ノイズキャンセリング

TA　遠藤 亘

2014-11-18

1　問題

ある直方体の空間中に騒音源があり，これによって発生する騒音を空間内部のある領域において除去したい．騒音源は周波数，位相，振幅が全て既知の正弦波を発生させるとし，消音スピーカーを適宜配置することで，特定の領域に発生する音波のエネルギーを最小化せよ．

2　小問題

2.1　基本方程式の導出

波動は，流体以外にも電磁波のような異なる物理現象においても，波動方程式と呼ばれる一意な式によって表せる．

空気の “運動方程式” と，“連続の式” から，適切な線形近似を行い，波動方程式を導出せよ．

2.2　FDTD 法の適用

偏微分方程式を数値的に解く方法として，基本的な手法として差分法が知られている．特に，時間微分と空間微分の両方を差分近似する手法は FDTD 法と呼ばれ，波動方程式の最も基本的な数値解析手法である．

上で求めた波動方程式から，FDTD 法による数値計算に必要な時間ステップ毎の更新式を導出せよ．

数値シミュレーションをする上では，更新式だけでなく，初期条件と境界条件も重要な要素である．特に音波が壁で反射するような状況を考慮すると，境界条件はどのように指定すればいいだろうか．

2.3　FDTD 法のプログラム

FDTD 法によって実際に数値計算を行うプログラムを記述し，音波伝搬の様子をグラフ化せよ．

まずは，最も単純に，ある点の周りの 6 点の値を基に差を計算するプログラムを記述して，きちんと波が伝搬することを確認するとよい．しかし，これでは実行性能に問題があるので，改善手法について検討せよ．

2.4　エネルギー最小化

FDTD 法による音波伝搬シミュレータを用いて，スピーカーのパラメータを複数試し，音を最小化出来るパラメータを求めるプログラムを作成せよ．

3　発展課題

3.1　格子モデルの改良

同じ FDTD 法によるシミュレーションであっても，格子点をずらしたスタッガード格子によって、シミュレーションの誤差を低減できることがあることが知られている．

先ほどまでの通常格子に加えて，スタッガード格子を利用したプログラムも作成し，両者の結果を比較せよ．

3.2 PyAudio を試す

Python には，波形を実際に音声として再生する PyAudio というモジュールがある．これまでシミュレーションした結果について，空間のどこか 1 点について実際の音として再生してみよ．

余裕があれば，ドップラー効果のような波動現象について，実際にシミュレーションで再現できているかどうか確認できるとよい．

3.3 任意波形への拡張 (やや難しい)

これまでは騒音を正弦波であると仮定してきたが，任意波形に拡張することを考えてみよ．簡単のため，消音すべき場所は 1 点のみでよく，消音スピーカーも 1 つだけとする．

3.4 適応的なノイズキャンセリング (難しい)

マイクロフォンで集音して，その波形を基にスピーカーから音を出力すれば，入力波形が未知であったとしてもノイズキャンセリングを行えると期待される．未知波形のノイズキャンセリングについて検討せよ．

3.5 非線形音響現象 (おそらくとても難しい)

空気は実際には完全に線形な振る舞いをするわけではなく，僅かではあるが非線形な成分が含まれている．このような非線形現象を応用した例として，パラメトリックアレイスピーカー等が知られている．

非線形な音波伝搬を解析するには，通常は線形近似してしまう式をより厳密に計算する必要がある．非線形現象の解析には，音響分野にも最近応用され始めた CIP 法等，いくつかの数値計算手法が存在する (らしい).

4 解説

4.1 波動方程式の導出

4.1.1 体積と圧力の関係

ある体積要素について，微小時間における体積 V と圧力 P の変化の関係について見ていく．

まず，微小時間の変化が “断熱過程” であるという仮定をおく．すなわち，微小時間における体積要素内外の熱のやり取りは無いと仮定する．この時，

$$PV^{\gamma} = \text{const.} \tag{4.1}$$

が成り立つ．ただし γ は比熱比である．ここで，圧力が $P_0 \to P_0 + \Delta p$，体積が $V_0 \to V_0 + \Delta v$ と変化するなら，

$$P_0 V_0^{\gamma} = (P_0 + \Delta p)(V_0 + \Delta v)^{\gamma} \tag{4.2}$$

である．2 次の微小項を取り除くことで，

$$\frac{\Delta p}{P_0} = -\gamma \frac{\Delta v}{V_0} \tag{4.3}$$

が導かれる．これは，力 (圧力) と 幾何的距離 (体積) の比例関係を示しており，フックの法則の一種である．つまり，気体が弾性体として振る舞うことを示している．

4.1.2 連続の式

流体における質量保存の法則は，連続の式と呼ばれる．

ここから，ある点 (x,y,z) の速度を $\boldsymbol{u}(x,y,z) = (u_1,u_2,u_3)$，密度を $\rho(x,y,z)$ とおく．

微小な直方体 (体積 $V_0 = \Delta x \Delta y \Delta z$) を考えて，この体積要素が微小時間で増加する体積 Δv を調べると，

$$\begin{aligned}\Delta v = &\rho(x+\Delta x,y,z)\{u_1(x+\Delta x,y,z)\Delta t\}\Delta y\Delta z - \rho(x,y,z)\{u_1(x,y,z)\Delta t\}\Delta y\Delta z\\ &+\rho(x,y+\Delta y,z)\{u_2(x,y+\Delta y,z)\Delta t\}\Delta x\Delta z - \rho(x,y,z)\{u_2(x,y,z)\Delta t\}\Delta x\Delta z\\ &+\rho(x,y,z+\Delta z)\{u_3(x,y,z+\Delta z)\Delta t\}\Delta x\Delta y - \rho(x,y,z)\{u_3(x,y,z)\Delta t\}\Delta x\Delta y\end{aligned} \tag{4.4}$$

である．これを整理して，$\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t \to 0$ の極限を取ると，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho\,\boldsymbol{u}) \tag{4.5}$$

と分かる．(ここで div はベクトル解析の発散である．) これが一般的な連続の式である．

ここで，密度が急激に変化しないという仮定をおくと，右辺の ρ を係数として外に出すことが出来る．質量が保存することから密度と体積の関係も線形近似でき，

$$\frac{\partial \Delta v}{\partial t} = V_0 \operatorname{div}\boldsymbol{u} \tag{4.6}$$

となる．

さらに，先ほど求めた体積と圧力の関係を用いると，

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\gamma \operatorname{div}\boldsymbol{u} \tag{4.7}$$

と変形できる．

4.1.3 運動方程式

流体の運動方程式は “ナビエ・ストークス方程式” であるが，非常に単純化されたモデルであればニュートンの運動方程式でも同じ式が導ける．

x 方向の運動について考えると，

$$\rho\Delta x\Delta y\Delta z\frac{\partial u_x}{\partial t} = -p(x+\Delta x,y,z)\Delta y\Delta z + p(x,y,z)\Delta y\Delta z \tag{4.8}$$

であり，極限を取ると

$$\rho\frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \tag{4.9}$$

である．y, z 方向についても同様なので，

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{grad} p \tag{4.10}$$

がいえる．

より一般的な “ナビエ・ストークス方程式” と比較すると，対流項と拡散項が無視されていることが分かる．

4.1.4 波動方程式

ここまで求めてきた運動方程式と連続の式を連立させることで，波動方程式を導出することが出来る．

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = -\dfrac{1}{p}\operatorname{grad} p & (\text{運動方程式})\\[2mm] \dfrac{\partial p}{\partial t} = -\gamma \operatorname{div}\boldsymbol{u} & (\text{連続の式})\end{cases} \tag{4.11}$$

上式の両辺に発散を，下式の両辺に時間微分を適用し，連立させることで，波動方程式が導出できる．

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\nabla^2 p \tag{4.12}$$

$$\text{ただし } c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho}} \text{ は音速.} \tag{4.13}$$

ここで $\nabla^2 p = \nabla\cdot\nabla p = \operatorname{div}\operatorname{grad} p$ はラプラシアンと呼ばれる演算である．

4.2　FDTD 法による近似計算

波動方程式に差分法を適用する場合，2 階微分が含まれることに注意する必要がある．
以下の波動方程式

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 p \tag{4.14}$$

について，時間ステップ幅 Δt，空間格子間隔 Δh とおいて，差分法を適用する．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c^2}\frac{p(x,y,z;t) - 2p(x,y,z;t-\Delta t) + p(x,y,z;t-2\Delta t)}{(\Delta t)^2} \\
&= c^2 \left\{ \frac{p(x+\Delta x,y,z;t-\Delta t) - 2p(x,y,z;t-\Delta t) + p(x-\Delta x,y,z;t-\Delta t)}{(\Delta h)^2} \right. \\
&+ \frac{p(x,y+\Delta y,z;t-\Delta t) - 2p(x,y,z;t-\Delta t) + p(x,y-\Delta y,z;t-\Delta t)}{(\Delta h)^2} \\
&\left. + \frac{p(x,y,z+\Delta z;t-\Delta t) - 2p(x,y,z;t-\Delta t) + p(x,y,z-\Delta z;t-\Delta t)}{(\Delta h)^2} \right\}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

整理すると，

$$p(x,y,z;t) = \frac{(c\Delta t)^2}{(\delta h)^2}\{p(x+\Delta x,y,z;t-\Delta t) + \cdots\} + 2p(x,y,z;t-\Delta t) - p(x,y,z;t-2\Delta t) \tag{4.16}$$

となり，時間ステップの更新式が得られた．