Combinatorics
组合数学

刘胜利
上海交通大学计算机科学与工程系
liu-sl@cs.sjtu.edu.cn
http://202.120.15.46/

第三讲：母函数与递推关系(1)

- 递推关系
  - 线性常系数递推关系
- 普通型母函数
- Fibonacci数列的性质
- 指数型母函数
- 应用母函数解递推关系
- 第二类stirling数有什么用
- 计算Catalan数

一、二项式展开vs.组合系数

1.1 二项式展开vs.组合系数

$$(1+a_1x)\cdot(1+a_2x)\cdot\ldots\cdot(1+a_nx)$$
$$=1+(a_1+a_2+\ldots+a_n)x+(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{n-1}a_n)x^2$$
$$+\ldots+a_1a_2\ldots a_nx^n$$

- 若令$a_1=a_2=\ldots=a_n=1$，有

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\ldots+\binom{n}{n}x^n$$

$(1+x)^m \cdot (1+x)^n = (1+x)^{m+n}$

- 左= $\left[\binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \ldots + \binom{m}{m}x^m\right]$

$$\cdot\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n\right]$$

$$= 1 + \left[\binom{m}{1} + \binom{n}{1}\right]x + \left[\binom{m}{0}\cdot\binom{n}{2} + \binom{m}{1}\cdot\binom{n}{1} + \binom{m}{2}\cdot\binom{n}{0}\right]x$$

$$+ \ldots + \left[\binom{m}{0}\cdot\binom{n}{r} + \binom{m}{1}\cdot\binom{n}{r-1} + \ldots + \binom{m}{r}\cdot\binom{n}{0}\right]x^r$$

$$+ \ldots + \binom{m}{m}\cdot\binom{n}{n}x^{m+n}$$

$$(1+x)^m \cdot (1+x)^n = (1+x)^{m+n}$$

- 右= $\binom{m+n}{0} + \binom{m+n}{1}x + \binom{m+n}{2}x^2 + \ldots \binom{m+n}{r}x^r + \ldots$

$$+\binom{m+n}{m+n}x^{m+n}$$

- 比较左右两边的系数得

$$\binom{m}{0}\cdot\binom{n}{r} + \binom{m}{1}\cdot\binom{n}{r-1} + \ldots + \binom{m}{r}\cdot\binom{n}{0} = \binom{m+n}{r}$$

$$(1+x)^n = C(n,0) + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \ldots + C(n,n)x^n$$

- **令x=1，得到** $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$
- **两边求导，得**

$$n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + \ldots + n\binom{n}{n}x^{n-1}$$

$$n2^{n-1} = C(n,1) + 2C(n,2) + \ldots + nC(n,n)$$

$$n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + \ldots + n\binom{n}{n}x^{n-1}$$

$$\Rightarrow nx(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1}x + 2\binom{n}{2}x^2 + \ldots + n\binom{n}{n}x^n$$

- 求导得

$$n(1+x)^{n-2}\left[(n-1)x + (1+x)\right] = \binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2}x + \ldots + n^2\binom{n}{n}x^{n-1}$$

- 取***x*=1**，得

$$n(n+1)2^{n-2} = C(n,1) + 2^2C(n,2) + \ldots + n^2C(n,n)$$

1.2 常见函数

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (i+1)x^i + \ldots$$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + \ldots + \frac{i(i+1)}{2}x^{i-1} + \ldots$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{n(n+1)\ldots(n+i-1)}{i!}x^i + \ldots$$

$$= 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n+1}{2}x^2 + \ldots + \binom{n+i-1}{i}x^i + \ldots$$

1.3 举例：用函数求解组合问题

例1.7 现有2个红球，1个白球，1个黄球，试求有多少种不同的取球方案？

  - 红球{0,1,2}，三种选择
  - 白球{0,1}，两种选择
  - 黄球{0,1}，两种选择
- 取球的方案共有3 · 2 · 2=12种。

例3.1 现有2个红球，1个白球，1个黄球，从中取2个球有多少种不同的取球方案？

- 分三种情况：
  - 2个球中没有红球：一白一黄，1种选择
  - 2个球中有1个红球：一红一白、一红一黄，2种选择
  - 2个球中有2个红球：C(2,2)种选择
- 由加法原理，取两个球的方案共有1+2+C(2,2)=4种。

举例：用函数求解组合问题

- 用r代表红球，w代表白球，y代表黄球

$$
\begin{aligned}
&(1+r+r^2)\cdot(1+w)\cdot(1+y) \\
&=1+(r+y+w)+(r^2+ry+rw+yw) \\
&+(r^2y+r^2w+ryw)+r^2yw
\end{aligned}
$$

- 取一个球的组合数为3： r, y, w
- 取两个球的组合数为4： r^2, ry, rw, yw
- 取三个球的组合数为3： r^2y, r^2w, ryw
- 取四个球的组合数为1： r^2yw

只求组合数，不求具体的组合 $r=w=y=x$

$$(1+x+x^2)\cdot(1+x)\cdot(1+x)$$
$$=1+3x+4x^2+3x^3+x^4$$

- 一个球的组合数为3
- 二个球的组合数为4
- 三个球的组合数为3
- 四个球的组合数为1

例3.2 现有6个橘子，9个苹果，欲组成果篮。要求果篮中有7只水果，问有多少种不同的可能？

$$(1+x+x^2+\ldots+x^6)\cdot(1+x+x^2+\ldots+x^9)$$

$$=\frac{1-x^7}{1-x}\cdot\frac{1-x^{10}}{1-x}=\frac{1-x^7-x^{10}+x^{17}}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{x^7}{(1-x)^2}-\frac{x^{10}}{(1-x)^2}+\frac{x^{17}}{(1-x)^2}$$

$$=1+2x+3x^2+\ldots+8x^7+\ldots$$

$$-x^7(1+2x+3x^2+\ldots+8x^7+\ldots)$$

$$-x^{10}(1+2x+3x^2+\ldots+8x^7+\ldots)$$

$$+x^{17}(1+2x+3x^2+\ldots+8x^7+\ldots)$$

- 可见上式中x^7的系数为**(8-1)=7**，故答案为**7**。

例3.3 某单位有8位男同志，5位女同志。现要组成一个小组：要求有偶数个男同志，至少2个女同志。问有多少种不同的组成方式？

$$\left[1+\binom{8}{2}x^2+\binom{8}{4}x^4+\binom{8}{6}x^6+\binom{8}{8}x^8\right]$$

$$\cdot\left[\binom{5}{2}x^2+\binom{5}{3}x^3+\binom{5}{4}x^4+\binom{5}{5}x^5\right]$$

$$=\left(1+28x^2+70x^4+28x^6+x^8\right)$$

$$\cdot\left(10x^2+10x^3+5x^4+x^5\right)$$

$$=10x^2+10x^3+285x^4+281x^5+840x^6+728x^7$$

$$+630x^8+350x^9+150x^{10}+38x^{11}+5x^{12}+x^{13}$$

- **故2人小组有10种，3人小组有10种，4人小组有285种，5人小组有281种，6人小组有840种，7人小组有728种，8人小组有630种，9人小组有350种，10人小组有150种，11人小组有38种，12人小组有5种，13人小组有1种**

二、母函数vs.序列

2.1 母函数的定义：

对于序列$a_0, a_1, a_2, \ldots$构造一函数：

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

称函数$G(x)$是序列$a_0, a_1, a_2, \ldots$的母函数

- 如若已知序列$a_0, a_1, a_2, \ldots$则对应的母函数$G(x)$便可根据定义给出。反之，如若已知序列的母函数$G(x)$，则该序列也随之确定。
- 序列$a_0, a_1, a_2, \ldots$可记为$\{a_n\}$。

2.2 常见的母函数与序列

- 母函数 $\dfrac{1}{1-x}=\sum_{i=0}^{\infty} x^i$
  序列为 $\{1,1,1,\ldots\}$
- 母函数 $\dfrac{1}{(1-x)^2}=\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)x^i$
  序列为 $\{1,2,3,\ldots\}$
- 母函数 $\dfrac{1}{(1-x)^3}=\sum_{i=0}^{\infty}\dfrac{(i+1)(i+2)}{2}x^i$
  序列为 $\{1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots\}$

- 母函数

$$\frac{1}{(1-x)^n}=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{n+i-1}{i}x^i$$

序列为 {1, n, C(n+1,2) ,…, C(n+i-1, i),…}

2.3 举例：已知母函数求序列

- 例3.4 已知母函数为 $G(x)=\left(x^4+x^5+x^6+\ldots\right)^6$ 求相应序列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$

解：由于

$$G(x)=\left[x^4\left(1+x+x^2+\ldots\right)\right]^6=\frac{x^{24}}{(1-x)^6}$$

$$=x^{24}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+5}{5}x^i=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+5}{5}x^{24+i}$$

知 $a_0=a_1=\ldots=a_{23}=0$, $a_{24}=1$, $a_{25}=C(6,5)$, $a_{26}=C(7,7),\ldots, a_i=C(i-19,5)$

2.4 常见基本公式

已知序列$\{a_i\}$的母函数为$A(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$

(1)若 $b_k=\begin{cases}0, & k<l\\ a_{k-l}, & k\ge l\end{cases}$，则 $B(x)=x^l A(x)$

$$B(x)=a_0x^l+a_1x^{l+1}+\ldots=x^l(a_0+a_1x+\ldots)=x^lA(x)$$

(2) 若 $b_k=a_{k+l}$，则 $B(x)=a_l+a_{l+1}x+a_{l+2}x^2\ldots$

$$=\frac{A(x)-\sum_{i=0}^{l-1} a_i x^i}{x^l}$$

(3) 若 $b_k = \sum_{i=0}^{k} a_i$ ，则 $B(x)=A(x)/(1-x)$

$$
\begin{aligned}
1 &: b_0 = a_0 \\
x &: b_1 = a_0 + a_1 \\
x^2 &: b_2 = a_0 + a_1 + a_2 \\
+) &\vdots \\
&-------------- \\
B(x) &= A(x)/(1-x)
\end{aligned}
$$

(4) 若 $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ **收敛，** $b_k = \sum_{i=0}^{k} a_i$**，则**

$B(x)=[A(1)-xA(x)] / (1-x)$

$$
\begin{aligned}
1 &: b_0 = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots = A(1) \\
x &: b_1 = \qquad a_1 + a_2 + \ldots = A(1) - a_0 \\
x^2 &: b_2 = \qquad\qquad a_2 + \ldots = A(1) - a_0 - a_1 \\
+) &\vdots
\end{aligned}
$$

$$B(x) = \left[A(1) - xA(x)\right] / (1 - x)$$

(4) 若$b_k=ka_k$，则 $B(x)=xA'(x)$

(5) 若$b_k= a_k /(1+k)$，则 $B(x)=\frac{1}{x}\int_0^x A(x)dx$

(6) 若 $A(x) B(x)=C(x)$，且$A(x), B(x), C(x)$分别是序列$\{a_k\}\{b_k\}\{c_k\}$的母函数，则

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \ldots + a_k b_0$$

3. 整数的拆分

- 将正整数*n*分解为若干个正整数的和；
  - 将正整数*n*分解为1,2,…,*n*的和，允许重复

⇕

  - 将*n*个无区别的球放进*n*个无区别的盒子，盒子允许放多个球或空着。
  - 用$p(n)$表示整数*n*的拆分为1,2,…,*n*的和的方案个数

例3.5 整数5拆分为1,2,3,4,5的和，有如下的拆分方法：

5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1,

1+1+1+1+1 故 $p(n)=7$

3.1 整数*n*拆分成1,2,…,*m*的和，允许重复，拆分个数是多少？

- 整数*n*拆分成1,2,…,*m*的和，并允许重复，其母函数为

$$G(x)=(1+x+x^2+\ldots)\cdot(1+x^2+x^4+\ldots)\cdot\ldots\cdot(1+x^m+x^{2m}+\ldots)$$

$$=\frac{1}{(1-x)\cdot(1-x^2)\cdot\ldots\cdot(1-x^m)}$$

母函数中x^n的系数即为所求的拆分数

例3.6 整数*n*拆分成1,2,…,*m*的和，允许重复，且*m*至少要出现一次，拆分个数是多少？

- 整数*n*拆分成1,2,…,*m*的和，并允许重复，且*m*至少出现一次，其母函数为

$$G(x)=(1+x+x^2+\ldots)\cdot(1+x^2+x^4+\ldots)\cdot\ldots\cdot(x^m+x^{2m}+x^{3m}+\ldots$$

$$=\frac{1}{(1-x)}\cdot\frac{1}{(1-x^2)}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{(1-x^m)}-1\right)$$

$$=\frac{1}{(1-x)\cdot(1-x^2)\cdot\ldots\cdot(1-x^m)}-\frac{1}{(1-x)\cdot(1-x^2)\cdot\ldots\cdot(1-x^{m-1}}$$

- 含义：整数*n*拆分成1到*m*的和的拆分数减去拆分成1到*m*-1的和的拆分数，即为至少出现一个*m*的拆分数

例3.7 若有1克、2克、3克、4克的砝码各一枚，问能称出几种可能的重量？

- 由于这四种砝码各只有一枚，所以不能重用。计算拆分数的母函数：

$$G(x)=(1+x)\cdot(1+x^2)\cdot(1+x^3)\cdot(1+x^4)$$
$$=1+x+x^2+2x^3+2x^4+2x^5+2x^6$$
$$+2x^7+x^8+x^9+x^{10}$$

- 所以，可以称出1克、2克、3克、4克、5克、6克、7克、8克、9克、10克的重量。
- 同时我们还知道称重量的方案数有几种。例：称3克重量的方法有两种：3=1+2; 3=3;

例3.8 求用1分、2分、3分的邮票贴出不同数值邮资的方案数。

- 因邮票的使用允许重复，故母函数为

$$G(x)=(1+x+x^2+\ldots)\cdot(1+x^2+x^4+\ldots)\cdot(1+x^3+x^6+\ldots)$$

$$=\frac{1}{(1-x)\cdot(1-x^2)\cdot(1-x^3)}=\frac{1}{1-x-x^2+x^4+x^5-x^6}$$

$$=1+x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+7x^6+8x^7\ldots$$

- 母函数中展开项中x^k的系数即为贴出**n**分邮资的方案数。

例3.9 若有1克砝码3枚、2克砝码4枚、4克的砝码2枚，问能称出几种可能的重量？各有几种方案？

- 计算拆分数的母函数：

$$
\begin{aligned}
G(x) &= (1+x+x^2+x^3)\cdot(1+x^2+x^4+x^6+x^8)\cdot(1+x^4+x^8 \\
&= 1+x+2x^2+2x^3+3x^4+3x^5+4x^6+4x^7 \\
&\quad +5x^8+5x^9+5x^{10}+5x^{11}+4x^{12}+4x^{13} \\
&\quad +3x^{14}+3x^{15}+2x^{16}+2x^{17}+x^{18}+x^{19}
\end{aligned}
$$

例3.10 *n*个完全相同的球放到*m*个有标志的盒子，不允许空盒，问共有多少种不同的方案？其中*m*<*n*。

- 设*n*个完全相同的球放进*m*个有标志的盒子中的方案数为a_n，则序列$\{a_n\}$的母函数为

$$G(x) = \underbrace{(x + x^2 + \ldots)}_{\text{第1盒}} \cdot \underbrace{(x + x^2 + \ldots)}_{\text{第2盒}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(x + x^2 + \ldots)}_{\text{第}m\text{盒}}$$

$$G(x) = \left(\frac{1}{1-x} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{1-x} - 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{1-x} - 1\right)$$

$$= \frac{x^m}{(1-x)^m} = x^m \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m+i-1}{i} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m+i-1}{i} x^{i+m} = \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n-1}{n-m} x^n$$

所以方案数为C(*n*-1,*n*-*m*)= C(*n*-1,*m*-1)

3.3 整数n拆分归纳

- 设a_n为整数n拆分为由多重集合
  $S=\{n_1 \cdot b_1, n_2 \cdot b_2, \ldots, n_m \cdot b_m\}$
  中的元素的和的拆分数，则序列$\{a_n\}$的母函数为

$$G(x)=(1+x^{b_1}+x^{2b_1}+\ldots+x^{n_1 b_1})\cdot(1+x^{b_2}+x^{2b_2}+\ldots+x^{n_2 b_2})\ldots$$

$$\cdot(1+x^{b_m}+x^{2b_m}+\ldots+x^{n_m b_m})$$

定理3.1 整数*n*拆分成不同整数和的拆分数等于拆分成可重奇整数的拆分数

- 证明：设$\{a_n\}$代表将整数*n*拆分成不同整数之和的拆分数，则序列的母函数为

$$G(x)=(1+x)\cdot(1+x^2)\cdot(1+x^3)\ldots$$

$$=\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^3}\ldots$$

$$=\frac{1}{(1-x)\cdot(1-x^3)\cdot(1-x^5)\ldots}$$

定理3.2 整数n拆分成其它整数之和，但重复度不超过2. 其拆分数等于将n拆分成不被3除尽的整数的和的拆分数

- 证明：设$\{a_n\}$代表将整数n拆分成其它整数之和的拆分数，但重复度不超过2。则序列的母函数为

$$G(x)=(1+x+x^2)\cdot(1+x^2+x^4)\cdot(1+x^3+x^6)\dots$$

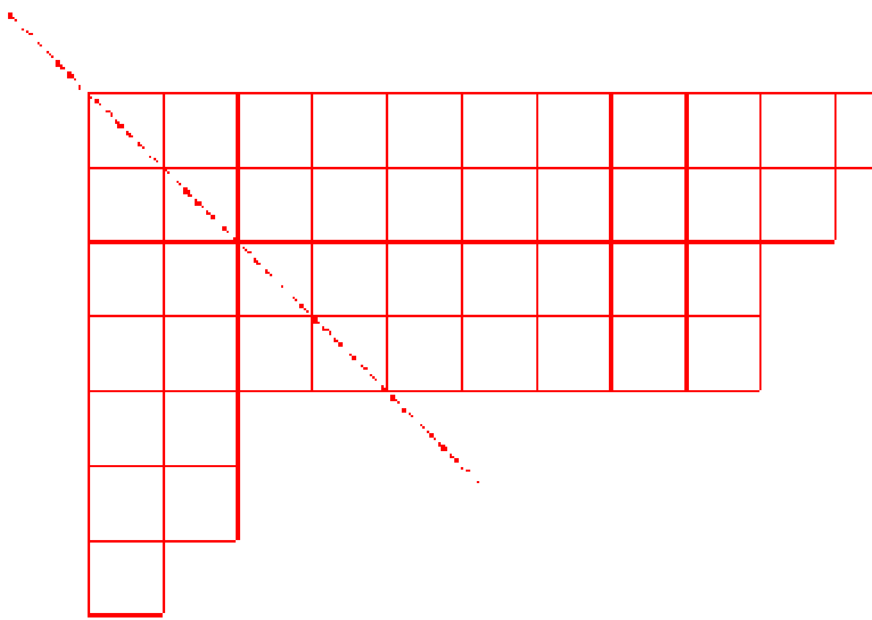
$$=\frac{1-x^3}{1-x}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^9}{1-x^3}\dots$$

$$=\frac{1}{(1-x)\cdot(1-x^2)\cdot(1-x^4)\cdot(1-x^5)\cdot(1-x^7)\dots}$$

$$=\prod_{\substack{i,i\neq 3k\\ i,k\in\mathrm{N}}}\frac{1}{(1-x^i)}$$

4. Ferrers图像

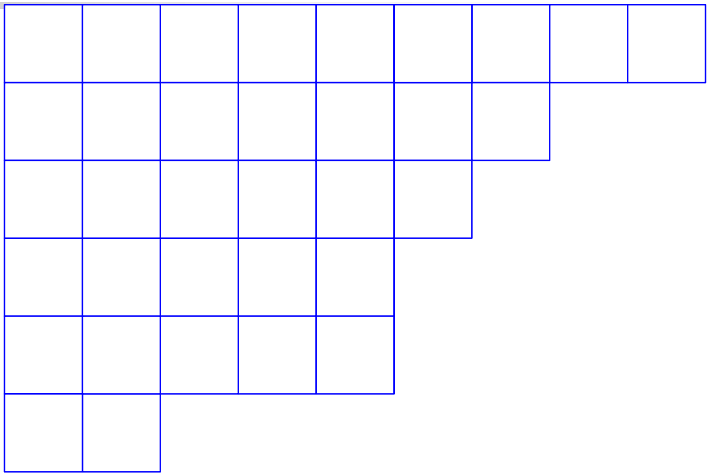
- 一个从上而下的k层格子，n_i 为第i层的格子数，当$n_i \geq n_{i+1}$(i=1,2,…,k-1)，即上层的格子数不少于下层的格子数时，称之为**Ferrers图像**
  - 每一层至少有一个格子
  - 第一行与第一列互换，第二行于第二列互换，…，即绕虚线轴旋转所得的图仍然是Ferrers图像。
  - 两个Ferrers 图像称为一对共轭的Ferrers图像。



4.1 Ferrers图像 *vs.* 整数拆分

- 第一行的格子数为n_1；
- 第二行的格子数为n_2；
- 第k行的格子数为n_k；

n_1
n_2
n_3
n_4
…
n_k



Ferrers图像中格子总数为

$$n = n_1+n_2+\dots+n_k,\ \ n_i \geq n_{i+1}$$

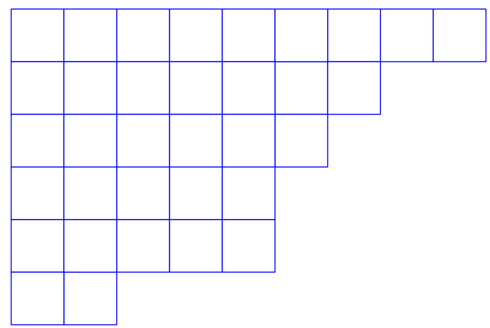
$$\Updownarrow$$

整数*n*拆分成*k*个整数的和

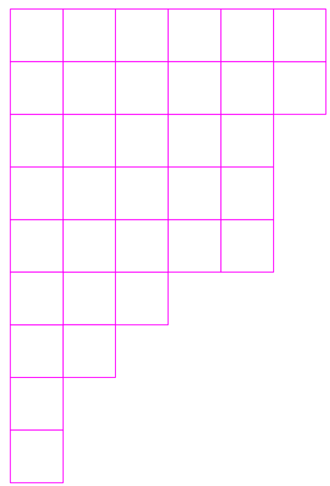
4.2 用Ferrers图像研究整数拆分

1) 整数n拆分成k个整数的和的拆分数，和将n拆分成最大整数数为k的拆分数相等

n_1
n_2
n_3
n_4
…
n_k



$n_1=k$



整数n的拆分：k个整数之和

Ferrers图：k行

共轭Ferrers图：首行k格

整数n的拆分：最大整数为k的若干整数之和

2）整数*n*拆分成最多不超过*k*个整数的和的拆分数　和 整数*n*拆分成最大不超过整数*k*的和的拆分数　相等。

两者的母函数均为 $G(x)=\dfrac{1}{(1-x)\cdot(1-x^2)\cdot\ldots\cdot(1-x^k)}$

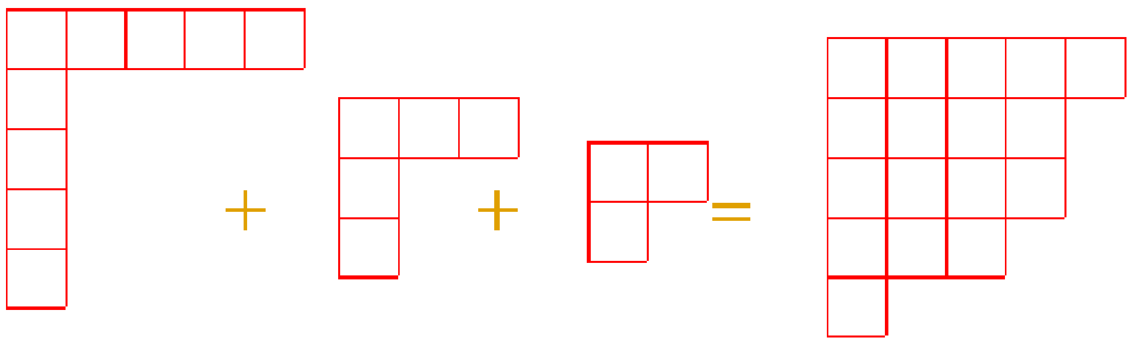
整数*n*的拆分：1个整数之和 Ferrers图：1行 共轭Ferrers图：最大的整数为1 整数*n*的拆分：最大整数为1	整数*n*的拆分：2个整数之和 Ferrers图：2行 共轭Ferrers图：最大的整数为2 整数*n*的拆分：最大整数为2	…	整数*n*的拆分：*k*个整数之和 Ferrers图：*k*行 共轭Ferrers图：最大的整数为 *k* 整数*n*的拆分：最大整数为*k*

- 整数*n*拆分成*k*个整数的和的拆分数，
- 将*n*拆分成最大整数为*k*的拆分数

$$G(x)=\frac{1}{(1-x)\cdot(1-x^2)\cdot\ldots\cdot(1-x^k)}-\frac{1}{(1-x)\cdot(1-x^2)\cdot\ldots\cdot(1-x^{k-1})}$$

$$=\frac{x^k}{(1-x)\cdot(1-x^2)\cdot\ldots\cdot(1-x^k)}$$

3) 整数n拆分成互不相同的若干奇数的和的的拆分数，和整数n拆分成自共轭的Ferrers图像的拆分数 相等



$$n = (2n_1+1) + (2n_2+1) + \ldots (2n_k+1)$$

5. 指数型母函数

5.1 指数型母函数的引入

- 多重集的排列：
  - 无限多重集$S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2,\ldots, \infty\cdot a_k\}$，$S$的$r$-排列的个数为$k^r$。
  - 有限多重集$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2,\ldots, n_k\cdot a_k\}$。设$n=n_1+n_2+\ldots+n_k$，那么S的$n$-排列个数为

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots n_{k-1}}{n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

  - 有限多重集$S=\{n_1a_1, n_2a_2,\ldots, n_ka_k\}$。设$n=n_1+n_2+\ldots+n_k$，那么S的$r$-排列个数为多少？

例3.11 现有多重集$S=\{3b_1, 2b_2, 3b_3\}$。现从中取r个元素做组合，问多少种可能？从中取r个元素做排列有几种可能？

- 多重集中取r个元素做组合的个数由母函数所确定的序列$\{a_r\}$确定

$$G(x) = (1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)$$

- 多重集中取r个元素做排列的个数由母函数所确定的序列$\{a_r\}$确定

- 问题：母函数=？

5.2 指数型母函数的定义

对于序列$a_0, a_1, a_2, \ldots$构造一函数：

$$G_e(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

称函数$G_e(x)$是序列$a_0, a_1, a_2, \ldots$的**指数型母函数**

- 如若已知序列$a_0, a_1, a_2, \ldots$则对应的母函数$G(x)$便可根据定义给出。反之，如若已知序列的母函数$G(x)$，则该序列也随之确定。
- 序列$a_0, a_1, a_2, \ldots$可记为$\{a_n\}$。

例3.12 求1,3,5,7,9这5个数字组成的*n*位数个数？

$$G_e(x)=\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)^5=e^{5x}$$

$$=1+5\frac{x}{1!}+5^2\frac{x^2}{2!}+5^3\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

- 所以构成的*n*位数的个数为5^n个。

例3.13 现有多重集$S=\{3b_1, 2b_2, 3b_3\}$。从中取r个元素做排列有几种可能？

$$G_e(x)=(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!})(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!})(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!})$$

$$=1+3x+\frac{9}{2}x^2+\frac{14}{3}x^3+\frac{35}{12}x^4+\frac{17}{12}x^5+\frac{35}{72}x^6+\frac{8}{72}x^7+\frac{1}{72}x^8$$

$$=1+3\frac{x}{1!}+9\frac{x^2}{2!}+28\frac{x^3}{3!}+70\frac{x^4}{4!}+170\frac{x^5}{5!}+350\frac{x^6}{6!}+560\frac{x^7}{7!}+560\frac{x^8}{8!}$$

5.2 常用指数型母函数

- 序列{1,1,1,...}的指数型母函数为

$$\sum_{t=0}^{\infty}\frac{x^t}{t!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots=e^x$$

- 序列{0!,1!,2!,3!...}的指数型母函数为

$$\sum_{t=0}^{\infty}t!\frac{x^t}{t!}=1+x+x^2+x^3+\ldots=\frac{1}{1-x}$$

- 序列{1,k,k^2,k^3...}的指数型母函数为

$$\sum_{t=0}^{\infty}k^t\frac{x^t}{t!}=\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(kx)^t}{t!}=e^{kx}$$

常用指数型母函数

- 设**P(*n*,*r*)**为***n***中取**r**的排列，则序列 **{a_r}={P(*n*,*r*)}** 的指数型母函数为

$$\sum_{r=0}^{n} P(n,r)\frac{x^r}{r!} = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)x^r = (1+x)^n$$

例3.14 现由a,b,c,d四个符号取5个进行多重集的排列。要求a出现的次数不超过2次，但不能不出现；b不超过1次；c不超过3次；d出现的次数为偶数且不超过4个。问有多少种排列方法？

- 设P_r是r个字符的排列数。则序列$\{P_r\}$的指数型母函数为

$$G_e(x)=\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)\cdot(1+x)\cdot\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\cdot\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right)$$

$$=\frac{x}{1!}+5\frac{x^2}{2!}+18\frac{x^3}{3!}+64\frac{x^4}{4!}+215\frac{x^5}{5!}+645\frac{x^6}{6!}$$

$$+1785\frac{x^7}{7!}+140\frac{x^8}{8!}+7650\frac{x^9}{9!}+12600\frac{x^{10}}{10!}$$

- 可见从集合中取5个字符的排列数为215。

例3.15 求1,3,5,7,9这5个数字组成的n位数个数，要求3和7出现的次数为偶数，其他数字出现的次数无限制。

$$G_e(x)=\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right)^3\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots\right)^2$$

$$=e^{3x}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(e^{5x}+2e^{3x}+e^x\right)$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(5^n+2\cdot 3^n+1)\frac{x^n}{n!}$$

- 故n位数的个数为 $\frac{1}{4}(5^n+2\cdot 3^n+1)$

例3.16 将$a_1, a_2, \ldots, a_7$这7个有区别的球放进4个有标志的盒子，要求1,2盒必须含偶数个球，第3盒含奇数个球。

$a_2\ a_6$	$a_3\ a_5$	a_1	$a_4\ a_7$
盒1	**盒2**	**盒3**	**盒4**

对于**7**个球，每个球对应的盒子构成一个排列

球	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
盒	3	1	2	4	2	1	4

所以该问题转化成了将**1234**四个数字进行多重**7-**排列，并要求**1,2**出现偶数次，**3**出现奇数次

将1234四个数字进行多重7-排列，并要求1,2出现偶数次，3出现奇数次

1和2　　　　3　　　　4

$$G_e(x)=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\right)^2\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\ldots\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(e^{4x}+e^{2x}-e^{-2x}-1\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left\{-1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[4^n+2^n-(-2)^n\right]\frac{x^n}{n!}\right\}$$

多重7-排列的个数为 $\frac{1}{8}\left[4^7+2^7-(-2)^7\right]=2080$

例3.17 将r个有标志的球放进n个有标志的盒子，有多少种不同的分配方案？若要求每盒中至少1个有多少种不同的分配方案？

(1) n^r

(2) $G_e(x)=\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)^n$中的$x^r/r!$的系数

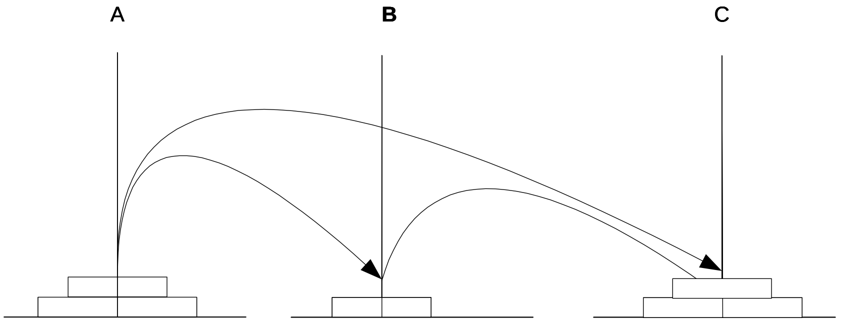
$$=(e^x-1)^n$$

6. 递推关系

- 递推关系是计数的一个强有力的工具，特别是在做算法分析时是必需的。
- 递推关系的求解主要是利用母函数。
- 例：**Hanoi**问题
  - 这是个组合数学中的著名问题。**N**个圆盘依其半径大小，从下而上套在**A**柱上。每次只允许取一个移到柱**B**或**C**上，而且不允许大盘放在小盘上方。若要求把柱**A**上的**n**个盘移到**C**柱上请设计一种方法来，并估计要移动几个盘次。现在只有**A**、**B**、**C**三根柱子可用。
  - 设有**n**个盘子时所需的移盘次数为**h(n)**
  - $n=1$时，**h(1)=1**

6.1 Hanoi问题算法

- **n=2时**
  - 第一步先把最上面一个圆盘套在**B**上；第二步把下面一个圆盘转移到**C**上；最后把**B**上的圆盘移到**C**上。到此转移完毕。



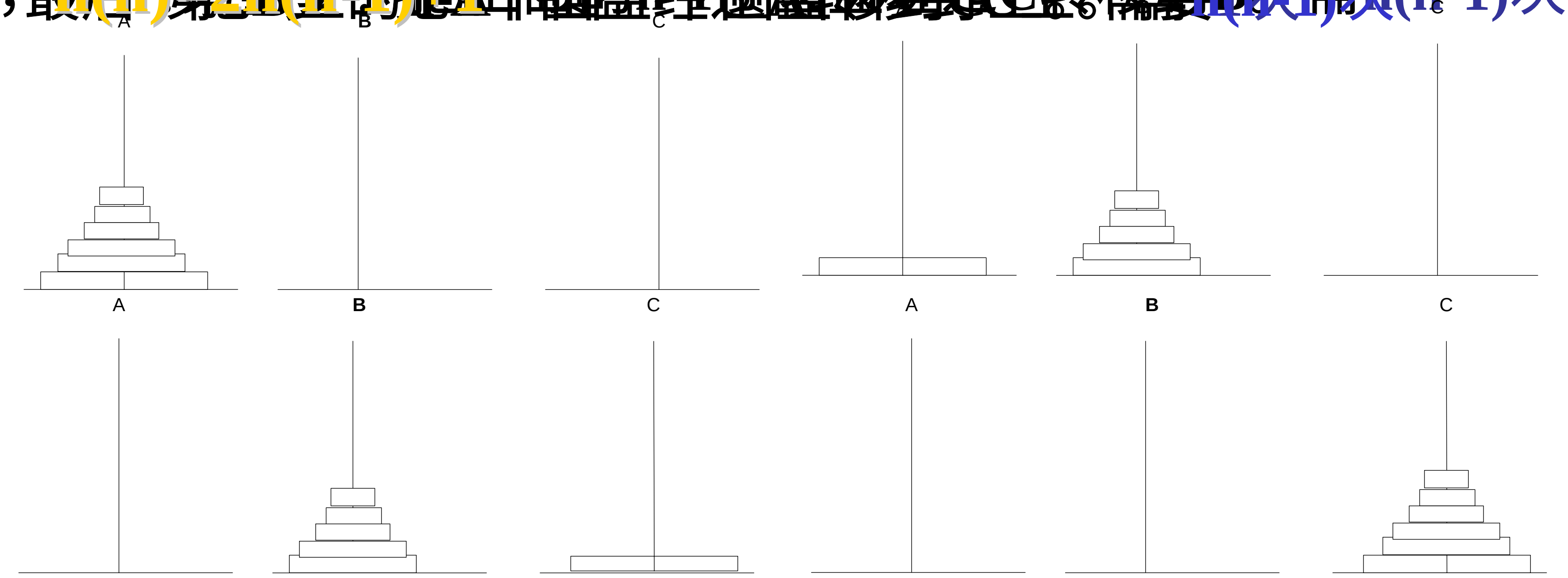
h(2)=3

Hanoi问题：一般的n, h(n)=?

假定n-1个盘子的转移算法已经确定，移盘次数为h(n-1)。

$h(n)=2h(n-1)+1$

h(n-1)次



Hanoi问题递归

- 初始条件：$h(1) = 1$ ；
- 递归关系：$h(n) = 2\,h(n-1) + 1$；

可以得到序列 $h_1, h_2, h_3, \ldots$

问题：序列 $h_1, h_2, h_3, \ldots$所对应的母函数

$$H(x)= h_1x+ h_2x^2+ h_3x^3+\ldots$$

Hanoi问题递归问题求解

解法1：

- 由$h_1 = 1$，$h_n = 2h_{n-1} + 1$，得
- $h_n = 2h_{n-1} + 1 = 2[2h_{n-2} + 1]+1 = \ldots =$

$$2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1 = 2^n - 1$$

解法2：求母函数$H(x)$的一种形式算法

$$x\ : h_1 = 1$$

$$x^2 : h_2 = 1 + 2h_1$$

$$x^3 : h_3 = 1 + 2h_2$$

$$\vdots$$

$$-----------------$$

$$H(x) = (x + x^2 + x^3 + \ldots) + 2x(h_1 x + h_2 x^2 + h_3 x^3 + \ldots)$$

$$= \frac{1}{1-x} - 1 + 2xH(x) = \frac{x}{1-x} + 2xH(x)$$

$$H(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x}$$

$$= 1 + 2x + 2^2 x^2 + \ldots - (1 + x + x^2 + \ldots)$$

$$= x + (2^2 - 1)x^2 + (2^3 - 1)x^3 + \ldots$$

举例

例3.18 求n位十进制数中出现偶数个5的数的个数

- 从分析n位十进制数出现偶数个5的数的结构入手，$p_1p_2\cdots p_{n-1}$是n-1位十进制数
  - 若含有偶数个5，则p_n取5以外的0，1，2，3，4，6，7，8，9九个数中的一个，
  - 若$p_1p_2\cdots p_{n-1}$只有奇数个5，则取p_n=5，使$p_1p_2\cdots p_{n-1}$成为出现偶数个5的十进制数。

解法1：

- a_n ：*n*位十进制数中出现偶数个5的数的个数，
- b_n ：*n*位十进制数中出现奇数个5的数的个数。

初始条件： $a_1 = 8, \quad b_1 = 1$

递归关系：

$$\begin{cases} a_n = 9a_{n-1} + b_{n-1} \\ b_n = 9b_{n-1} + a_{n-1} \end{cases}$$

$a_n=9a_{n-1}+b_{n-1}$表达了含有偶数个5的*n*位十进制数的两个组成部分

- $9a_{n-1}$表达由含有偶数个5的n-1位十进制数$p_1p_1\cdots p_{n-1}$，令p_n取5以外的0，1，2，3，4，6，7，8，9九个数中的一个数构成的。
- b_n项表示当$p_1p_1\cdots p_{n-1}$是含有奇数个5的n-1位十进制数，令$p_n=5$而得$p_1p_1\cdots p_{n-1}p_n$是含偶数个5的n位十进制数

解法1 续

- 设序列$\{a_n\}$的母函数为$A(x)$，序列$\{b_n\}$的母函数为$B(x)$。即：

$$A(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots$$

$$-9xA(x) = \quad -9a_1 x - 9a_2 x^2 - 9a_3 x$$

$$+) \quad xB(x) = \quad -b_1 x - b_2 x^2 - b_3 x^3$$

$$-----------------------$$

$$(1-9x)A(x) - xB(x) = a_1 = 8$$

$$B(x) = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \ldots$$

$$-9xB(x) = \quad -9b_1 x - 9b_2 x^2 - 9b_3 x^3 - \ldots$$

$$) - xA(x) = \quad -a_1 x - a_2 x^2 - a_3 x^3 - \ldots$$

$$-----------------------$$

$$-9x)B(x) - xA(x) = b_1 = 1$$

- 故得关于母函数$A(x)$和$B(x)$得连立方程组

解法1（续）

- 解方程组得

$$A(x)=\frac{1}{1-18x+80x^2}\begin{vmatrix}8 & -x\\ 1 & 1-9x\end{vmatrix}=\frac{-71x+8}{(1-8x)(1-10x)}$$

$$B(x)=\frac{1}{1-18x+80x^2}\begin{vmatrix}1-9x & 8\\ -x & 1\end{vmatrix}=\frac{1-x}{(1-8x)(1-10x)}$$

- 求出**A(x)**的系数

$$A(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{1-8x}+\frac{9}{1-10x}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(7\cdot 8^k+9\cdot 10^k)x^k$$

$$a_n=\frac{7}{2}8^{n-1}+\frac{9}{2}10^{n-1}$$

解法2

- ***n*-1**位的十进制数的全体共**9·10*ⁿ*⁻²**从中去掉含有偶数个5的数，余下的便是***n*-1**位中含有奇数个5的数

$$a_n = 9a_{n-1} + b_{n-1}$$

$$b_{n-1} = 9 \cdot 10^{n-2} - a_{n-1}$$

$$\therefore \quad a_n = 8 \cdot a_{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2}, \qquad a_1 = 8$$

- 然后求解递推关系得到

$$a_n = \frac{7}{2} 8^{n-1} + \frac{9}{2} 10^{n-1}$$

例3.19 允许重复的组合$\underline{C}(n,r)$

- 从n个元素$a_1,a_2,\cdots,a_n$中取r个进行允许重复的组合。假定允许重复的组合数用$\underline{C}(n,r)$表示，其结果可能有以下两种情况。
  - 不出现某特定元素设为a_1，其组合数$\underline{C}(n-1,r)$，相当于排除a_1后从$a_2,\cdots,a_n$中取r个做允许重复的组合。
  - 至少出现一个a_1，其组合数为$\underline{C}(n,r-1)$：相当于从$a_1,a_2,\cdots,a_n$中取$r-1$个做允许重复的组合，然后再加上一个a_1得从n个元素中取r个允许重复的组合。
- 依加法原则可得：$\underline{C}(n,r)=\underline{C}(n,r-1)+\underline{C}(n-1,r)$
- 因$\underline{C}(n,1)=n,\underline{C}(n-1,1)=n-1$，故令$\underline{C}(n,0)=1$

由递推关系：$\underline{C}(n,r)=\underline{C}(n,r\text{-}1)+\underline{C}(n\text{-}1,r)$ 建立母函数方程

- 双参数母函数
  - $G_n(x)= \underline{C}(n,0) + \underline{C}(n,1)x + \underline{C}(n,2)x^2 + \ldots$
  - $-xG_n(x)= - \underline{C}(n,0)x - \underline{C}(n,1)x^2 - \underline{C}(n,2)x^3 - \ldots$
  - $-G_{n-1}(x)= -\underline{C}(n-1,0) - \underline{C}(n-1,1)x - \underline{C}(n-1,2)x^2 - \ldots$

得 $(1-x)G_n(x)-G_{n-1}(x)=0$，即 $G_n(x)=\dfrac{1}{1-x}G_{n-1}(x)$

$G_1(x)=\underline{C}(1,0)+\underline{C}(1,1)x+\underline{C}(1,2)x^2+\ldots=1+x+x^2+\ldots=1/(1-x)$

$$G_n(x)=\frac{1}{1-x}G_{n-1}(x)=\frac{1}{(1-x)^2}G_{n-2}(x)=\ldots=\frac{1}{(1-x)^{n-1}}G_1(x)=\frac{1}{(1-x)^n}$$

求解

- 由二项式展开

$$(1-x)^{-n}=1+nx+\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3+\ldots$$

- 所以有，
- $\underline{C}(n,r)=\dfrac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{r!}=C(n+r\text{-}1,r)$

6.2 Fibonacci数列

问题：一对雌雄兔子，每两个月可繁殖雌雄兔子各一（新的一对），n个月后共有多少对兔子？

月	1	2	3	4	5	…
对	1	1	2	3	5	…

- 设n个月后的兔子对数F_n，当月出生N_n，n-1个月留下的兔子F_{n-1}，则

  $$F_n = N_n + F_{n-1}, \quad N_n = F_{n-2}$$

- 递推关系：$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

  初始条件：$F_1 = F_2 = 1$

- 求解：$G(x) = F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + \ldots$

Fibonacci数列 $G(x) = F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + \ldots$

$$x^3 : F_3 = F_2 + F_1$$

$$x^4 : F_4 = F_3 + F_2$$

$$x^5 : F_5 = F_4 + F_3$$

$$+) \quad \vdots$$

$$-----------------$$

$$G(x) - F_1x - F_2x^2 = x^2G(x) + x(G(x) - F_1x)$$

$$G(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Fibonacci数列 $G(x)=\dfrac{x}{1-x-x^2}$

$$G(x)=\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{x}{\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)}$$

$$=\frac{A}{\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)}+\frac{B}{\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)}$$

解得 $$G(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}-\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}\right)$$

Fibonacci数列

- 令 $$\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
- 解出 $$G(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha x} - \frac{1}{1-\beta x}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$$
- 得 $$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Fibonacci数列vs.黄金分割率

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618$$

$$\frac{F_{n-1}}{F_n} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = 0.618$$

- ***F**$_n$***实际上是个分割（1：0.618）**

Fn = 1.618Fn-1

Fn-1

Fn-2=0.618Fn-1

Fibonacci数列的性质

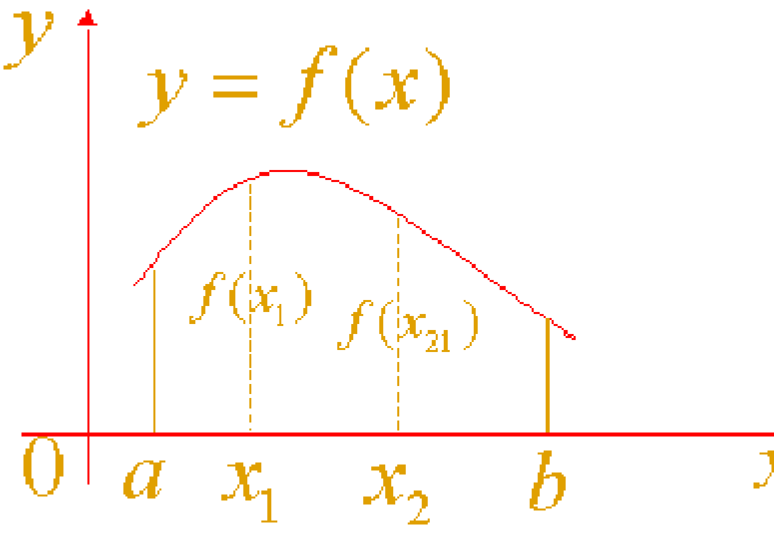
$$F_1 + F_2 + \ldots F_n = F_{n+2} - 1$$

$$F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$$

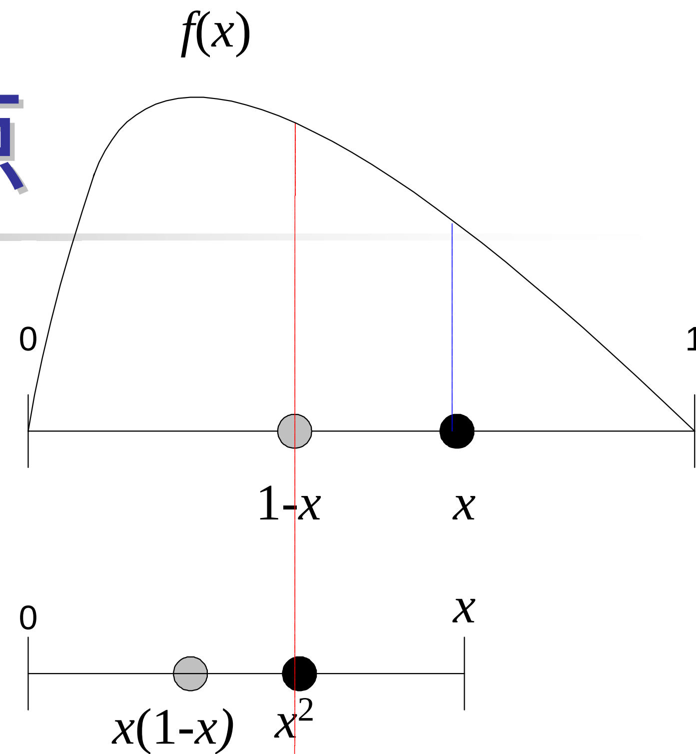
$$F_1^{\ 2} + F_2^{\ 2} + F_3^{\ 2} + \ldots + F_n^{\ 2} = F_n F_{n+1}$$

Fibonacci数列的意义

- 设函数$y=f(x)$在区间(a,b)上有一单峰极值点，假定为极大点
- 区间3等分，$f(x_1)>f(x_2) \Rightarrow$ 极值在(a,x_2)，否则在(x_1,b)
- 每次去掉1/3的区间，
  - x_1并没有发挥作用！

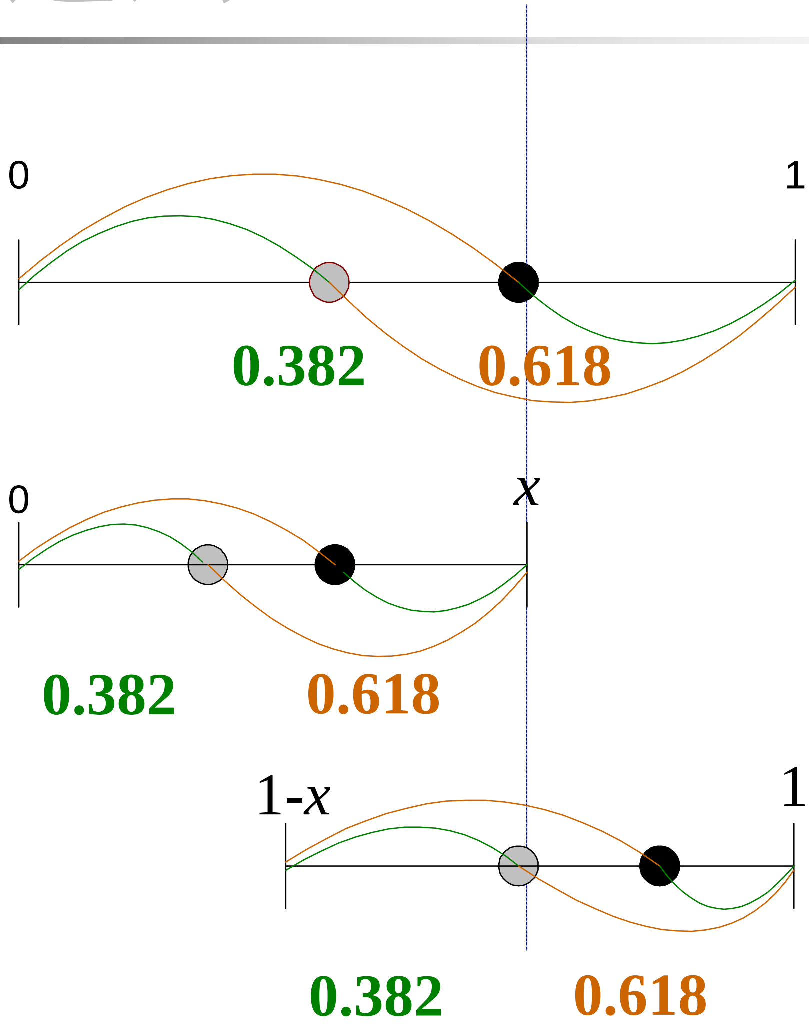


迭代求根最佳选点

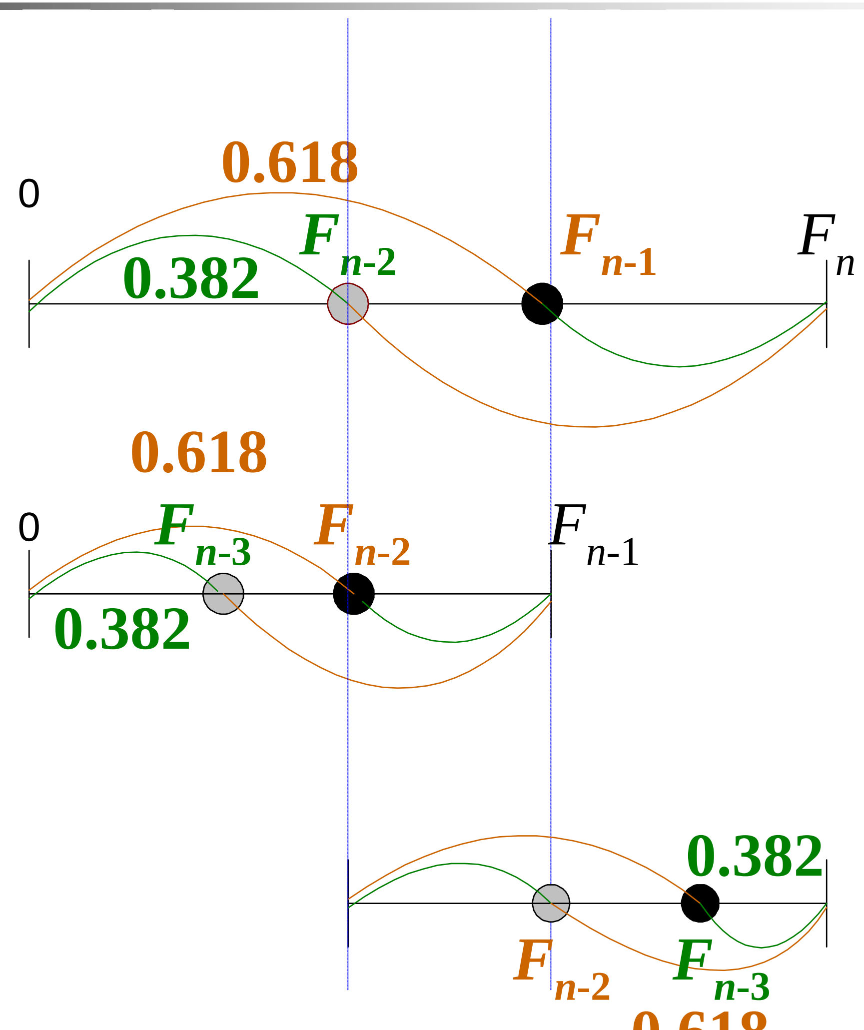


- 新的取点方法：
  在**(0,1)**中，取***x***和**1-*x***
- 则第一次保留下来区间
  (0,*x*)，继续选点x^2, $(1-x)x$
- 若$x^2 = 1-x$，则前一次的点都能用上，即省一次试验
- 此时得 $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0.618...$

0.618 优选法



Fibonacci优选法



附注

- 若利用Fibonacci试验，设需要F_n个所有可能的试验，则试验点放在F_{n-1}, F_{n-2}上，最多n-1次即得极值
- 参数必须是整数，不是F_n时要添加虚点
- n次试验可将峰值区间缩小到$1/F_n + \varepsilon$。

例3.20 函数$y=f(x)$ 在区间[23, 503]上有一单峰极值点，x取整数，问用Fibonacci优选法，确定单峰极值点需要多少次试验？

解：区间大小为：503-23=480。由于F_{14}=377, F_{15}=610，所以可以虚加610-480=130个点。所以至少需要n-1=14次试验即可。

黄金分割〔Golden Section〕

为什么黄金分割率这样被人看重呢？因为这样的比例是最优美的。

我们看的书、报、杂志，其纸张的裁切宽与长之比接近黄金分割率。这样的长方形让人看起来舒服顺眼，被称为“黄金长方形”。原纸为黄金长方形的，对折后仍接近黄金长方形。所以按正规裁法得到的纸张，不管其大小，如对于、8开、16开、32开等，都仍然是近似的黄金长方形。

据说，最早发现这个优美比例的是古希腊的毕达哥拉斯学派。他们曾不厌其烦地把线段一段一段地分成不同的两截，反复改变着比例并加以比较，最后才找到了这个“最优雅的比例节奏”。但是把这个比例冠以“黄金”二字的美名则开始于意大利著名科学家、艺术家达·芬奇。从此，0.618作为黄金数，或称黄金比而统治着当时欧洲的建筑和艺术，并影响到人们生活的许多方面，一起延续至今。

希腊古城雅典有一座用大理石砌成的神庙。神庙大殿中央的女神像是用象牙和黄金雕成的。女神的体态轻柔优美，引人入胜。经专家研究发现，她的身体从脚跟到肚脐间的距离与整个身高的比值，恰好是0.618。

不仅雅典娜女神身材如此美好，其他许多希腊女神的身体比例也是如此。英国在画家斐拉克曼的名著《希腊的神话和传说》一书中，共绘有96幅美人图。每一幅画上的美人都妩媚无比婀娜多姿。如果仔细量一下她们身体的比例也都与雅典娜相似。

有人还研究了芭蕾舞演员和体操运动员的身体。发现女演员腰长（即脚跟到肚脐的距离）与身高之比约为0.58，尚不如女神那样优美。只是在翩翩起舞时，提起脚跟，让腰长再增加6-8厘米，才有可能接近0.618的比例，从而使舞姿更加优美。

在人体结构的其他部位，0.618也常常显圣，如臀宽与躯干长度之比、上肢与下肢长度之比、从下巴到眼睛的距离与整个头部长度之比、从头顶到鼻尖与从头顶到下巴的长度之比等等都约等于0.618。

不仅身体结构如此，连生活环境中也有许多条件与0.618有关。例如人在环境温度为22-24摄氏度时感到最舒服，这正是因为人的正常体温37摄氏度与0.618的乘积恰好是22.8摄氏度。在这一温度附近，人体的新陈代谢和各项生理功能都处于最佳状态。

文明古国埃及的金字塔，形似方锥，大小各异。但这些金字塔底面的边长与高这比都接近于0.618。

在许多绘画和摄影作品中，中心人物或景物所处的位置一般也恰好是黄金分割点而不是在构图的正中。

就连普通树叶的宽与长之比，蝴蝶身长与双翅展开后的长度之比也接近0.618。

黄金分割这个奇妙的比例，真让人叹为观止。难怪德国天文学家开普勒宣称黄金分割是造物主赐予自然界传宗接代的

习题

1. 现有11个橘子，10个苹果，8个香蕉，欲组成果篮。要求果篮中有１只水果，问有多少种不同的可能？果篮中有2只水果，问有多少种不同的可能？果篮中有3,4,5,6,7,8,9只水果，各有多少可能？

1只	2只	3只	4只	5只	6只	7只	8只	9只	10只
3	6	10	15	21	28	36	45	54	63

2．确定平面*一般位置*上的n个*互相交叠*的圆所形成的区域数。所谓*互相交叠*指的是每两个圆相交在不同的两个点上。*一般位置*指是在不存在有一个公共点的三个圆。

答案：$a_n = a_{n-1}+2(n-1)$，得到$a_n = n^2-n+2$