

网络流与费用流

蔡育琛

Caiych

caiych@gmail.com

网络流定义

- 在图论中，网络流(**Network Flow**) 是指在一个每条边都有容量(**Capacity**) 的有向图分配流，使一条边的流量不会超过它的容量。（边有附带容量的图称为网络。）一道流必须符合一个结点的进出的流量相同的限制，除非这是一个源点(**Source**)——只有向外的流，或是一个汇点(**Sink**)——只有向内的流。

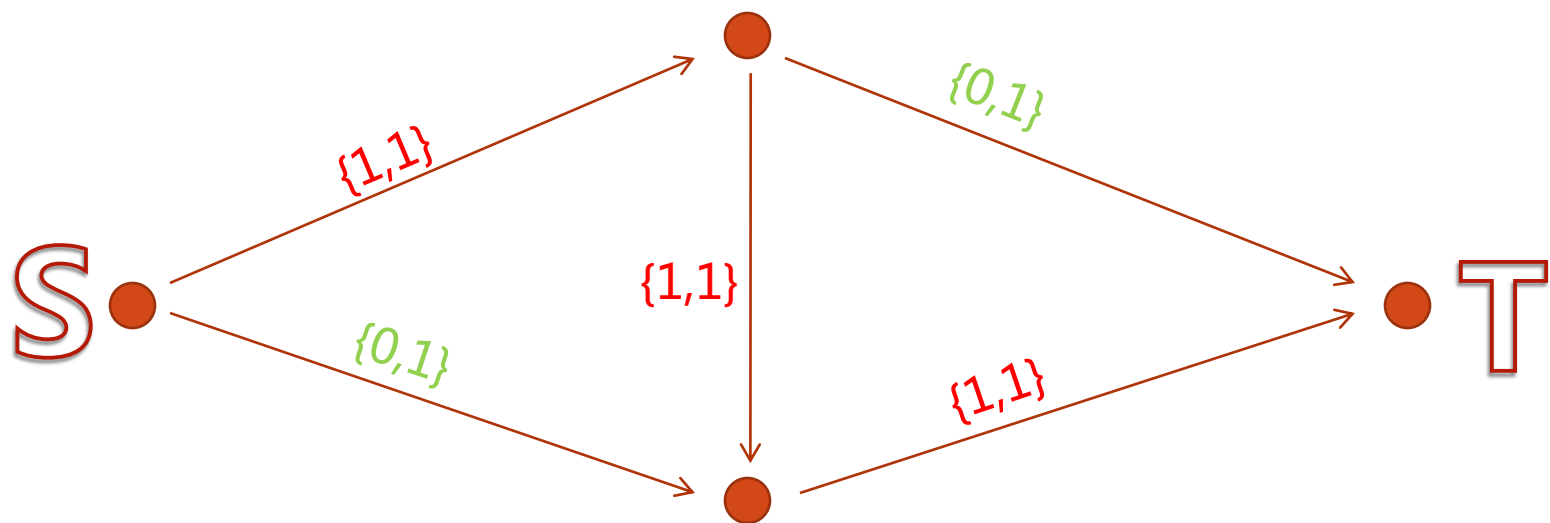
最大流

- 确定边的流量使得从源流出的流量之和最大。
- 常用算法
 - Dinic
 - SAP
 - 以及各种其他神奇的算法（比如HLPP）

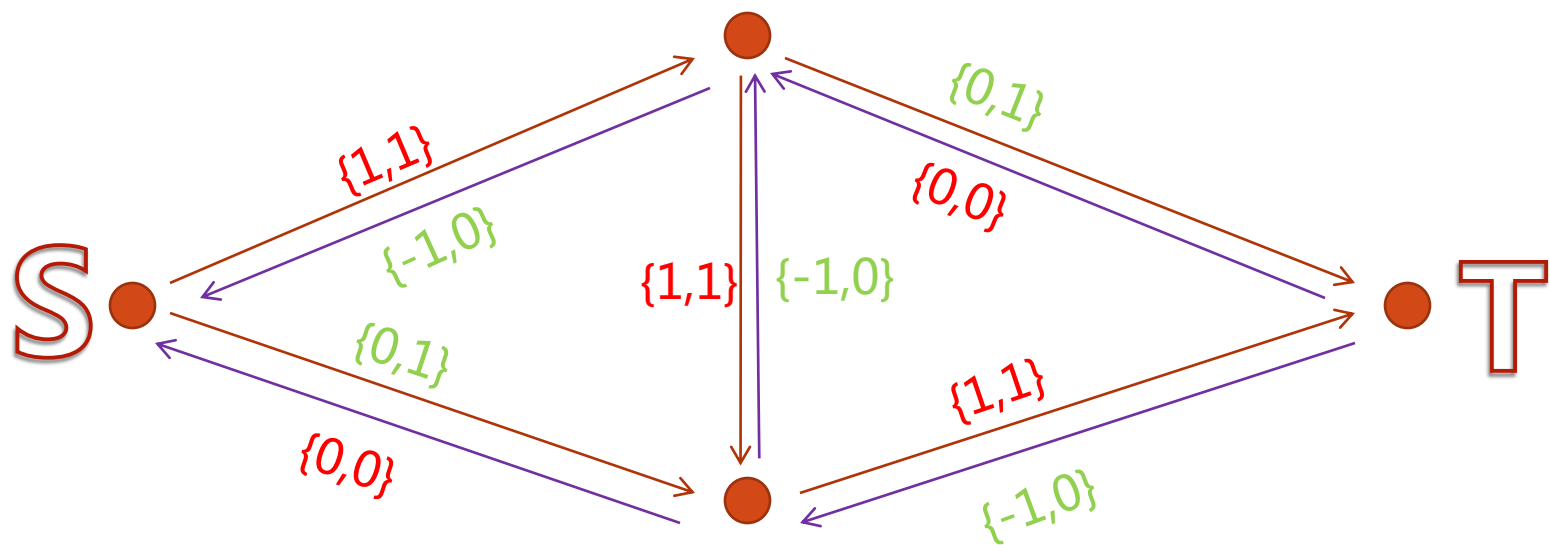
增广路

- 若存在一条由源到汇的路且路上所有边都没满流，则称这条路为增广路。
- 若存在增广路，则一定可以扩大流量。

反向边



反向边



Dinic

- 原理见 王欣上 《浅谈基于分层思想的网络流算法》
- 算法流程：
 - 用BFS在原图中分层，若汇点已不可达，算法结束并退出。
 - 用求得的分层图进行DFS。
 - 返回第一步。

最大流最小割定理

- 最大流=最小割

最大获利 (NOI2006)

- 公司调查得出了所有期望中的用户群，一共 M 个。关于第 i 个用户群的信息概括为 A_i , B_i 和 C_i ：这些用户会使用中转站 A_i 和中转站 B_i 进行通讯，公司可以获益 C_i 。（ $1 \leq i \leq M$; $1 \leq A_i, B_i \leq N$ ）
- THU 集团的 CS&T 公司可以有选择的建立一些中转站（投入成本），为一些用户提供服务并获得收益（获益之和）。那么如何选择最终建立的中转站才能让公司的净获利最大呢？（净获利 = 获益之和 - 投入成本之和）
- [RQNOJ 556](#)

- 数据规模： 80% 的数据中， $N \leq 200; M \leq 1000$ 。
- 100% 的数据中: $N \leq 5000; M \leq 50000$;
 $0 \leq C_i \leq 100; 0 \leq P_i \leq 100$ 。

样例输入

5 5 4

1 2 3

1 2 3

2 3 4

1 3 3

1 4 2

4 5 3

样例输出

4

植物大战僵尸 (NOI2009)

- 在后院上有 $r \times c$ 的矩阵，需要先击破右侧的植物才能攻击左侧的。在 (I, j) 处有参数 $\text{score}(I, j)$ ，若为正表示击破 (I, j) 处的植物可获得 $\text{score}(I, j)$ 的能源，否则需要付出 $\text{score}(I, j)$ 。其中一些植物有一些攻击范围，如果一个植物在其他植物的攻击范围之内，则不能击破这个植物。
- 问最多可以获得多少能源。
- 初始没有能源。
- [RQNOJ529](#)

- 数据规模

约20%的数据满足 $1 \leq N, M \leq 5$;

约40%的数据满足 $1 \leq N, M \leq 10$;

约100%的数据满足 $1 \leq N \leq 20, 1 \leq M \leq 30, -$

$10000 \leq \text{Score} \leq 10000$

样例输入

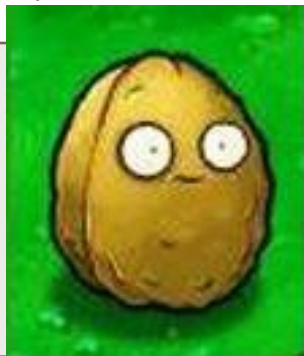
```
3 2
10 0
20 0
-10 0
-5 1 0 0
100 1 2 1
100 0
```

样例输出

```
25
```

图示

10



20



-10

-5



100



100



战争游戏 (TOI1193)

- 小R正在玩一个战争游戏。游戏地图是一个M行N列的矩阵，每个格子可能是障碍物，也可能是空地，在游戏开始时有若干支敌军分散在不同的空地格子中。每支敌军都可以从当前所在的格子移动到四个相邻的格子之一，但是不能移动到包含障碍物的格子。如果敌军移动出了地图的边界，那么战争就失败了。
- 现在你的任务是，在敌军开始移动前，通过飞机轰炸使得某些原本是空地的格子变得不可通行，这样就有可能阻止敌军移出地图边界（出于某种特殊的考虑，你不能直接轰炸敌军所在的格子）。由于地形不同的原因，把每个空地格子轰炸成不可通行所需的炸药数目可能是不同的，你需要计算出要阻止敌军所需的最少的炸药数。

- 数据规模
 - 对50%的数据， $1 \leq M, N \leq 10$
 - 对100%的数据， $1 \leq M, N \leq 30$
矩阵里的每个数不超过100

样例输入

```
4 3
1 2 1
1 10 1
1 0 -1
1 1 1
```

样例输出

```
6
```

图示

1	2	1
1	10	1
1	Enemy	-1
1	1	1

Cross the fire (HDU 3931)

- 给出一个雷区，每个雷为圆形，经过一颗雷要受到一定伤害，现在要从左侧穿过雷区走到右侧，问受到的最小伤害。

- 数据规模
- $(1 \leq L \leq 10000, 1 \leq W \leq 10000, 1 \leq N \leq 250, 1 \leq P \leq 1000000)$

样例输入

```
130 340 5 2
10 50 100 1
130 130 100 1
70 170 100 1
0 180 100 1
60 260 100 1
```

样例输出

```
1
```

关于网络流建图

- 参见论文
 - 最小割模型在信息学竞赛中的应用 —— 胡伯涛
 - 浅谈网络流算法的应用 —— 金恺

有上下界的网络流

- 每条边上除了上界还有一个必须满足的下界，其余条件相同。
 - 加入虚拟源点 vs 和虚拟汇点 vt
 - 若边 (u,v) 属于 G 那么这条边也属于 D , $cap(u,v) = up(u,v) - low(u,v)$
 - 对于 G 中的每一个点 v , D 中加入边 (vs,v) , $cap(vs,v) = ed(v)$
 - 对于 G 中的每一个点 v , D 中加入边 (v,vt) , $cap(v,vt) = st(v)$
 - 加入边 (t,s) , $cap(t,s) = INF$
 - $tflow$ 为所有边的下界的和
 - 求 vs 到 vt 的最大流，若最大流不等于 $tflow$ ， 则不存在可行流，此问题无解。若相等，恢复原图求最大流。

费用流

- 在网络流图的基础上，每条边上增加一个参数 w 。
- 图的总费用为
$$\sum_{\langle u,v \rangle \in E} f \langle u,v \rangle * w \langle u,v \rangle$$
- 求出在满足最大流量的情况下，使得总费用最大/最小。

求法

- 连续最短路算法
- 以费用为距离
- 每次求出从**S**到**T**的最短路（路上所有边都可增广）
- 沿着最短路增广
- 最终得到的就是最小费用最大流

- 具体写法:
- 把dinic中的bfs改为spfa，记录距离标号的时候同时记录距离源点的距离。
- 别忘了反向边

SOJ1828 Minimal

- 给出两个集合S1和S2，其中 $|S1|=a, |S2|=b$ 且 $a \leq b$
- 定义函数
 - $F(S1, S2) = \min \{|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_N - b_N|\}$
 - in which $a_i \in S1, b_i \in S2$
 - $a_i \neq a_j$ if $i \neq j$
 - $b_i \neq b_j$ if $i \neq j$
 - $(i, j \in [1, a])$

- 数据规模:
 - $a \leq b \leq 500$
 - $S1, S2 \subseteq [0, 10^6]$

样例输入:

1
2 3
30
20
50
10
40

样例输出:

20

TOJ 2663

- 有两间会议室，现在有一些请求 $[i,j]$ 表示申请在 $[i,j]$ 期间使用任意一间会议室并获得 w 的利润。
- 可以拒绝其中一些请求，一旦接受就必须完整的使用会议室。
- 求最大利润。

- 数据规模：
 - 请求 $[i,j]$ 中 $i \leq j \leq 365$
 - 请求数没说.....但是看别人有用状态压缩DP做的.....目测不超过10.....

样例输入：

4

1 2 10

2 3 10

3 3 10

1 3 10

6

1 20 1000

3 25 10000

5 15 5000

22 300 5500

10 295 9000

7 7 6000

样例输出：

30

25500

NOI 2008 志愿者招募

- N 天内每天需要一定数量的志愿者，现在有 m 类志愿者，其中第 i 种可以从第 s_i 天工作到 t_i 天，数量无限，每人需要花费 c_i 。
- 求满足条件的情况下最小花费。
- [RQNOJ 338](#)

- 数据规模
 - $N \leq 1000$ & $m \leq 10000$
 - 其他数据 $\in \text{int}$

样例输入：

3 3
2 3 4
1 2 2
2 3 5
3 3 2

样例输出：

14

样例说明：

招募3 名第一类志愿者和4 名第三类志愿者。

HDU 3947

- 给出一个河流网（树），每条边上有一个权值。
- 有一些药水，可以覆盖一段河流，每次可以将覆盖的边上权值减一（不可减为负数），并有一定的花费，每种药水使用也有上限。
- 求将全部边上权值为0的情况下，令花费最小。

- 数据规模：
 - 点数不超过150
 - 药水总类不超过2000

样例输入：

```
2
3
2 1 2
3 1 1
1
3 1 2 2
3
2 1 2
3 1 1
2
3 1 2 2
2 1 2 1
```

样例输出：

```
Case #1: -1
Case #2: 4
```

NOI 2012 美食节

- 这题新鲜出炉.....没地方交.....
- 有 N 种菜，每种菜有 P_i 盘，现在共有 M 个厨师，厨师 i 完成第 j 种菜需要的时间记为 $T_{i,j}$
- 一个厨师同时只能做一盘菜
- 每一盘菜的等待时间为从 $T=0$ 开始直到这盘菜被做出来。
- 总等待时间为所有菜的等待时间之和。
- 求出最少的总等待时间。

- 数据规模:
 - $N \leq 40, M \leq 100, \sum P_i \leq 800, T_{i,j} \leq 1000$

样例输入:

3 2
3 1 1
5 7
3 6
8 9

样例输出:

47

样例说明

- 厨师1先制作1份菜品2，再制作2份菜品1。点这3道菜的3个同学的等待时间分别为3， $3+5=8$ ， $3+5+5=13$ 。
- 厨师2先制作1份菜品1，再制作1份菜品3。点这2道菜的2个同学的等待时间分别为7， $7+9=16$ 。
- 总等待时间为 $3+8+13+7+16=47$ 。
- 虽然菜品1和菜品3由厨师1制作更快，如果这些菜品都由厨师1制作，总等待时间反而更长。如果按上述的做法，将1份菜品1和1份菜品3调整到厨师2制作，这样厨师2不会闲着，总等待时间更短。
- 可以证明，这种解法最优。