机器学习之矩阵论

第一课：矩阵基本概念和基本运算

- 矩阵基本概念
- 矩阵基本运算

第二课：线性空间和矩阵分解

- 线性空间
- 矩阵分解

第三课：矩阵求导

- 梯度、方向导数、Hessian 矩阵
- 最速下降方向、牛顿法、最小二乘法

CSDN 不止于代码

基本符号

x 小写字母表示标量，即数字

$\boldsymbol{x}$ 黑体小写字幕表示向量，即$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

A 大写字母表示一般矩阵

$A_{i:(:i)}$ 表示矩阵的第i行（列）分向量

$A_{m\times n}$ 表示m行n列矩阵

a_{ij} 表示矩阵第i行第j列元素

$\boldsymbol{xy}$ 表示两个向量内积，用矩阵乘法表示为$\boldsymbol{xy}^T$

$\boldsymbol{R}^n$ 表示n为实向量全体，如：$\boldsymbol{R}^1 = \boldsymbol{R}$为实数集；$\boldsymbol{R}^2$为平面

$\boldsymbol{R}^{m\times n}$ 表示m行n列实矩阵全体

一、矩阵基本概念

向量运算

设$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^2$， 即$\boldsymbol{x}$=$(x_1, x_2)$， $\mathbf{y}$=(y_1, y_2)

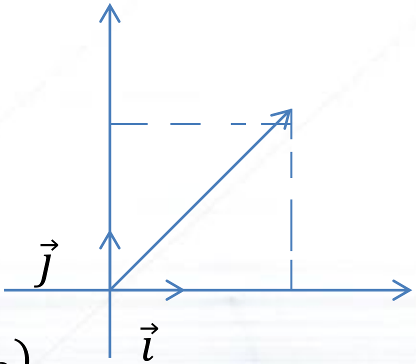
向量加法： $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$=$(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

向量数乘： $a\boldsymbol{x} = (ax_1, ax_2)$

向量内积： $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$=$x_1 y_1 + x_2 y_2$

$$\boldsymbol{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} = (x_1, x_2)$$

$$\boldsymbol{y} = y_1\vec{i} + y_2\vec{j} = (y_1, y_2)$$



$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1)\vec{i} + (x_2 + y_2)\vec{j} = (x_1 + y_1\ ,\ x_2 + y_2)$$

$$a\boldsymbol{x} = a(x_1\vec{i} + x_2\vec{j}) = ax_1\vec{i} + ax_2\vec{j} = (ax_1, ax_2)$$

$$\boldsymbol{xy} = (x_1\vec{i} + x_2\vec{j}\,)(y_1\vec{i} + y_2\vec{j}) = x_1y_1\vec{i}\vec{i} + x_2y_2\vec{j}\vec{j} + (x_1y_2 + x_2y_1)\vec{i}\vec{j}$$

$$= x_1y_1 + x_2y_2$$

例1：二元一次方程组

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}$$

例2：多元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots + \cdots + \cdots + \cdots = \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

显然，此方程组的解由变量的系数

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

以及右端项$b_1,b_2,\ldots,b_n$所确定的(系数的位置不能改变)。

例3：n元线性变换

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \ldots + \cdots + \cdots + \cdots = \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases}$$

显然，该线性变换的性质同样取决于变换系数

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

矩阵的作用：统一表示线性方程和线性变换，研究矩阵的算法和性质处理线性方程和线性变换的问题。

线性：数乘和加法统称为线性　　来源：y=ax+b的图像是一条直线

矩阵(matrix)定义

由 $m \times n$ 个数$a_{ij}(i = 1,2,..,m; j = 1,2,\ldots,n)$，排成的 m 行、n 列的数表

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m \times n$ 矩阵，常用大写字母表示，记作

$$A、A_{m\times n}或者\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$$

其中a_{ij}为矩阵第 i 行、第 j 列的元素。

矩阵和向量的关系：

n元行(列)向量$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$可以看成1行$n$列($n$行1列)矩阵，即

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_n]_{1\times n}$$

矩阵可以写成$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = [A_{:1}, A_{:2}, \dots, A_{:n}]$，其中$A_{:i}$为第$i$列元素构成的向量，称为列向量

矩阵也可以写成$A = \begin{pmatrix} A_{1:} \\ A_{2:} \\ \vdots \\ A_{m:} \end{pmatrix}$，其中$A_{i:}$为第$i$ 行元素构成的向量，称为行向量

特殊的矩阵

方阵： 行数与列数都等于n 的矩阵，称为n 阶方阵。记作A_n

单位矩阵： 对角线上元素为1， 其余为0的方阵，即

当$i=j$时，$a_{ii}=1$；当$i\neq j$时，$a_{ij}=0$，或者

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

称为n阶单位矩阵，记作I_n或者E_n ，n 个 1 所在的位置a_{ii}称为对角线。

对角矩阵： 设A是n 阶方阵，当$i \neq j$时，$a_{ij} = 0$。或者

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_n \end{bmatrix}$$

称A为n阶对角矩阵，简称对角阵。也可记作

$$A = diag(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad \text{or} \quad \Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

零矩阵: 元素全为零的矩阵称为零矩阵，记作0或者$0_{m \times n}$.

三角矩阵: 当i > (<)j时，$a_{ij} = 0$,则称A为上(下)三角矩阵。

$$A = \begin{bmatrix} * & * \\ \mathbf{0} & * \end{bmatrix} \left(A = \begin{bmatrix} * & \mathbf{0} \\ * & * \end{bmatrix} \right)$$

二、矩阵基本运算

1. 相等 如果 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$ 的行数和列数相同，且

$$a_{ij}=b_{ij}\text{，（对所有的 } i\text{、}j\text{ 都成立），}$$

则称矩阵 A 与矩阵 B 相等，记为 $A=B$.

注意： 不同阶数的零矩阵是不相等的.

例如：
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.矩阵相等
2.加减法
3.数乘矩阵
4.矩阵的乘法
5.矩阵的转置
6.方阵的行列式
7.矩阵的逆
8.矩阵的秩
9.迹运算

2. 加法 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，设

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}(i=1,2,\cdots m,j=1,2,\cdots n),$$

称矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 A 与矩阵 B 的**和**，记为

$$C=A+B.$$

注意 1) 相加的矩阵必须有相同的行数和列数；

2) 矩阵的加法是两个同型矩阵对应位置上的元素相加.

例 4:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 6\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

负矩阵： 设$A=(a_{ij})$，记$-A=(-a_{ij})$为A的负矩阵

减法: $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$

运算规律

1) 结合律 $A+(B+C)=(A+B)+C$;

2) 交换律 $A+B=B+A$;

3) 零矩阵的运算

$$A+O=A;$$

$$A+(-A)=O;$$

3. 数与矩阵乘法

设 k 为数，$A=(a_{ij})$为矩阵，称矩阵(ka_{ij})

为数与矩阵的乘积，简称数乘运算，记为$kA=(ka_{ij})$

例：$2\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 6 & 4\\ 0 & 10 & 4\end{pmatrix}$

运算规律

1) $1A=A$,

2) $(k+l)A=kA+lA$,

3) $k(A+B)=kA+kB$,

4) $k(lA)=(kl)A$,

例 5：设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&0&-1&3\\4&5&0&8\end{pmatrix}$，

求 $3(A+B)$，$(4+3)A$。

$$3(A+B)=3\begin{pmatrix}3&2&2&7\\9&11&7&16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&6&6&21\\27&33&21&48\end{pmatrix}$$

$$=3A+3B=\begin{pmatrix}3&6&9&12\\15&18&21&24\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&0&-3&9\\12&15&0&24\end{pmatrix}$$

$$(4+3)A=7A=\begin{pmatrix}7&14&21&28\\35&42&49&56\end{pmatrix}$$

$$=4A+3A=\begin{pmatrix}4&8&12&16\\20&24&28&32\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&6&9&12\\15&18&21&24\end{pmatrix}$$

4. 矩阵与矩阵乘法

设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$, 那么$AB = \left(a_{ij}b_{ij}\right)_{m\times n}$?

用方程组解释矩阵加法和数乘，假设有如下两个方程组

$$(1)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \ldots + \cdots + \cdots + \cdots = \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = d_1 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots + \cdots + \cdots + \cdots = \cdots \\ b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \cdots + b_{mn}x_n = d_m \end{cases}$$

将方程组（1）+（2），得到如下方程组：

$$\begin{cases} (a_{11}+b_{11})x_1+(a_{12}+b_{12})x_2+\cdots+(a_{1n}+b_{1n})x_n=c_1+d_1 \\ (a_{21}+b_{21})x_1+(a_{22}+b_{22})x_2+\cdots+(a_{2n}+b_{2n})x_n=c_2+d_2 \\ \ldots+\cdots+\cdots+\cdots=\cdots \\ (a_{m1}+b_{m1})x_1+(a_{m2}+b_{m2})x_2+\cdots+(a_{mn}+b_{mn})x_n=c_m+d_m \end{cases}$$

其对应的系数矩阵恰好是$A+B$.

将方程组（1）×k，得到新的方程系数矩阵对应的恰好也是kA

结论1：矩阵加法和数乘对应的就是线性系统之间的加法和数乘

结论2：$(a_{ij}b_{ij})_{m\times n}$没意义，并且相乘之后线性系统等号不再成立

矩阵乘积：

设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$， $B=(b_{ij})_{s\times n}$,那么规定*矩阵*$C=(c_{ij})_{m\times n}$ ，

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\quad(i=1,2,\cdots m;j=1,2,\cdots,n),$$

称为 A 与 B 的乘积（A左乘B或者B右乘A），记为 $C=AB$.

注意： 1) 只有当第一个矩阵(左矩阵)的列数等于第二个矩阵(右矩阵)的行数时，两个矩阵才能相乘. $C_{m\times n}=A_{m\times s}B_{s\times n}$

2) 乘积矩阵的第 i 行第 j 列的元素等于左矩阵的第 i 行向量与右矩阵的第 j 列向量做内积

例：设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}_{2\times3}$， $B=\begin{pmatrix}7&10&0\\8&11&1\\9&12&0\end{pmatrix}_{3\times3}$

求 AB .

$$AB=\begin{pmatrix}1\times7+2\times8+3\times9 & 1\times10+2\times11+3\times12 & 1\times0+2\times1+3\times0\\4\times7+5\times8+6\times9 & 4\times10+5\times11+6\times12 & 4\times0+5\times1+6\times0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}50&68&2\\122&167&5\end{pmatrix}.$$

关于矩阵的乘法运算，需要注意以下几点：

(1) 矩阵的乘法运算不满足交换律：AB不一定等于BA

AB 有定义, BA不一定有定义.如上例 中的矩阵A 和 B，AB 有定义,

但 BA 就没有定义.

即使 AB与BA 都有定义, 它们也不一定相等.

在作乘法时，应指明它们相乘的次序.如 AB 读作 “A 左乘 B”或 “B 右乘 A”.

(2) 两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵.

例如： $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$ $A \neq O, B \neq O$, 但 $BA = O$.

所以，$AB = 0 \overset{\times}{\Rightarrow} A = 0$或$B = 0$

运算规律

1) 结合律 $(AB)C = A(BC)$;

2) 分配律 $A(B + C) = AB + AC$,

$$(B + C)A = BA + CA;$$

3) $k(AB) = (kA)B$ (其中 k 为数).

注意：一般情况下矩阵乘积不满足交换律，单位矩阵除外

$$I_n A_n = A_n I_n = A_n$$

矩阵乘法的应用

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots + \cdots + \cdots + \cdots = \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

上述线性方程可以写成 $Ax=b$ 其中$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_m)^T$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\
\ldots + \cdots + \cdots + \cdots = \cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m
\end{cases}
$$

上述线性变换可以写成 $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ 其中$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^{\boldsymbol{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_m)^{\boldsymbol{T}}$

$$
A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
$$

如果变量x_1, x_2与 y_1, y_2, y_3, 并且y_1, y_2, y_3与 z_1, z_2有如下线性关系

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 , \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 . \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 , \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 , \\ y_3 = b_{31}z_1 + b_{32}z_2 , \end{cases}$$

则欲表示x_1, x_2与z_1, z_2的关系，将y_i的表达式带入第一个方程组便有：

$$\begin{cases} x_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})z_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})z_2 , \\ x_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})z_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})z_2 . \end{cases}$$

用矩阵乘法表示

令$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^T,\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^T,\boldsymbol{z}=(z_1,z_2)^T$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix},$$

那么，x,y,z之间的关系可以表示成： $\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}=B\boldsymbol{z}$

由矩阵的乘法将其带入得$\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{y}=A(B\boldsymbol{z})=AB\boldsymbol{z}=(AB)\boldsymbol{z}$

矩阵乘法的意义：从本质上讲，矩阵是一个线性变换（线性函数），矩阵乘法是一个复合

5. 矩阵的转置

设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}_{s\times n}$， 称矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{s1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{s2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}_{n\times s}$

为矩阵 A 的转置，记作 A^{T}．$(a_{ij}^T = a_{ji})$

例

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad A^T=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix} 18 & 6 \end{pmatrix}, \quad B^T=\begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

转置运算规律：

$$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$$

$$(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$$

$$(kA)^{\mathrm{T}} = kA^{\mathrm{T}}$$

$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$$

6、方阵的行列式（determinant）：记作det(A)或者$|A|$

性质：1、只有方阵才可以定义行列式

2、如果A是对角阵或者三角阵，$|A|$为对角线乘积. 比如$|I_n|$=1

3、$|kA_n| = k^n|A_n|$

4、AB和BA不一定相等，但是$|AB| = |BA| = |A||B|$

行列式的应用：克莱默（Cramer）法则

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

的系数行列式不等于零，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则线性方程组(1)有唯一解，$x_1=\dfrac{D_1}{D},x_2=\dfrac{D_2}{D},x_3=\dfrac{D_3}{D},\cdots,x_n=\dfrac{D_n}{D}$.

其中 D_j 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组右端的常数项

代替后所得到的 n 阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

雅可比（Jacobi）行列式:

在一元积分中对变量进行$x = u(t)$换元，可以得到

$$\int f(x)dx = \int f\big(u(t)\big)u'(t)dt$$

令$x_i = u_i(t_1, t_2, \dots, t_n)$，n元积分变换公式为：

$$\int f(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n = \int f(u_1(\boldsymbol{t}), \dots, u_n(\boldsymbol{t}))\left|\frac{\partial(x_1, x_2, \dots x_n)}{\partial(t_1, t_2, \dots t_n)}\right|dt_1 \dots dt_n$$

$$\left|\frac{\partial(x_1,x_2,\dots x_n)}{\partial(t_1,t_2,\dots t_n)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial t_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \frac{\partial x_n}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}$$

如果换元是一个线性换元，即存在n阶方阵A，使得$\mathbf{x}=A\mathbf{t}$，那么

$$\int f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n = \int f(u_1(\mathbf{t}),\dots,u_n(\mathbf{t}))\,|A|\,dt_1\dots dt_n$$

结论：当n元变量做线性变换时，行列式就是其微元倍数，即$d\boldsymbol{x} = |A|d\boldsymbol{t}$

7. 矩阵的逆A^{-1}

在数的运算中，当数$a \neq 0$时，有 $ax = b \Rightarrow x = a^{-1}b \left(x = \frac{b}{a} \right)$

$1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ 数字“1”称为乘法运算的单位元

$a \cdot a^{-1} = a^{-1}a = 1$ a^{-1}称为a关于单位元的逆元

在矩阵的乘法运算中，单位阵 I_n 是矩阵乘法运算的单位元，因为对于任何矩阵A，都有$AI_n = I_nA = A$。那么，对于矩阵 A ，如果存在一个矩阵 B ,使得

$$AB = BA = I_n \ .$$

此时，矩阵A关于矩阵乘法运算存在逆元B。

逆矩阵定义：设 A 为 n 阶方阵，如有 n 阶方阵 B ，使得

$$AB = BA = I_n .$$

则称 A 为可逆矩阵，B 为 A 的逆阵，记作 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

注：只要有$AB = I_n$，必然有$BA = I_n$

例：已知线性方程$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$,求$\mathbf{x}$　则$\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}$

例：已知矩阵$A.X.B$满足$AX=B$　则$X=A^{-1}B$

例：已知矩阵$A.X.B$满足$XA=B$　则$X=BA^{-1}$

逆矩阵的性质：

（1）$(A^{-1})^{-1} = A$

（2）$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1} \quad (k \neq 0)$

（3） A、B 均是同阶可逆阵，则$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

（4）转置和逆可交换，即$(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}$

8.矩阵的秩：R(A)(Rank(A))

矩阵的三个初等行（列）变换：

(1) 对换两行（列）的位置；

(2) 将常数 k ($k \neq 0$) 乘以某行（列）向量；

(3) 将某行（列）的元素乘上λ倍加到另一个行（列）上 .

注：经过初等变换之后，矩阵变了，但是其代表的线性系统没有变。

不 止 于 代 码

秩的定义：

教材定义1：对于任一矩阵 A，经过初等变换可以把它变成

$$A=\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

这里，r 是由 A 唯一决定的． 这个 r 称为矩阵的秩．

教材定义2：矩阵最高阶不为0的子式的阶数称为该矩阵的秩

秩的算法：仅用初等行(列)变换把矩阵A化称阶梯矩阵，阶梯矩阵中不为0向量的行(列)数为矩阵A的秩。

例：

$$A=\begin{pmatrix}3&2&0&5&0\\3&-2&3&6&-1\\2&0&1&5&-3\\1&6&-4&-1&4\end{pmatrix},\quad 求r(A)$$

$$A\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&6&-4&-1&4\\3&-2&3&6&-1\\2&0&1&5&-3\\3&2&0&5&0\end{pmatrix}\begin{matrix}(4)\\(2)\\(3)\\(1)\end{matrix}\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-3r_1\\r_3-2r_1}}\begin{pmatrix}1&6&-4&-1&4\\0&-20&15&9&-13\\0&-12&9&7&-11\\0&-16&12&8&-12\end{pmatrix}\begin{matrix}(4)\\(2)\\(3)\\(1)\end{matrix}$$

$$\xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_4]{r_3 \div(-4)} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \\ 0 & -20 & 15 & 9 & -13 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} (4) \\ (1) \\ (3) \\ (2) \end{array} \xrightarrow[r_4+5r_2]{r_3+3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (4) \\ (1) \\ (3) \\ (2) \end{array}$$

$$\xrightarrow{r_4+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (4) \\ (1) \\ (3) \\ (2) \end{array}.$$

阶梯矩阵：从上往下数，每一行从左到右第一个不为0的元素所在列严格递增。

由于A的阶梯矩阵前三行是非零向量，所以$r(A) = 3$

秩的本质：矩阵在其等价的线性变换（初等变化）中，本质（无法被消掉）的部分

例：$\begin{cases}2x+3y=1\\4x+6y=2\end{cases}$　　$A=\begin{pmatrix}2&3&1\\4&6&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&3&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

例：设$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\ldots+\cdots+\cdots+\cdots=\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$有解，令$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$

如果用行变换把系数矩阵 A 化成阶梯矩阵，意味着有m-r个方程可以被其余的方程消去，剩下的r个方程无法再被消除。也就是说该方程组本质上是r个方程的方程组

如果用列变换把系数矩阵 A 化成阶梯矩阵，意味着有m-r个变量可以被其余的变量消去，剩下的r个变量无法再被消除。也就是说该方程组本质上是r个变量的方程组

注：用行（列）变换得到的秩称为行（列）秩，行秩=列秩

秩的性质：

1、零矩阵的秩是0

2、*如果*$A_{m\times n}$,则$R(A) \le m$, $R(A) \le n$, $0 \le R(A) \le \min\{m, n\}$

3、$r(AB) \le min\{r(A), r(B)\}$

4、如果A可逆，那么$r(B) = r(AB)$

5、如果A是n阶方阵，$\mathrm{R}(A)=n \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$可逆

$\mathrm{R}(A) < n \Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow A$不可逆

9、矩阵的迹运算

定义:方阵A的对角线之和称为迹，记为$tr(A)$。即

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

迹运算的性质：

1、$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$， 矩阵的对角线之和（迹）等于其特征值之和

2、$tr(AB) = tr(BA)$

THANK YOU