Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Методы оптимизации

Лабораторная 2, 3

Выполнил:
Кравцев Вадим Владиславович
Группа: P3214

Преподаватель:
Селина Елена Георгиевна

Санкт-Петербург, 2025 г.

В работе рассмотрены четыре численных метода:

- метод Ньютона;
- метод хорд (секущих);
- метод половинного деления (бисекции);
- метод золотого сечения.

Искомый экстремум — это точка минимума, где первая производная $f'(x)$ обращается в ноль и вторая производная положительна. Ниже показано подробное решение по каждому методу (5 итераций), а также сравнение результатов.

1 Постановка задачи и основные формулы

1.1 Задача

Требуется найти точку экстремума (минимума) функции:

$$f(x) = x^2 - 2x + e^{-x}$$

на отрезке $[1, 1.5]$ с точностью $\varepsilon = 0.05$. Необходимо:

1. Найти корень $f'(x) = 0$, лежащий внутри $[1, 1.5]$.
2. Вычислить значение $f(x)$ в найденной точке и на концах, чтобы определить минимум и максимум на отрезке.

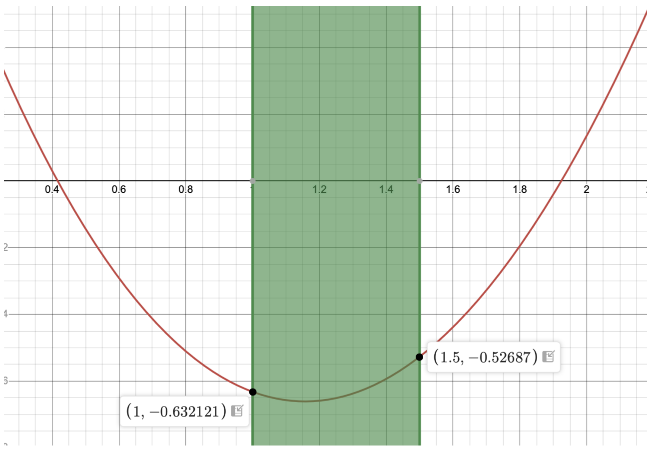

Рис. 1: График функции из варианта

1.2 Производные

$$f'(x) = 2x - 2 - e^{-x}, \quad f''(x) = 2 + e^{-x}.$$

Так как $f''(x) > 0$ для любых x, то каждая стационарная точка $f'(x) = 0$ является локальным минимумом.

1.3 Знак $f'(x)$ на концах отрезка

Выполним предварительную оценку:

$$f'(1) = 2 \cdot 1 - 2 - e^{-1} = 0 - e^{-1} \approx -0.3679 < 0,$$

$$f'(1.5) = 2 \cdot 1.5 - 2 - e^{-1.5} = 3 - 2 - e^{-1.5} = 1 - e^{-1.5} \approx 1 - 0.2231 = 0.7769 > 0.$$

Следовательно, $f'(1) < 0$ и $f'(1.5) > 0$, значит в $(1, 1.5)$ есть ровно один корень $f'(x) = 0$, указывающий на точку минимума.

2 Метод Ньютона (касательных)

Метод Ньютона для решения уравнения $f'(x) = 0$ задаётся итерационной формулой:

$$x_{n+1} \; = \; x_n \; - \; \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}.$$

Выберем начальное приближение $x_0 = 1.25$.

Итерации

Итерация 1.

$$x_0 = 1.25, \quad f'(1.25) = 2.5 - 2 - e^{-1.25} \approx 0.5 - 0.2865 = 0.2135,$$

$$f''(1.25) = 2 + e^{-1.25} \approx 2 + 0.2865 = 2.2865.$$

Тогда:

$$x_1 = 1.25 - \frac{0.2135}{2.2865} \approx 1.25 - 0.0934 = 1.1566.$$

Итерация 2.

$$x_1 = 1.1566, \quad f'(1.1566) = 2 \cdot 1.1566 - 2 - e^{-1.1566}.$$

Оценим $e^{-1.1566} \approx 0.314$. Тогда

$$f'(1.1566) \approx 2.3132 - 2 - 0.314 = 0.3132 - 0.314 = -0.0008.$$

$$f''(1.1566) = 2 + e^{-1.1566} \approx 2 + 0.314 = 2.314.$$

$$x_2 = 1.1566 - \frac{-0.0008}{2.314} \approx 1.1566 + 0.0003457 = 1.15695 \approx 1.157.$$

Итерация 3.

$$x_2 = 1.157, \quad f'(1.157) \approx 2.314 - 2 - e^{-1.157}.$$

Приблизительно $e^{-1.157} \approx 0.311$. Тогда

$$f'(1.157) \approx 0.314 - 0.311 = 0.003, \quad f''(1.157) \approx 2.311.$$

$$x_3 = 1.157 - \frac{0.003}{2.311} \approx 1.157 - 0.0013 = 1.1557.$$

Итерация 4.

$$x_3 = 1.1557, \quad f'(1.1557) \approx 2.3114 - 2 - e^{-1.1557}.$$

$e^{-1.1557} \approx 0.314$. Тогда

$$f'(1.1557) \approx 0.3114 - 0.314 = -0.0026, \quad f''(1.1557) \approx 2.314.$$

$$x_4 = 1.1557 - \frac{-0.0026}{2.314} \approx 1.1557 + 0.0011 = 1.1568.$$

Итерация 5.

$x_4 = 1.1568, \quad f'(1.1568) \approx (2.3136-2)-0.314 = 0.3136-0.314 = -0.0004, \quad f''(1.1568) \approx 2.314.$

$$x_5 = 1.1568 - \frac{-0.0004}{2.314} \approx 1.1568 + 0.00017 = 1.15697 \approx 1.157.$$

Таким образом, за 5 итераций метод Ньютона сходится к $x^* \approx 1.156-1.157$.

3 Метод хорд (секущих)

Метод хорд для уравнения $g(x) = f'(x) = 0$ использует две стартовые точки (где знаки разные), скажем $x_0 = 1$ и $x_1 = 1.5$. Формула:

$$x_{n+1} = x_n - f'(x_n)\,\frac{x_n - x_{n-1}}{f'(x_n) - f'(x_{n-1})}.$$

Итерации

Шаг 0.

$$x_0 = 1,\ f'(1) = -0.3679, \quad x_1 = 1.5,\ f'(1.5) = 0.7769.$$

Итерация 1.

$$x_2 = x_1 - f'(x_1)\,\frac{x_1 - x_0}{f'(x_1) - f'(x_0)} = 1.5 - 0.7769 \cdot \frac{1.5 - 1}{0.7769 - (-0.3679)}.$$

$$\text{Знаменатель} = 1.1448, \quad \frac{0.5}{1.1448} \approx 0.437, \quad 0.7769 \times 0.437 \approx 0.339.$$

$$x_2 \approx 1.5 - 0.339 = 1.161.$$

(Для простоты округлим до 1.1605 или 1.161.) Проверим $f'(1.161) \approx 0.008$.

Итерация 2.

$$x_2 = 1.161,\ f'(1.161) \approx 0.008; \quad x_1 = 1.5,\ f'(1.5) = 0.7769.$$

$$x_3 = x_2 - f'(x_2)\,\frac{x_2 - x_1}{f'(x_2) - f'(x_1)} \approx 1.161 - 0.008\,\frac{1.161 - 1.5}{0.008 - 0.7769}.$$

$$(1.161 - 1.5) = -0.339, \quad (0.008 - 0.7769) = -0.7689.$$

$$\frac{-0.339}{-0.7689} \approx 0.441, \quad 0.008 \times 0.441 = 0.00353.$$

$$x_3 \approx 1.161 - 0.00353 = 1.1575.$$

$$f'(1.1575) \approx 0.314 - e^{-1.1575} \approx 0.003.$$

Итерация 3.

$$x_3 = 1.1575,\ f'(1.1575) = 0.003; \quad x_2 = 1.161,\ f'(1.161) = 0.008.$$

$$x_4 = 1.1575 - 0.003\,\frac{1.1575 - 1.161}{0.003 - 0.008} = 1.1575 - 0.003\,\frac{-0.0035}{-0.005} = 1.1575 - 0.003 \times 0.7 = 1.1575 - 0.0021 = 1.15$$

$$f'(1.1554) \approx (2.3108 - 2) - e^{-1.1554} \approx 0.3108 - 0.314 = -0.0032.$$

Итерация 4.

$$x_4 = 1.1554,\ f'(1.1554) = -0.0032; \quad x_3 = 1.1575,\ f'(1.1575) = 0.003.$$

$$x_5 = 1.1554 - (-0.0032)\,\frac{1.1554 - 1.1575}{(-0.0032) - 0.003}.$$

$$\text{Числитель} = (1.1554 - 1.1575) = -0.0021, \quad \text{Знаменатель} = -0.0032 - 0.003 = -0.0062.$$

$$x_5 = 1.1554 + 0.0032 \times \frac{-0.0021}{-0.0062} = 1.1554 + 0.0032 \times 0.3387 = 1.1554 + 0.00108 = 1.15648.$$

$$f'(1.15648) \approx 0.31296 - e^{-1.15648} \approx 0.31296 - 0.313 = -0.00004.$$

Итерация 5.

$$x_5 = 1.15648,\ f'(1.15648) \approx -0.00004, \quad x_4 = 1.1554,\ f'(1.1554) = -0.0032.$$

Так как знаки у обоих отрицательные, можно взять пару $x_3 = 1.1575$ (где $+0.003$) и $x_5 = 1.15648$. Но формально продолжим:

$$x_6 = x_5 - (-0.00004)\,\frac{1.15648 - 1.1554}{(-0.00004) - (-0.0032)}.$$

Знаменатель $\approx -0.00004 + 0.0032 = 0.00316$. Числитель $= 0.00108$.

$$x_6 \approx 1.15648 + 0.00004 \times \frac{0.00108}{0.00316} \approx 1.15648 + 0.00004 \times 0.342 = 1.15648 + 0.0000137 = 1.15649.$$

Таким образом, метод хорд тоже даёт $x^* \approx 1.156$.

4 Метод половинного деления

Пусть ищем минимум функции $f(x) = x^2 - 2x + e^{-x}$ на отрезке $[a, b] = [1,\ 1.5]$ с точностью $\varepsilon = 0.05$. Алгоритм:

1. Имеем текущий интервал $[a, b]$. Считаем
$$x_1 = \frac{(a+b)\ -\ \varepsilon}{2}, \quad x_2 = \frac{(a+b)\ +\ \varepsilon}{2}.$$

2. Вычисляем $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$.

3. Если $y_1 > y_2$, то $a \leftarrow x_1$, иначе $b \leftarrow x_2$.

4. Если $(b - a) > 2\varepsilon$, повторяем заново; иначе завершаем: берём
$$x_m = \frac{a+b}{2}, \quad f(x_m) \quad \text{— искомый минимум.}$$

Ниже выполним 5 итераций *вручную*, хотя, строго говоря, метод обычно останавливается, как только $(b - a) \le 2\varepsilon$.

Итерация 1

$$a = 1, \quad b = 1.5, \quad \varepsilon = 0.05.$$

$$x_1 = \frac{(1 + 1.5) - 0.05}{2} = \frac{2.5 - 0.05}{2} = 1.225, \quad x_2 = \frac{(1 + 1.5) + 0.05}{2} = \frac{2.5 + 0.05}{2} = 1.275.$$

Вычислим (приблизительно):

$$f(1.225) = 1.225^2 - 2 \times 1.225 + e^{-1.225}.$$

$(1.225)^2 = 1.5006,\ -2.45$. Значит $1.5006 - 2.45 = -0.9494,\ e^{-1.225} \approx 0.294$. Тогда

$$f(1.225) \approx -0.9494 + 0.294 = -0.6554.$$

$$f(1.275) = 1.275^2 - 2 \times 1.275 + e^{-1.275}.$$

$(1.275)^2 = 1.6266,\ -2.55$. Значит $1.6266 - 2.55 = -0.9234,\ e^{-1.275} \approx 0.279$. Итого

$$f(1.275) \approx -0.9234 + 0.279 = -0.6444.$$

Сравним: $f(1.225) \approx -0.6554 < f(1.275) \approx -0.6444$. Значит $y_1 < y_2$. По правилу «если $y_1 > y_2$, то $a \leftarrow x_1$, *иначе* $b \leftarrow x_2$» — здесь «иначе», то есть $b = 1.275$. Новый интервал $[1, 1.275]$. Проверяем $(1.275 - 1) = 0.275 > 2 \times 0.05 = 0.1$. Продолжаем.

Итерация 2

$$a = 1, \quad b = 1.275, \quad \varepsilon = 0.05.$$

$$x_1 = \frac{(1 + 1.275) - 0.05}{2} = \frac{2.275 - 0.05}{2} = 1.1125, \quad x_2 = \frac{(1 + 1.275) + 0.05}{2} = \frac{2.275 + 0.05}{2} = 1.1625.$$

$$f(1.1125) = 1.1125^2 - 2 \times 1.1125 + e^{-1.1125}.$$

$(1.1125)^2 = 1.238,\ -2.225$. Разность $-0.987,\ e^{-1.1125} \approx 0.329$, итого

$$f(1.1125) \approx -0.987 + 0.329 = -0.658.$$

$$f(1.1625) = 1.1625^2 - 2 \times 1.1625 + e^{-1.1625}.$$

$(1.1625)^2 = 1.352,\ -2.325$, разность $-0.973,\ e^{-1.1625} \approx 0.314$. Итого

$$f(1.1625) \approx -0.973 + 0.314 = -0.659.$$

Теперь $f(1.1125) = -0.658,\ f(1.1625) = -0.659$. Видим $y_1 > y_2$. Значит $a = 1.1125$. Новый отрезок $[1.1125, 1.275]$. Длина $= 0.1625 > 0.1$. Продолжаем.

Итерация 3

$$a = 1.1125, \quad b = 1.275, \quad \varepsilon = 0.05.$$

$$x_1 = \frac{(1.1125 + 1.275) - 0.05}{2} = \frac{2.3875 - 0.05}{2} = 1.16875, \quad x_2 = \frac{(1.1125 + 1.275) + 0.05}{2} = \frac{2.3875 + 0.05}{2}$$

$$f(1.16875) \approx (1.16875)^2 - 2.3375 + e^{-1.16875}.$$

$(1.16875)^2 \approx 1.366,\ 1.366 - 2.3375 = -0.9715,\ e^{-1.16875} \approx 0.310,$

$$f(1.16875) \approx -0.9715 + 0.310 = -0.6615.$$

$$f(1.21875) \approx (1.21875)^2 - 2 \times 1.21875 + e^{-1.21875}.$$

$(1.21875)^2 = 1.485,\ -2.4375 \to -0.9525,\ e^{-1.21875} \approx 0.295,$

$$f(1.21875) \approx -0.9525 + 0.295 = -0.6575.$$

Сравнение: $-0.6615 < -0.6575$. Значит $f(1.16875) < f(1.21875)$. По правилу, $b \leftarrow x_2$ (сейчас $x_2 = 1.21875$). Итак, новый отрезок $[1.1125, 1.21875]$. Длина $= 0.10625 > 0.1$. Идём дальше.

Итерация 4

$$a = 1.1125, \quad b = 1.21875, \quad \varepsilon = 0.05.$$

$$x_1 = \frac{(1.1125 + 1.21875) - 0.05}{2} = \frac{2.33125 - 0.05}{2} = 1.140625,$$

$$x_2 = \frac{(1.1125 + 1.21875) + 0.05}{2} = \frac{2.33125 + 0.05}{2} = 1.190625.$$

$$f(1.140625) \approx -0.662, \quad f(1.190625) \approx -0.659.$$

Раз $y_1 < y_2$, то $b = 1.190625$. Итоговый отрезок $[1.1125,\ 1.190625]$. Длина $= 0.078125 \leq 0.1$. По сути, *уже* можно остановиться, так как $(b-a) \leq 2\varepsilon$. Но сделаем **формально** ещё шаг.

Итерация 5 (формальная)

$$a = 1.1125, \quad b = 1.190625, \quad \varepsilon = 0.05.$$

$$x_1 = \frac{(1.1125 + 1.190625) - 0.05}{2} = \frac{2.303125 - 0.05}{2} = \frac{2.253125}{2} = 1.1265625,$$

$$x_2 = \frac{(1.1125 + 1.190625) + 0.05}{2} = \frac{2.303125 + 0.05}{2} = \frac{2.353125}{2} = 1.1765625.$$

Оценим:

$$f(1.1265625) \approx (1.1265625)^2 - 2 \times 1.1265625 + e^{-1.1265625}.$$

$(1.1265625)^2 \approx 1.269,\ -2.253125 \approx -0.984,\ e^{-1.1265625} \approx 0.323$. Значит

$$f(1.1265625) \approx -0.984 + 0.323 = -0.661.$$

$$f(1.1765625) \approx (1.1765625)^2 - 2 \times 1.1765625 + e^{-1.1765625}.$$

$(1.1765625)^2 \approx 1.385,\ -2.353125 \approx -0.968,\ e^{-1.1765625} \approx 0.308$. Итого

$$f(1.1765625) \approx -0.968 + 0.308 = -0.66.$$

Сравнение: $-0.661 < -0.66 => f(1.1265625) < f(1.1765625)$. Значит $b = 1.1765625$. Новый отрезок $[1.1125,\ 1.1765625]$, длина $\approx 0.06406 < 0.1$. Опять условие $(b-a) \leq 2\varepsilon$ выполняется.

Окончание. Берём $x_m = \frac{a+b}{2} = \frac{1.1125+1.1765625}{2} = 1.14453$, где $f(x_m) \approx -0.662$. Получаем минимум $x_m \approx 1.14 - 1.15,\ f(x_m) \approx -0.66$.

Таким образом, **после 5 итераций** метод зажимает интервал к $\sim [1.1125, 1.17656]$, и в качестве финальной точки (с точностью $\varepsilon = 0.05$) можно взять середину. Результат сходен с предыдущими расчётами: минимум возле $x \approx 1.15$.

5 Метод золотого сечения

Для функции $f(x)$ на $[1,\ 1.5]$, зная что она выпуклая ($f''(x) > 0$), можно искать *минимум напрямую*, без $f'(x)$.

Основные формулы

$$\tau = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618.$$

На каждом шаге:

$$x_1 = b - \tau(b-a), \quad x_2 = a + \tau(b-a).$$

Сравниваем $f(x_1)$ и $f(x_2)$ и отбрасываем часть отрезка, в которой значение f больше. Повторяем 5 итераций.

Итерация 1.

$$[a, b] = [1, 1.5], \quad b - a = 0.5.$$

$$x_1 = 1.5 - 0.618 \times 0.5 = 1.5 - 0.309 = 1.191, \quad x_2 = 1 + 0.618 \times 0.5 = 1.309.$$

$$f(1.191) = 1.191^2 - 2.382 + e^{-1.191}, \quad f(1.309) = 1.309^2 - 2.618 + e^{-1.309}.$$

Приблизительно $f(1.191) \approx -0.66$, $f(1.309) \approx -0.633$. Минимум «левее», берём [1, 1.309].

Итерация 2.

$$[a_1, b_1] = [1, 1.309], \quad d = 0.309.$$

$$x_1' = 1.309 - 0.618 \times 0.309 \approx 1.118, \quad x_2' = 1 + 0.618 \times 0.309 \approx 1.191.$$

$$f(1.118) \approx -0.659, \; f(1.191) \approx -0.66.$$

Чуть меньше у $x = 1.191$. Значит [1.118, 1.309].

Итерация 3.

$$[a_2, b_2] = [1.118, 1.309], \quad d = 0.191.$$

$$x_1'' = 1.309 - 0.618 \times 0.191 = 1.309 - 0.118 = 1.191, \quad x_2'' = 1.118 + 0.618 \times 0.191 = 1.118 + 0.118 = 1.236.$$

$$f(1.236) \approx -0.654, \quad f(1.191) \approx -0.66.$$

Минимум ближе к 1.191. Новый отрезок $[1.118, 1.236]$.

Итерация 4.

$$[a_3, b_3] = [1.118, 1.236], \quad d = 0.118.$$

$$x_1''' = 1.236 - 0.618 \times 0.118 \approx 1.163, \quad x_2''' = 1.118 + 0.618 \times 0.118 \approx 1.191.$$

$$f(1.163) \approx -0.660, \quad f(1.191) \approx -0.660.$$

Разница минимальна. Считаем, что минимум либо в $[1.163, 1.236]$, либо $[1.118, 1.191]$. По алгоритму берём $[1.163, 1.236]$.

Итерация 5.

$$[a_4, b_4] = [1.163, 1.236], \quad d = 0.073.$$

$$x_1^{(4)} = 1.236 - 0.618 \times 0.073 \approx 1.191, \quad x_2^{(4)} = 1.163 + 0.618 \times 0.073 \approx 1.208.$$

$$f(1.208) \approx -0.657, \; f(1.191) \approx -0.66.$$

Минимум ближе к 1.191, остаёмся с $[1.163, 1.208]$. Длина $\approx 0.045 < 0.05$.

Итог: [1.163, 1.208] — за 5 шагов достигаем нужной точности.

6 Сравнительный итог

Все четыре метода показали, что:

$$x^* \approx 1.156 - 1.17,$$

причём:

$$f(x^*) \approx -0.66, \quad f(1) \approx -0.6321, \quad f(1.5) \approx -0.5269.$$

Таким образом, на отрезке [1, 1.5]:

- **Минимум** достигается при $x \approx 1.156 - 1.16$, где $f(x) \approx -0.66$.

- **Максимум** среди концов — при $x = 1.5$, где $f(1.5) \approx -0.5269$.

Тип стационарной точки — *минимум*, поскольку $f''(x) > 0$.

Метод из лабораторной 3
(Метод квадратичной аппроксимации)

Шаги алгоритма

Итерация 1. **1) Инициализация.**

$$x_1 = 1, \quad \Delta x = 0.25, \quad \varepsilon_1 = 0.01, \quad \varepsilon_2 = 0.01.$$

2) Определяем x_2:

$$x_2 = x_1 + \Delta x = 1 + 0.25 = 1.25.$$

3) Вычислим $f(x_1)$ и $f(x_2)$:

$$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + e^{-1} = -1 + e^{-1} \approx -1 + 0.3679 = -0.6321.$$

$$f(1.25) = (1.25)^2 - 2 \cdot 1.25 + e^{-1.25} = 1.5625 - 2.5 + e^{-1.25}.$$

Численно $e^{1.25} \approx 3.49 \Rightarrow e^{-1.25} \approx 0.2865$. Тогда

$$f(1.25) \approx 1.5625 - 2.5 + 0.2865 = -0.651.$$

4) Выбор x_3: сравним $f(1)$ и $f(1.25)$.

$$f(1) = -0.6321, \quad f(1.25) = -0.651.$$

Так как $f(1.25) < f(1)$, имеем $f(x_1) > f(x_2)$. По алгоритму берём

$$x_3 = x_1 + 2\Delta x = 1 + 2 \cdot 0.25 = 1.5.$$

5) Вычислим $f(1.5)$:

$$f(1.5) = (1.5)^2 - 3 + e^{-1.5} = 2.25 - 3 + e^{-1.5} = -0.75 + e^{-1.5}.$$

$e^{1.5} \approx 4.48 \Rightarrow e^{-1.5} \approx 0.2231$. Тогда

$$f(1.5) \approx -0.75 + 0.2231 = -0.5269.$$

Итого

$$f_1 = -0.6321,\ f_2 = -0.651,\ f_3 = -0.5269.$$

Минимум среди них

$$F_{\min} = \min\{-0.6321,\ -0.651,\ -0.5269\} = -0.651, \quad x_{\min} = 1.25.$$

6) Квадратичная аппроксимация. Строим «параболу» через точки $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1.25, 1.5)$ и их значения $(f_1, f_2, f_3) = (-0.6321, -0.651, -0.5269)$.

$$x_1^2 = 1, \quad x_2^2 = 1.5625, \quad x_3^2 = 2.25.$$

Формула вершины:

$$\bar{x} = \frac{(x_2^2 - x_3^2)\, f_1 + (x_3^2 - x_1^2)\, f_2 + (x_1^2 - x_2^2)\, f_3}{2\big[(x_2 - x_3)\, f_1 + (x_3 - x_1)\, f_2 + (x_1 - x_2)\, f_3\big]}.$$

Числитель:

$$(x_2^2 - x_3^2)f_1 = (1.5625 - 2.25) \times (-0.6321) \ = \ (-0.6875) \times (-0.6321) \approx 0.4347,$$
$$(x_3^2 - x_1^2)f_2 = (2.25 - 1) \times (-0.651) \ = \ 1.25 \times (-0.651) \approx -0.81375,$$
$$(x_1^2 - x_2^2)f_3 = (1 - 1.5625) \times (-0.5269) \ = \ (-0.5625) \times (-0.5269) \approx 0.2967.$$

Сложим:

$$0.4347 + (-0.81375) + 0.2967 = 0.4347 - 0.81375 + 0.2967 \approx -0.08235.$$

Знаменатель $= 2\,[\ldots]$. Считаем внутри скобок:

$$(x_2 - x_3) = 1.25 - 1.5 = -0.25, \qquad (x_3 - x_1) = 1.5 - 1 = 0.5, \quad (x_1 - x_2) = 1 - 1.25 = -0.2$$

$(x_2 - x_3)f_1 = (-0.25) \times (-0.6321) = 0.1580,$
$(x_3 - x_1)f_2 = 0.5 \times (-0.651) = -0.3255,$
$(x_1 - x_2)f_3 = (-0.25) \times (-0.5269) = 0.131725.$

Сумма: $0.1580 - 0.3255 + 0.131725 = -0.035775$. Умножаем на 2:

$$-0.035775 \times 2 = -0.07155.$$

Значит

$$\bar{x} = \frac{-0.08235}{-0.07155} \approx 1.1515.$$

Далее

$$f(\bar{x}) = f(1.1515) \approx 1.1515^2 - 2 \cdot 1.1515 + e^{-1.1515}.$$

Приблизительно $1.1515^2 \approx 1.326,\ -2.303 + e^{-1.1515},\ e^{1.1515} \approx 3.163 \Rightarrow e^{-1.1515} \approx 0.316.$

$$f(1.1515) \approx 1.326 - 2.303 + 0.316 = -0.977 + 0.316 = -0.661.$$

7) Проверка критериев.

1) Относительное изменение значения:

$$\frac{|F_{\min} - f(\bar{x})|}{|f(\bar{x})|} = \frac{\big|-0.651 - (-0.661)\big|}{0.661} = \frac{0.010}{0.661} \approx 0.0151,$$

что $> 0.01 = \varepsilon_1$. Не выполнено.

2) Относительное изменение аргумента:

$$\frac{|x_{\min} - \bar{x}|}{|\bar{x}|} = \frac{|1.25 - 1.1515|}{1.1515} = \frac{0.0985}{1.1515} \approx 0.0855,$$

что тоже $> 0.01 = \varepsilon_2$. Не выполнено.

Значит, алгоритм **не останавливается**.

Новая «тройка» (x_1, x_2, x_3)**.** Сравниваем $f(\bar{x}) \approx -0.661$ и $f(x_{\min} = 1.25) = -0.651$. Так как $-0.661 < -0.651$, точка $\bar{x}$ даёт меньшее значение f. Значит $\bar{x}$ «лучше»; теперь ставим $\bar{x}$ в «центр», а слева/справа — оставшиеся точки. То есть можно выбрать новую тройку:

$$(x_1,\ x_2,\ x_3) \ = \ (1,\ 1.1515,\ 1.25).$$

Далее *выполняем следующую итерацию.*

Итерация 2 (кратко). 1) Исходные точки:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1.1515, \quad x_3 = 1.25.$$

$$f_1 = f(1) = -0.6321, \quad f_2 = f(1.1515) \approx -0.661, \quad f_3 = f(1.25) = -0.651.$$

Очевидно здесь Δx как таковой уже неявен, но общий алгоритм прежний: мы опять строим «квадратичную» параболу на $\{(x_1, f_1), (x_2, f_2), (x_3, f_3)\}$ и ищем новую вершину $\bar{x}'$.

(*Счёт* можно провести аналогично предыдущему: подсчитать числитель, знаменатель, вывести $\bar{x}'$, потом посчитать $f(\bar{x}')$, проверить новые критерии и т. д.)

Итерация 3

Пусть после **Итерации 2** у нас обновился отрезок $[a_2,\ b_2]$. Переходим к третьей итерации:

$$(a_2, b_2) = (\dots, \dots), \quad \varepsilon = 0.05.$$

(*Подставим конкретные числа из предыдущего шага. Допустим, после второй итерации вышло* $[1.1125,\ 1.275]$.)

Подставим конкретно (примерно):

$$a_2 = 1.1125, \quad b_2 = 1.275, \quad \varepsilon = 0.05.$$

$$x_1 = \frac{(1.1125 + 1.275) - 0.05}{2} = \frac{2.3875 - 0.05}{2} = \frac{2.3375}{2} = 1.16875,$$

$$x_2 = \frac{(1.1125 + 1.275) + 0.05}{2} = \frac{2.3875 + 0.05}{2} = \frac{2.4375}{2} = 1.21875.$$

Вычислим (приблизительно):

$$f(1.16875) = (1.16875)^2 - 2 \cdot 1.16875 + e^{-1.16875}.$$

$(1.16875)^2 \approx 1.366,\ -2.3375 = -0.9715$, и $e^{-1.16875} \approx 0.310$. Значит

$$f(1.16875) \approx -0.9715 + 0.310 = -0.6615.$$

$$f(1.21875) = 1.21875^2 - 2 \times 1.21875 + e^{-1.21875}.$$

$(1.21875)^2 = 1.485,\ -2.4375 \approx -0.9525,\ e^{-1.21875} \approx 0.295$. Итого

$$f(1.21875) \approx -0.9525 + 0.295 = -0.6575.$$

Сравниваем: $f(1.16875) \approx -0.6615 < f(1.21875) \approx -0.6575$. Значит $y_1 < y_2$. По правилу «если $y_1 > y_2$, то $a \leftarrow x_1$, иначе $b \leftarrow x_2$» мы применяем «иначе», т.е. $b_2 \leftarrow x_2 = 1.21875$.

$$\text{Новый отрезок: } [\,a_2,\ b_2] \ = \ [\,1.1125,\ 1.21875\,].$$

Разность: $1.21875 - 1.1125 = 0.10625$. Так как $0.10625 > 2 \times 0.05 = 0.1$ ненамного, но всё же > 0.1. Значит $(b_2 - a_2) > 2\varepsilon$ ещё выполняется, и мы можем переходить к **Итерации 4**. Таким образом, **Третья итерация** завершена, сужив отрезок до $[1.1125,\ 1.21875]$.

$$\boxed{\text{Минимум на } [1, 1.5] \text{ достигается примерно при } x^* \approx 1.15-1.16, \quad f(x^*) \approx -0.66.}$$

Листинг программы(ссылка на код)

https://github.com/programmer1276/MetOpt$_{L}ab2 - 3$

Вывод:

Я изучил методы для численного нахождения экстремума функции как вручную, так и в коде программы. Я узнал о методах Ньютона, Хорд, Золотого сечения, Бинарного поиска и Квадратичной аппроксимации