

ペットボトルロケット 参考資料 v1.1

岩崎 慎太郎

November 9, 2014

1 問題

ペットボトルロケットを子供と一緒に作って飛ばしに行くことを考える。せっかく一緒に作ったので、出来るだけ遠くに飛ばして喜ばせてあげたい。最適な水の量、圧力および打ち上げ角度はいくつか？

シミュレーションの条件は以下のように置くが、合理的な範囲で適宜条件の追加および削除をしてよい。また、計算に必要な定数は各自で補うこと。

- 大気圧は標準大気圧で、気温は 25 度で湿度はなく、風は吹いていない
- 空気は粘性を持たず、比熱比 1.4 の理想気体として振舞う
- 水と空気の入るタンク（ペットボトル）は、半径 45mm で容積 1.5L の円柱で、耐圧 0.6MPa とする
- ノズルは直径 4mm、ロケットの先端は頂角 60 度の円錐で、翼はなく、ロケットの全体の重さは 150g とする

2 小問題

2.1 小問題 1

抵抗および推力がない状態の運動が、エネルギー保存則を満たすか確認しなさい。

2.2 小問題 2

発射時に速度を与えたとき、抵抗および推力がなければ発射角 45 度で飛距離が最大になるか確認しなさい。

2.3 小問題 3

水および空気の噴出で得られる推力の時間変化をグラフに示しなさい。

2.4 小問題 4

一般に推奨されている値でシミュレーションをした時、合理的な飛距離になっているか確認しなさい。

2.5 小問題 5

水の量、圧力および打ち上げ角度をいくつにすると、ペットボトルロケットが最も遠くに飛ぶだろうか。

3 応用問題例

3.1 応用問題例 1

ノズルの大きさはいくつが適切だろうか。

3.2 応用問題例 2

2 段ペットボトルロケットについて調べ、飛距離を最大化しなさい。必要な条件は適宜設定すること。

4 運動方程式を立てるにあたって

4.1 基本の運動方程式

運動方程式が基本の式となる。

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \vec{R}_{air} - m\vec{g} \quad (1)$$

水の噴出量（単位時間当たりの質量）を β とすると、

$$\frac{dm}{dt} = -\beta \quad (2)$$

4.2 水の推力

断面積 A の口から速度 v_{water} で水を噴出する時、

$$\beta_{water} = \rho_{water} A v_{water} \quad (3)$$

となる。水の噴出による反作用で得られる力は、以下ようになる。

$$F = \beta_{water} * v_{water} \quad (4)$$

A は小さく、定常流れが生じるとして非粘性・圧縮性流体のベルヌーイの定理を用いると、流線上で

$$\frac{1}{2} v_{water}^2 + \frac{p}{\rho_{water}} - gh = const. \quad (5)$$

となる。ただし gh はその位置で受ける重力加速度の大きさを示す。

ペットボトル内の水面を考える。表面での流速を v'_{water} とし、ペットボトル内の圧力を P とすると、ベルヌーイの定理から以下のように書ける。

$$\frac{1}{2} v'^2_{water} + \frac{P}{\rho_{water}} = const. \quad (6)$$

ペットボトルの噴出口を考える。ロケットの傾きを θ とし、大気圧を P_0 とすると、ベルヌーイの定理から同様に

$$\frac{1}{2} v_{water}^2 + \frac{P_0}{\rho_{water}} - (g \cos \theta + a)h = const. \quad (7)$$

となる。ここで、ロケットに対して静止系を取るため、ロケットの加速度 a を補正することに注意。

これが流線上で等しいので、

$$\frac{1}{2} v'^2_{water} + \frac{P}{\rho_{water}} = \frac{1}{2} v_{water}^2 + \frac{P_0}{\rho_{water}} - (g \cos \theta + a)h \quad (8)$$

が成り立つ。この式にペットボトル自体の断面積を A_0 として、水面と噴出口での連続の式、

$$A_0 v'_{water} = A v_{water} \quad (9)$$

を連立することで、水が中にある時の F を求めることができる（ここで、 P の変化は断熱変化として計算してよい）。

これを解くと

$$v'_{water} = \frac{A}{A_0} v_{water} \quad (10)$$

を代入して、

$$v_{water}^2 = \frac{(g \cos \theta + a)h + \frac{P-P_0}{\rho_{water}}}{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{A^2}{A_0^2}\right)} \quad (11)$$

である。

4.3 空気の推力

水を全て出し切ると、速やかに空気の噴出に変わる。

断面積 A の口から速度 v_{air} で空気を噴出する時、以下の式が成り立つ。

$$\beta_{air} = \rho_{air} A v_{air} \quad (12)$$

空気の噴出の反作用で得られる力は、

$$F_1 = \beta_{air} * v_{air} \quad (13)$$

であるが、さらに、ペットボトル内外の圧力差（噴出部 P'_0 、大気圧 P_0 と置いている）から、

$$F_2 = A (P'_0 - P_0) \quad (14)$$

が圧力推力として得られる。この2つの和、

$$F = F_1 + F_2 \quad (15)$$

が得られる推力になる。

さて、空気の粘性を無視し、 A が十分小さく、系は外部と熱のやり取りがないとして、定常流れを仮定すると、容器内部（圧力 P ）と噴出部（ P'_0 ）でベルヌーイの定理を立てると以下ようになる（空気の場合、ポテンシャルの項は不要）。

$$\frac{1}{2} v_{air}^2 + \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \frac{P'_0}{\rho_{air0}} = \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \frac{P}{\rho_{air}} \quad (16)$$

ただし、 γ は空気の比熱比 C_p/C_v である。また、 ρ_{air0} は噴出部密度、 ρ_{air} は容器内密度とした。

さらに断熱過程であることから、空気が理想気体であるとして以下の式を得る。

$$\frac{P'_0}{\rho_{air0}^\gamma} = \frac{P}{\rho_{air}^\gamma} \quad (17)$$

これを解いて、噴出速度 V が得られる。

ただし、流速はその流体の音速 v_{airmax} を超えず、この時噴出部の圧力は大気圧 P_0 にならない。音速は、

$$v_{airmax} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}} \quad (18)$$

である。ただし、 T_0 は噴出部の温度である。噴出部についての理想気体の状態方程式を代入することで、噴出部の圧力が一定以上にならないことが分かる。噴出部の圧力は、 $v_{air} < v_{airmax}$ の範囲で $P'_0 = P_0$ に従うが、そうでない時は、 P'_0 は $v_{air} = v_{airmax}$ を満たす値になる。

P'_0 が小さくなり、 P_0 と変わらなくなった時点で、推進力がなくなり、ペットボトルロケットは慣性のみで飛ぶようになる。

これらの式を解く。 v_{airmax} は、理想気体の状態方程式 $PV = nRT$ について、 $\frac{nM}{V} = \rho$ であることを利用して、

$$v_{airmax} = \sqrt{\frac{\gamma P'_0}{\rho_{air0}}} \quad (19)$$

となる（噴出部の値を使うことに注意）。ここから、 $v_{airmax} = v_{air}$ となる条件を求める。これを解くと

$$P'_0 = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} P \quad (20)$$

となる。つまり、上式で与えられる解 P'_0 が P_0 より大きいような P の場合は、 $v_{airmax} < v_{air}$ になってしまうため、 $P'_0 (\neq P_0)$ は上の値を使う（当然この時 $v_{air} = v_{airmax}$ ）。

$v_{airmax} = v_{air}$ の場合、

$$\rho_{air0} = \rho_{air} \left(\frac{P'_0}{P} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (21)$$

を使って整理すると、

$$v_{airmax}^2 = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{P}{\rho_{air}} \quad (22)$$

になるから、

$$F = F_1 + F_2 = \rho_{air} A v_{air}^2 + A(P'_0 - P_0) = A \frac{2\gamma}{\gamma+1} P + A \left(\left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} P - P_0 \right) \quad (23)$$

として解ける。

$v_{airmax} > v_{air}$ の場合、 $P'_0 = P_0$ である。

$$\rho_{air0} = \rho_{air} \left(\frac{P_0}{P} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (24)$$

であるから、これを代入して整理すると、

$$v_{air}^2 = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{P}{\rho_{air}} - \frac{P_0}{\rho_{air} \left(\frac{P_0}{P} \right)^{\frac{1}{\gamma}}} \right) \quad (25)$$

となり、

$$F = F_1 + F_2 = F_1 + 0 = \rho_{air} A v_{air}^2 = A \frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(P - \frac{P_0}{\left(\frac{P_0}{P} \right)^{\frac{1}{\gamma}}} \right) \quad (26)$$

として解ける。

4.4 ペットボトルの圧力と密度

断熱過程であるから、時間変化によらずペットボトルの内部で常に

$$\frac{P}{\rho_{air}^\gamma} = const. \quad (27)$$

が成り立つ。

水が噴出している最中は、空気が外に漏れることはなく、ボトル中の水の減少分だけ空気の体積が増えることで、圧力が減少する。

空気が噴出している間は、質量保存の式から、

$$d(\rho_{air} V) = -\rho_{air0} A v_{air} dt \quad (28)$$

が成り立ち、密度 ρ_{air} が減少するため、圧力も減少する（ここでの V はペットボトルの容積である）。

ただし、このシミュレーションを普通に行うと、最後ペットボトル内の密度が空気の密度にならない。これは、シミュレーション中の「断熱過程」の仮定によって、空気の膨張で内部の気体が冷やされても熱が外に逃げないからである。これをうまく空気の密度と合わせたい場合は、最初空気をペットボトルに入れる時に断熱過程で入れたと仮定するのも一つの手である。

4.5 抗力

運動中全体を通して、抗力は進行方向の逆向きに働く。ここでは空気抵抗を考える。空気の密度を ρ_{air} とし、ペットボトルロケットの速度を v 、ペットボトルの断面積を A_0 、抗力係数を C_D とすると、

$$R = \frac{1}{2} \rho_{air} v^2 S C_D \quad (29)$$

となる。抗力係数はペットボトルロケットの先端として適当なものを選ばよい。また、このロケットには羽などの余計な付属部品はないものとする。

4.6 もっと詳しいモデル

実際は水のための噴出から、気液二相流（チャーン流と考えられる）を経て、空気のための噴出になるという（立式可能なのか不明）。また断熱変化を仮定としていたが、実際は放熱も含むため、ポリトロプ過程を考えることでより正確に導くことができると考えられる（定数をどう計算するのかは知らない）。

5 参考となる Web ページ

1. 金子望「ペットボトルロケットの教材化」
<http://www.asahi-net.or.jp/~hy9n-kenk/petindex.htm>
大変参考になると思います。答えが載っているような気がしますが、そのまま写すと計算の雰囲気を見失う可能性があるため、一度自分で導出することをお勧めします。
2. 板倉嘉哉, 本田祐基「身近な遊具等の工学的解析（その1：ペットボトルロケットの推力特性）」
http://mitizane.ll.chiba-u.jp/metadb/up/AA11868267/13482084_58_365.pdf
実験値と理論値との比較に際して、とても参考になると思います。ペットボトルロケットの特性の測定を行った論文で、理論値との比較にとっても役立つでしょう。