{P/2} + \underline{v}_{2/0} + \underline{\omega}_{2/0} \wedge \underline{r}_{P/2} $$

0 DA 2 $\quad P = 3$

$$ \underline{v}_{3/0} = \underline{v}_{3/2} + \underline{v}_{2/0} + \underline{\omega}_{2/0} \wedge \underline{r}_{1/2} = $$

$$ = \underline{v}_{3/2} + \underline{v}_{2/1} + v_{1/0} + \underline{\omega}_{2/0} \wedge \underline{r}_{3/2} + \underline{\omega}_{1/0} \wedge \underline{r}_{2/1} $$

$$ {}^a\dot{\underline{s}} = D_a({}^a\underline{s}) = $$ SUPPONIAMO ${}^a\underline{s} = {}^a({}^b\underline{s})$

$$ = D_a({}^a_bR\,{}^b\underline{s}) = $$ REGOLA DEL PRODOTTO

$$ = {}^a_b\dot{R}\,{}^b\underline{s} + {}^a_bR\,D_a({}^b\underline{s}) = $$

SAPENDO CHE ${}^a_b\dot{R} = [{}^a\underline{\omega}_{b/a} \wedge]\,{}^a_bR$

$$ = {}^a(\underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s}) + {}^a(D_a({}^b\underline{s})) $$

$$ D_a({}^a\underline{s}) = {}^a(D_a({}^b\underline{s})) + {}^a(\underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s}) $$

$$ D_b({}^b\underline{s}) = {}^b(D_b({}^a\underline{s})) + {}^a(\underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s}) $$

$$ D_a({}^b\underline{s}) = D_a({}^a\underline{s}) $$

$$ \begin{cases} \underline{\omega}_{i/0} = \underline{\omega}_{i/i-1} + \underline{\omega}_{i-1/0} \\ \underline{\omega}_{0/0} = \underline{0} \end{cases} $$

$$ \underline{\omega}_{a/b} = -\underline{\omega}_{b/a} $$

$$ \underline{\omega}_{2/0} = \underline{\omega}_{2/1} + \omega_{1/0} $$

$$ \underline{\omega}_{n/0} = \sum_{i=1}^{n} \underline{\omega}_{i/i-1} $$

$$D_a({}^b\underline{s}) = D_a({}^b_aR\,{}^a\underline{s})$$ REGOLA DEL PRODOTTO,

$$= {}^b_a\dot{R}\,{}^a\underline{s} + {}^b_aR\,D_a({}^a\underline{s})$$ APPLICO LA STREP ${}^b_a\dot{R} = [{}^b\omega_{a/b}\wedge]\,{}^b_aR$

$$= {}^b(\underline{\omega}_{a/b}\wedge\underline{s}) + {}^b({}^a\dot{\underline{s}})$$

$$D_a({}^b\underline{s}) = {}^b({}^a\dot{\underline{s}}) + {}^b(\underline{\omega}_{a/b}\wedge\underline{s})$$

$$D_b({}^a\underline{s}) = {}^a({}^b\dot{\underline{s}}) + {}^a(\underline{\omega}_{b/a}\wedge\underline{s})$$

$$D_a({}^a\underline{s}) = D_b({}^a\underline{s})$$

$$D_a({}^a\underline{s}) = {}^a(D_a({}^b\underline{s})) + {}^a(\underline{\omega}_{b/a}\wedge\underline{s}) =$$

$$= {}^a({}^b(D_a({}^a\underline{s})) + {}^b(\underline{\omega}_{a/b}\wedge\underline{s})) + {}^a(\underline{\omega}_{b/a}\wedge\underline{s}) =$$

$$= D_a({}^a\underline{s}) + {}^a(\underline{\omega}_{a/b}\wedge\underline{s}) + {}^a(\underline{\omega}_{b/a}\wedge\underline{s}) =$$

$$= D_a({}^a\underline{s}) - {}^a(\underline{\omega}_{b/a}\wedge\underline{s}) + {}^a(\underline{\omega}_{b/a}\wedge\underline{s}) = D_a({}^a\underline{s})$$

$$\underline{\omega}_{3/0} = \underline{\omega}_{3/2} + \underline{\omega}_{2/1} + \underline{\omega}_{1/0}$$

$$= \underline{\omega}_{3/2} - \omega_{1/2} + \underline{\omega}_{1/0}$$

$$D_a({}^a\underline{s}) = {}^a(D_a({}^b\underline{s})) + \boxed{{}^a(\underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s})}$$

$$D_b({}^a\underline{s}) = {}^a({}^b\dot{\underline{s}}) + \boxed{{}^a(\underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s})}$$

NOTA CHE QUESTO APPARE È COMUNE ALLE DUE VELOCITÀ

$$D_a({}^a\underline{s}) - {}^a(D_a({}^b\underline{s})) = D_b({}^a\underline{s}) - {}^a(D_b({}^b\underline{s}))$$

$$D_a({}^a\underline{s}) - {}^a_bR\,\underbrace{D_a({}^b\underline{s})}_{=D_a({}^a\underline{s})} = D_b({}^a\underline{s}) - {}^a_bR\,\underbrace{D_b({}^b\underline{s})}_{=D_b({}^a\underline{s})}$$

$$\left[\underset{3\times3}{I} - \cancel{{}^a_bR}\right] D_a({}^a\underline{s}) = \left[\underset{3\times3}{I} - \cancel{{}^a_bR}\right] D_b({}^a\underline{s})$$

$$D_a({}^a\underline{s}) = D_b({}^a\underline{s})$$

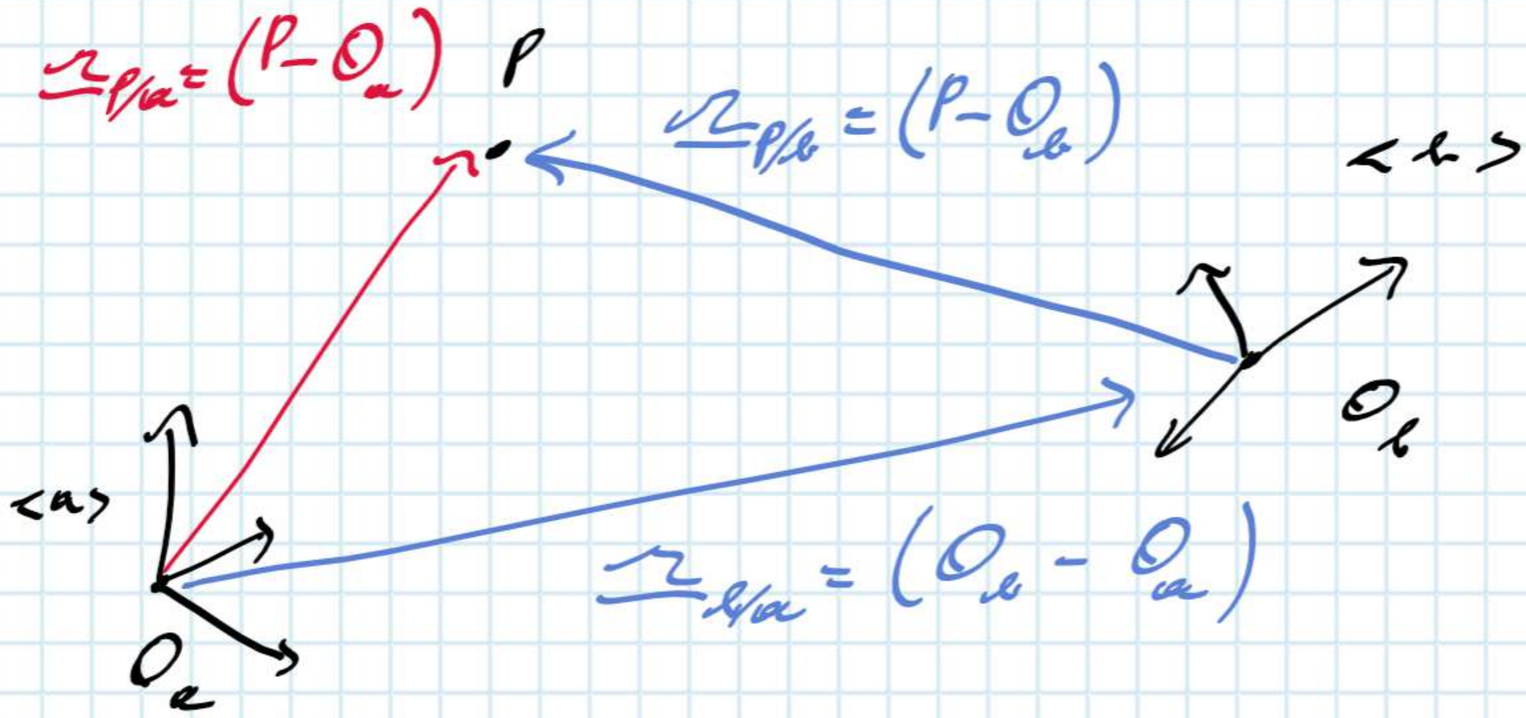
$${}^a\dot{\underline{s}} = {}^a({}^b\dot{\underline{s}}) + {}^a(\underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s})$$

$$D_a\underline{s} = D_b\underline{s} + \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{s}$$

$$D_a \underline{r}_{P/a} = D_a \underline{r}_{b/a} + D_b \underline{r}_{P/b} + \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{r}_{P/b}$$

осечно! <b>

$$\underline{v}_{P/a} = \underline{v}_{b/a} + \underline{v}_{P/b} + \underline{\omega}_{b/a} \wedge \underline{r}_{P/b}$$



$$\underline{v}_{M/O} = \sum_{i=1}^{n} \left(\underline{v}_{i/i-1} + \underline{\omega}_{i/i-1} \wedge \underline{r}_{M/i} \right)$$

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} \underline{q} \\ \underline{\eta}_L \\ \underline{\eta}_A \end{bmatrix}$$

$\underline{q}$: ALTRI DOF DEL SISTEMA

$$\underline{\eta}_L = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ POSIZIONE

$$\underline{\eta}_A = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}$$ ORIENTAZIONE

$\underline{x}(\underline{c})$ METRICA

$$\dot{\underline{x}}(\underline{c}) = \underline{f} + J_x \dot{\underline{c}}$$

DOVUTA AD AZIONE ESTERNA

TASK JACOBIAN (DOVUTA ALLA VARIAZ DELLA CONFIGURAZIONE)

$$\underline{m}_x := \lambda_x (\hat{\underline{x}} - \underline{x})$$

$\hat{\underline{x}}$ IL "TARGET"
IL VALORE CHE LA METRICA DOVREBBE RAGGIUNGERE

$\underline{x}$ IL VALORE ATTUALE DELLA METRICA

λ_x UN PESO CHE AUMENTA O RIDUCE IL VALORE DELLA DIFFERENZA

$$\underline{m}_x = \lambda \Delta x \qquad \dot{\underline{x}} = J_x \dot{\underline{c}}$$

PER CONTROLLARE LA METRICA SI IMPONE

$\dot{\underline{x}} = \underline{m}_x$ DA CUI

$$J_x \dot{\underline{c}} = \lambda \Delta \underline{x}$$

$$\dot{\underline{c}} = \lambda J_x^{\#} \Delta \underline{x}$$

$$\underline{m}_x = \lambda \Delta \underline{x} \qquad \dot{\underline{x}} = f + J_x \dot{\underline{q}}$$

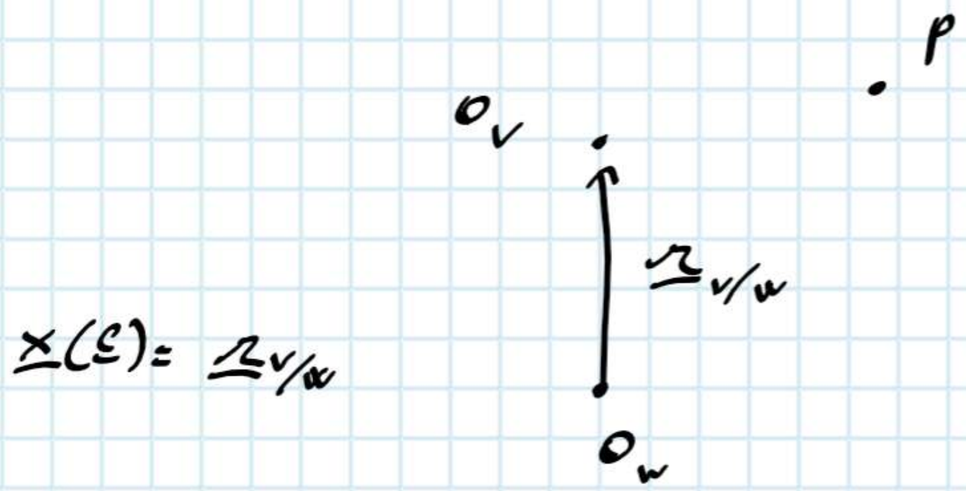
$$\downarrow$$

$$\dot{\underline{x}} - f = J_x \dot{\underline{q}}$$

QUELLO CHE SI FA:

$$\underline{m}_x = \dot{\underline{x}} - f$$

DA CUI (... COME PRIMA)



$$\underline{x}(\underline{q}) = \underline{r}_{v/w}$$

$$\dot{\underline{x}} = \dot{\underline{r}}_{v/w} = \underline{v}_{v/w}$$

GUARDA $\dot{\underline{q}}$ ...

$$^v\dot{\underline{x}} = {}^v\underline{v}_{v/w} = \underbrace{\left[\emptyset \;\vdots\; \underset{3\times3}{I} \;\vdots\; \emptyset\right]}_{^vJ_x} \begin{bmatrix} \dot{\underline{q}} \\ {}^v\underline{v}_{v/w} \\ {}^v\dot{\underline{\eta}}_{v/w} \end{bmatrix}$$

$$^w\dot{\underline{x}} = {}^w\left({}^v\underline{v}_{v/w}\right) = {}^w_vR\, {}^v\underline{v}_{v/w}$$

DA CUI $\quad {}^wJ_x = \left[0 \;\vdots\; {}^w_vR \;\vdots\; 0\right]$

$$\underline{m}_x = \lambda_x \left(\underline{r}_{p/w} - \underline{r}_{v/w}\right)$$

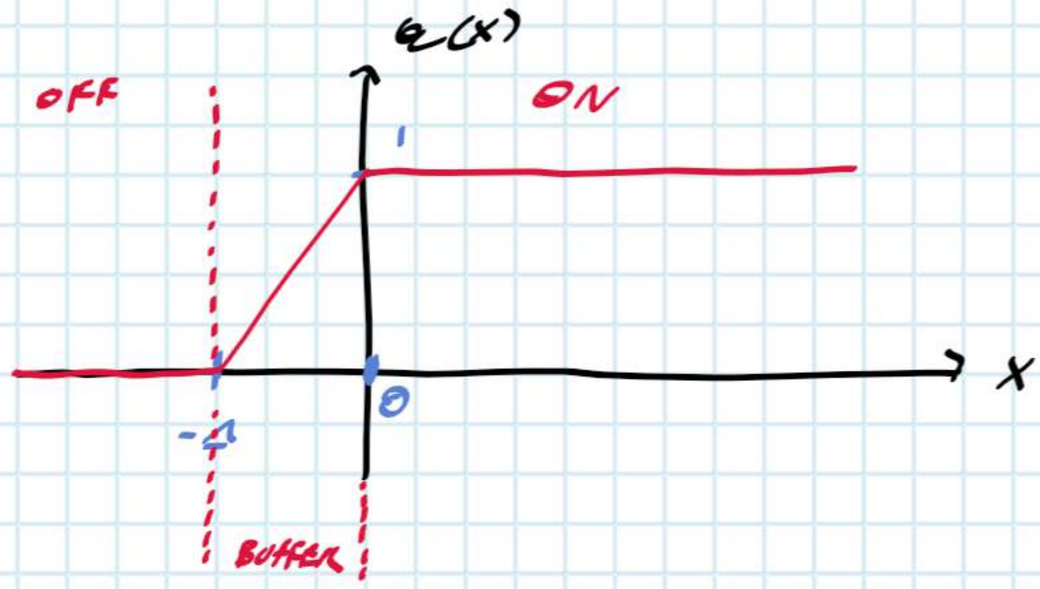
$\downarrow$ PROIETTA IN $\langle w \rangle$

$$^w\underline{m}_x = \lambda_x \left({}^w\underline{r}_{p/w} - {}^w\underline{r}_{v/w}\right)$$

$$a(x) = \begin{cases} 0 & x \le -\Delta \\ \frac{x+\Delta}{\Delta} & x \in [-\Delta, 0] \\ 1 & x \ge 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{H}_{x<3}(x) = a(x-3)$$

$$\mathcal{H}_{x>6}(x) = a(6-x)$$



HORIZONTAL ATTITUDE

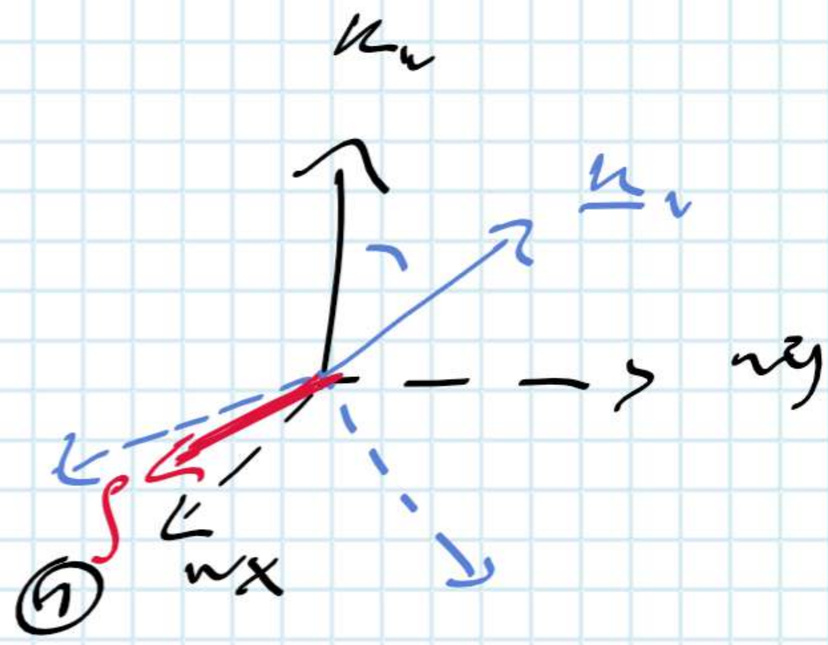
- SFRUTTIAMO IL FATTO CHE $\langle w \rangle$ NON CAMBIA ORIENTAZ

SENSO VERTICALE $\rightsquigarrow$ $\underline{k}_w$

$$|\underline{\rho}_{v/w}| = |\underline{m}\,\theta| = |\underline{m}|\,|\theta|$$

$$\dot{\underline{\rho}}_{v/w} = \overbrace{\left[m(m\cdot) + N(\theta)\right]\underline{\omega}_{v/w}}^{\text{COMPON. PARALLELA}}$$

$$x = \theta$$



$$\dot{x} = \dot{\theta} = {}^w\underline{m} \cdot {}^w\underline{\omega}_{v/w}$$

$$\underline{m}_\theta = \dot{x}$$

$$= \lambda_\theta(\bar{\theta} - \theta) = -\lambda_\theta \theta$$

(zero!)

$$^w\underline{m} = \frac{{}^w\underline{\rho}_{v/w}}{|{}^w\underline{\rho}_{v/w}|}$$

$$\theta = \left|\frac{{}^w\underline{\rho}_{v/w}}{\underline{n}}\right|$$

FUNZIONA? PROVARE.

② $\underline{m} = \underline{k}_v \wedge \underline{k}_w$

$$\dot{x} = \left(\underline{k}_v \wedge \underline{k}_w\right) \cdot \underline{\omega}_{v/w}$$

$$^w\dot{x} = {}^w\left(\underline{k}_v \wedge \underline{k}_w\right) \cdot {}^w\underline{\omega}_{v/w}$$

$$^v\underline{k}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad {}^w\underline{k}_w$$

$$^w\underline{k}_v = {}^w_vR\,{}^v\underline{k}_v \qquad {}^w_vR\,{}^v\underline{\omega}_{v/w}$$

$$= \left[\underbrace{\left({}^w_vR\left[{}^v\underline{k}_v\wedge\right]\right)}_{3\times3}\underbrace{{}^w\underline{k}_w}_{3\times1}\right]\left(\underbrace{{}^w_vR}_{3\times3}\,\underbrace{{}^v\underline{\omega}_{v/w}}_{3\times1}\right)$$

Task Jacobian

$$\overset{1\times 3}{\left[{}^{w}_{v}R\left[{}^{v}\underline{k}_{v}\wedge\right]{}^{w}\underline{k}_{w}\right]'}\overset{3\times 3}{{}^{w}_{v}R} = (1\times 3)$$

$$\dot{x} = \left[\underset{3\times 3}{\left({}^{w}_{v}R\left[\underset{3\times 3}{{}^{v}\underline{k}_{v}}\wedge\right]\right)}\underset{3\times 1}{{}^{w}\underline{k}_{w}}\right]'\left(\underset{3\times 3}{{}^{w}_{v}R}\,\underset{3\times 1}{{}^{v}\underline{w}_{v/w}}\right)$$

$$\underset{1\times 13}{{}^{w}\underline{J}} = \left[\mathbf{0}_{1\times 7} \;\vdots\; \mathbf{0}_{1\times 3} \;\vdots\; \left[{}^{w}_{v}R\left[{}^{v}\underline{n}_{v}\wedge\right]{}^{w}\underline{k}_{w}\right]{}^{w}_{v}R\right]$$

$$\dot{\theta} = {}^{w}\underline{J}\,\dot{y}$$

$$\left[\;\cdots\;\right]\begin{bmatrix}\vdots\\ \vdots\\ \vdots\end{bmatrix}$$

Reference Rate:

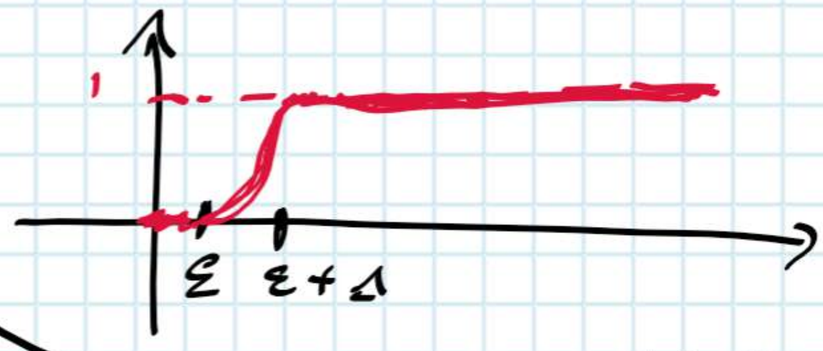
$$\lambda_{\theta}\left(\bar{\theta} - \theta\right)$$

UVMS.HORIZONTAL.TH_TARGET.

UVMS.HORIZONTAL.GAIN

$$\theta = \mathrm{NORM}\left({}^{w}\underline{\rho}_{v/w}\right)$$

Activation Function



$\leq \varepsilon$ ← UVMS.HORIZONTAL.A_THRESHOLD

$|\underline{\rho}|$

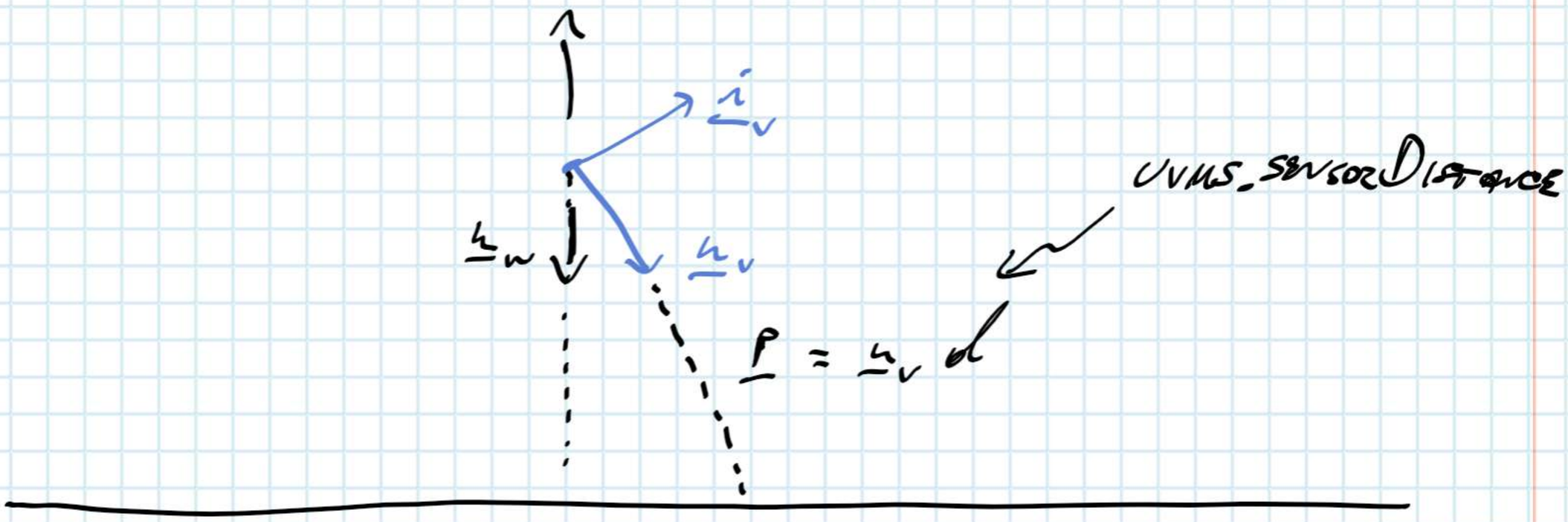
$\Delta\varepsilon$ ← UVMS.HOR...A_BUFFER

$$\underline{\rho}_{v/w} = \mathrm{REDUCEDVERSOR}\left({}^{w}R_{v}\,{}^{v}k,\; k\right)$$

$$k = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

MINIMUM ALTITUDE TASK

ASSUMPTION: $\underline{k}_w \cdot \underline{k}_v > 0$



$$x(\underline{c}) = \underline{\rho} \cdot \underline{k}_w = d\, \underline{k}_v \cdot \underline{k}_w$$

$$\dot{x} = D_w \underline{\rho} \cdot \underline{k}_w + \cancel{\underline{\rho} \cdot D_w \underline{k}_w}$$

d ora è uno scalare, ma vedi note sui disturbi (mentali)

$$D_w \underline{\rho} = D_w (d\, \underline{k}_v) = d\, \underbrace{D_w(\underline{k}_v)}_{= \underline{\omega}_{v/w} \wedge \underline{k}_v} \cdot \underline{k}_w =$$

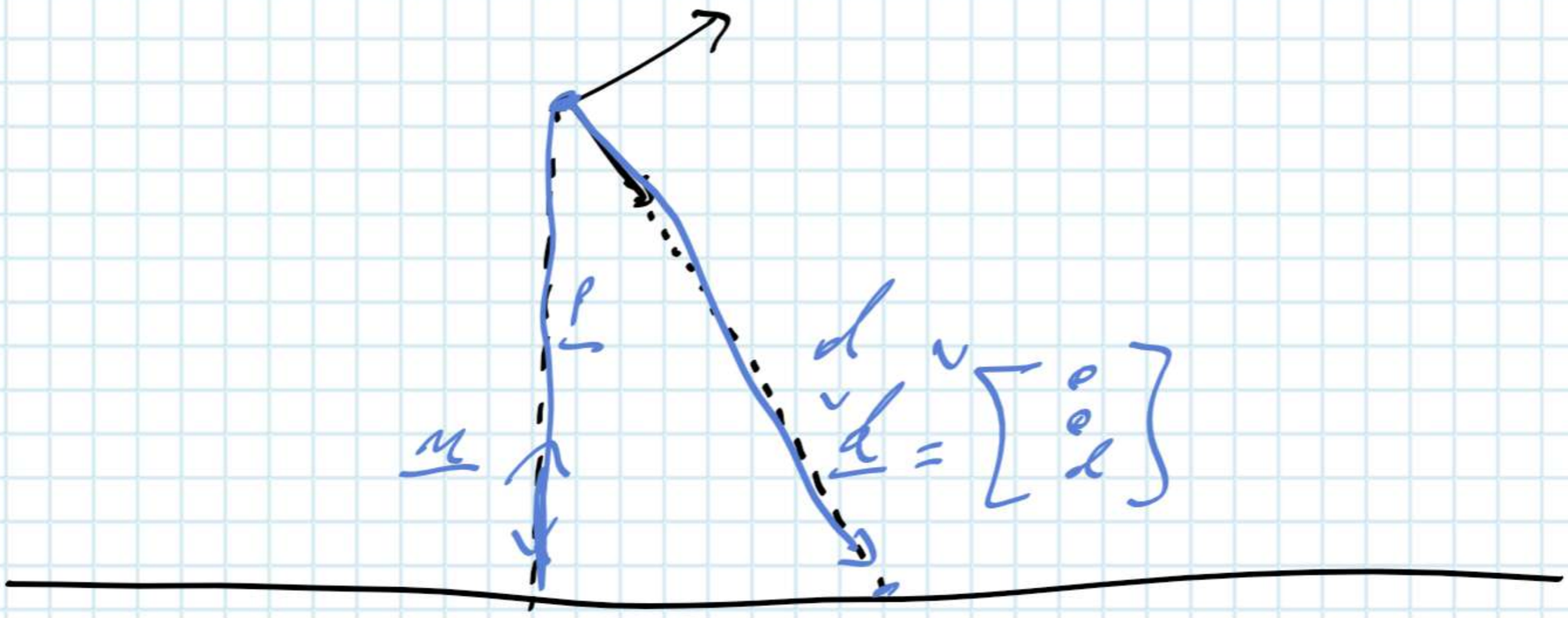
$$= d\left(\underline{\omega}_{v/w} \wedge \underline{k}_v\right) \cdot \underline{k}_w =$$

$$= -d\left(\underline{k}_v \wedge \underline{\omega}_{v/w}\right) \cdot \underline{k}_w =$$

$$= -d\, \underline{k}_w \cdot \left(\underline{k}_v \wedge \underline{\omega}_{v/w}\right)$$

(TODO)

~~Attrito Smorzamento/Lucetta~~



$$|\underline{\rho}| = \underline{d} \cdot \underline{n}$$

$$\underline{\rho} = \underline{n}\,(\underline{d} \cdot \underline{n})$$

$$\rho = \underline{n} \cdot \underline{d}$$

$$\ddot{\rho} = \cancel{(D_w \underline{n}) \cdot \underline{d}} + \underline{n} \cdot D_w \underline{d}$$

$$D_w \underline{d} = D_v \underline{d} + \underline{\omega}_{v/w} \wedge \underline{d}$$

È lo stesso modo di prima ...

UVMS.MINALT

$$ {}^{v}x = \begin{bmatrix} \dot{o} \\ \dot{d} \end{bmatrix} \qquad \dot{x} = \underline{u} \cdot \underline{v}_{v/w} $$

$$ d = \underline{d} \cdot \underline{n}_v $$

$$ {}^{w}\dot{x} = {}^{w}\underline{u} \cdot {}^{w}\underline{v}_{v/w} = $$

$$ = {}^{w}\underline{u} \cdot {}^{w}_{v}R \, {}^{v}\underline{v}_{v/w} $$

$$ {}^{v}\dot{x} = {}^{v}\left({}^{w}\underline{u}\right)^{T} {}^{v}\underline{v}_{v/w} $$

$$ {}^{w}\mathcal{J} = \left[O_{1\times 7}, \; {}^{w}\underline{u}^{T} \, {}^{w}_{v}R \; , \; O_{1\times 3} \right] \qquad 1\times 3 \quad 3\times 3 $$

POCO PULIDO MA FUNZIONA.

$$ {}^{w}\underline{u} = {}^{w}\underline{k}_{w} $$

$$ {}^{v}\mathcal{J} = \left[O_{1\times 7}, \; \underbrace{\left(\left({}^{w}R_{v} \right)_{3\times 3}^{T} \, {}^{w}\underline{k}_{3\times 1} \right)^{T}}_{1\times 3}, \; O_{1\times 3} \right] \qquad 3\times 1 $$

REFERENCE RATE

$$ {}^{v}m_d = \lambda_d \left({}^{v}d_T - {}^{v}d \right) \qquad \leftarrow \text{SATURATE}\left(m_d, \text{UVMS.MINALT.M_MAX} \right) $$

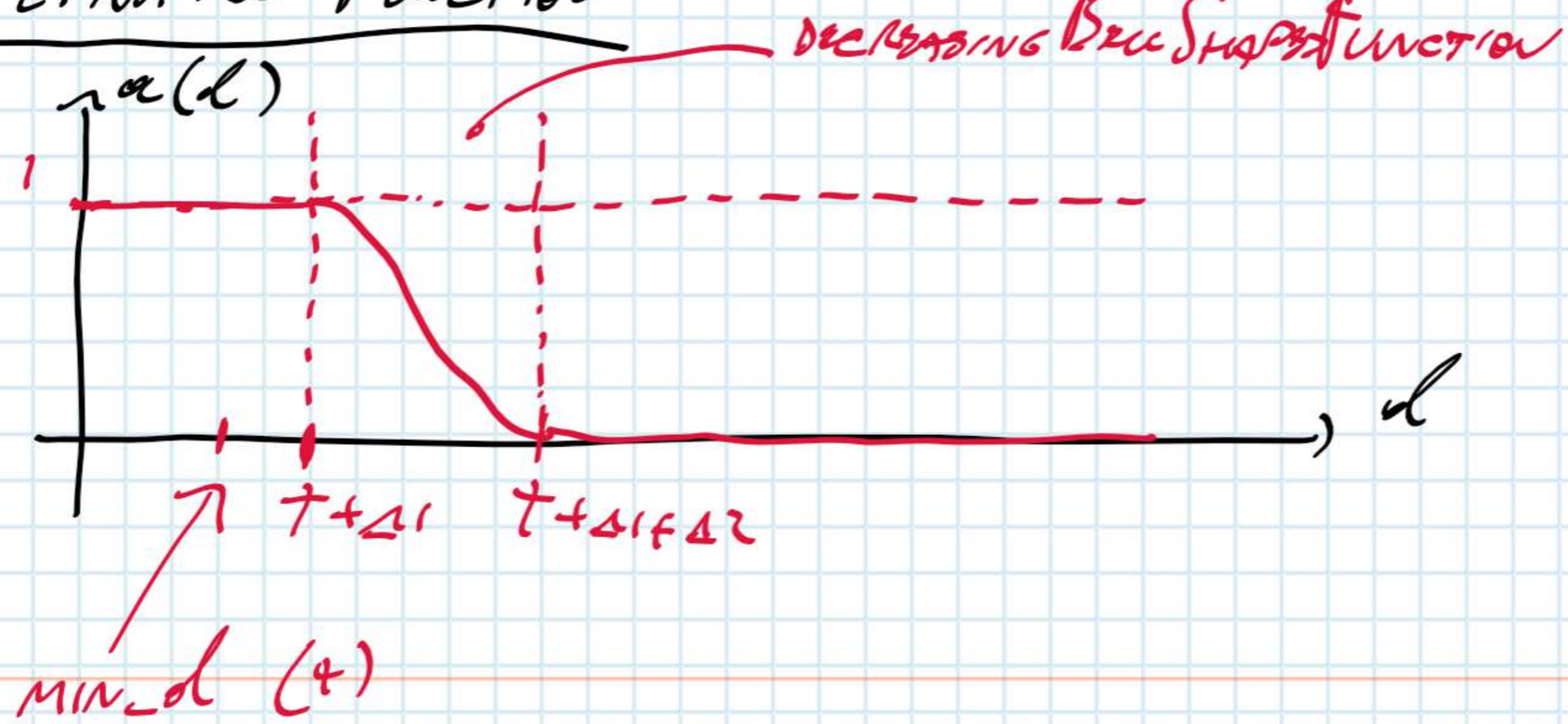
UVMS.MINALT.MIN_D (1m)

UVMS.MINALT.GAIN (0.2)

UVMS.SENSOR DISTANCE

(0.5)

ACTIVATION FUNCTION



$$\dot{d} = {}^{v}\underline{z}_{w} \cdot {}^{v}\underline{v}_{v/w} = \left[0_{1\times 3} \;\vdots\; {}^{w}_{v}R' \, {}^{w}\underline{z}_{w} \;\vdots\; 0_{1\times 3} \right] {}^{v}\underline{\dot{\xi}}$$

$${}^{w}\underline{z}_{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

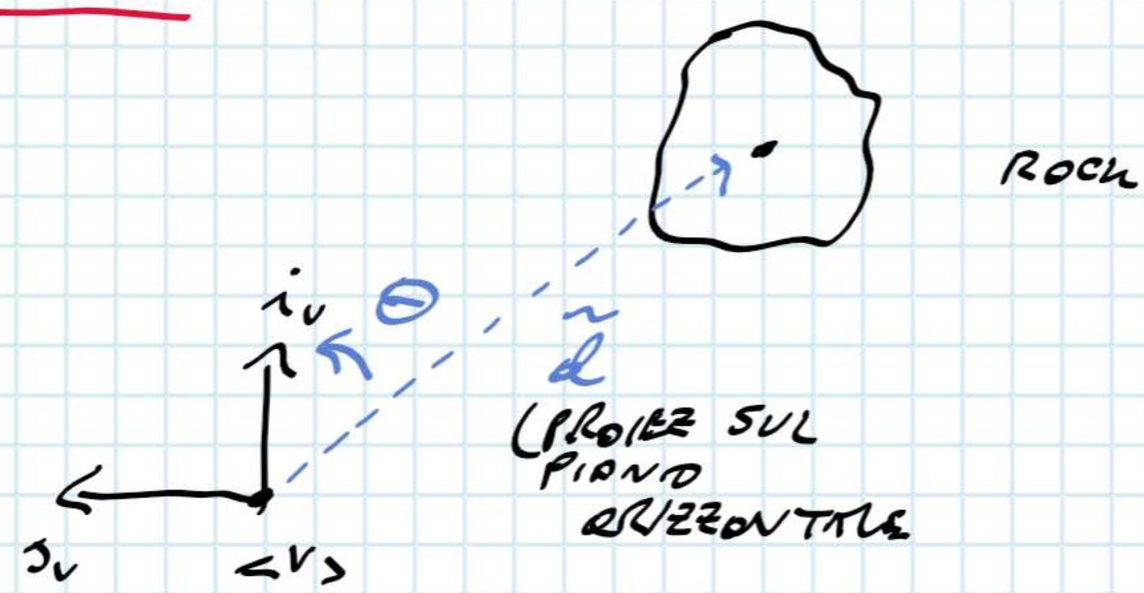
REFERENCE RATE:

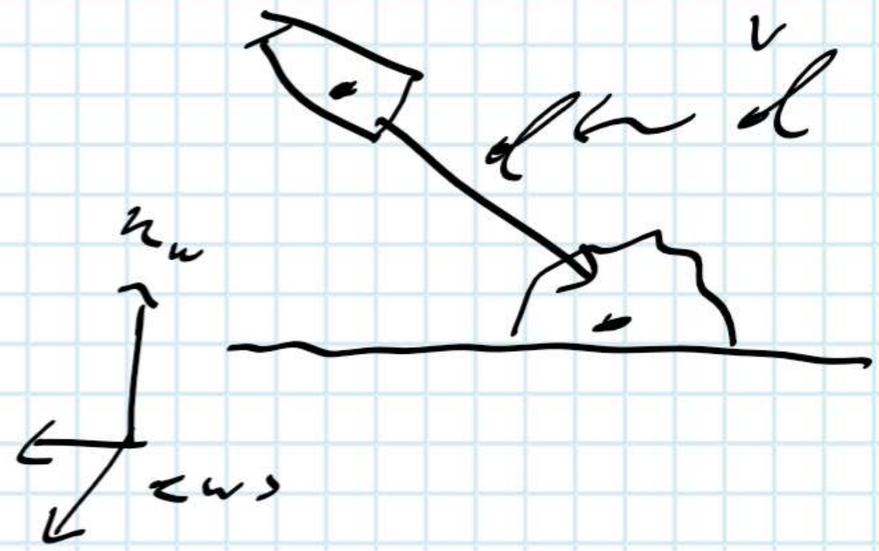
$$\dot{\hat{d}} = \lambda_d \left(d_r - d \right)$$

d_r: d_m

d: UVMS. SENSOR DISTANCE

Rock Task





$$\underline{d} \begin{cases} \text{PARALLELA A } n_w : & n_w \left(n_w \cdot \underline{d} \right) \\ \text{ORTOGONALE A } n_w : & \left(\underset{3\times3}{I} - n_w n_w^T \right) \underline{d} \end{cases}$$

$$\underline{{}^v d} \rightsquigarrow \underline{{}^w d} = \cancel{{}^w_v R \, {}^v \underline{d}}$$

$$\underline{{}^w \tilde{d}} = \left(\underset{3\times3}{I} - {}^w n_w \, {}^w n_w^T \right) \underline{{}^w d}$$

$$\underline{{}^w \tilde{n}} = \frac{\underline{{}^w \tilde{d}}}{\left| \underline{{}^w \tilde{d}} \right|}$$

$$\delta_{i_v, n} = \underset{\underset{= n_w}{\uparrow}}{\underline{v}} \, \theta$$

$$\sin(\theta) \, \underline{v} = \underline{\tilde{n}} \wedge \underline{i}_v$$

$${}^w_v R \, {}^v \underline{i}_v$$

$$\underline{v} = \frac{1}{\sin(\theta)} \underline{\tilde{n}} \wedge \underline{i}_v \qquad \underline{{}^w v} = \frac{1}{\sin(\theta)} \underline{{}^w \tilde{n}} \wedge \underline{{}^w i}_v$$

$$\dot{\underline{\rho}}_{n,i_v} = \underbrace{\left[\underline{v}\,\underline{v}^T + N(\theta)\,\underline{v}\right]}_{\dot{\theta}} \underbrace{\underline{\omega}_{v/n}}$$

$$\dot{\theta} = \underline{v} \cdot \underline{\omega}_{v/n} = {}^{n}\underline{v}^T \, {}^{n}_{v}R \, {}^{v}\underline{\omega}_{v/n}$$

$$\dot{\underline{\rho}}_{//} = \underline{v}\left(\underline{v} \cdot \underline{\omega}_{v/n}\right)$$

Recapitolando

$$({}^{n}\rho_{Rock} - {}^{n}O_v)$$

$${}^{n}\tilde{\underline{d}} = \left(\underset{3\times3}{I} - {}^{n}\underline{n}_n \, {}^{n}\underline{n}_n^T\right) {}^{n}\underline{d}$$

$${}^{n}\tilde{\underline{n}} = \frac{{}^{n}\tilde{\underline{d}}}{\left|{}^{n}\tilde{\underline{d}}\right|} \qquad {}^{n}\underline{v} = \frac{1}{\sin(\theta)}\left[{}^{n}\underline{n} \;\; \Lambda\right]\left({}^{n}_{v}R \, {}^{v}\underline{i}\right)$$

$$\theta \neq n\pi$$

$${}^{n}\rho_{Rock}$$

$$\dot{\theta} = {}^{n}\underline{v}^T \, \underline{\omega}_{v/n} = \overbrace{\left[O_{1\times4} \quad O_{1\times3} \quad {}^{n}\underline{v}^T \, {}^{n}_{v}R\right]}^{} \, {}^{v}\underline{\dot{\xi}}$$

$${}^{n}\omega_{v/n} = {}^{n}_{v}R \, {}^{v}\underline{\omega}_{v/n}$$

Reference Rate

$$\dot{\bar{\theta}} = \underbrace{\lambda_{Rock}}_{0.9}\left(\phi - \underbrace{\left|\underline{\rho}_{n,i_v}\right|}_{\text{Reduced Vector Length}\,(\underline{n},\, \underline{i}_v)}\right)$$

ACTIVATION FUNCTION

$\boxed{\text{ZERO}}$ VELOCITY TASK

METRICA : ${}^{w}\underline{v}_{v/w}$

$$ {}^{v}y = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ {}^{v}\underline{v}_{v/w} \\ {}^{v}\underline{\omega}_{v/w} \end{bmatrix} $$

$$ {}^{w}J_{ZVT} = \begin{bmatrix} 0_{3\times 2} & {}^{w}_{v}R & 0_{3\times 3} \end{bmatrix} $$

TASK REFER. RATE

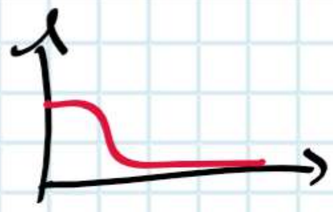
$$ {}^{w}\underline{m} = \lambda_{ZVT} \left(0_{1\times 3} - {}^{w}V_{v/w} \right) $$

UVMS_P_DOT(1:3)

Joint Limit Task

$\underline{q}_{min}, \ \underline{q}_{max} \in \mathbb{R}^7$

METODO 2



$\boxed{\text{NO.}}$

① $\underline{q} \geq \underline{q}_{min}$ $\qquad \underline{m}_{q,min} = \lambda_{q_{min}} (\underline{q} - \underline{q}_{min})$

② $\underline{q} \leq \underline{q}_{max}$ $\qquad \underline{m}_{q,max} = \lambda_{q_{max}} (\underline{q}_{max} - \underline{q})$

$\dot{q}$

UNMS, q_DOT

VEL. + OR. END EFF.

CONF. BRACCIO

$$\underline{\dot{y}} = J \dot{q}$$

$$\dot{q} = J^{\#} \dot{y} = \dot{q}$$

WRT <V>

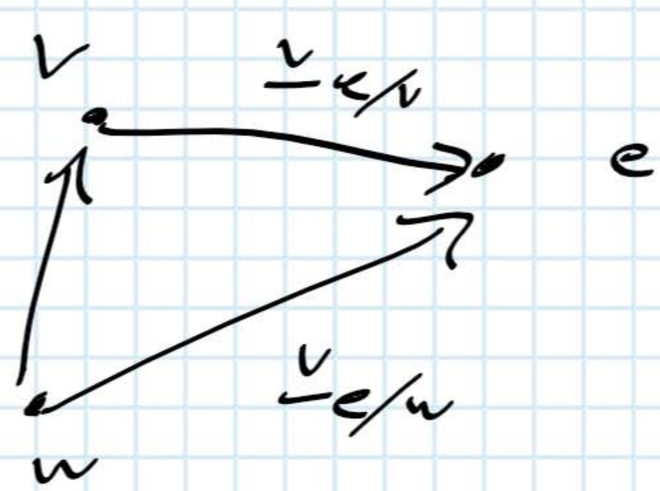
VELOCITÀ E.F. WRT <V>

$$\dot{y} = J \dot{q}$$

$$\cancel{\dot{y} = {}^{v}\underline{\dot{y}} = \begin{bmatrix} {}^{v}\underline{v}_{v/w} \\ {}^{v}\underline{\omega}_{v/w} \end{bmatrix}}$$

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} {}^{v}\underline{v}_{e/w} \\ {}^{v}\underline{\omega}_{e/w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{v}\underline{v}_{e/v} + {}^{v}\underline{v}_{v/w} \\ {}^{v}\underline{\omega}_{e/v} + {}^{v}\underline{\omega}_{v/w} \end{bmatrix}$$

$$\underline{{}^{v}\dot{y}} = \begin{bmatrix} \underline{\dot{q}} \\ {}^{v}\underline{v} \\ {}^{v}\underline{\omega} \end{bmatrix}$$



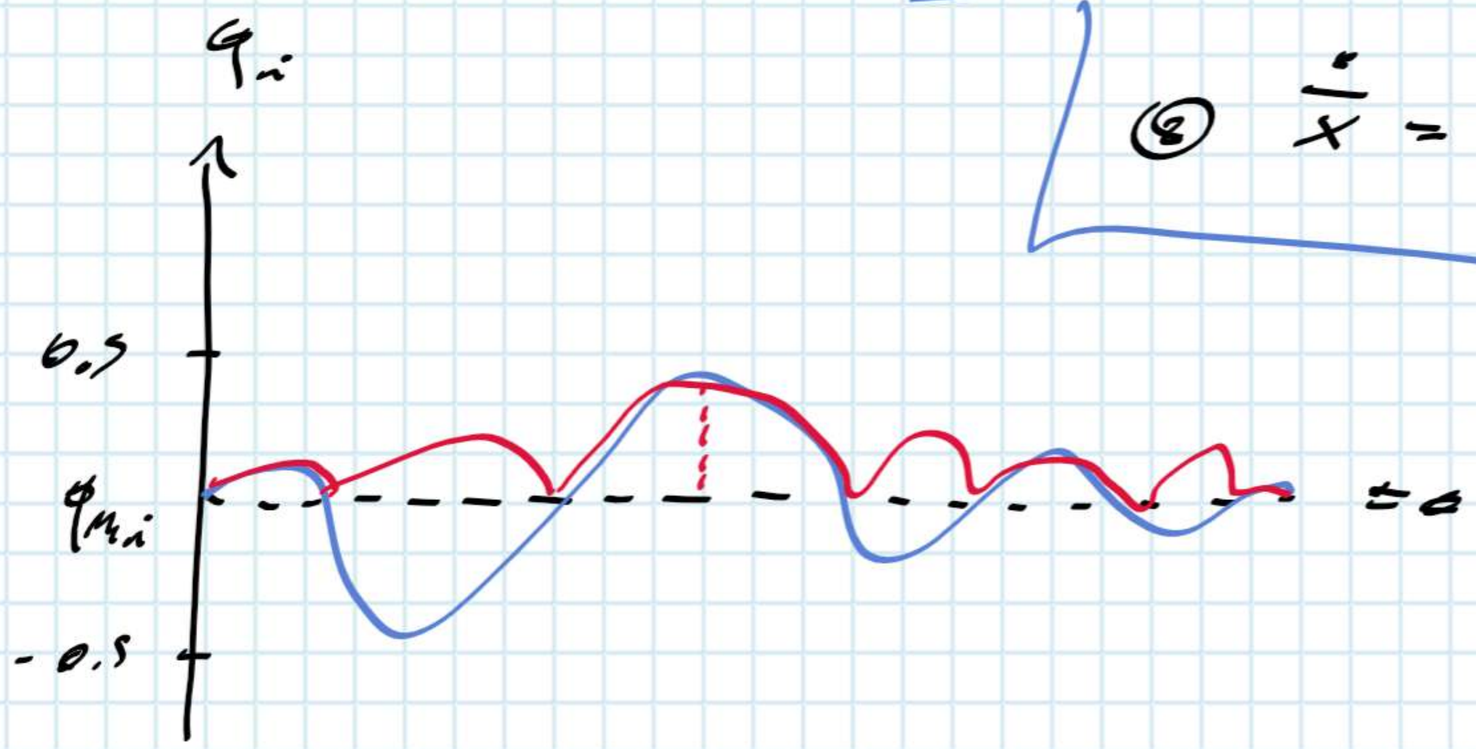
$$\dot{q} = \begin{bmatrix} I_{7\times7} & \vdots & 0_{7\times6} \end{bmatrix} {}^{v}\underline{\dot{y}}$$

METODO 2 (CORRETTO):

$\underline{\varphi}_M = \underline{0}$

$$\underline{q}_M = \frac{1}{2}\left(\underline{q}_{MIN} + \underline{q}_{MAX}\right) \quad ① \quad \dot{\bar{x}} = \lambda\left(|\underline{q}_M| - |\underline{q}|\right)$$

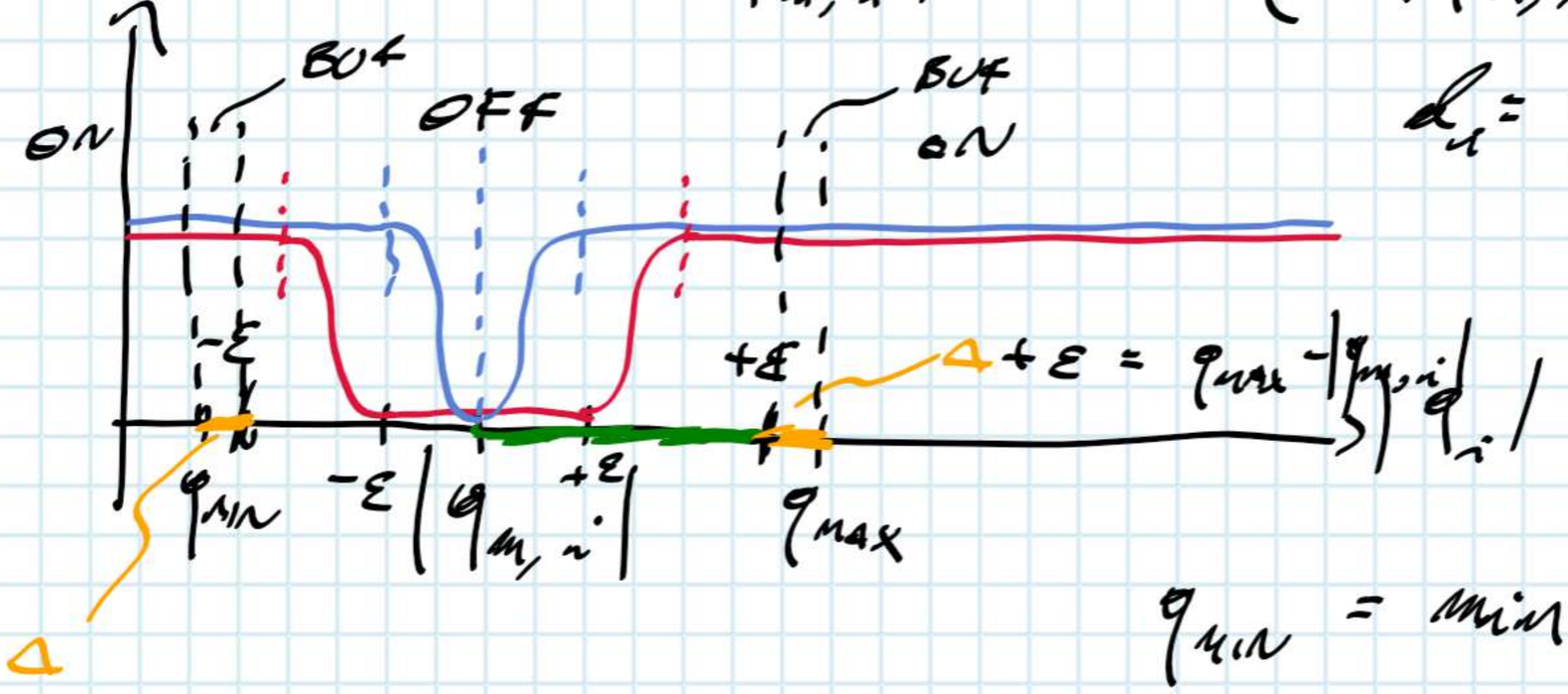
$$\boxed{② \quad \dot{\bar{x}} = \lambda\left(\underline{\varphi}_M - \underline{\varphi}\right)}$$



$\varepsilon > 0$

ATTIVAZIONE FUNZIONE:

$\alpha(|q_i|)$ $\qquad |q_{M,i}| > 0 \qquad \left(|q_{M,i}| - \varepsilon \geq 0\right)$



$d_i = q_{MAX} - |q_{M,i}|$

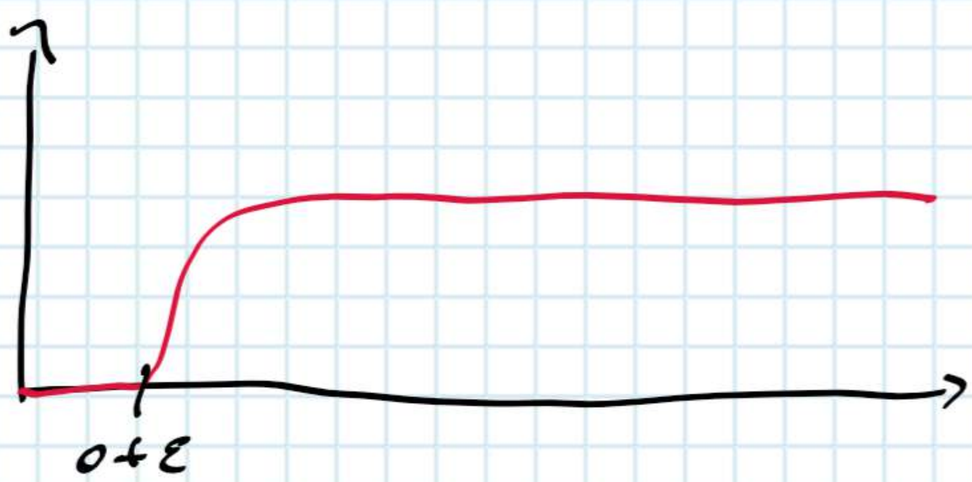
$$\boxed{\varepsilon_i = 0.75 \cdot d_i}$$

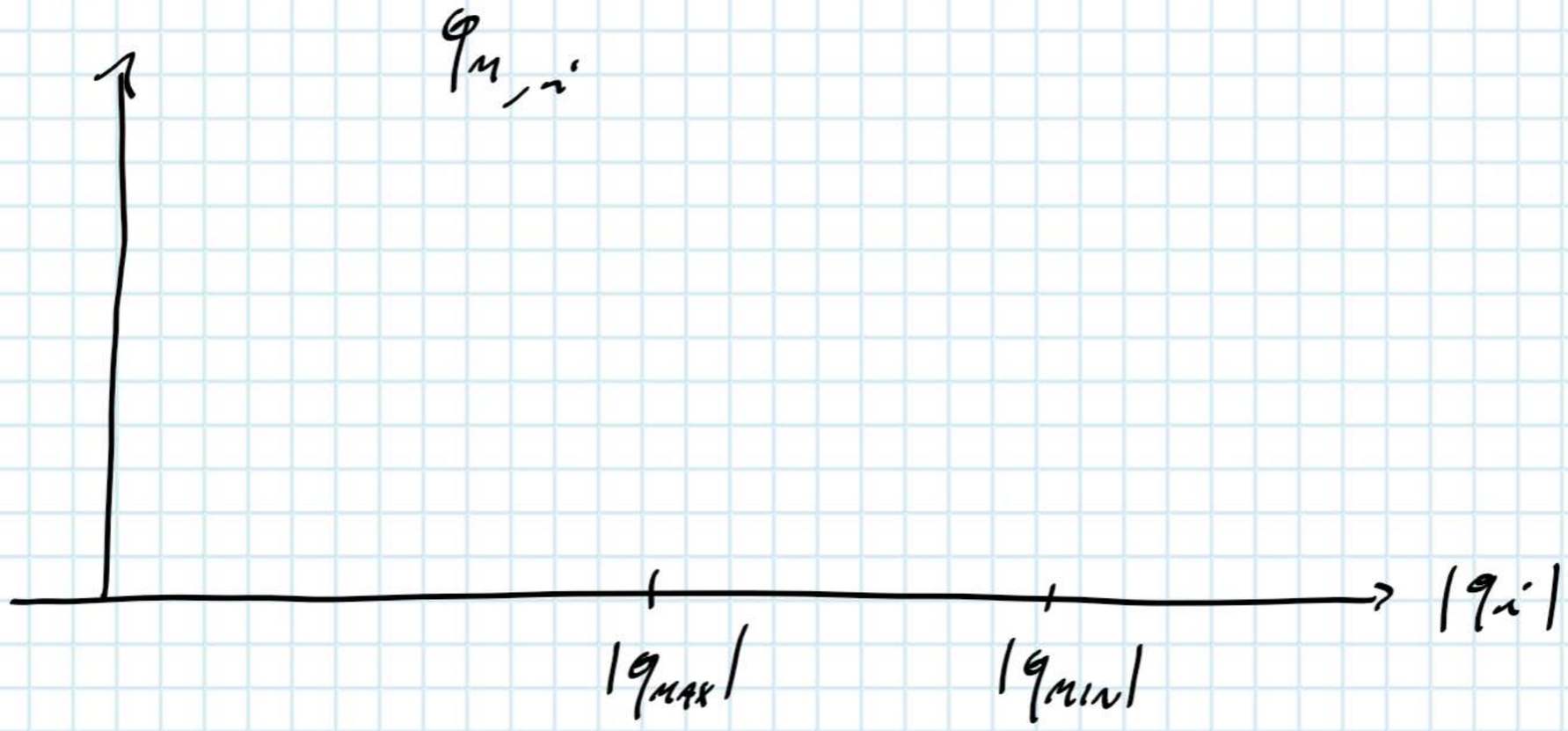
TUNING

$q_{MIN} = \min\{|q_{M,i}|, q_i\}$

$q_{MAX} = \max\{\ldots\}$

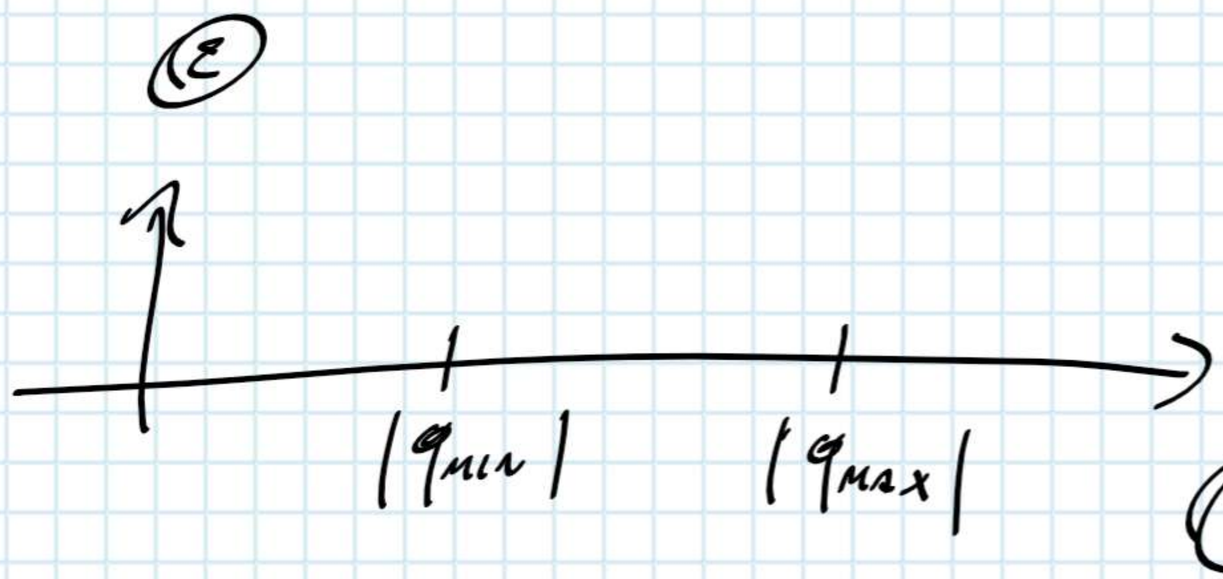
$|q_{M,i}| = 0$





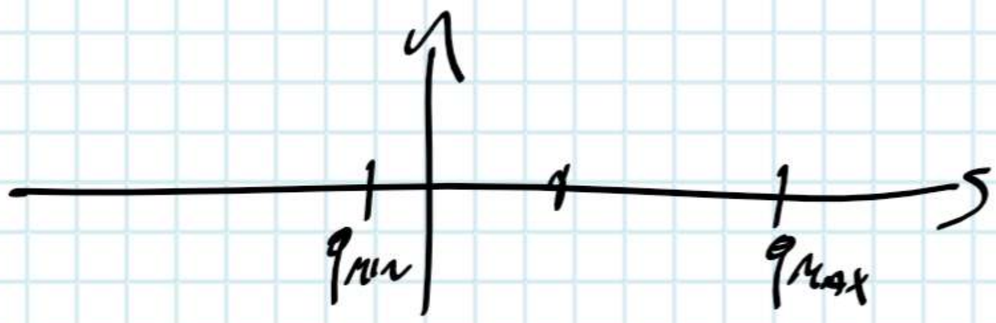
① $|q_{MIN}| > |q_{MAX}| \Rightarrow$

$\Rightarrow |q_n| < |q_{MIN}|$



② $|q_{MAX}| > |q_{MIN}| \Rightarrow$

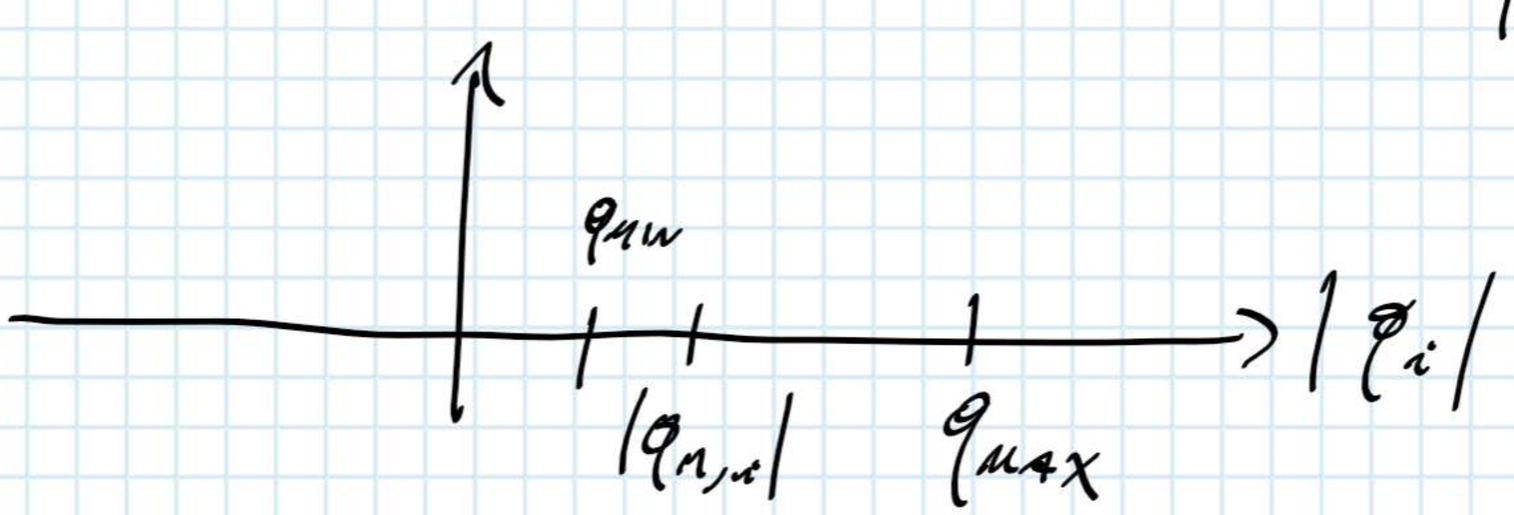
$\Rightarrow |q_n| < |q_{MAX}|$



$q_{MAX} = MAX$

$= MAX \{|q_{MIN}|, |q_{MAX}|\}$

$|q_n| \leq q_{MAX}$



NON FUNZIONA.

$$|q_{mi}| + \varepsilon \leq \min\{|q_{min,i}|, |q_{max,i}|\}$$

UNCOLD

$\varepsilon > 0$

COOPERATIVE CONTROL OF MULTIPLE AGENTS

DUE AGENTI a, b

a : $J_{T,a}$ JACOBIANA DEL TOOL FRAME <ea> DI a

$\dot{q}_a$ CONFIGURAZIONE DI a

$J_{Ta}\dot{q}_a = \dot{x}_{T,a}$ VELOCITÀ DELL'END EFFECTOR DELL'AGENTE a

MINIMUM NORM SOLUTION: $\underset{\dot{q}_a}{\arg\min} \left| \dot{x}_{T,a} - J_{T,a}\dot{q}_a \right|^2$

$$\dot{q}_a = \left(J_{T,a}\right)^{\#} \dot{x}_{T,a}$$

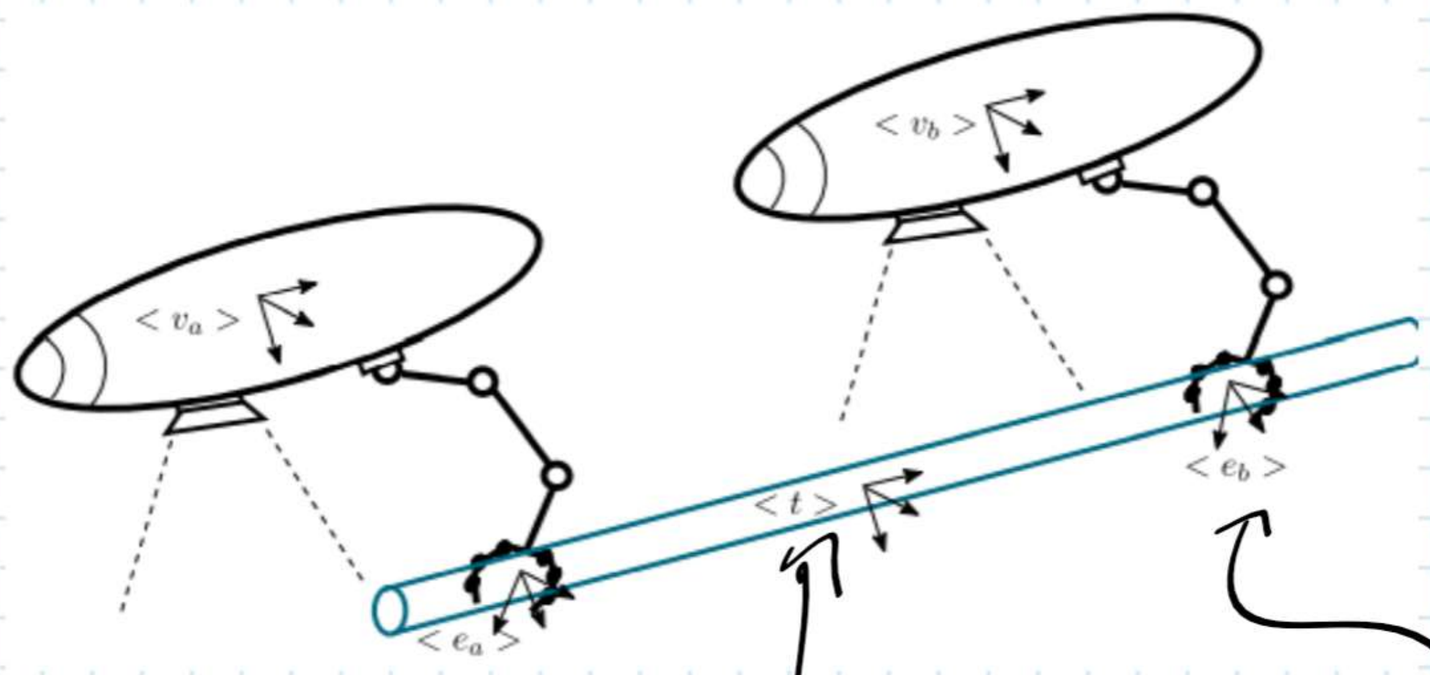
LO STESSO SI PUÒ DIRE DI b $\rightarrow$ LI POSSIAMO CONTROLLARE INDIPENDENTEMENTE NEL SOLITO MODO.

MA COME FACCIAMO A FAR SÌ CHE COOPERINO?

$\rightarrow$ QUESTO NON SARÀ UN APPROCCIO GENERALE, MA LIMITATO AD UN CASO PARTICOLARE

$\rightarrow$ I DUE ROBOT DEVONO TRASPORTARE UN OGGETTO IN DUE.

LA SITUAZIONE È QUESTA:



$\dot{x}^a_{T,b}$

$\dot{x}_{T,a}$

$<T> \equiv <O>$

$\dot{x}_T$ VELOCITÀ DELL'OBIETTIVO TOOL FRAME

FIRM GRASPING CONSTRAINT

SI PUÒ ESPRIMERE COL SEGUENTE VINCOLO DIFFERENZIALE: DATO $\dot{x}_T$ LA VELOCITÀ DELL'OBIET. TOOL FRAME, E DATI $\dot{q}_a$ E $\dot{q}_b$, DEV'ESSERE

$$\dot{x}_T = J_{T,a}\,\dot{q}_a = J_{T,b}\,\dot{q}_b$$

FORMA INTERMEDIA (VEDI PIÙ AVANTI LA FORMA FINALE)

RICORDO #1 UN MODO EQUIVALENTE DI FORMULARE IL VINCOLO (PIÙ COME PRODOTTO SCALARE)

$$J_{T,a}\,\dot{q}_a = J_{T,b}\,\dot{q}_b \longrightarrow$$

$$\longrightarrow J_{T,a}\,\dot{q}_a - J_{T,b}\,\dot{q}_b = \underline{0}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} J_{T,a} & -J_{T,b} \end{bmatrix}}_{C_{T,ab}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_a \\ \dot{q}_b \end{bmatrix}}_{\dot{q}_{ab}} = 0$$

QUINDI $C_{ab}\,\dot{q}_{ab} = 0$

DA CUI $\dot{q}_{ab} \in \mathrm{Ker}(C) = \mathrm{span}(I - C^{\#}C)$ ...

PERÒ QUESTO APPROCCIO COMPLICA LE COSE, IMPLICA UNA COMUNICAZ ECCESSIVA TRA SISTEMA CENTRALE E ROBOT (NON DIAMO ULTERIORI DETTAGLI) QUINDI NIENTE.

LA FORMULA RICHIEDE $\dot{q}_a$, $\dot{q}_b$ OGNI VOLTA, CHE BISOGNA TRASMETTERE

ROUND #2

OSSERVAZIONE:

$$\dot{x}_T = J_{T,a}\,\dot{q}_{T,a} = J_{T,a}\,J^{\#}_{T,a}\,\dot{x}_{T,a}$$

MINIMUM NORM SOLUTION SULL'ACCENTE a

LA RELAZ LEGA UNA VELOCITÀ AD UN'ALTRA VELOCITÀ

NOTA: $J^{\#}_{T,a}\,J_{T,a} = I$ MA

$J_{T,a}\,J^{\#}_{T,a} \neq I$!! IN GENERALE

CHIAMIAMO $H_a = J_{T,a}\,J^{\#}_{T,a}$ (H_a, H_b)

ALLORA POSSIAMO RISCRIVERE IL VINCOLO COME SEGUE:

$$\dot{x}_T = H_a\,\dot{x}_{T,a} = H_b\,\dot{x}_{T,b} \qquad \text{(MEGLIO)}$$

PERCHÉ ORA STIAMO USANDO UN'INFO CHE POSSO CALCOLARE E NON DEVO RICEVERE DAL ROBOT

IL DISCORSO È LO STESSO DI PRIMA, MA STAVOLTA CONSIDERANDO LE MATRICI H_a, H_b

$$\begin{bmatrix} H_a & -H_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{t,a} \\ \dot{x}_{t,b} \end{bmatrix} = 0$$

LA FORMA FINALE DEL VINCOLO!

VOGLIAMO CHE I SINGOLI E.E. REALIZZINO UNA VELOCITÀ $\dot{x}_t$, QUINDI DOBBIAMO IMPORRE

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{t,a} \\ \dot{x}_{t,b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{x}_t \end{bmatrix}$$

OTTENENDO COSÌ

$$\begin{bmatrix} H_a & -H_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{x}_t \end{bmatrix} = \underline{0}$$

LA VERA FORMA DEL VINCOLO.

NON POSSIAMO ANCORA USARLA PER IL CONTROLLO PERÒ, PERCHÉ NULLA CI DICE COME DEFINIRE UN CONTROLLO CENTRALIZZATO CHE CONSIDERI ENTRAMBI I ROBOT.

Considerazioni aggiuntive sul Firm Grasping Constraint

Abbiamo detto

$$\begin{bmatrix} H_a & -H_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_T \\ \dot{x}_T \end{bmatrix} = 0$$

$$x_{T,ab} = x_T$$

nel caso particolare richiesto dal vincolo

Più in breve, con $C_{ab} = \begin{bmatrix} H_a & -H_b \end{bmatrix}$, si ha

$$C_{ab}\, \ddot{x}_T = 0 \quad \text{quindi}$$

$$\ddot{x}_T \in \ker(C_{ab})$$

Possiamo "ribaltare" queste considerazioni dicendo che il vettore $\ddot{x}_T \in \mathrm{span}(I - C_{ab}^{\#} C_{ab})$

il che ci permette di scrivere $\ddot{x}_T$ come soluzione di un sist. lineare, per opportuni $\bar{x}_{T,a}$, $\bar{x}_{T,b}$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_T \\ \dot{x}_T \end{bmatrix} = \left(I - C_{ab}^{\#} C_{ab}\right) \begin{bmatrix} \bar{x}_{T,a} \\ \bar{x}_{T,b} \end{bmatrix}$$

Nota che questo spazio vettoriale span(...) è molto più esteso: non contiene solo $[\dot{x}_T ; \dot{x}_T]$, perciò dobbiamo dire che esistono $\bar{x}_a$, $\bar{x}_b$ tali da produrre proprio quel tipo di vettore. (Si intravede già un controllo?)

IN PARTICOLARE, È OPPORTUNO NOTARE CHE IL VINCOLO DATO È COMPOSTO DA DUE EQUAZIONI VETTORIALI DEL TIPO

$$\dot{x}_t = \left(I - C_{ab}^{\#} C_{ab}\right) \bar{x}_{t,i} \qquad \forall i$$

QUESTO PERMETTE ANCHE DI DIRE QUESTA COSA:

RICORDI? $\quad \dot{x}_t = H_a \dot{x}_{t,a} = H_b \dot{x}_{t,b}$

PRENDIAMO a (I CONTI SONO UGUALI PER TUTTI)

$$\dot{x}_t = H_a \dot{x}_{t,a} = H_a \left(I - C_{ab}^{\#} C_{ab}\right) \bar{x}_{t,a}$$

$\dot{x}_{t,a} = \dot{x}_t$ PER IL VINCOLO

$$\text{e} \quad \dot{x}_t = \left(I - C_{ab}^{\#} C_{ab}\right) \bar{x}_{t,a}$$

IN SINTESI OTTENIAMO

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{x}_t \end{bmatrix}}_{\dot{x}_{t,ab}} = \underbrace{\begin{bmatrix} H_a & 0 \\ 0 & H_b \end{bmatrix}}_{H_{ab}} \left(I - C_{ab}^{\#} C_{ab}\right) \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{x}_{t,a} \\ \bar{x}_{t,b} \end{bmatrix}}_{\bar{x}_{t,ab}}$$

LA BARRA NON CENTRA NULLA CON LA REFERENCE RATE

$$\dot{x}_{t,ab} = H_{ab} \left(I - C_{ab}^{\#} C_{ab}\right) \bar{x}_{t,ab}$$

PER REALIZZARE IL COMPORTAMENTO DESIDERATO OCCORRE FORZARE $\quad \dot{x}_{t,ab} = \begin{bmatrix} \dot{x}_t & ; & \dot{x}_t \end{bmatrix}$

COMMENTI SUGLI SPAZI VETTORIALI

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{x}_f \end{bmatrix} = H_{ab} \left(I - C^{\#}_{a,b} C_{a,b} \right) \bar{x}_{t,ab}$$

QUINDI $[\dot{x}_t \quad \dot{x}_f]' \in \text{SPAN}\left\{ H_{ab} \left(I - C^{\#}_{ab} C_{ab} \right) \right\}$

COMMENTI RICORDO LA MATRICE H_{ab}:

$\text{SPAN}\{H_{ab}\}$ $\qquad \dot{x}_{f,ab} = H_{ab} \bar{x}_{f,ab}$

$\dot{x}_f \in \dots$

RAPPRESENTA LE VELOCITÀ POSSIBILI DELL'OGGETTO A PARTIRE DA QUELLE DEI DUE SINGOLI AGENTI

$$\text{KER}\{H_{ab}\} = \text{SPAN}\{ I - H^{\#}_{ab} H_{ab} \}$$

TUTTE LE VELOCITÀ NON RAGGIUNGIBILI DALL'OGGETTO.

NOTA BENE: MAGARI I SINGOLI AGENTI RIESCONO, MA NON NEL COMPLESSO.

LA MATRICE COMPLESSIVA $H_{ab} \left(I - C^{\#}_{ab} C_{ab} \right)$ SI PUÒ INTERPRETARE COME UNA OTTIMALE DIVISIONE DI $\text{SPAN}(H_{ab})$

$\text{SPAN}\left\{ H_{ab} \left(I - C^{\#}_{ab} C_{ab} \right) \right\}$ CONTIENE TUTTI I MOTI DEGLI AGENTI CHE SODDISFANO IL VINCOLO E CHE SONO FATTIBILI PER OGNI AGENTE.

$\text{SPAN}\left\{ H_{ab} C^{\#}_{ab} C_{ab} \right\}$ CONTIENE INVECE TUTTI I MOTI CHE VIOLANO I VINCOLI TRA I MOTI FATTIBILI

QUINDI IL RISPETTO DEI VINCOLI È DATO DALLA SOLA MATRICE $\left(I - C^{\#}_{ab} C_{ab} \right)$

VERSO UNA STRATEGIA DI CONTROLLO

$$\dot{\tilde{x}}_{T,ab} = H_{ab}\left(I - C^{\#}_{ab} C_{ab}\right) \bar{x}_{T,ab}$$

IN PARTICOLARE $\dot{\tilde{x}}_{T,ab} = \begin{bmatrix} \dot{x}_T \\ \dot{x}_T \end{bmatrix}$

FATTIBILITÀ DEL MOTO

RISPETTO DEL FIRM GRASPING CONSTRAINT

VELOCITÀ DEI DUE AGENTI (SOLO I TOOL)

$$H_{ab} = \begin{bmatrix} H_a & 0 \\ 0 & H_b \end{bmatrix}$$

$$H_i = J_{T,i} J^{\#}_{T,i} \qquad i = a, b$$

$$C_{ab} = \begin{bmatrix} H_a & -H_b \end{bmatrix}$$

NOTA BENE: $\dot{\tilde{x}}_{T,ab} = \left(I - C^{\#}_{ab} C_{ab}\right) \bar{x}_{T,ab}$

CIOÈ SALVIAMO QUESTA OPERAZIONE PERMETTE DI OTTENERE LA PROIEZIONE DEL MOTO, PER OGNI EE, COMPATIBILE COL VINCOLO, MA NON NECESSARIAMENTE FATTIBILE.

L'IDEA:

POSSO CREARE IN OGNI AGENTE UN NON REACTIVE TASK BASATO SULLA RELAZIONE

(AGENTE i) $\dot{\tilde{x}}_T = \underbrace{H_i \left(I - C^{\#}_{ab} C_{ab}\right)}_{\text{"JACOBIAN" (PARTE DI)}} \dot{\tilde{x}}_{T,i}$

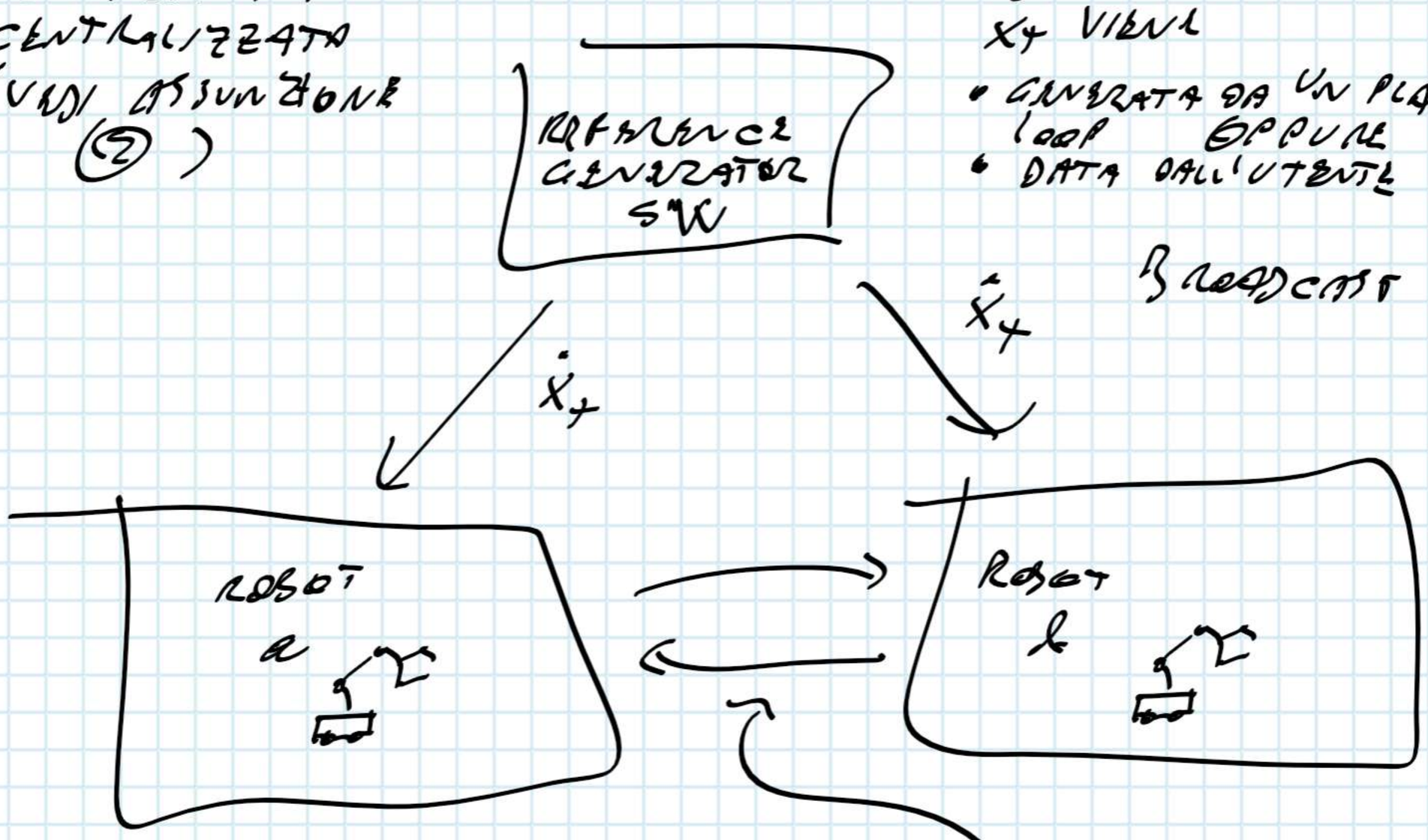
OBIETTIVO (CONTROLLO SULLA DERIVATA)

INCOGNITA, VELOCITÀ DELL'END EFFECTOR (ESPRESSA COME $J\dot{q}$)

IL TASK AVRÀ PRIORITÀ MASSIMA E VERRÀ ESEGUITO SINGOLARMENTE SU OGNI AGENTE

ASSUNZIONI

(1) ARCHITETTURA: CENTRALIZZATA (VEDI ASSUNZIONE (2))



$\dot{x}_f$ VIENE
- GENERATA DA UN PLANNER IN LOOP OPPURE
- DATA DALL'UTENTE

BROADCAST

I ROBOT POSSONO SCAMBIARSI INFORMAZ

(2) PERFETTA CONNESSIONE WIRELESS
- NO PATHLOSS
- BANDWIDTH INFINITA
- NESSUN RITARDO DI TRASMISSIONE

(3) DUE CICLI DI TPIK PER OGNI AGENTE.

UN ALTRO PUNTO DI VISTA

IMPORTANTE NOTARE CHE LA MATRICE $H_{ad}(I - C^{\#}C)$ PUÒ ESSERE USATA ANCHE PER FILTRARE UNA VELOCITÀ

DATA UNA VELOCITÀ INIZIALE $\dot{x}_1 \rightarrow \dot{x}_{1c} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix}$

VOGLIO TROVARNE LA PROIEZIONE TALE CHE

1. È FATTIBILE
2. NON VIOLA IL FIRM GRASPING CONSTRAINT

SE $\tilde{\dot{x}}$ È LA PROIEZ RICHIESTA, LA MATRICE PUÒ ESSERE USATA COSÌ PER "FILTRARE" $\dot{x}_1$:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\dot{x}} \\ \tilde{\dot{x}} \end{bmatrix} = H_{ad}(I - C^{\#}C) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix}$$

SIAMO SICURI CHE VENGONO FUORI QUE COSE IDENTICHE, PERCHÉ LA RELAZIONE FUNZIONA COSÌ

... E POI $H_{ad} = \begin{bmatrix} H_a & 0 \\ 0 & H_b \end{bmatrix}$ ...

L'ALGORITMO

BASATO SU 3 FASI:

- TPIK 2 (COME SE L'AGENTE FOSSE SOLO)
- CONTRATTAZIONE (OBIETTIVO COMUNE)
- COOPERATIVE TPIK

TPIK — FASE ①

IL SOFTWARE CENTRALE PUBBLICA $\dot{x}_t$

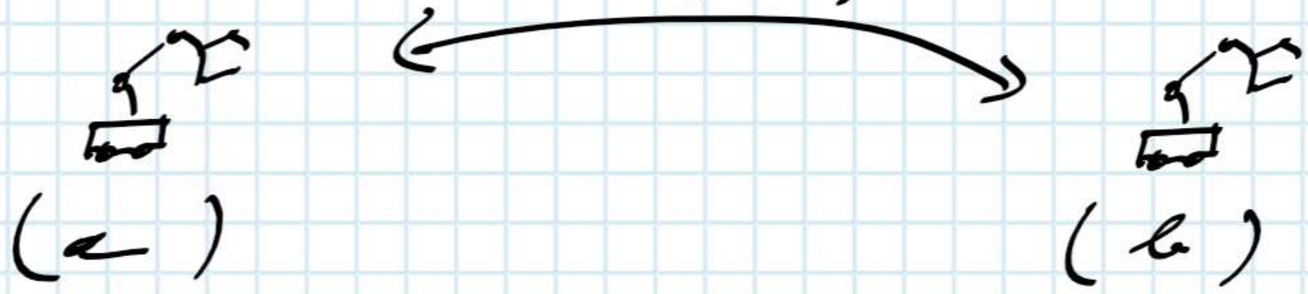
OGNI AGENTE APPLICA UN TPIK CON TARGET $\dot{x}_t$ RICAVANDO COSÌ LA PROPRIA $\dot{x}_{t,i}$

- APPLICAZ DEI SAFETY CONSTRAINTS SU $\dot{x}_{t,i}$
- L'AGENTE OTTIENE $\dot{x}_{t,i}$ COME FOSSE DA SOLO PENSANDO SOLO A SE STESSO E ALLE PROPRIE ESIGENZE

CONTRATTAZIONE

ENTRAMBI CONOSCONO μ_0 PARAMETRO

H_i, $\dot{x}_{t,i}$



I DUE AGENTI SI SCAMBIANO LE PROPRIE H_i, $\dot{x}_{t,i}$

OGNI AGENTE CALCOLA

$$\mu_a \leftarrow \mu_0 + |\dot{x}_t - x_{t,a}|$$
$$\mu_b \leftarrow \mu_0 + |\dot{x}_t - x_{t,b}|$$

OGNI AGENTE VALUTA IL SUO GRADO DI DIFFICOLTÀ NEL RAGGIUNGERE $\dot{x}_t$, E QUELLO DELL'ALTRO AGENTE

QUINDI VIENE CONCORDATA UNA VELOCITÀ TARGET COMUNE:

$$\dot{x}_n = \frac{\mu_a \dot{x}_{t,a} + \mu_b \dot{x}_{t,b}}{\mu_a + \mu_b}$$

LA VELOCITÀ TARGET TIENE CONTO DEL ROBOT PIÙ IN DIFFICOLTÀ TRA I DUE

- IL PESO DEL ROBOT PIÙ IN DIFFICOLTÀ AUMENTA, FACENDO TENDERE IL TARGET COMUNE A QUELLO DEL ROBOT PIÙ IN DIFFICOLTÀ

- LA "DIFFICOLTÀ" DI UN AGENTE VIENE MISURATA DA

$$\mu_0 + \left| \dot{x}_t - \dot{x}_{t,i} \right|$$

QUESTA DIFFERENZA TENDE AD AUMENTARE PER ROBOT CON UN ALTO NUMERO DI SAFETY TASKS O PER DINAMICHE LENTE

INFINE $\boxed{\text{TPIK COOPERATIVE}}$ — FASE 3

NOTA CHE NESSUNA DELLE $\dot{x}_{T,i}$ È STATA OTTENUTA USANDO

$$H_{ab}(I - C^{\#}C)$$

QUINDI A MAGGIOR RAGIONE $\dot{x}_M$ POTREBBE ESSERE QUALUNQUE COSA!

PER POTER ANDARE AVANTI BISOGNA PRIMA FILTRARE $\dot{x}_M$, TROVANDONE LA PARTE CHE

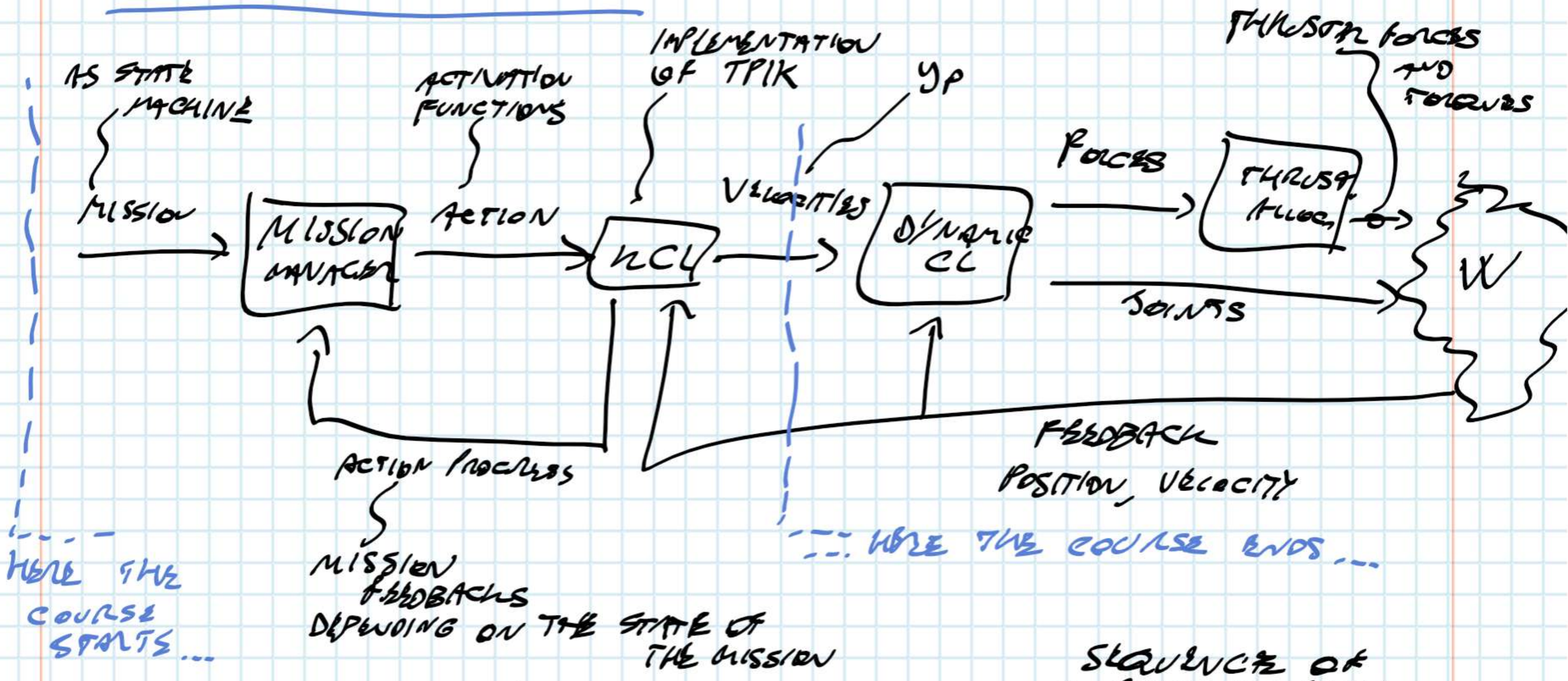
- RISPETTA IL CONSTRAINT
- È FATTIBILE

QUINDI

$$\dot{\tilde{x}}_M \longleftarrow \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_M \\ \dot{\tilde{x}}_M \end{bmatrix} = H_{ab}(I - C^{\#}C) \begin{bmatrix} \dot{x}_M \\ \dot{x}_M \end{bmatrix}$$

$\dot{\tilde{x}}_M$ È L'OBIETTIVO DEFINITIVO; ORA È POSSIBILE ESEGUIRE L'ULTIMO CICLO DI TPIK E TROVARE $\dot{q}_i$ PER OGNI AGENTE E FINE.

Robot Control Layers

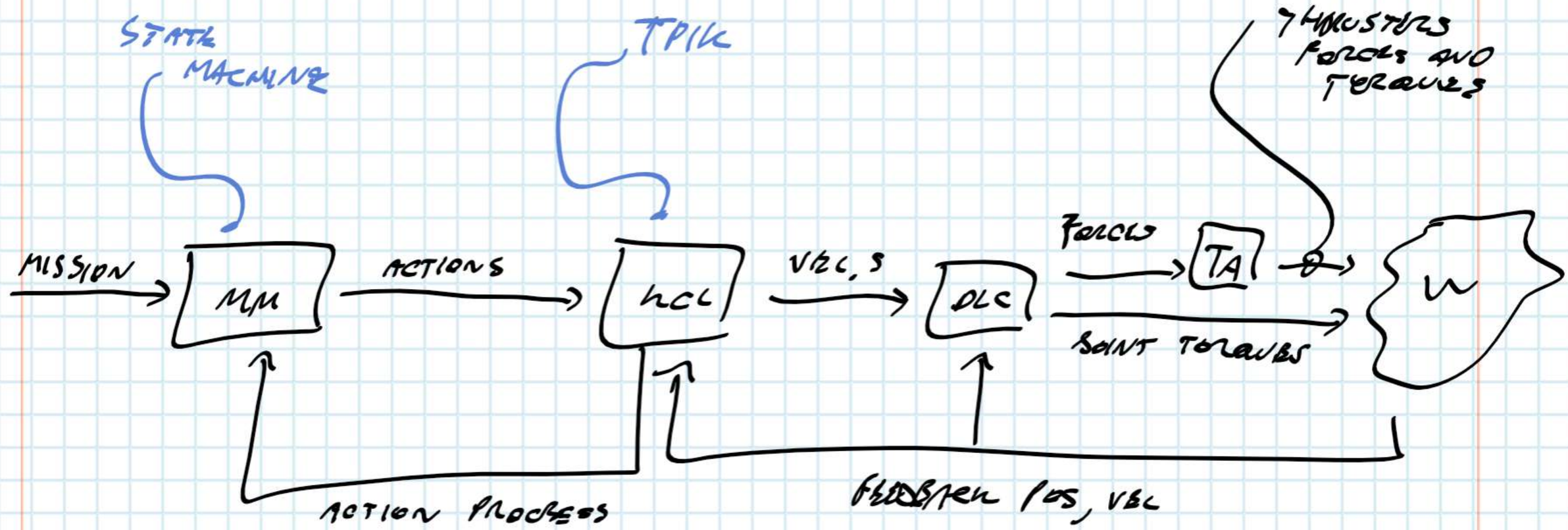


- MISSION MANAGER
  SUPERVISING THE PROCESS OF THE MISSION
  SEQUENCE OF ACTIONS FROM A STATE MACHINE

- KINEMATIC CONTROL LAYER
  IMPLEMENTATION OF THE TASK PRIORITY INVERSE KINEMATIC
  (UNDERACTUATION, COLLABORATIVE TASKS → TPIK SPLIT INTO TWO PARTS)

- DYNAMIC CONTROL LAYER

- THRUSTERS ALLOCATOR



ORIENTATION ESTIMATION:

RATE - GYROSCOPES $\sim$ $\underline{\omega}_v$

INCLINOMETERS $\sim$ ROLL ϕ, PITCH θ

MAGNETOMETERS $\sim$ YAW ψ

POSITION ESTIMATION

UNDERWATER: WE CANNOT USE GPS OR WHATEVER ELECTROMAGNETIC-BASED SYSTEM

$\rightarrow$ ACOUSTIC TECHNOLOGIES (SONAR, ...)

≈ 1500 m/s UNDERWATER (COMPARED TO THE SPEED OF LIGHT, IT IS VERY SLOW)

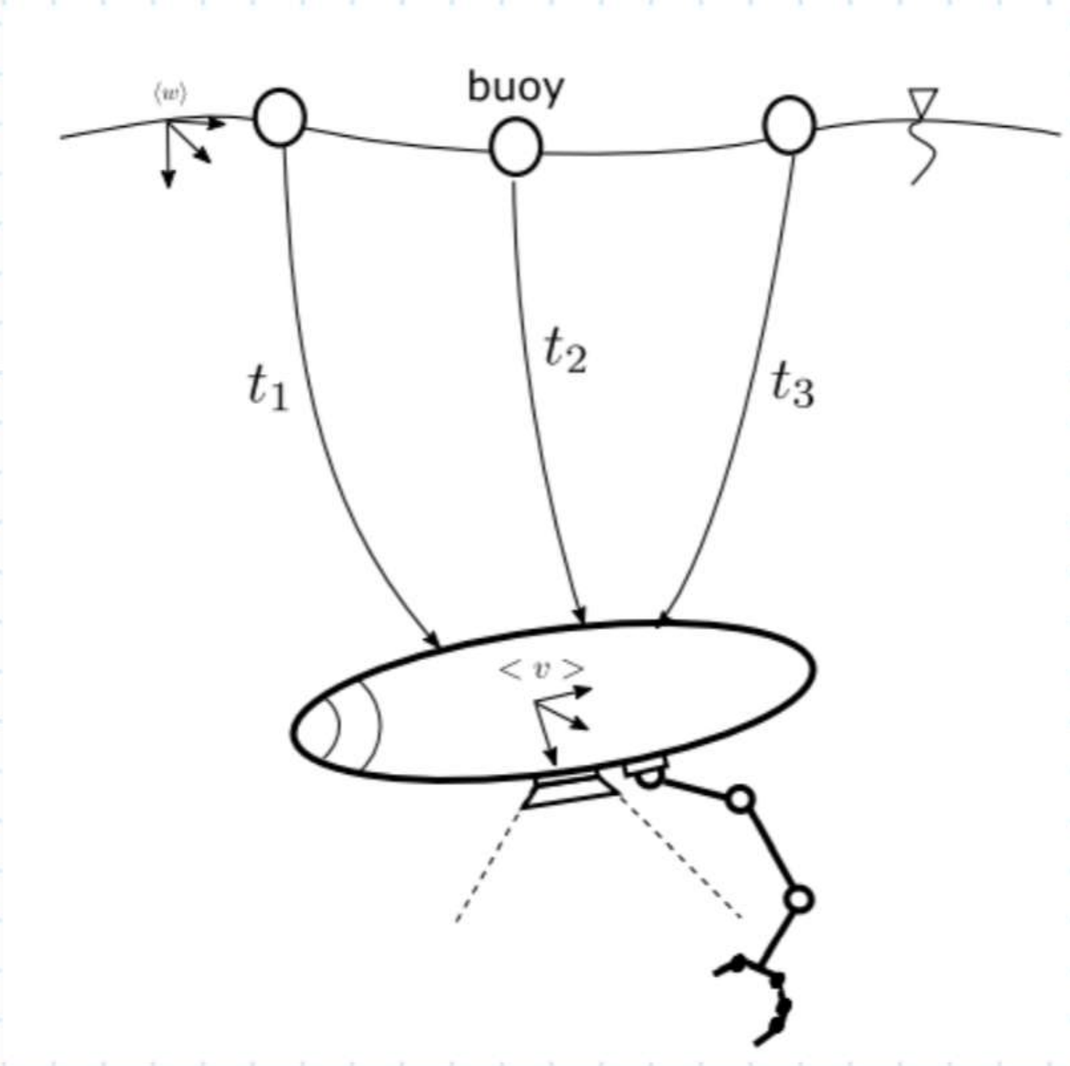
BANDWIDTH VERY LIMITED!

$\boxed{\text{LBL}}$ SOLO CIDRA

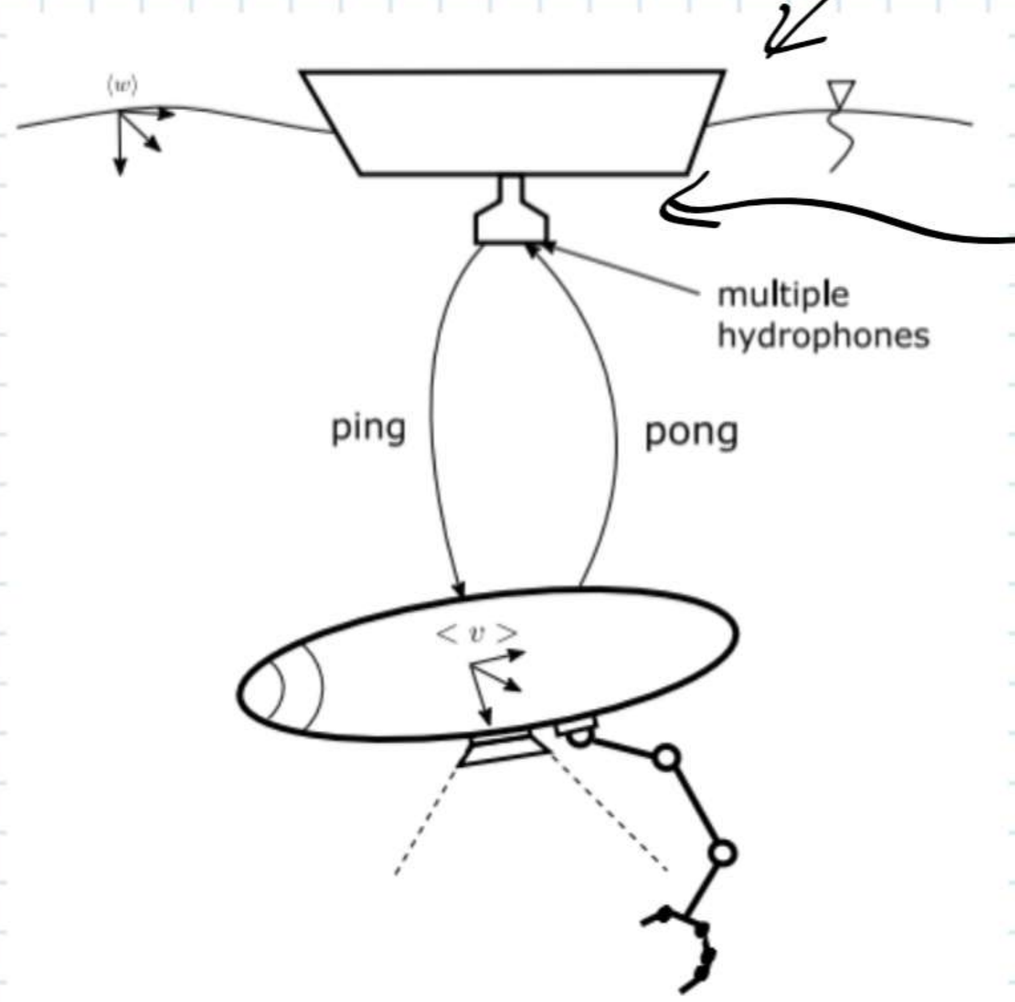
Long Baseline

- VENGONO MESSE DELLE BOE A CALCOLCIARE SULLA SUPERFICIE
- OGNUNA EMETTE UN SEGNALE (PACCHETTO TRASMESSO CON ONDE ACUSTICHE) CON LA PROPRIA POSIZIONE
- RICEVITORE SUL VEICOLO E TRASMETTITORI SONO SINCRONIZZATI (SERVE UN CLOCK)
- IL TRASMETTITORE STIMA LA DISTANZA DA OGNI BOA USANDO IL TIME OF FLIGHT UN PO' COME UNA TRILATERATION

  E IN BASE A QUESTE CALCOLA LA PROPRIA POSIZIONE.



Ultra Short Baseline



SOTTO LA BARCA C'È UN SOLO TRASMETTITORE

IN QUESTO CASO È IL TRASMETTITORE A STIMARE LA POSIZIONE E NON IL VEICOLO STESSO.

"LA BARCA" STIMA LA POSIZIONE DEL VEICOLO USANDO

- IL RITARDO NEL RITORNO DEL SEGNALE TRASMESSO
- E LA DIREZIONE DA CUI ARRIVA IL SEGNALE.

CLASSIFICAZIONE DEGLI OBIETTIVI

I PER SCOPO DELL'OBIETTIVO (IN ORDINE DI PRIORITÀ DECRESCENTE)

PHYSICAL CONSTRAINTS

ENVIRONMENT, LIMITI DI CONTROLLABILITÀ, ...

SAFETY

PER EVITARE TUTTE QUELLE SITUAZIONI IN CUI IL VEICOLO POTREBBE ROMPERSI

ACTION PREREQUISITES

CONDIZIONI DA SODDISFARE PRIMA DI POTER FARE QUALCOSA

ACTION

UNO DEI COMPITI DEL ROBOT

OPTIMIZATION

PERMETTONO DI SCEGLIERE TRA PIÙ SOLUZ POSSIBILI

II

REACTIVE

$\dot{\bar{x}}$ È STRETTAMENTE CORRELATA ALL'EVOLUZIONE DELL'AZIONE

NON-REACTIVE

L'EVOLUZIONE DI $\dot{\bar{x}}$ DIPENDE DA QUALCOSA DI ESTERNO (ES: CONTROLLO MANUALE DEL VEICOLO DA PARTE DELL'UTENTE) E NON DAL TASK ATTUALMENTE IN ESECUZIONE.

DEFINIRE UN OBIETTIVO

PER DEFINIRE UN OBIETTIVO ABBIAMO BISOGNO DI UNA "METRICA", ANCHE DETTA OBJECTIVE FUNCTION

$\underline{x} = \underline{x}(\underline{q})$ $\quad$ $\underline{q}$ CONFIG. VECTOR $(\dot{\underline{q}} = \dot{\underline{q}})$

$\underline{x}$ SCALARE O VETTORE, $\underline{q} \to \underline{x}(\underline{q})$

ES:
- $\underline{x}(\underline{q})$ LA POSIZIONE DEL TOOL FRAME
- $x(\underline{q})$ L'INCLINAZ DEL VEICOLO RISPETTO AD UN DATO ASSE
- $\underline{x}(\underline{q})$ ALCUNI DOF DI UN MANIPOLATORE

UN OBIETTIVO È UN "VALORE DESIDERATO" PER LA OBJECTIVE FUNCTION.

EQUALITY OBJ

$\boxed{\text{III}}$ CLASSIFICAZ IN BASE AL TIPO DI OBJ FUNCTION

VOGLIAMO CHE $\underline{x}(\underline{q}) = \underline{x}_0$

INEQUALITY OBJ

VOGLIAMO CHE $\underline{x}(\underline{q}) \overset{\leq}{\leq} \underline{x}_0$ O $\underline{x}(\underline{q}) \overset{?}{\geq} \underline{x}_0$

NOTA: $\underline{x}(\underline{q}) \in [\underline{x}_1, \underline{x}_2]$ SI TRADUCE IN DUE OBIETTIVI

$\underline{x}(\underline{q}) \geq \underline{x}_1$ E $\underline{x}(\underline{q}) \leq \underline{x}_2$

OSS CLASSIFICAZIONI:

- PER SCOPO
- REATTIVE/NON REATTIVE
- EQUALITY/INEQUALITY

DEFINIRE UNA REFERENCE RATE

$$\dot{x} := \lambda(\bar{x} - x) \qquad (\lambda > 0)$$

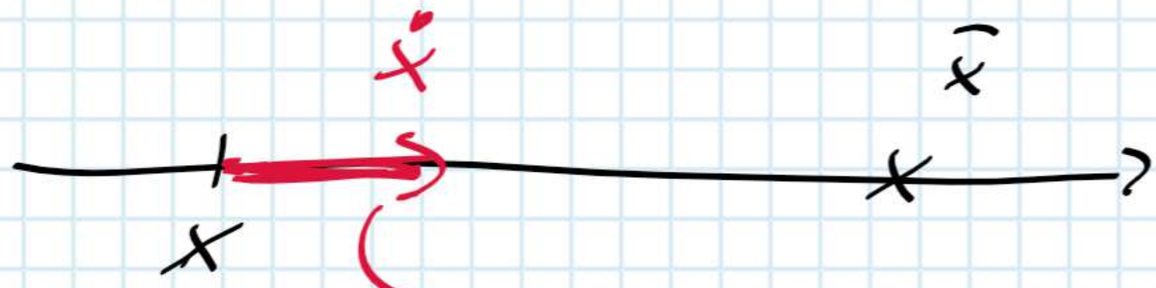
OGNI VOLTA CHE MIRIAMO A DEFINIRE QUESTA LEGGE PER LA DERIVATA DOBBIAMO PENSARE A DOVE DEVE "PUNTARE" LA DERIVATA IN BASE AL SEGNO.

(a) $\dot{x} > 0$ (b) $\dot{x} < 0$ (c) $\dot{x} = 0$ (OBIETTIVO RAGGIUNTO)

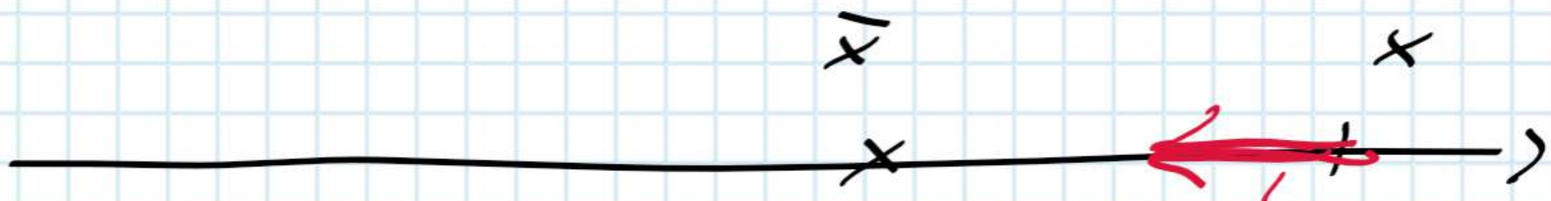
ES: MOTO MONODIMENSIONALE

$$\dot{x} = \lambda(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{POSIZ DESIDERATA}}}{\bar{x}} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{POSIZ ATTUALE}}}{x})$$

$\bar{x}, x$ SONO VALORI PARTICOLARI DELLA METRICA $\mathcal{E}(c)$



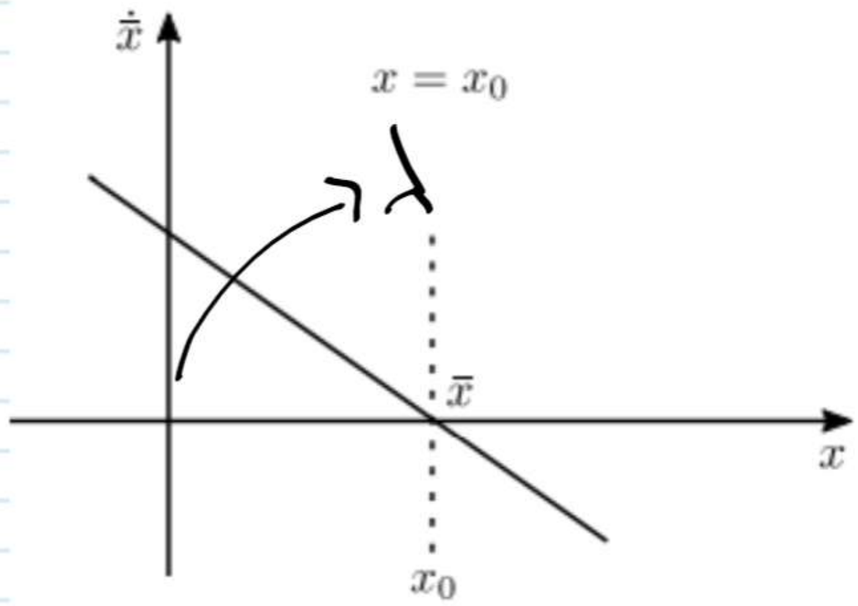
$\bar{x} > x \rightarrow \dot{x} > 0$



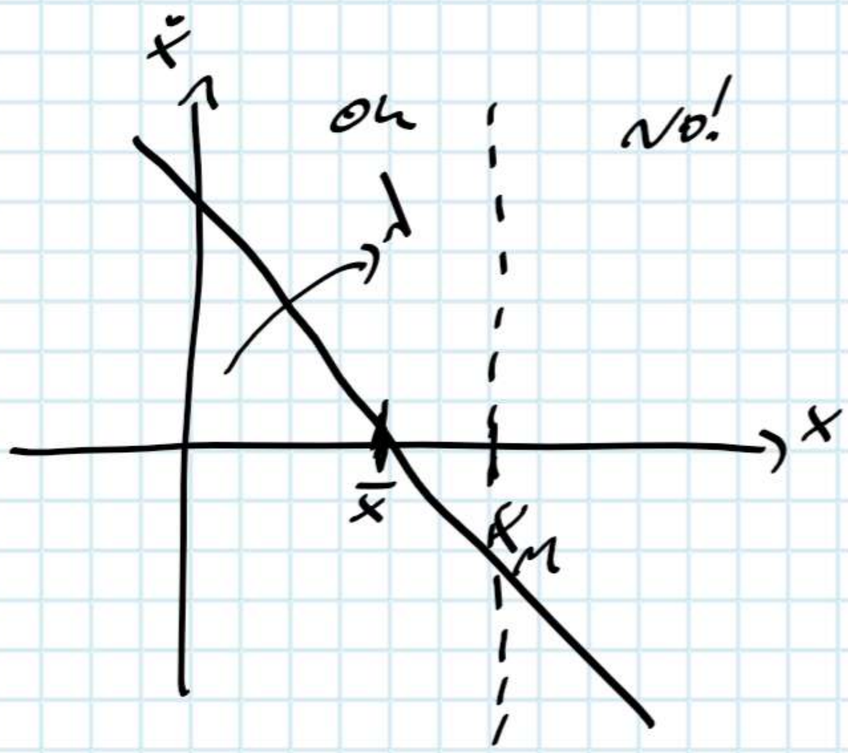
$\bar{x} < x \rightarrow \dot{x} < 0$

COME SCEGLIAMO $\bar{x}$?

EQUILITY: $\underline{x}(\underline{\varepsilon}) = \underline{x}_0 \longrightarrow \bar{x} = \underline{x}_0$

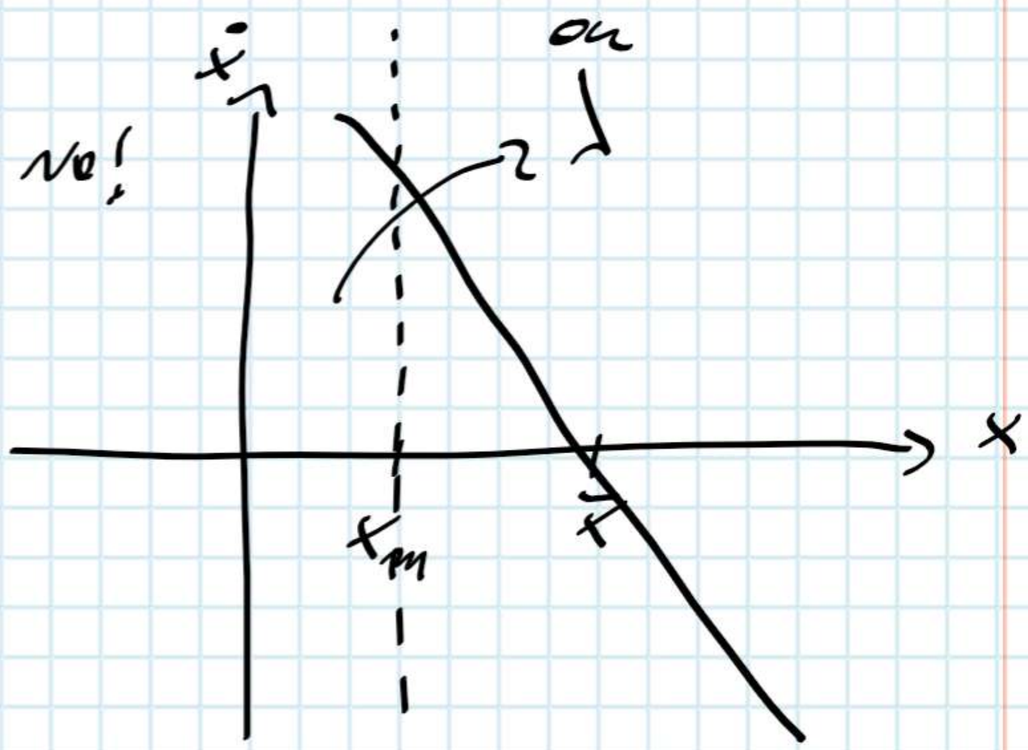


INEQUALITY: TENDO A PORTARE LA METRICA NEL MEZZO DELLA ZONA DI INTERESSE



$x \leq x_M$

$\rightarrow \dot{\bar{x}} < x_M$



$x \geq x_m$

$\rightarrow \bar{x} > x_m$

UNDERACTUATION (IN PARTE COME...)

ASSUNZIONI:

- PARZIALE MANCANZA DI CONTROLLABILITÀ (ATTUATORI) PER ALCUNI TIPI DI DIREZIONE
- TUTTE LE GRANDEZZE SONO OSSERVABILI (MISURABILI)

IL PROBLEMA:

NON VOGLIAMO CHE IL KCL TROVI UNA SOLUZIONE CHE COMPRENDE ANCHE LE COMPONENTI CHE NON POSSONO ESSERE ATTUATE.

L'ALGORITMO DEVE TENERE CONTO ANCHE DELLA UNDERACTUATION.

UNA SOLUZIONE

SUPPONIAMO DI NON AVERE CONTROLLO SU

ω_x, ω_y (ROLL, PITCH)

DEFINISCO UN CONSTRAINT TASK DI MASSIMA PRIORITÀ CON TASK JACOBIAN

$$J_{UNO} = \begin{bmatrix} \underset{6\times n}{0} & \underset{6\times 6}{I} \end{bmatrix}$$

n DOF DEL MANIPOLATORE

REFERENCE RATE UGUALE ALLE VELOCITÀ MISURATE

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z & \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}'$$

NON-REACTIVE TASK! ASSUMIAMO CHE TUTTE LE COMPONENTI SIANO MISURABILI

E ACTIVATION FUNCTION COSTANTE

$$A = \mathrm{diag}(\underbrace{0, 0, 0}_{\underline{v}_v}, \underset{\omega_x}{1}, \underset{\omega_y}{1}, \underset{\omega_z}{0})$$

RAGIONIAMO:

- LA JACOBIANA FORZA LE VELOCITÀ FINALI AD ESSERE UGUALI A QUELLE MISURATE

- MA LA ACTIVATION FUNCTION SPECIFICA SOLO DI FORZARE LE COMPONENTI NON ATTUATE

- IL TASK VIENE IMPOSTO A PRIORITÀ MASSIMA, IL CHE FORZA LE COMPONENTI NON ATTUATE AD ESSERE IDENTICHE A QUELLE MISURATE AL TERMINE DEL CICLO DI TPIK

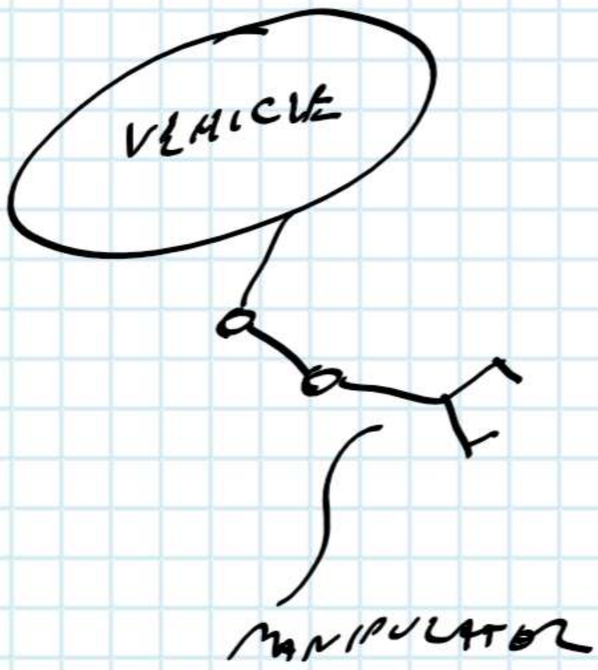
(È COME CONOSCERE IN ANTICIPO PARTE DELLA SOLUZIONE)

UNA VOLTA CREATO LO SCHEMA DI CONTROLLO È ORMAI TOTO COME STRUTTURARE IL CONTROLLO, SOLO TENERE A MENTE I PROBLEMI NOTEVOLI

- OBIETTIVI ANTAGONISTI
- UNDER-ACTUATION
- COORDINAZIONE VEICOLO-MANIPOLATORE

COORDINAZIONE VEICOLO - MANIPOLATORE

SIA A UN'AZIONE DI FLOATING MANIPULATION



VEICOLO E MANIPOLATORE NON SONO KINEMATICALLY DECOUPLED!
→ MUOVERE IL MANIPOLATORE SIGNIFICA MUOVERE ANCHE IL VEICOLO, COMPORTAMENTO NON MOLTO DESIDERABILE

IL PRINCIPALE PROBLEMA È CHE LE PRESTAZIONI DEL MANIPOLATORE PEGGIORANO RAPIDAMENTE CON DISTURBI, ANCORA PEGGIO IN CASO DI UNDERACTUATION.

PER QUESTO SI RICORRE AD UN'OTTIMIZZAZIONE IN DUE PARTI:

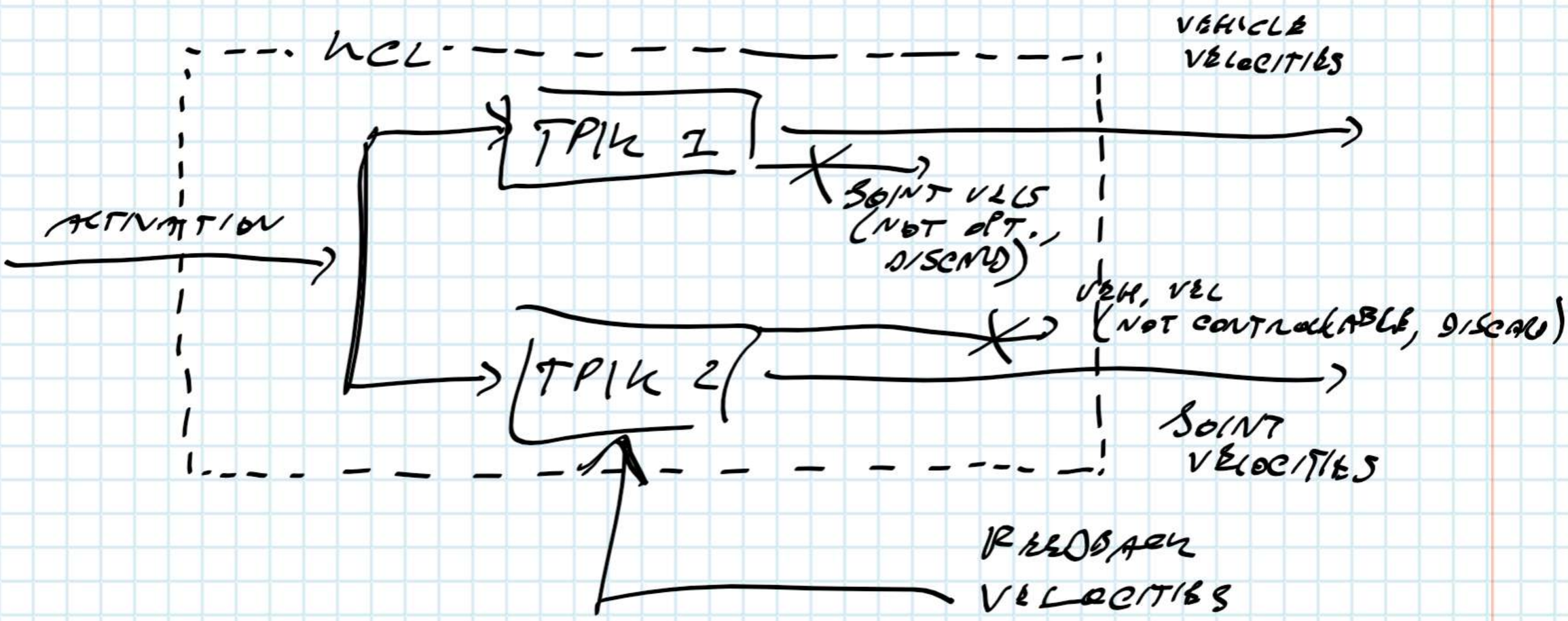
① PRIMO CICLO DI TPIK DEL SISTEMA GLOBALE (VEHICLE + MANIPULATOR) CON TUTTI I TASK, TENENDO CONTO DELLA UNDERACTUATION

② $[\underline{v}_v \ \underline{\omega}_v]' \leftarrow$ TPIK2 SCARTANDO I DOF DEL MANIPOLATORE

(3) TPIK2 SECONDO CICLO ASSUMENDO STABILITÀ LA MANCANZA DI CONTROLLABILITÀ SUL VEICOLO

AL TERMINE DI TPIK2 PRENDO LE $\dot{q}$ DEL MANIPOLATORE MA NON $[\underline{v}_v, \underline{\omega}_v]^T$ DEL VEICOLO (CONSIDERO PIUTTOSTO QUELLE DI TPIK1)

QUINDI,



NOTA:

- SIA TPIK1 CHE TPIK2 TENGONO CONTO DELLA UNDERACTUATION (IL TASK È LO STESSO)
- TPIK2 OTTIMIZZA LE $\dot{q}$ IN BASE ALLE VELOCITÀ MISURATE DEL VEICOLO
- IN CONDIZIONI DI PERFETTA OSSERVABILITÀ DELLE VELOCITÀ DA PARTE DEL VEICOLO, I $\dot{q}$ GENERATI DAI DUE SISTEMI COINCIDONO, COSA CHE IN PRATICA ACCADE MOLTO DI RADO: QUESTA ARCHITETTURA IN CONDIZIONI DI DISTURBO PRODUCE RISULTATI PIÙ ROBUSTI.
- LE DUE UNITÀ POSSONO ANCHE OPERARE A FREQ. DIVERSE