ЛЕКЦИЯ №8

По дисциплине: **«Электроника и электротехника»**

Тема №:5 **Переходные процессы в линейных электрических цепях**

Занятие №:5 **Переходные процессы**

Учебные вопросы:

1. Понятие переходного процесса.
2. Законы коммутации и начальные условия.
3. Переходные процессы в цепи постоянного тока с одним индуктивным элементом.
4. Переходные процессы в цепи постоянного тока с одним емкостным элементом.

Литература для самостоятельной работы обучающихся:

1. Иванов, И. И. Электротехника и основы электроники: учебник. – 9-е изд., стер/ И.И. Иванов, Г.И. Соловьев, В.Я Фролов. – СПб: Лань, 2017. – 736 с.

2. **Касаткин, А.С.** Электротехника: учебник/ А.С. Касаткин, М.В. Немцов. – 12-е изд. стер. – Москва.: Академия, 2008. – 544 с. – и предыдущие издания.

б) дополнительная литература:

3. **Немцов, М. В.** Электротехника и электроника: учебник/ М. В. Немцов. – Москва: КноРус, 2016. – 560 с. – и предыдущие издания.

1. Понятие переходного процесса..

Изменения схемы соединения (например, включение и выключение отдельных участков, подключение отдельных элементов, называется коммутацией, из-за которой цепь может перейти от одного режима работы к другому. Практически этот переход от одного режима к другому происходит не мгновенно, а в течение некоторого периода или промежутка времени. Процессы происходящие в цепи в этот период времени называются **переходными процессами**. Возникновения переходных процессов объясняется тем, что в каждом состоянии электрической цепи соответствует определенный запас энергии в электрическом поле конденсатора)

$$W_э = \frac{CU_c^2}{2} = \frac{QU_c}{2}$$

и в магнитном поле катушки индуктивности

$$W_м = \frac{Li_L^2}{2} = \frac{\psi i_L}{2}.$$

Переход к новому режиму цепи связан с перераспределением этих энергий между реактивными элементами и с необратимыми преобразованиями энергии в резистивных элементах. Такие изменения энергий не могут происходить мгновенно, т.е. скачком, так как для такого скачкообразного изменения необходима мощность

$$p = \frac{dW}{dt} \to \infty,$$

что лишено физического смысла – цепей бесконечно большой мощности не существует.

При наличии в цепи индуктивных и емкостных элементов переходной процесс дается теоретически бесконечно долго (пока полностью не закончится обмен энергии между реактивными элементами), но практически продолжительность переходного процесса ограничена и зачастую исчисляется секундами или долями секунд.

Изучение переходных процессов имеет большое практическое значение, так как позволяет определять повышение токов и напряжений сверх номинальных значений из – за коммутаций в цепях с различными электротехническими устройствами (двигателями, трансформаторами, реле и т.п.). Во время переходных процессов токи и напряжения могут быть в несколько раз больше, чем в установившемся режиме, и приводить к авариям. Подбирая значения отдельных параметров у разных элементов и применяя специальные схемы их включения, можно ускорить или замедлить время переходного процесса, а также ограничить скачки тока и напряжения при этом.

2. Законы коммутации и начальные условия.

В дальнейшем будем считать, что **коммутация**, т.е. включение, выключение и т.п., **происходит мгновенно**. Из закона сохранения энергии и требования конечного значения мгновенной мощности вытекает принцип непрерывности во времени потокосцепления и тока в индуктивном элементе, а также электрического заряда и напряжения на емкостном элементе. Это означает, что в первый момент после коммутации ток в индуктивном элементе (короче, индуктивности) равен току непосредственно перед коммутацией и напряжения на емкостном элементе (короче, емкости) в начальный момент времени остается таким же, как непосредственно до коммутации, т.е. **ток в индуктивном и напряжение на емкостном элементах не могут изменяться скачком.** Эта и есть два закона коммутации.

Начальные условия. Законы коммутации

Постоянные интегрирования находятся из начальных условий, которые принято делить на независимые и зависимые. К независимым начальным условиям относятся потокосцепление (ток) для катушки индуктивности и заряд (напряжение) на конденсаторе в момент времени $t = 0$(момент коммутации). Независимые начальные условия определяются на основании законов коммутации (см. табл. 1).

$i_C = dq/dt = \infty$ $\qquad$ $u_L = d\psi/dt = \infty$

Таблица 1. **Законы коммутации**

Название закона	**Формулировка закона**
Первый закон коммутации (закон сохранения потокосцепления)	Магнитный поток, сцепленный с катушками индуктивности контура, в момент коммутации сохраняет то значение, которое имел до коммутации, и начинает изменяться именно с этого значения: $\psi(0+) = \psi(0-)$.
Второй закон коммутации (закон сохранения заряда)	Электрический заряд на конденсаторах, присоединенных к любому узлу, в момент коммутации сохраняет то значение, которое имел до коммутации, и начинает изменяться именно с этого значения: $q(0+) = q(0-)$.

Доказать законы коммутации можно от противного: если допустить обратное, то получаются бесконечно большие значения и, что приводит к нарушению законов Кирхгофа.

На практике, за исключением особых случаев (некорректные коммутации), допустимо использование указанных законов в другой формулировке, а именно:

первый закон коммутации – в ветви с катушкой индуктивности ток в момент коммутации сохраняет свое докоммутационное значение и в дальнейшем начинает изменяться с него: $i_L(0+) = i_L(0-)$.

второй закон коммутации – напряжение на конденсаторе в момент коммутации сохраняет свое докоммутационное значение и в дальнейшем начинает изменяться с него: $u_C(0+) = u_C(0-)$.

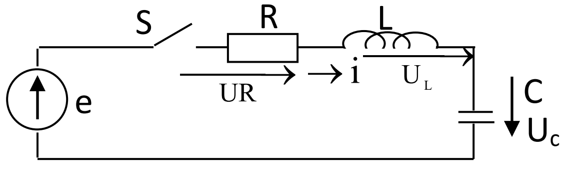
Необходимо подчеркнуть, что более общей формулировкой законов коммутации является положение о невозможности скачкообразного изменения в момент коммутации для схем с катушкой индуктивности – потокосцеплений, а для схем с конденсаторами – зарядов на них. В качестве иллюстрации сказанному могут служить схемы на рис. 2, переходные процессы в которых относятся к так называемым **некорректным коммутациям** (название произошло от пренебрежения в подобных схемах малыми параметрами, корректный учет которых может привести к существенному усложнению задачи).

Первый закон: Ток в индуктивности не может изменяться скачком.

Второй закон: Напряжения на емкости не может изменяться скачком.

Переходные процессы в электрических цепях описываются линейными дифференциальными уравнениями составленными по законам Кирхгофа для мгновенных значений напряжений и токов. Для несложных цепей эти уравнения можно исключением всех переменных, кроме одной, свести к одному уравнению для любого переходного тока или напряжения. В математике для решения подобных уравнений разработаны различные методы, в частности классический, операторной, спектральный. Однако, в электротехнике для анализа переходных процессов в простых цепях широко применяется классический метод, который по сравнению с другими позволяет упростить рассмотрение физических процессов, происходящих в цепях.

Как известно из математики, общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения равно сумме какого – либо частного решения неоднородного уравнения, в качестве которого выбирают в цепях постоянного тока **установившийся** (или **принужденный**) режим после коммутации, и общего решения однородного уравнения, которое называют **свободной составляющей**, так как вид этого решения не зависит от действующих в цепи источников.



Например, для цепи с последовательным включением R, α и C, т.е. последовательного контура, согласно II-ого закона Кирхгофа для мгновенных значений запишем.

$$UR + U_L + U_c = R_i + L\frac{di}{dt} + U_c = e \quad (1)$$

или, так как $i_c = c\frac{dU_c}{dt}$, (2)

$$LC\frac{d^2U_c}{d^2t}+RC\frac{dU_c}{dt}+U_c=e, \qquad (3)$$

т.е. получили линейное дифференциальное неоднородное уравнение второго порядка для напряжения на емкости U_c.

Такого же вида уравнения можно получить и для тока i, если в (1) подставить выражение

$$U_c=\frac{1}{C}\int idt=A,$$

где А – постоянная интегрирования.

После подстановки и дифференцирования будем иметь

$$L\frac{d^2i}{d^2t^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=\frac{de}{dt} \qquad (4)$$

Решение уравнений (3) и (4) представляется в виде суммы двух составляющих

$$U_c=U_{c\ уст}+U_{c\ св} \qquad (5)$$

$$i=i_{уст}+i_{св} \qquad (6)$$

- установившейся (принужденной) и свободной.

Для определения принужденной (установившейся) составляющей переходного тока, когда воздействующая функция e (t) постоянна или является периодической, необходимо найти его значения в уставившемся режиме.

Для определения переходящей (свободной) составляющей тока переходного процесса находим решение дифференциального уравнения (4) без свободного члена:

$$L\frac{d^ei}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}=0.$$

При этом соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$Lp^2+Rp+\frac{1}{C}=0.$$

Корни этого уравнения

$$p_{1,2}=\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}.$$

Свободная составляющая тока переходного процесса

$$i_{св.}(t)=A_1e^{p_1t}+A_2e^{p_2t},$$

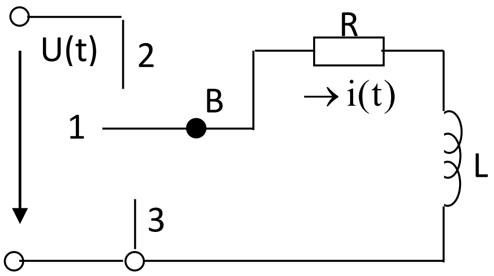
где e – основания натуральных логарифмов.

Постоянные интегрирования A_1 и A_2, входящие в уравнение, определяются исходя из начальных условий.

Аналогично можно определить напряжения и другие электрические и магнитные величины на любом участке линейной электрической цепи в переходном режиме.

Таким образом, классический метод расчета переходный процессов заключается в составлении дифференциальных уравнений для цепи, полученной после коммутации, в нахождении общего решения в виде суммы установившейся и свободной составляющих, определения корней характеристического начальных условий.

3. Переходные процессы в цепи с индуктивным и резистивным элементами.



При выключении электрической цепи с R и L под постоянное напряжение переходной процесс описывается дифференциальным уравнением, записанным по II-му закону Кирхгофа (при переключении выключателя B из положения 1 в положение 2):

$$R_i + L\frac{di}{dt} = U(t) = U.$$

Характеристическое уравнение, соответствующее полученному дифференциальному уравнению, имеет вид

$R + L_p = 0$, где

$p = -R/L$ - корень характеристического уравнения.

Так как данное дифференциальное уравнение является уравнением первого порядка, то оно характеризуется единственным корнем.

С учетом этого обстоятельства выражение для свободной составляющей тока переходного процесса приводится к виду

$$i_{св}(t) = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

Поскольку воздействующее на электрическую цепь напряжение постоянно, значение принужденной составляющей тока цепи в переходном режиме оказывается равным его установившемуся значению:

$$i_{уст.} = \frac{U}{R}.$$

Ток в цепи при переходном процессе

$$i(t) = i_{уст.}(t) + i_{св}(t) = \frac{U}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}.$$

Постоянная интегрированная A определяется из начальных условий. Так как в цепи с индуктивностью ток не может измениться скачком, то при t = 0 ток в ней равен нулю

$$i(0)=\frac{U}{R}+A=0\text{, отсюда}$$

$$A=-\frac{U}{R}\text{, тогда } i_{св}(t)=-\frac{U}{R}e^{-\frac{R}{L}t}.$$

С учетом последнего выражения

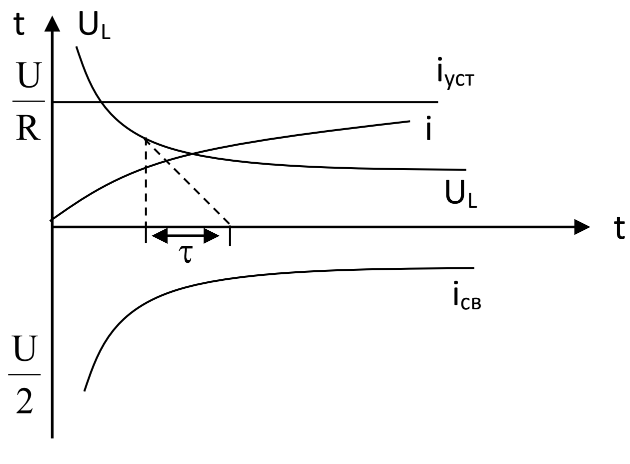
$$i(t)=i_{уст.}(t)+i_{св}(t)=(\frac{U}{R}-\frac{U}{R}e^{-\frac{R}{L}t})=\frac{U}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})=\frac{U}{R}(1-e^{-\frac{t}{\tau}}),$$

где $\tau=\frac{L}{R}$ - постоянная времена электрической цепи, равная промежутку времени по истечении которого свободная составляющая тока в цепи изменяется в е раз по сравнению со своим исходным значением.

Напряжение на индуктивности при переходном процессе уравновешивающее ЭДС самоиндукции определяется по уравнению

$$U_L(t)=L\frac{di}{dt}=Ld[(\frac{U}{R}(1-e^{-\frac{t}{\tau}})]/dt=L\frac{U}{R\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}=Ue^{-\frac{t}{\tau}}.$$

На рис. представлены временные зависимости тока в электрической цепи и напряжения на индуктивности. Постоянная времени может быть определена графически как длина подкасательной, проведенной в любой точке к кривой, соответствующей рассматриваемой показательной функции времени.



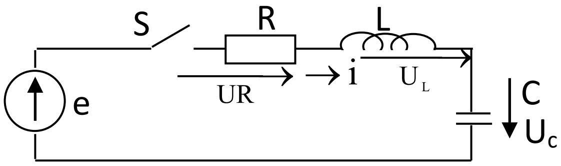
При коротком замыкании RL цепи, присоединенной к источнику постоянного напряжения U (выкл. В из положения 2 перебрасывается в положение 3) в цепи возникает переходной процесс, обусловленный наличием запаса энергии в магнитном поле катушки с индуктивностью L.

Происходящий в короткозамкнутом контуре R – L процесс характеризуется свободным током, поскольку принужденный ток при этом оказывается равным нулю. В результате ток переходного процесса в данном случае определяется его свободной составляющей:

$$i(t) = i_{св.}(t) = Ae^{pt} + Ae^{-\frac{R}{L}t}.$$

Задача №1.

Не раз ветвленная цепь RL включается на постоянное напряжение U = 10 В.



Определить постоянную времени цепи τ и длительность переходного процесса t_n, если R = 100 Ом, L = 0,1 Гн и допуск на отклонение от установившегося значения составляет ℓ^0 / ℓ.

Решение: Постоянного времени

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0{,}1}{100} = 10^{-3}\,c.$$

Переходный ток

$$i = (\frac{U}{R})(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 0{,}1(1 - e^{-\frac{t}{10^{-3}}})A.$$

Переходный процесс можно считать законченным, когда

$$i(t_n) = 0{,}1(1 - e^{-10^3 t_n}) = 0{,}1 \cdot 0{,}99A, \text{ откуда}$$

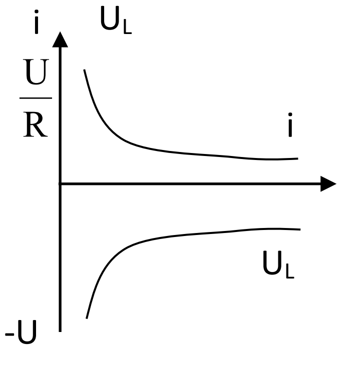
$$e^{-10^3 t_n} = 0{,}01;$$

$$10^3 t_n = \ell n100 = 4{,}6 \qquad и \qquad t_n = 4{,}6 \cdot 10^{-3}\,c.$$

Постоянную интегрирования определяют, исходя из условия, что до момента короткого замыкания ток в цепи $i(0) = I = \frac{U}{R} = A$.

С учетом этого ток переходного процесса

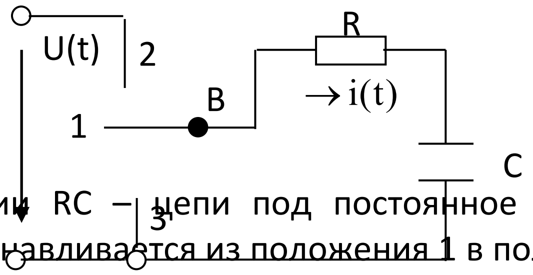
$$i(t) = i_{св.}(t) = \frac{U}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}.$$



Из временной зависимости тока в переходном процессе следует, что ток в электрической цепи уменьшается по экспоненциальной зависимости от значения, равного U/R в момент к.з. при t = 0, до нуля в конце переходного процесса. Аналогично изменяется в данной цепи и напряжение на индуктивности:

$$U_L(t) = L\frac{di}{dt} = Ld[(\frac{U}{R}e^{-\frac{R}{L}t})]/dt = L\frac{U}{R}(-\frac{R}{L})e^{-\frac{R}{L}t} = -Ue^{-\frac{t}{\tau}}.$$

4.Переходные процессы в электрических цепях с резистивными и емкостными элементами.



При включении RC – цепи под постоянное напряжение U (t) = U (выключатель В устанавливается из положения 1 в положение 2) принято, что к моменту включения (t = 0) конденсатор не заряжен, т.е. Uc = 0. В соответствии с этим, исходя из уравнения электрического равновесия для мгновенных напряжений, записанного по II-му закону Кирхгофа для нашей RC – цепи при t ≥ 0, имеет $R_i + U_c = U(t) = U$. Ток в нашей цепи можно представить через емкость конденсатора С и изменение напряжения на его обкладках: $i = C\frac{dU}{dt}$. В результате дифференциальное уравнение цепи приводится к виду

$$R \cdot C\frac{dU}{dt} + U_c = U(t) = U.$$

Этому уравнению соответствует характеристическое уравнение

$$RC_p + 1 = 0,$$

где р – корень характеристического уравнения $p = -\frac{1}{RC}$.

Решение дифференциального уравнения без свободного члена относительно напряжения на конденсаторе позволяет определить свободную составляющую этого напряжения:

$$U_{св}(t) = Ae^{pt} + Ae^{-\frac{1}{RC}}.$$

В свою очередь, напряжения $U_{уст.\ c}$ на обкладках конденсатора в установившемся режиме определяют в результате частного решения соответствующего дифференциального уравнения электрической цепи. В установившемся режиме ток в цепи $i_{уст.}(t) = 0$, следовательно, $U_{уст.c} = U(t) = U$. Напряжение на конденсаторе во время переходного процесса.

$$U_c(t) = U_{уст.с}(t) + U_{св.с}(t) = U + Ae^{-\frac{1}{RC}}.$$

Постоянная интегрированная A находится из начальных условий. Напряжение на конденсаторе до включения равнялось нулю, так как до этого конденсатор бал разряжен. Тогда $U_c(0) = U + A = 0$, откуда $A = -U$ и $U_{св.с}(t) = -Ue^{-\frac{1}{RC}}$.

Таким образом, временная зависимость напряжения на конденсаторе во время переходного процесса определяется уравнением

$$U_c(t) = U - Ue^{-\frac{1}{RC}} = U(1 - e^{-\frac{1}{RC}}) = U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}),$$

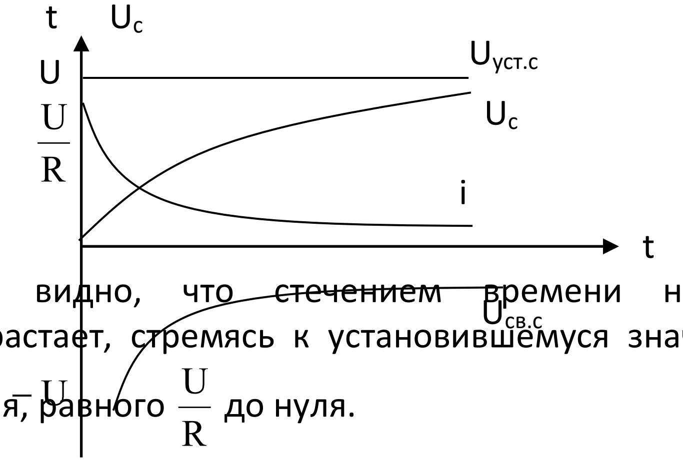
где $\tau = RC$ - постоянная времени, равная промежутку времени, по истечении которого напряжение в цепи изменится в e раз по сравнению со своим исходным значением.

Ток в цепи при переходном процессе

$$i(t) = i_{уст.}(t) + i_{св.}(t) = C\frac{dU_c}{dt} = C\frac{dU_{уст.с}}{dt} + C\frac{dU_{св.с}}{dt} =$$

$$= 0 + \frac{U}{R}e^{-\frac{1}{RC}} = \frac{U}{R}e^{-\frac{1}{RC}} = \frac{U}{R}e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где $i_{уст.}(t) = 0$, $i_{св.}(t) = \frac{U}{R}e^{-\frac{1}{RC}}$ и $i(t) = \frac{U}{R}e^{-\frac{1}{RC}}$.



Из графика видно, что стечением времени напряжение на конденсаторе возрастает, стремясь к установившемуся значению U, а так убывает от значения, равного $\frac{U}{R}$ до нуля.

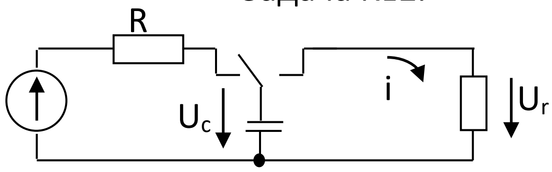
При этом изменение напряжения на конденсаторе и тока в цепи в переходном режиме проходит ток быстрее, чем меньше постоянная времени цепи RC.

Короткое замыкание неразветвленной RC – цепи, ранее находившейся под постоянным напряжениям $U = const$, производится переключением выключателя B из положения 2 в момент времени t = 0 в положение 3. Электромагнитные процессы в цепи при этом происходит за счет энергии, накопившейся ко времени t = 0 в электрическом поле конденсатора. Эта энергия, равная $\frac{CU^2}{2}$, за время переходного процесса преобразуется в теплоту, рассеиваемую резистором R.

Установившиеся значения тока в RC – цепи и напряжения на конденсаторе в переходном процессе:

$$i_{уст.}(t) = 0 \quad \text{и} \quad U_{уст.c}(t) = 0.$$

Задача №2.



Конденсатор емкостью С = 15миф. Заряжен до напряжения $U = E = 100B$. После отключения конденсатора от источника он медленно разряжается через сопротивление собственной изоляции r. При этом через промежуток времени $t_p = 42c$. Напряжение на конденсаторе уменьшается в k = 4 раза. Определить постоянную времени переходного процесса τ и сопротивление изоляции τ.

Решение: Напряжение на конденсаторе во время его разряда $U_c = U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Через $t_{р.с.}$ напряжение $U_c(tp) = U \cdot e^{-\frac{tp}{\tau}} = \frac{U}{K}$, откуда $e^{\frac{tp}{\tau}} = k$ или $\tau = \frac{tp}{\ln k} = \frac{42}{\ln 4} = 30c$.

Сопротивление изоляции

$$\tau = \frac{\tau}{C} = \frac{30}{15 \cdot 10^{-6}} Ом = 2МОм.$$

При этом свободные составляющие тока и напряжения

$$i_{св.}(t) = -\frac{A}{R} e^{-\frac{1}{RC}}; \; U_{св.c}(t) = Ae^{-\frac{1}{RC}}.$$

Ток в цепи и напряжение на конденсаторе выражаются уравнением:

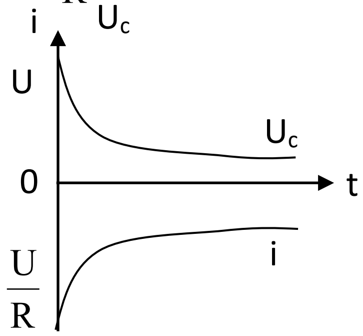
$$i(t) = i_{уст.}(t) + i_{св.}(t) = -\frac{A}{R} e^{-\frac{1}{RC}},$$

$$U(t) = U_{уст.}(t) + U_{св.c}(t) = Ae^{-\frac{1}{RC}}.$$

Постоянная интегрирования А находится из начальных условий, ток как при t = 0 напряжение на конденсаторе равно U, т.е. $U_c(0) = U = A$.

Тогда для переходных значений тока и напряжения на конденсаторе справедливы уравнения.

$$i(t) = -\frac{U}{R} e^{-\frac{1}{RC}} \quad \text{и} \quad U_c(t) = U e^{-\frac{1}{RC}}.$$



Из графика видно, что ток и напряжение при к.з. RC – цепи убывают по экспоненциальной зависимости в соответствии с постоянной времени $\tau = RC$ - цепи.