

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Шурыгин В.В.

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ.

Лекции по курсу «Дифференциальная геометрия и топология».

Литература.

1. Норден А.П. Краткий курс дифференциальной геометрии. - М.: ГИФМЛ. - 1958. - 244 с.
2. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. - М.: Изд-во МГУ. - 1980. 440 с.
3. Малахальцев М.А., Фомин В.Е. Задачи и упражнения по курсу дифференциальной геометрии и топологии. Часть 2. Методическое пособие .-. Казань: Изд-во КГУ. - 2008. 56 с.

Дополнительная литература:

1. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. - М.: Наука. - 1979.
2. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. - М.: ГИТТЛ. - 1956.

Как найти файл с лекциями на сайте университета?

Надо последовательно пройти через следующие страницы:

Институты и факультеты,  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского,  
Структура,  
Кафедра геометрии,  
Состав кафедры,  
Шурыгин В.В.  
и найти указанный "файл".

# 1 Предмет дифференциальной геометрии

В курсе аналитической геометрии изучались прямые и плоскости, кривые и поверхности второго порядка. Такие объекты задаются уравнениями первой и второй степени в прямоугольных или аффинных системах координат.

В курсе дифференциальной геометрии изучаются кривые и поверхности, которые в прямоугольных или аффинных системах координат локально могут быть заданы соответственно параметрическими уравнениями

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \iff x^i = f^i(t), \quad i = 1, 2, 3,$$

и

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2) \iff x^i = f^i(u^1, u^2), \quad i = 1, 2, 3,$$

где  $f^i(t)$  и  $f^i(u^1, u^2)$  — дифференцируемые функции.

Если кривая  $\gamma$  задана уравнением  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , то значение производной функции

$$\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

при  $t = t_0$  представляет собой направляющий вектор прямой, касающейся кривой  $\gamma$  в точке  $M_0$  с радиус-вектором  $\mathbf{r}(t_0)$ .

Если поверхность  $\Phi$  задана уравнением  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$ , то значения частных производных

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}$$

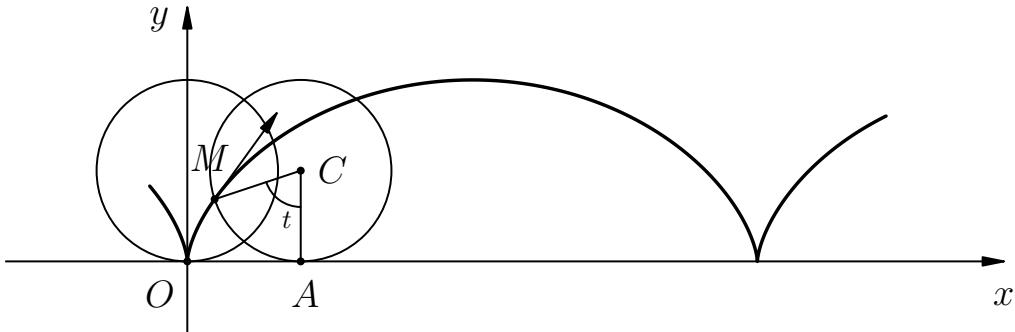
при  $u^1 = u_0^1, u^2 = u_0^2$  образуют базис в плоскости, касающейся поверхности  $\Phi$  в точке  $M_0$  с радиус-вектором  $\mathbf{r}(u_0^1, u_0^2)$ .

Рассмотрим примеры.

Траектория точки  $M$ , лежащей на окружности  $\omega$  радиуса  $R$ , катящейся без скольжения по данной прямой  $\ell$ , называется циклоидой.

Составим уравнения циклоиды.

Выберем ортонормированный репер  $\{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$  на плоскости следующим образом: за начало репера возьмем одно из положений точки  $M$ , когда она оказывается на прямой  $\ell$ , в качестве вектора  $\mathbf{i}$  возьмем единичный направляющий вектор прямой  $\ell$ , а вектор  $\mathbf{j}$  направим в ту сторону от прямой  $\ell$ , где расположена окружность. Пусть  $C$  — центр окружности в фиксированный момент времени,  $A$  — точка касания  $\omega$  и  $\ell$ , а  $t = \angle ACM$ .



Циклоида.

Тогда:

$$\mathbf{r}_M = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}, \quad |\overrightarrow{OA}| = |\curvearrowright AM| = Rt$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{OA} = Rt \mathbf{i}, \quad \overrightarrow{AC} = R \mathbf{j}, \quad \overrightarrow{CM} = R \mathbf{e} \left( \frac{3\pi}{2} - t \right).$$

Поэтому

$$\mathbf{r}_M = Rt \mathbf{i} + R \mathbf{j} + R \mathbf{e} \left( \frac{3\pi}{2} - t \right) = (Rt - R \sin t) \mathbf{i} + (R - R \cos t) \mathbf{j}.$$

Таким образом, циклоида задается уравнениями

$$x = Rt - R \sin t, \quad R - R \cos t,$$

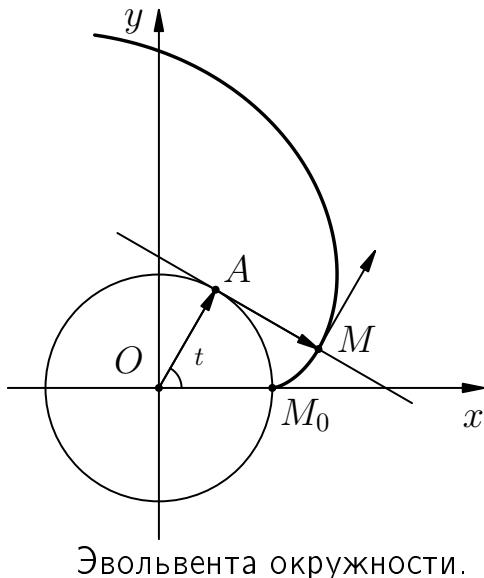
и направляющий вектор касательной к циклоиде имеет координаты

$$x'(t) = R - R \cos t, \quad y'(t) = R \sin t.$$

Эвольвентой (разверткой) окружности  $\omega$  называется траектория, описываемая точкой  $M$ , лежащей на прямой  $\ell$ , которая катится без скольжения по окружности  $\omega$ .

Составим уравнение эвольвенты окружности  $\omega$ , заданной уравнением  $x^2 + y^2 = R^2$ , принимая за начальное положение прямой  $\ell$  прямую  $x = R$ , а за начальное положение точки  $M$  точку  $M_0(R; 0)$ .

Пусть  $A$  — точка касания  $\omega$  и  $\ell$  в некоторый момент времени, а  $t = \angle M_0 O A$ .



Эвольвента окружности.

Имеем:  $\overrightarrow{OA} = R \mathbf{e}(t)$ , а  $|\overrightarrow{AM}| = |\curvearrowleft AM_0| = Rt$ . Поэтому  $\overrightarrow{AM} = Rt \mathbf{e}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$ . Таким образом,

$$\mathbf{r}_M = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = R \mathbf{e}(t) + Rt \mathbf{e}\left(t - \frac{\pi}{2}\right),$$

и траектория, описываемая точкой  $M$ , имеет следующие уравнения:

$$x = R(\cos t + t \sin t), \quad y = R(\sin t - t \cos t).$$

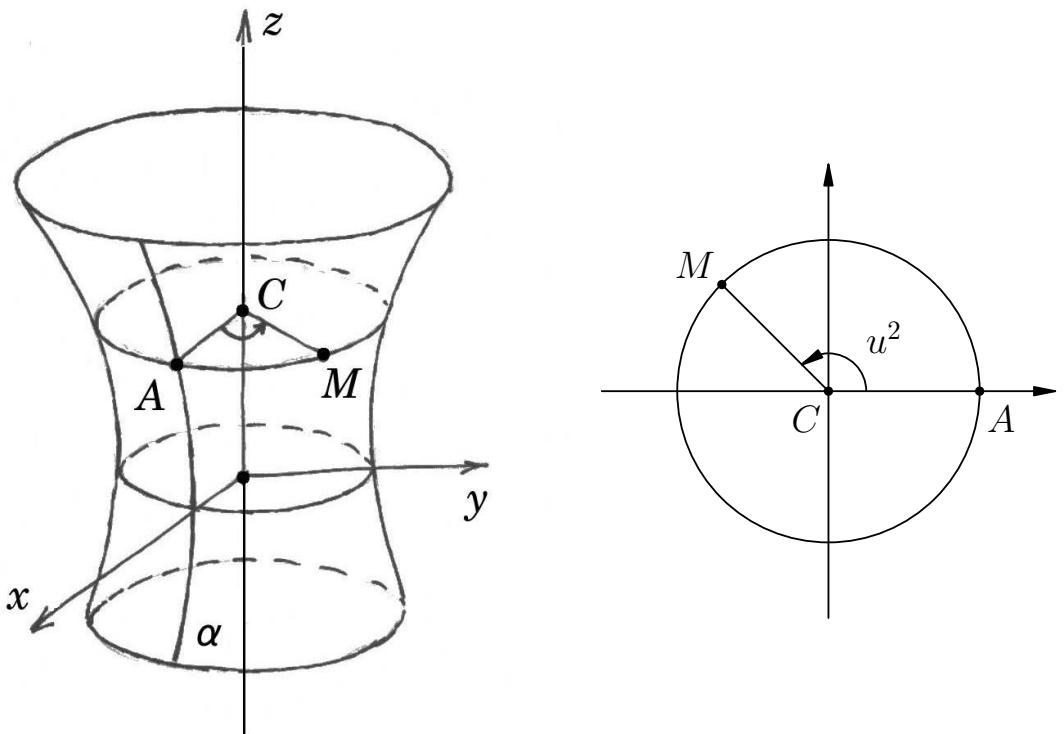
Направляющий вектор касательной к эвольвенте окружности имеет координаты

$$x'(t) = Rt \cos t, \quad y'(t) = Rt \sin t.$$

### Примеры поверхностей.

*Поверхностью вращения* в евклидовом пространстве  $\mathcal{E}_3$  называется поверхность, описываемая линией  $\alpha$ , расположенной в плоскости  $\pi$ , при вращении плоскости  $\pi$  вокруг прямой  $\ell$ , принадлежащей этой же плоскости.

Прямая  $\ell$  называется *осью* поверхности вращения. При вращении линии  $\alpha$  вокруг оси  $\ell$  каждая точка  $A$  этой линии описывает окружность  $\omega = \omega(A)$  с центром  $C = C(A) \in \ell$ , расположенную в плоскости  $\sigma = \sigma(A)$ , перпендикулярной оси  $\ell$ . Окружности  $\omega(A)$ ,  $A \in \alpha$ , называются *параллелями* поверхности вращения, а линии  $\alpha(u^2)$ , получающиеся поворотом кривой  $\alpha$  на угол  $u^2$ , называются *меридианами* поверхности вращения.



Поверхность вращения.

Для составления уравнений поверхности вращения выберем систему координат  $Oxyz$  в  $\mathcal{E}_3$ , определяемую правым ортонормированным репером  $\{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ , в которой прямая  $\ell$  совпадает с осью  $Oz$ , а плоскость  $\pi$  совпадает с плоскостью  $Oxz$ . Пусть кривая  $\alpha$  задана параметрическими уравнениями

$$x = f(u^1), \quad y = 0, \quad z = g(u^1) \iff \mathbf{r} = f(u^1)\mathbf{i} + g(u^1)\mathbf{k}.$$

Произвольная точка  $M$  поверхности вращения получается из некоторой точки  $A$  линии  $\alpha$  поворотом на угол  $u^2$  вокруг точки  $C = C(A)$  в плоскости  $\sigma = \sigma(A)$ , перпендикулярной оси  $\ell$ . Поскольку

$$\mathbf{r}_M = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}, \quad \mathbf{r}_A = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{OC} = g(u^1)\mathbf{k},$$

а вектор  $\overrightarrow{CM}$  получается из вектора  $\overrightarrow{CA} = f(u^1)\mathbf{i}$  поворотом на угол  $u^2$  в

ориентированной евклидовой векторной плоскости  $\mathcal{L}(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  и, следовательно, имеет вид

$$\overrightarrow{CM} = f(u^1) \cos(u^2)\mathbf{i} + f(u^1) \sin(u^2)\mathbf{j},$$

то

$$\mathbf{r}_M = f(u^1) \cos(u^2)\mathbf{i} + f(u^1) \sin(u^2)\mathbf{j} + g(u^1)\mathbf{k}.$$

Отсюда следует, что рассматриваемая поверхность вращения имеет следующие параметрические уравнения:

$$x = f(u^1) \cos(u^2), \quad y = f(u^1) \sin(u^2), \quad z = g(u^1).$$

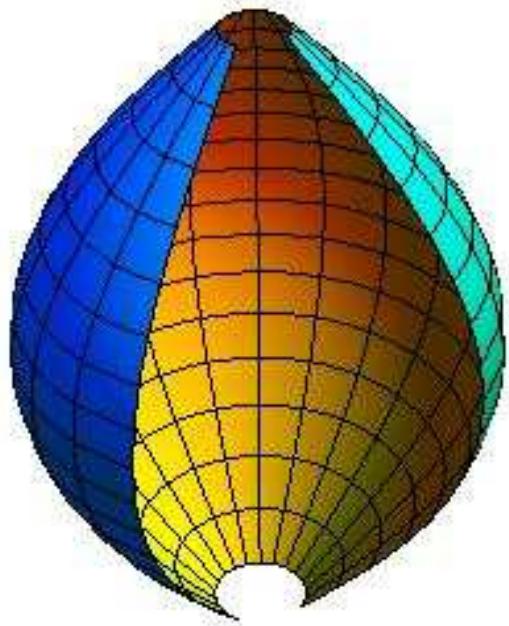
В частности, за параметр  $u^1$  можно брать координату  $z$ . В этом случае кривая  $\alpha$  имеет уравнение  $x = f(z)$ , а поверхность вращения имеет уравнения

$$x = f(u^1) \cos(u^2), \quad y = f(u^1) \sin(u^2), \quad z = u^1.$$

Рассмотрим в качестве примера поверхность, получаемую вращением синусоиды  $x = \sin z$ , лежащей в плоскости  $Oxz$ , вокруг оси  $Oz$ .

В системе компьютерной алгебры Mathematica, эту поверхность можно построить, используя команду

```
RevolutionPlot3D[{Sin[z], z}, {z, 0.2, 3.0}, {thet, 0, 3 [Pi]/2}, Axes -> False,
Boxed -> False, PlotStyle -> FaceForm[Yellow, Cyan]]
```

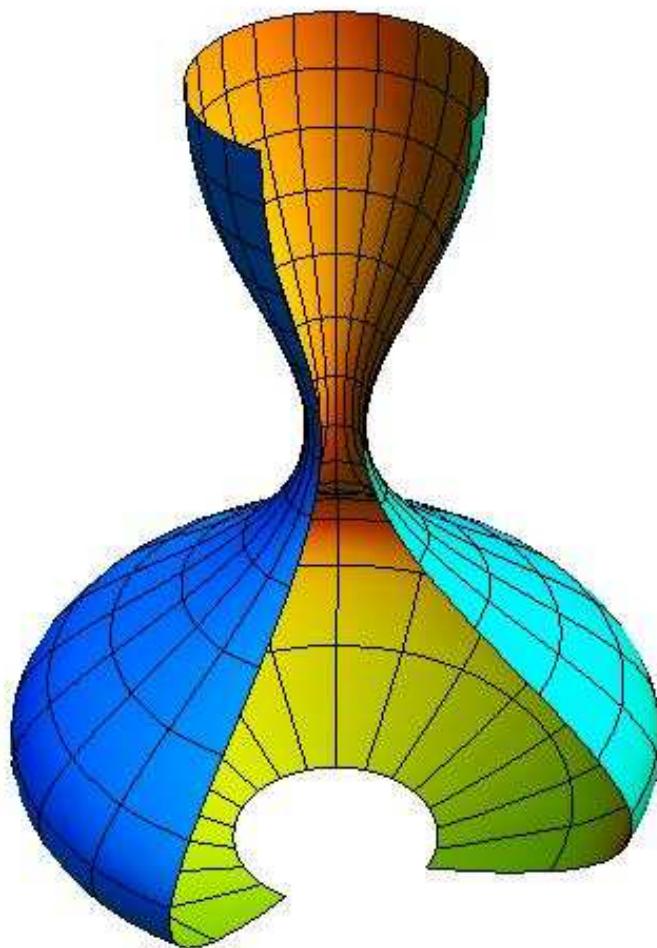


Построение другой поверхности вращения, меридиан которой имеет уравнения

$$x = 0.3 + e^{-z} \sin z,$$

осуществляется аналогичной командой

```
RevolutionPlot3D[{0.3 + Exp[-z] Sin[3 z], z}, {z, 0, 2.5}, {theta, 0, 3 [Pi]/2},  
Axes -> False, Boxed -> False, PlotStyle -> FaceForm[Yellow, Cyan]]
```



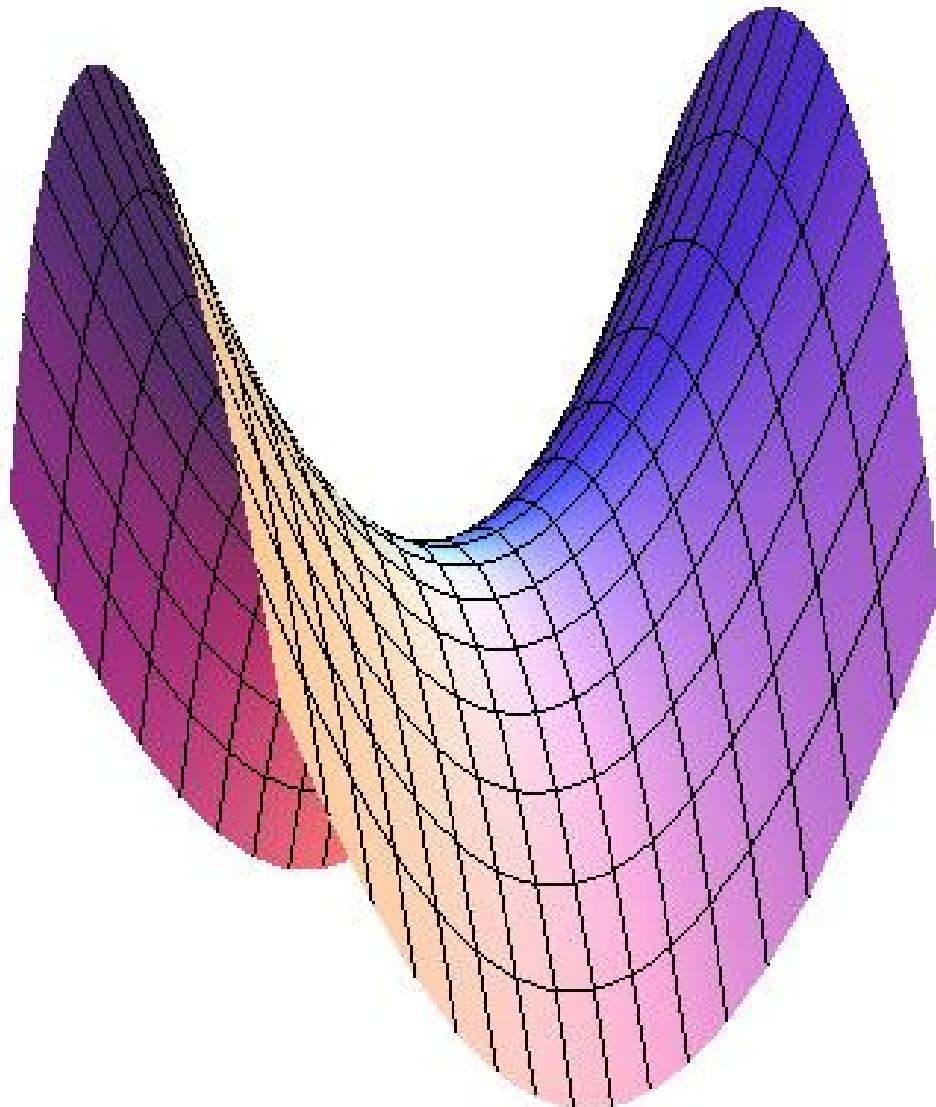
Гиперболический параболоид в канонической системе координат имеет уравнения

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}.$$

Его построение осуществляется командой (при  $p = q = \frac{1}{2}$ )

```
ParametricPlot3D[{u, v, u^2 - v^2}, {u, -1.5, 1.5}, {v, -1.5, 1.5}, ViewPoint ->
```

```
{1, 3, 1}, PlotPoints -> {20, 20}, Axes -> None, Boxed -> False, AspectRatio  
-> 1.2]
```



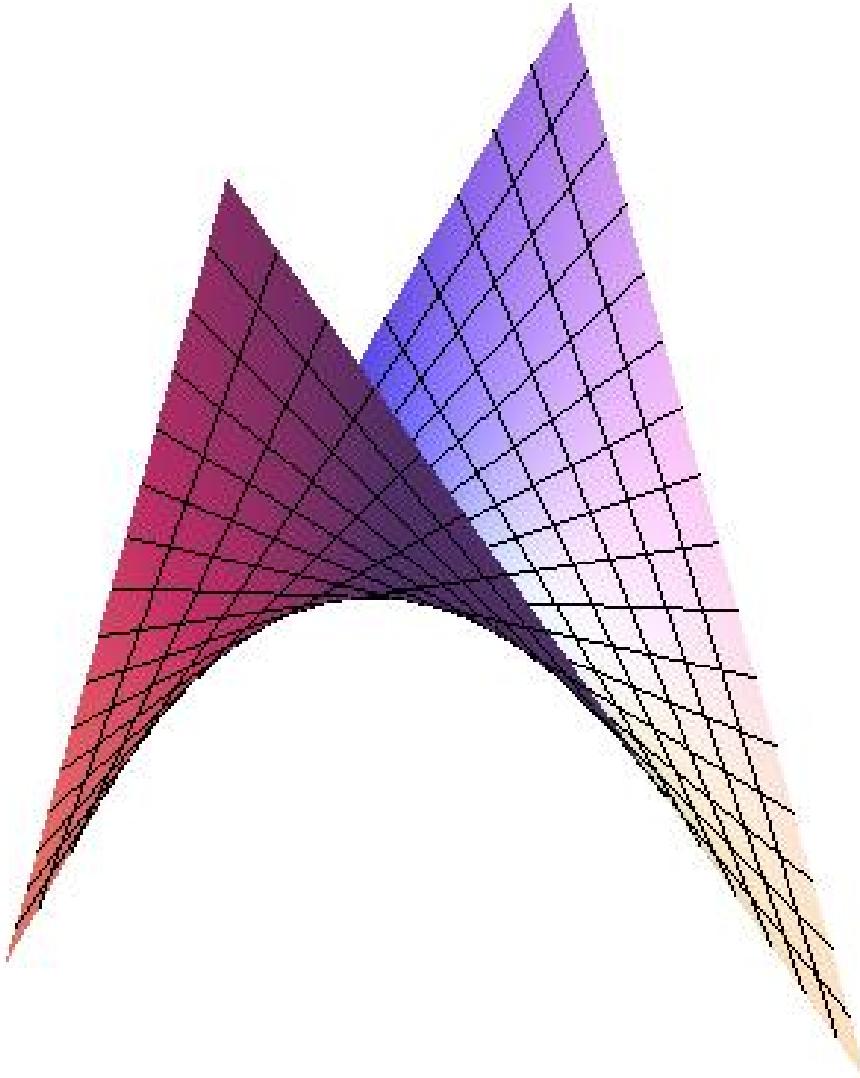
Параболоиды являются поверхностями переноса. Линии на рисунке гиперболического параболоида представляют собой два семейства параллельно переносящихся парабол с уравнениями  $x = const$  и  $y = const$ .

В другой системе координат гиперболический параболоид может быть за-

дан уравнениями

$$z = xy.$$

В этом случае уравнения  $x = const$  и  $y = const$  являются уравнениями прямолинейных образующих.

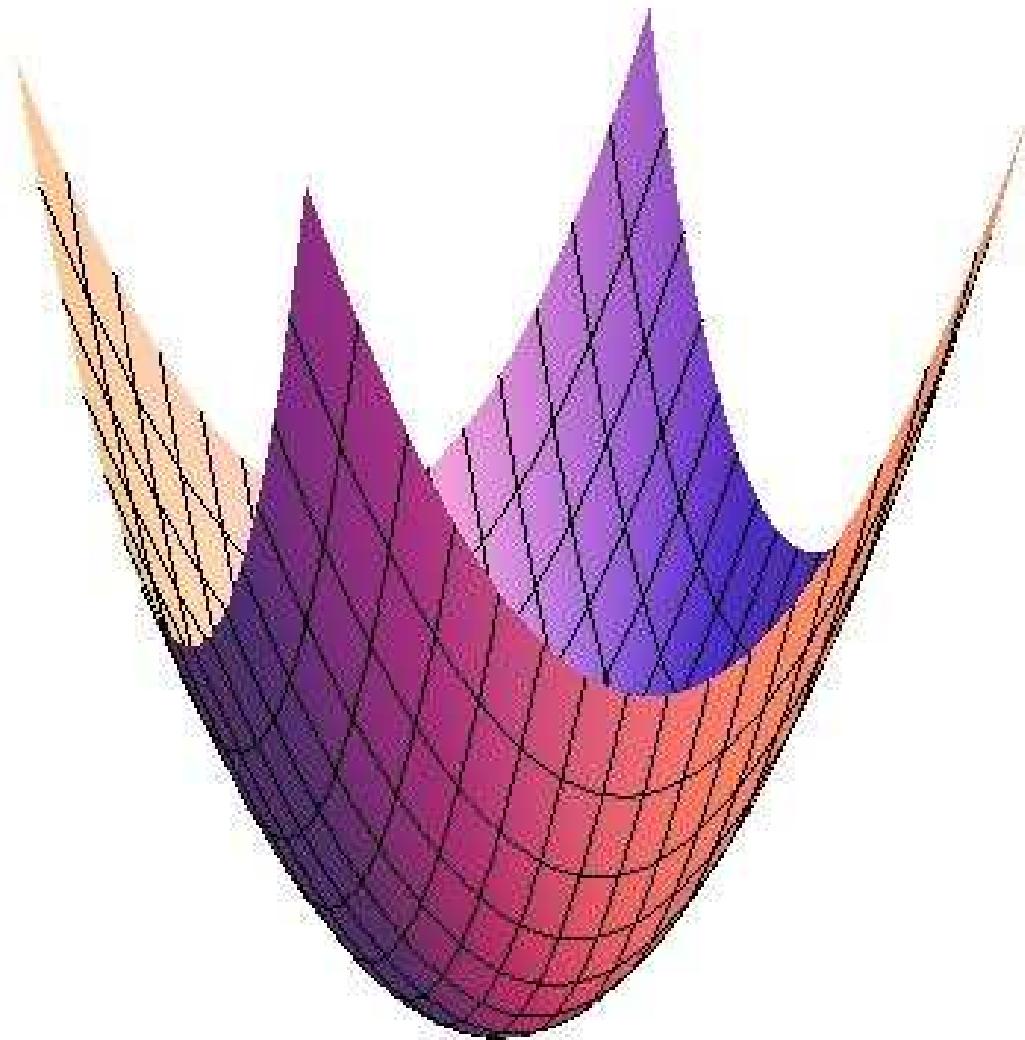


На следующем рисунке изображен эллиптический параболоид с уравнением

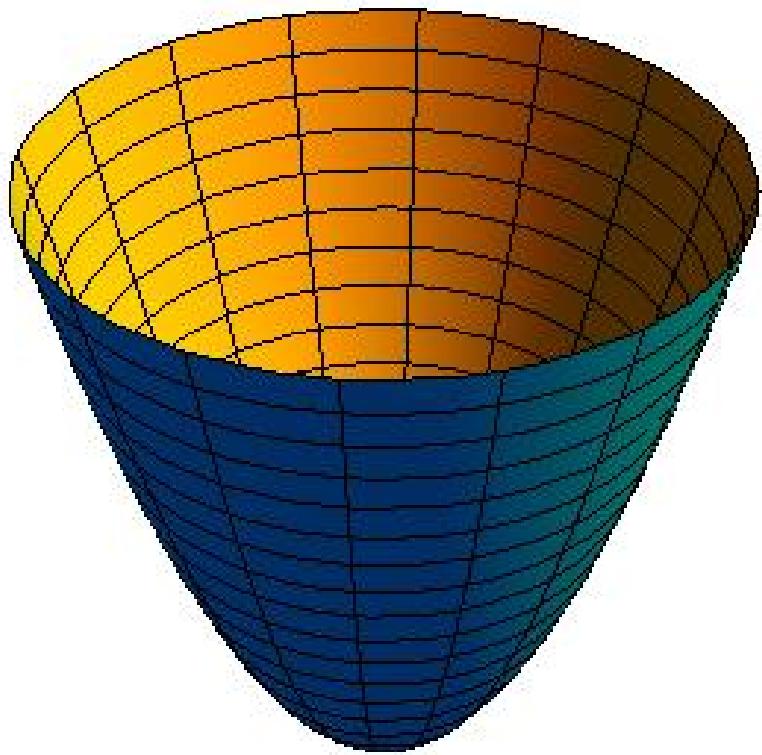
$$z = x^2 + y^2.$$

Линии на рисунке этого параболоида также представляют собой семейства

параллельно переносящихся парабол с уравнениями  $x = const$  и  $y = const$ .



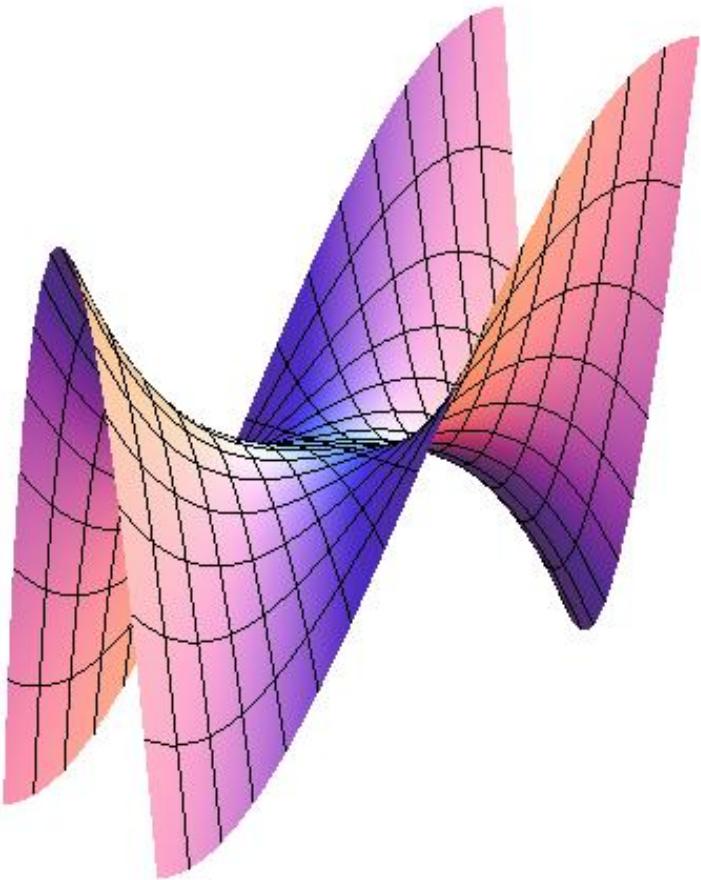
Эллиптический параболоид вращения может быть также получен, например, вращением параболы  $z = x^2$  вокруг оси  $Oz$ . Соответствующий рисунок имеет вид



Поверхность третьего порядка, имеющая уравнение

$$z = x^3 - xy^2,$$

называется обезьяньим седлом. Рисунок этой поверхности имеет вид



## 2 Дифференцируемые отображения

Предметом изучения в настоящем курсе дифференциальной геометрии являются объекты на евклидовой плоскости  $\mathcal{E}_2$  и в евклидовом пространстве  $\mathcal{E}_3$ , которые определяются дифференцируемыми отображениями. Поэтому необходимо определить понятие дифференцируемого отображения. Для этого понадобятся такие понятия как непрерывное отображение, предел, открытое множество и некоторые другие. При этом удобно рассматривать евклидовые пространства произвольной размерности, поскольку многие определения и формулы не зависят от размерности, а, кроме того, многие результаты легко обобщаются на случай многомерных евклидовых пространств.

## Евклидовы пространства.

Напомним определения евклидовых векторного и аффинного пространств.

**Определение.** Евклидовым векторным пространством размерности  $n$  называется пара  $(\mathbf{E}_n, g)$ , состоящая из  $n$ -мерного векторного пространства  $\mathbf{E}_n$  и симметричной билинейной формы

$$g : \mathbf{E}_n \times \mathbf{E}_n \rightarrow \mathbf{R},$$

такой что ассоциированная квадратичная форма

$$\mathbf{E}_n \ni \mathbf{a} \longmapsto g(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \in \mathbf{R}$$

положительно определена, то есть

1°.  $g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = g(\mathbf{b}, \mathbf{a})$  при любых  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{E}_n$  (симметричность  $g$ ).

2°.  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0} \implies g(\mathbf{a}, \mathbf{a}) > 0$  (положительная определенность  $g$ ).

Значение  $g(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  отображения  $g$  на векторах  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  называется скалярным произведением этих векторов и обозначается

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Если  $\{\mathbf{e}_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , — базис в евклидовом векторном пространстве  $\mathbf{E}_n$ , то скалярное произведение векторов  $\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{b} = b^j \mathbf{e}_j$  вычисляется по формулам

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a^i \mathbf{e}_i, b^j \mathbf{e}_j) = a^i b^j (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = g_{ij} a^i b^j, \quad (1)$$

где

$$g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  евклидова векторного пространства  $\mathbf{E}_n$  называются (взаимно) ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю:  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ .

Ортогональность векторов обозначается следующим образом:  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ . Вектор  $\mathbf{a} \in \mathbf{E}_n$ , скалярный квадрат которого равен единице, то есть такой, что  $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 1$ , называется *единичным*. Базис  $\{\mathbf{e}_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , в  $\mathbf{E}_n$  называется *ортонормированным*, если входящие в него векторы  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  являются единичными и взаимно ортогональными. Это эквивалентно тому, что матрица  $(g_{ij})$ , составленная из скалярных произведений векторов базиса  $g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$  является единичной:

$$g_{ij} = \delta_{ij},$$

где  $\delta_{ij}$  — так называемые символы Кронекера:  $\delta_{ij} = 0$ , если  $i \neq j$ , и  $\delta_{ij} = 1$ , если  $i = j$ .

В ортонормированном базисе скалярное произведение вычисляется по формуле

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a^1 b^1 + a^2 b^2 + \dots + a^n b^n. \quad (2)$$

На евклидовой плоскости формула (2) принимает вид

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a^1 b^1 + a^2 b^2,$$

а в трехмерном евклидовом пространстве вид

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3.$$

В евклидовом векторном пространстве определена мера угла  $\varphi$  между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  формулой

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}.$$

Примером  $n$ -мерного евклидова векторного пространства служит векторное пространство  $\mathbf{R}^n$ , элементами которого являются строки (столбцы)

$$\{a^1, a^2, \dots, a^n\}$$

длины  $n$ , составленные из вещественных чисел, со «стандартным» скалярным произведением

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a^1 b^1 + a^2 b^2 + \dots + a^n b^n.$$

Последняя формула совпадает с формулой (2). Это означает, что выбор ортонормированного базиса  $\{\mathbf{e}_i\}$  в евклидовом векторном пространстве  $\mathbf{E}^n$  задает изоморфизм

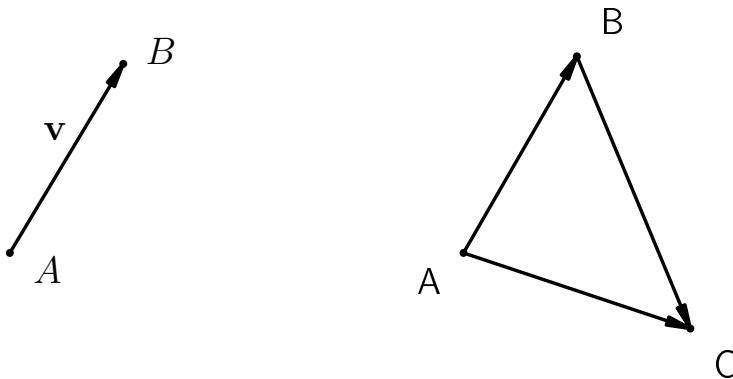
$$a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + \dots + a^n \mathbf{e}_n \longmapsto \{a^1, a^2, \dots, a^n\}$$

этого пространства на стандартное евклидово пространство  $\mathbf{R}^n$ .

**Определение.** Аффинным пространством называется тройка  $(\mathcal{A}, \mathbf{V}, \psi)$ , состоящая из некоторого множества  $\mathcal{A}$ , элементы которого называются точками, векторного пространства  $\mathbf{V}$  и отображения  $\psi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{V}$ , относящего упорядоченную пару точек  $\{A, B\}$  множества  $\mathcal{A}$  некоторый вектор из  $\mathbf{V}$ , обозначаемый  $\overrightarrow{AB}$ , такого что выполняются следующие две аксиомы:

1° Для любых  $A \in \mathcal{A}$  и  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  существует единственная точка  $B$ , такая что  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$ .

2°  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$  для любых  $A, B, C \in \mathcal{A}$  (равенство треугольника).



Аффинное пространство обычно обозначается одним символом  $\mathcal{A}$ . Векторное пространство  $\mathbf{V}$  называется *ассоциированным* с аффинным пространством  $\mathcal{A}$ .

*Размерностью*  $\dim \mathcal{A}$  аффинного пространства  $\mathcal{A}$  называется размерность ассоциированного векторного пространства  $\mathbf{V}$ . Аффинное пространство размерности  $n$  обозначается следующим образом:  $\mathcal{A}_n$ .

Система координат в аффинном пространстве задается репером  $\{O; \mathbf{e}_i\}$ , состоящим из точки  $O \in \mathcal{A}_n$  и базиса  $\{\mathbf{e}_i\}$  ассоциированного векторного пространства  $\mathbf{V}_n$ . Координатами точки  $M \in \mathcal{A}_n$  относительно репера  $\{O; \mathbf{e}_i\}$  называются координаты вектора  $\mathbf{r}_M = \overrightarrow{OM}$ , называемого радиус-вектором точки  $M$ , относительно базиса  $\{\mathbf{e}_i\}$ :

$$M \longmapsto (x^i) = (x^1, x^2, \dots, x^n), \quad \text{где} \quad \mathbf{r}_M = x^i \mathbf{e}_i = x^1 \mathbf{e}_1 + \dots + x^n \mathbf{e}_n.$$

*Евклидовым аффинным пространством размерности  $n$*  называется аффинное пространство  $(\mathcal{E}_n, \mathbf{E}_n, \psi)$ , ассоциированное с  $n$ -мерным евклидовым векторным пространством  $\mathbf{E}_n$ .

Репер  $\{O; \mathbf{e}_i\}$  в евклидовом аффинном пространстве  $\mathcal{E}_n$  называется ортонормированным, если базис  $\{\mathbf{e}_i\}$  ассоциированного евклидова векторного пространства является ортонормированным.

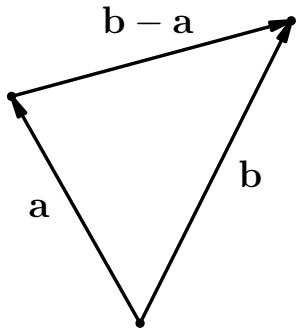
Для обозначения евклидовых пространств  $(\mathbf{E}_n, g)$  и  $(\mathcal{E}_n, \mathbf{E}_n, \psi)$  используются, для краткости, только символы  $\mathbf{E}_n$  и  $\mathcal{E}_n$  соответственно.

В евклидовом аффинном пространстве  $\mathcal{E}_n$  определено расстояние между любыми двумя его точками  $A$  и  $B$ :

$$\text{dist}(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$$

Поскольку всякое векторное пространство является одновременно и аффинным пространством (несет на себе каноническую структуру аффинного пространства), в котором вектором с началом в точке  $\mathbf{a}$  и концом в точке  $\mathbf{b}$  является вектор разности  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ , то определяется и расстояние между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$

$$\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|.$$



Аффинное пространство  $\mathbf{R}^n$ , ассоциированное с евклидовым векторным пространством  $\mathbf{R}^n$ , является примером  $n$ -мерного евклидова аффинного пространства. В этом пространстве расстояние между точками (или векторами)  $(a^i) = (a^1, a^2, \dots, a^n)$  и  $(b^i) = (b^1, b^2, \dots, b^n)$  определяется формулой

$$\text{dist}((a^i), (b^i)) = \sqrt{(b^1 - a^1)^2 + (b^2 - a^2)^2 + \dots + (b^n - a^n)^2}. \quad (3)$$

По этой же формуле (3) находится и расстояние между точками в евклидовом пространстве  $\mathcal{E}_n$ , заданными координатами в ортонормированном репере (прямоугольной системе координат).

## **Топология в евклидовом пространстве $\mathcal{E}_n$ .**

Понятие непрерывности отображения является более общим понятием в сравнении с дифференцируемостью. Дифференцируемость отображения уже предполагает его непрерывность. Говорить же о непрерывности отображения  $f : X \rightarrow Y$  можно только в том случае, когда множества  $X$  и  $Y$ , участвующие в этом отображении, наделены некоторой структурой. Эта структура называется топологией. Множество, наделенное топологией, называется топологическим пространством, а отображения  $f : X \rightarrow Y$  между топологическими пространствами, согласованные с их топологиями, называются непрерывными.

Раздел математики, в котором изучаются топологические пространства и непрерывные отображения, также называется топологией. Таким образом, слово «топология» имеет два смысла: раздел математики и структура на множестве.

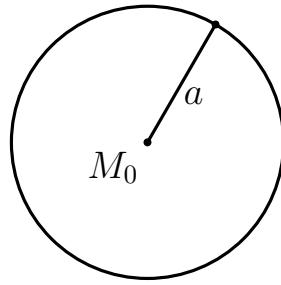
В общем виде топологические пространства и непрерывные отображения будут изучаться позже. В настоящем разделе формулируются некоторые необходимые определения, которые будут регулярно использоваться при изучении кривых и поверхностей в евклидовом пространстве. К формулировке общих топологических понятий удобно подойти, рассматривая их функционирование в евклидовых пространствах, представляющих частный случай топологических пространств.

Для евклидовых пространств понятие непрерывного отображения вводится следующим образом. Прежде всего определяется понятие *открытого шара*

радиуса  $a$  с центром в точке  $M_0$  как множества

$$B(M_0, a) = \{M \in \mathcal{E}_n \mid \text{dist}(M_0, M) < a\}, \quad (4)$$

состоящего из всех точек, удаленных от точки  $M_0$  на расстояние меньшее  $a$ .



В прямоугольной системе координат шар (4) задается неравенством

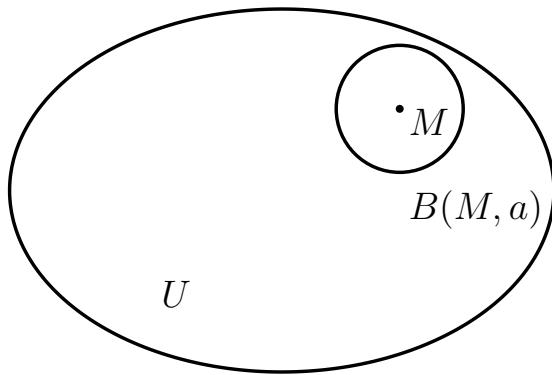
$$(x^1 - x_0^1)^2 + (x^2 - x_0^2)^2 + \dots + (x^n - x_0^n)^2 < a^2.$$

На евклидовой прямой  $\mathbf{R} = \mathbf{R}^1$  открытый шар радиуса  $a$  с центром в точке  $M_0$  с координатой  $x_0$  представляет собой открытый отрезок (интервал)

$$\{x \in \mathbf{R} : |x - x_0| < a\} = \{x \in \mathbf{R} : x_0 - a < x < x_0 + a\}.$$

Радиус открытого шара может быть как угодно мал: меньше любого наперед заданного положительного числа. Используя этот факт, можно определить *открытые подмножества* в  $\mathcal{E}_n$ .

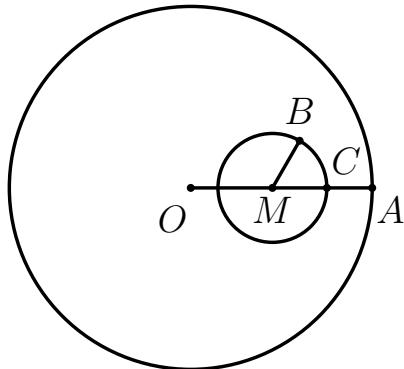
**Определение.** Подмножество  $U \subset \mathcal{E}_n$  называется *открытым*, если для любой точки  $M \in U$  найдется открытый шар  $B(M, a)$  с центром в этой точке, целиком принадлежащий подмножеству  $U$ .



Таким образом, открытое подмножество «окружает» каждую свою точку.

От каждой точки открытого подмножества  $U$  можно продвинуться в любом направлении, оставаясь в пределах подмножества  $U$ .

**Задача.** Доказать, что всякий открытый шар является открытым множеством.



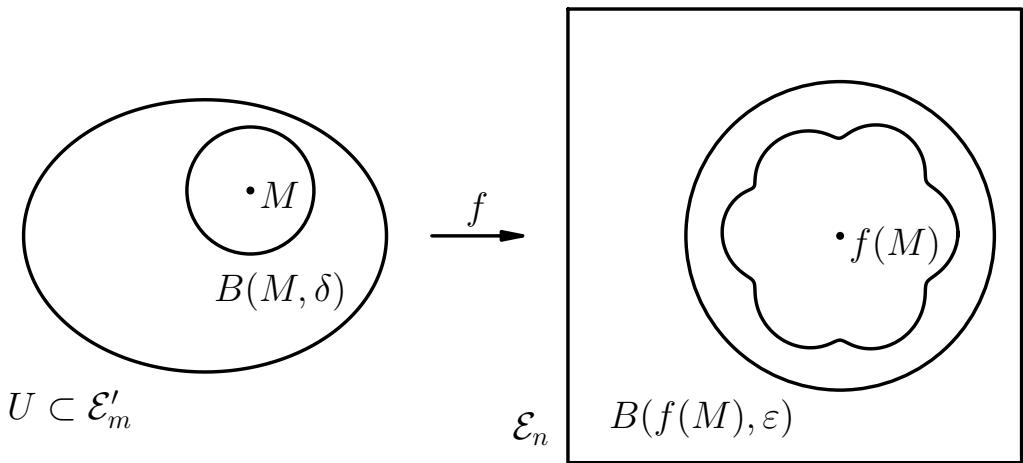
**Определение.** Пусть  $U \subset \mathcal{E}'_m$  — открытое подмножество и  $M \in U$ . Отображение

$$f : U \rightarrow \mathcal{E}_n$$

называется *непрерывным* в точке  $M \in U$ , если для любого открытого шара  $B(f(M), a) \subset \mathcal{E}_n$  с центром в образе  $f(M)$  этой точки найдется открытый шар  $B(M, b) \subset U$ , образ которого при отображении  $f$  содержится в шаре  $B(f(M), a)$ .

Часто в этом контексте радиус шара  $B(f(M), a)$  обозначают буквой  $\varepsilon$ , а радиус шара  $B(M, b) \subset U$  буквой  $\delta$ , говоря, что «для как угодно малого»  $\varepsilon$  найдется «настолько малое»  $\delta$ , что

$$f(B(M, \delta)) \subset B(f(M), \varepsilon).$$



Волнистой линией на рисунке ограничена область  $f(B(M, \delta))$ .

**Определение.** Пусть  $U \subset \mathcal{E}'_m$  — открытое подмножество. Отображение

$$f : U \rightarrow \mathcal{E}_n$$

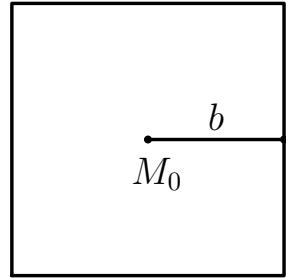
называется *непрерывным* (на всем множестве  $U$ ), если оно непрерывно в каждой точке  $M \in U$ .

Условие близости точек евклидовых пространств  $\mathcal{E}'_m$  и  $\mathcal{E}_n$  к точкам  $M \in U$  и  $f(M) \in \mathcal{E}_n$  в определении непрерывности отображения состояло в их при-

надлежности открытым шарам  $B(M, b)$  и  $B(f(M), a)$  соответственно. Однако близость точек евклидова пространства к некоторой точке  $A$  может быть выражена и требованием их принадлежности некоторому открытому кубу с центром в точке  $A$ .

Пусть  $\{O; \mathbf{e}_i\}$  — ортонормированный репер в  $\mathcal{E}_n$ . Открытым кубом с центром в точке  $M_0(x_0^i)$  и ребрами, параллельными векторам репера и имеющими длину  $2b$ , будем называть следующее подмножество в  $\mathcal{E}_n$ :

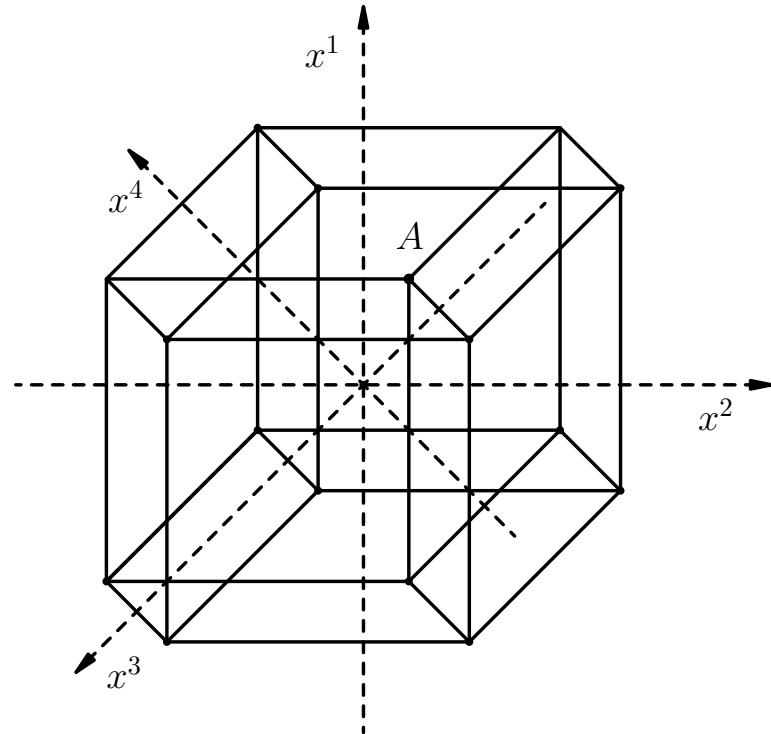
$$C(M_0, 2b) = \{M(x^i) \in \mathcal{E}_n : |x^i - x_0^i| < b\}. \quad (5)$$



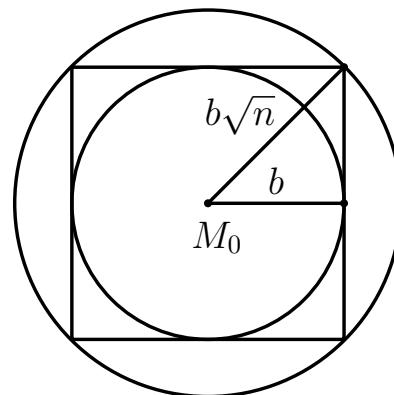
Расстояние от точки  $M(x^i) \in C(M_0, 2b)$  до точки  $M_0(x_0^i)$  равно

$$|\overrightarrow{M_0M}| = \sqrt{(x^1 - x_0^1)^2 + (x^2 - x_0^2)^2 + \dots + (x^n - x_0^n)^2} < \sqrt{nb^2} = b\sqrt{n}. \quad (6)$$

На расстояние  $b\sqrt{n}$  от центра удалены вершины куба (например, вершина  $A(x_A^i = b)$  на рисунке ниже), но вершины куба, как и его грани, не принадлежат открытому кубу.



Из неравенства (6) следует, что куб  $C(M_0, 2b)$  содержитя в шаре  $B(M_0, b\sqrt{n})$ . Кроме того, очевидно, что шар  $B(M_0, b)$  содержитя в кубе  $C(M_0, 2b)$ .



Отсюда следует, что если в определениях открытых множеств в  $\mathcal{E}_n$  и непрерывных отображений из  $U \subset \mathcal{E}_m$  в  $\mathcal{E}_n$  открытые шары заменить на открытые кубы,

то получатся эквивалентные определения (то есть, например, множество, являющееся открытым в смысле определения, использующего открытые шары, будет открытым и в смысле определения, использующего открытые кубы, и наоборот).

**Задача.** Доказать эти утверждения.

**Задача.** Доказать, что объединение

$$\bigcup_{\alpha} W_{\alpha}$$

любого семейства открытых множеств является открытым множеством.

**Задача.** Доказать, что пересечение

$$\bigcap_{i=1}^k W_i$$

конечного числа открытых множеств является открытым множеством.

**Задача.** Привести пример, когда пересечение

$$\bigcap_{\alpha \in A} W_{\alpha}$$

бесконечного числа открытых множеств не является открытым множеством.

**Задача.** Пусть  $U$  — открытое множество в  $\mathcal{E}'_m$ .

- a) Доказать, что отображение  $f : U \rightarrow \mathcal{E}_n$  является непрерывным тогда и только тогда, когда прообраз  $f^{-1}(B(M_0, b))$  всякого открытого шара  $B(M_0, b) \subset \mathcal{E}_n$  является открытым или пустым подмножеством в  $U$ .
- b) Доказать, что отображение  $f : U \rightarrow \mathcal{E}_n$  является непрерывным тогда и только тогда, когда прообраз  $f^{-1}(W)$  любого открытого подмножества  $W \subset \mathcal{E}_n$  является открытым или пустым подмножеством в  $U$ .

**Задача.** Пусть  $U \subset \mathcal{E}'_m$  и  $W \subset \mathcal{E}_n$  — открытые подмножества в евклидовых пространствах и  $\mathcal{E}''_p$  — третье евклидово пространство. Доказать, что композиция  $g \circ f$  непрерывных отображений  $f : U \rightarrow W \subset \mathcal{E}_n$  и  $g : W \rightarrow \mathcal{E}''_p$  является непрерывным отображением.

### Топологическое пространство.

Для того, чтобы понятие непрерывности могло быть обобщено на случай отображения  $f : X \rightarrow Y$  между некоторыми двумя множествами  $X$  и  $Y$ , необходимо иметь аналоги открытых подмножеств в  $X$  и  $Y$ .

**Определение.** Топологией на множестве  $X$  называется семейство  $\tau$  его подмножеств, которое удовлетворяет следующим трем условиям:

1.  $\emptyset$  и  $X$  принадлежат  $\tau$ .
2. Если  $U \in \tau$  и  $V \in \tau$ , то  $U \cap V \in \tau$ .
3. Для любого семейства  $\{U_\alpha \in \tau\}$ ,  $\alpha \in A$ , подмножеств из  $\tau$  их объединение также принадлежит  $\tau$ :  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$ .

Если перечисленные три условия выполнены, то пара  $(X, \tau)$  называется топологическим пространством, а подмножества из  $\tau$  называются открытыми подмножествами в  $(X, \tau)$ .

Если не возникает недоразумения, топологическое пространство  $(X, \tau)$  обозначается одним символом  $X$ , при этом для обозначения топологии пространства  $X$  используется символ  $\tau_X$ .

Открытые подмножества топологического пространства принято называть просто *открытыми множествами*.

Методом математической индукции доказывается следующее следствие из

свойства 2.

2. Пересечение  $\bigcap_{i=1}^k U_i$  любого конечного семейства открытых множеств  $\{U_i \in \tau_X\}$ ,  $i = 1, 2 \dots, k$ , является открытым множеством.

**Определение.** Если  $X$  и  $Y$  — два топологических пространства, то отображение  $f : X \rightarrow Y$  называется непрерывным, если прообраз  $f^{-1}(U)$  всякого открытого множества  $U$  пространства  $Y$  является открытым множеством в  $X$ , то есть

$$U \in \tau_Y \Rightarrow f^{-1}(U) \in \tau_X$$

Взаимнооднозначное отображение (биекция)  $f : X \rightarrow Y$ , такое что и  $f$  и  $f^{-1}$  являются непрерывными отображениями, называется гомеоморфизмом. При этом пространства  $X$  и  $Y$  называются гомеоморфными. Гомеоморфность пространств  $X$  и  $Y$  обозначается следующим образом:

$$X \cong Y.$$

Например, гомеоморфны евклидовы пространства одной размерности и, в частности,  $\mathcal{E}_n \cong \mathbf{R}^n$ .

Гомеоморфные топологические пространства эквивалентны как топологические пространства. При изучении свойств топологического пространства  $(X, \tau)$  его можно заменить на любое гомеоморфное ему пространство.

Примерами топологических пространств служат евклидовы аффинные пространства  $\mathcal{E}_n$ . Большое количество примеров топологических пространств можно получить, используя следующее определение.

**Определение.** Пусть  $(X, \tau)$  — топологическое пространство и  $S \subset X$  — произвольное подмножество. Топологией на множестве  $S$ , индуциро-

ванной топологией  $\tau$  пространства  $X$ , называется совокупность  $\tau_S$  множеств вида  $U \cap S$ , где  $U \in \tau$  — открытое множество в  $X$ .

Чтобы убедиться в корректности этого определения, нужно проверить, что семейство  $\tau_S$  удовлетворяет аксиомам топологии.

Очевидно,

$$\emptyset \cap S = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \tau_S, \quad X \cap S = S \Rightarrow S \in \tau_S.$$

Далее,

$$U_1 \cap S, U_2 \cap S \in \tau_S, \Rightarrow (U_1 \cap S) \cap (U_2 \cap S) = (U_1 \cap U_2) \cap S \in \tau_S.$$

Наконец,

$$\bigcup_{\alpha \in A} (U_\alpha \cap S) = (\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha) \cap S \in \tau_S.$$

□

Теперь в качестве примера топологического пространства можно взять любое подмножество на плоскости  $\mathcal{E}_2$ , в трехмерном пространстве  $\mathcal{E}_3$  или в евклидовом пространстве  $\mathcal{E}_n$  произвольной размерности  $n$ .

В частности, кривые и поверхности в  $\mathcal{E}_3$  являются топологическими пространствами с топологией, индуцированной из пространства  $\mathcal{E}_3$ , а также, например, множество точек в  $\mathcal{E}_n$ , координаты которых являются рациональными числами.

### База топологии.

**Определение.** Базой в топологическом пространстве  $(X, \tau)$  называется семейство открытых множеств  $\beta \subset \tau$ , такое что любое непустое

открытое множество  $U \in \tau$  может быть представлено в виде объединения множеств из  $\beta$ .

Из определения открытых подмножеств в евклидовом пространстве  $\mathcal{E}_n$  следует, что множество всех открытых шаров в  $\mathcal{E}_n$  является базой в этом топологическом пространстве. Именно с помощью этой базы и была введена топология в  $\mathcal{E}_n$ .

Топология может допускать различные базы. Так в  $\mathcal{E}_n$  базой является и множество всех открытых кубов

$$C(M_0, 2\varepsilon) = \{M(x^i) \in \mathcal{E}_n : |x^i - x_0^i| < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0, \quad (7)$$

определенных в системе координат, заданной некоторым (любым!) ортонормированным репером.

Базой является также множество всех открытых шаров, координаты центра и радиус которых являются рациональными числами. Важной особенностью этой базы является то, что в ней счетное число элементов.

Продолжим изучение непрерывных отображений между евклидовыми пространствами.

Пусть  $\{O; \mathbf{e}_i\}$  — ортонормированный репер в  $\mathcal{E}_n$ . Обозначим символом

$$\text{pr}_i : \mathcal{E}_n \ni M \mapsto x_M^i \in \mathbf{R}$$

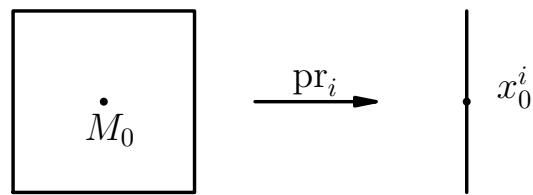
отображение, относящее точке  $M$  ее координату с номером  $i$  (проекцию на координатную ось  $Ox^i$ ). Это отображение непрерывно. Действительно, для произвольной точки  $M_0$  и любого отрезка  $(x_0^i - \varepsilon, x_0^i + \varepsilon) \subset \mathbf{R}$  (одномерного куба с центром в точке  $x_0^i = \text{pr}_i(M_0)$ , индекс  $i$  фиксирован, например,  $i = 1$ )

можно указать открытый куб в  $\mathcal{E}_n$ , например куб  $C(M_0, 2\varepsilon)$ , определяемый системой неравенств

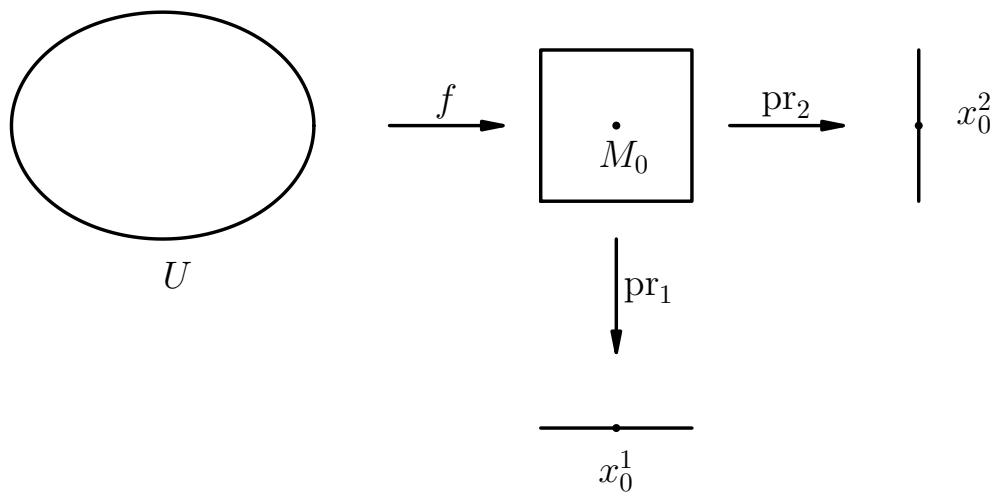
$$x_0^j - \varepsilon < x^j < x_0^j + \varepsilon, \quad j = 1, \dots, n,$$

(индекс  $j$  пробегает все значения от 1 до  $n$ ), который удовлетворяет условию

$$\text{pr}_i(C(M_0, 2\varepsilon)) = (x_0^i - \varepsilon, x_0^i + \varepsilon) \subset (x_0^i - \varepsilon, x_0^i + \varepsilon).$$



Пусть  $U \subset \mathcal{E}'_m$  — открытое множество. Отображение  $f : U \rightarrow \mathcal{E}_n$  непрерывно тогда и только тогда, когда все отображения  $\text{pr}_i \circ f : U \rightarrow \mathbf{R}$ , задающие отображение  $f$  в системе координат, определяемой некоторым ортонормированным репером  $(O; \mathbf{e}_i)$ , непрерывны.



Действительно, если  $f$  непрерывно, то отображения  $\text{pr}_i \circ f$  непрерывны как композиции непрерывных отображений. Обратно, для любого открытого куба  $C(M_0, 2\varepsilon)$  прообраз  $f^{-1}(C(M_0, \varepsilon))$  равен пересечению прообразов  $(\text{pr}_i \circ f)^{-1}(\text{pr}_i(C(M_0, 2\varepsilon)))$ :

$$f^{-1}(C(M_0, 2\varepsilon)) = \bigcap_{i=1}^n (\text{pr}_i \circ f)^{-1}(\text{pr}_i(C(M_0, 2\varepsilon))).$$

Если все отображения  $\text{pr}_i \circ f$  непрерывны, то все прообразы  $(\text{pr}_i \circ f)^{-1}(C(M_0, 2\varepsilon))$  — открытые множества, и  $f^{-1}(C(M_0, 2\varepsilon))$  — открытое множество как пересечение открытых множеств.

Итак, пусть в пространствах  $\mathcal{E}'_m$  и  $\mathcal{E}_n$  заданы ортонормированные реперы  $(O; \mathbf{e}'_a)$ ,  $a = 1, \dots, m$ , и  $(O; \mathbf{e}_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , соответственно, так что точки из  $\mathcal{E}_m$  имеют координаты  $(u^a)$ ,  $a = 1, \dots, m$ , а точки из  $\mathcal{E}_n$  имеют координаты  $(x^i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , тогда отображение  $f : U \rightarrow \mathcal{E}_n$  непрерывно в том и только том случае, когда в координатах, определяемых ортонормированными реперами, оно задается непрерывными функциями

$$x^i = f^i(u^a) : \quad x^1 = f^1(u^1, \dots, u^m), \dots, x^n = f^n(u^1, \dots, u^m). \quad (8)$$

В случае, когда нет опасности возникновения недоразумений, для отображения (8) будем использовать также обозначение

$$x^i = x^i(u^a) : \quad x^1 = x^1(u^1, \dots, u^m), \dots, x^n = x^n(u^1, \dots, u^m).$$

### Предел отображения.

Отображения  $f : X \ni x \mapsto f(x) \in Y$  принято записывать также в виде  $f(x)$ , указывая только значения отображения  $f$  при значениях аргумента

$x \in U$ . Это удобно, в частности, если отображение  $f$  задано конкретной формулой. Такие обозначения для отображений будут использоваться в дальнейшем.

Для отображений вида

$$f : U \ni u \mapsto M(u) \in \mathcal{E}_n, \quad (9)$$

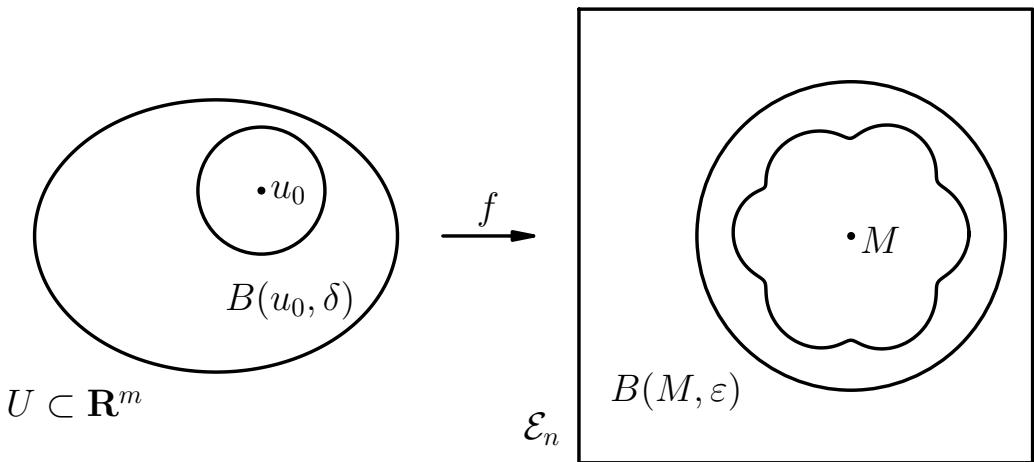
где  $U \subset \mathbf{R}^m$  — открытое множество,  $u = (u^1, \dots, u^m) = (u^a)$ , можно ввести понятие предела при  $u \rightarrow u_0$ . При этом допускается, что в точке  $u_0 \in U$  отображение  $f$  может быть не определено, то есть что отображение  $f$  имеет вид  $f : U \setminus \{u_0\} \rightarrow \mathcal{E}_n$ .

**Определение.** Точка  $M$  является пределом отображения  $f(u)$  при  $u \rightarrow u_0$ ,

$$M = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u),$$

если для всякого открытого шара  $B(M, \varepsilon)$  с центром в точке  $M$  найдется открытый шар  $B(u_0, \delta)$  с центром в точке  $u_0 \in \mathbf{R}^m$ , такой что

$$f(B(u_0, \delta) \setminus \{u_0\}) \subset B(M, \varepsilon).$$



Волнистой линией на рисунке ограничена область  $f(B(u_0, \delta) \setminus \{u_0\})$ . При  $m = 1$  шар  $B(u_0, \delta)$  представляет собой открытый отрезок (интервал)  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ .

При этом, в соответствии со всеми сформулированными выше определениями, отображение  $f : U \rightarrow \mathcal{E}_n$  непрерывно тогда и только тогда, когда для всех  $u_0 \in U$  предел  $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$  существует и

$$\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0).$$

**Задача.** Проводя рассуждения, аналогичные тем, которые проводились при рассмотрении понятия непрерывности, можно показать, что:

1. В определении предела  $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$  функции (9) открытые шары  $B(M, \varepsilon)$   $B(u_0, \delta)$  можно заменить на произвольные открытые множества  $U_{u_0}$  и  $U_M$ , содержащие соответственно точки  $u_0$  и  $M$ .
2. Предел  $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$  существует тогда и только тогда, когда существуют все пределы  $\lim_{u \rightarrow u_0} f^i(u)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , где  $f^i(u)$  — функции, задающие отображение  $f$  в координатах, определяемых ортонормированным репером  $(O, \mathbf{e}_i)$ .
3. Если пределом функции  $f(u)$  при  $u \rightarrow u_0$  является точка  $M_0$  с координатами  $(x_0^i)$ , то есть

$$\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = M_0(x_0^i) \in \mathcal{E}_n,$$

то

$$\lim_{u \rightarrow u_0} f^i(u) = x_0^i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (10)$$

**Векторные функции скалярных аргументов.**

Пусть  $\mathcal{E}_n$  — аффинное евклидово пространство,  $\mathbf{E}_n$  — ассоциированное евклидово векторное пространство, а  $\{O, \mathbf{e}_i\}$  — некоторый репер в  $\mathcal{E}_n$ . Фиксация точки  $O \in \mathcal{E}_n$  позволяет установить взаимно однозначное соответствие

$$\mathcal{E}_n \ni M \longleftrightarrow \mathbf{r}_M = \overrightarrow{OM} \in \mathbf{E}_n$$

между пространствами  $\mathcal{E}_n$  и  $\mathbf{E}_n$ , при котором точке относится ее радиус-вектор. При этом отображение

$$f : U \ni u \mapsto M(u) \in \mathcal{E}_n,$$

где  $U \subset \mathbb{R}^m$  — открытое множество, часто записывают следующим образом:

$$U \ni (u^1, \dots, u^m) \longmapsto f^i(u^a)\mathbf{e}_i = \mathbf{r}(u^1, \dots, u^m) \in \mathbf{E}_n.$$

В этом случае это отображение

$$U \rightarrow \mathbf{E}_n, \quad (u^1, \dots, u^m) \longmapsto \mathbf{r}(u^1, \dots, u^m)$$

называют *векторной функцией скалярных аргументов*, а функции

$$f^i : U \rightarrow \mathbf{R}, \quad (u^1, \dots, u^m) \longmapsto x^i(u^1, \dots, u^m) = f^i(u^1, \dots, u^m)$$

называют *координатными функциями* векторной функции

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, \dots, u^m).$$

Для векторных функций одного или нескольких переменных

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad \text{и} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, \dots, u^m)$$

предел функции при  $t \rightarrow t_0$ , и при  $u \rightarrow u_0$  соответственно, если он существует и равен  $\mathbf{a}$ , обозначается следующим образом:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a} \quad \text{и} \quad \lim_{u \rightarrow u_0} \mathbf{r}(u) = \mathbf{a}.$$

Удобно также использовать стандартную  $\varepsilon$ - $\delta$ -символику: вектор  $\mathbf{a}$  является пределом векторной функции  $\mathbf{r}(u)$  при  $u \rightarrow u_0$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$ , такое что

$$|u - u_0| < \delta \quad \text{влечет} \quad |\mathbf{r}(u) - \mathbf{a}| < \varepsilon.$$

## Дифференцируемые отображения между евклидовыми пространствами.

Рассматриваем, как и выше, два евклидовых пространства  $\mathcal{E}'_m$  и  $\mathcal{E}_n$  и открытое подмножество  $U \subset \mathcal{E}'_m$ .

**Определение.** Отображение

$$f : U \rightarrow \mathcal{E}_n$$

называется *дифференцируемым*, если в некоторых системах координат  $(u^a)$ ,  $a = 1, \dots, m$ , в  $\mathcal{E}'_m$  и  $(x^i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , в  $\mathcal{E}_n$  оно задается дифференцируемыми функциями

$$x^i = f^i(u^a) : \quad x^1 = f^1(u^1, \dots, u^m), \dots, x^n = f^n(u^1, \dots, u^m). \quad (11)$$

Это определение не зависит от выбора систем координат в пространствах  $\mathcal{E}'_m$  и  $\mathcal{E}_n$ , поскольку при переходе к другим аффинным системам координат

$$x^{i'} = p_i^{i'} x^i + b^{i'} \quad \text{и} \quad u^a = q_{a'}^a u^{a'} + c^a \quad (12)$$

в этих пространствах отображение  $f$  задается уравнениями

$$x^{i'} = f^{i'}(u^{a'}), \quad \text{где} \quad f^{i'}(u^{a'}) = p_i^{i'} f^i(q_{a'}^a u^{a'} + c^a) + b^{i'}, \quad (13)$$

и функции  $f^{i'}(u^a)$  также являются дифференцируемыми, поскольку представляют собой сложные функции, составленные из дифференцируемых функций.

При изучении дифференцируемых отображений возникает необходимость дифференцировать функции более одного раза. Это приводит к следующим определениям.

**Определение.** Отображение

$$f : U \rightarrow \mathcal{E}_n$$

называется *дифференцируемым отображением класса дифференцируемости  $C^k$* , если функции (11) являются  $k$  раз дифференцируемыми, а все частные производные порядка  $k$  являются непрерывными функциями.

**Определение.** Отображение

$$f : U \rightarrow \mathcal{E}_n$$

называется *гладким или дифференцируемым класса дифференцируемости  $C^\infty$  (бесконечно дифференцируемым)*, если у функций (11) существуют частные производные всех порядков.

**Определение.** Отображение

$$f : U \rightarrow \mathcal{E}_n$$

называется (*вещественно*) *аналитическим или дифференцируемым класса дифференцируемости  $C^\omega$* , если в некоторой окрестности произвольной точки  $x \in U$  функции (11) могут быть заданы степенным рядом (рядом Тейлора).

Поскольку преобразования координат (12) являются аналитическими, то эти определения также не зависят от выбора аффинных систем координат.

Часто при изучении конкретных вопросов заранее не обозначают класс дифференцируемости используемых функций, считая, что функции можно дифференцировать столько раз, сколько требуется.

Для дифференцируемых векторных функций одного и нескольких переменных

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad \text{и} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, \dots, u^m),$$

принимающих значения в евклидовом векторном пространстве, можно определить производные функции, повторяя рассуждения, проводимые для вещественнозначных функций

$$y = f(x), \quad y = f(u^1, \dots, u^m)$$

в стандартных курсах математического анализа, то есть определяя  $\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  и  $\mathbf{r}'_a = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^a}$  как пределы отношений

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \quad \text{при} \quad \Delta t \rightarrow 0$$

и

$$\frac{\mathbf{r}(u^1, \dots, u^{a-1}, u^a + \Delta u^a, u^{a+1}, \dots, u^m) - \mathbf{r}(u^1, \dots, u^{a-1}, u^a, u^{a+1}, \dots, u^m)}{\Delta u^a}.$$

при  $\Delta u^a \rightarrow 0$ . Однако для производной  $\mathbf{r}'$  векторной функции  $\mathbf{r}(t)$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} &= \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\frac{f^i(t + \Delta t)\mathbf{e}_i - f^i(t)\mathbf{e}_i}{\Delta t}}{\Delta t} = \\ &= \frac{(f^i(t + \Delta t) - f^i(t))\mathbf{e}_i}{\Delta t} = \frac{\Delta f^i(t)\mathbf{e}_i}{\Delta t} = \frac{\Delta f^i}{\Delta t}\mathbf{e}_i \end{aligned}$$

и, переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получаем выражение производной  $\mathbf{r}'$  через производные координатных функций:

$$\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \left( \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f^i}{\Delta t} \right) \mathbf{e}_i = \frac{df^i}{dt} \mathbf{e}_i.$$

Аналогично, для частных производных  $\mathbf{r}_a$ ,  $a = 1, \dots, m$ , векторной функции  $\mathbf{r}(u^a)$  нескольких переменных приходим к соотношениям

$$\mathbf{r}_a = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^a} = \lim_{\Delta u^a \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta u^a} = \left( \lim_{\Delta u^a \rightarrow 0} \frac{\Delta f^i}{\Delta u^a} \right) \mathbf{e}_i = \frac{\partial f^i}{\partial u^a} \mathbf{e}_i.$$

Поэтому можно сразу для функций

$$\mathbf{r}(t) = x^i(t) \mathbf{e}_i \quad \text{и} \quad \mathbf{r}(u^1, \dots, u^m) = x^i(u^1, \dots, u^m) \mathbf{e}_i \quad (14)$$

положить по определению

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = \frac{dx^i}{dt}(t) \mathbf{e}_i \quad \text{и} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^a}(u^1, \dots, u^m) = \frac{\partial x^i}{\partial u^a}(u^1, \dots, u^m) \mathbf{e}_i. \quad (15)$$

Необходимо только проверить корректность этого определения, то есть независимость от выбора конкретного базиса в векторном пространстве  $\mathbf{E}_n$ . Поскольку

$$\frac{dx^i}{dt} \mathbf{e}_i = \frac{d(p_{i'}^i x^{i'})}{dt} \mathbf{e}_i = \left( p_{i'}^i \frac{dx^{i'}}{dt} \right) \mathbf{e}_i = \frac{dx^{i'}}{dt} (p_{i'}^i \mathbf{e}_i) = \frac{dx^{i'}}{dt} \mathbf{e}_{i'},$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^a} \mathbf{e}_i = \frac{\partial(p_{i'}^i x^{i'})}{\partial u^a} \mathbf{e}_i = \left( p_{i'}^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial u^a} \right) \mathbf{e}_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial u^a} (p_{i'}^i \mathbf{e}_i) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial u^a} \mathbf{e}_{i'},$$

то указанное определение корректно.

### **Свойства операции дифференцирования векторных функций.**

Поскольку частная производная функции — это обычная производная при условии, что все переменные, кроме одной, фиксированы, то будем формулировать для функций одной переменной.

1. Производная суммы функций  $\mathbf{a}(t)$  и  $\mathbf{b}(t)$  равна сумме производных:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})' = \mathbf{a}' + \mathbf{b}'.$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b})' &= (a^i \mathbf{e}_i + b^i \mathbf{e}_i)' = ((a^i + b^i) \mathbf{e}_i)' = \frac{d(a^i + b^i)}{dt} \mathbf{e}_i = \\ &= \left( \frac{da^i}{dt} + \frac{db^i}{dt} \right) \mathbf{e}_i = \frac{da^i}{dt} \mathbf{e}_i + \frac{db^i}{dt} \mathbf{e}_i = \mathbf{a}' + \mathbf{b}'. \end{aligned}$$

2. Производная произведения скалярной функции  $\lambda(t)$  и векторной функции  $\mathbf{a}(t)$  вычисляется по правилу Лейбница:

$$(\lambda \mathbf{a})' = \lambda' \mathbf{a} + \lambda \mathbf{a}'.$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} (\lambda \mathbf{a})' &= (\lambda(a^i \mathbf{e}_i))' = ((\lambda a^i) \mathbf{e}_i)' = \frac{d(\lambda a^i)}{dt} \mathbf{e}_i = \\ &= \left( \frac{d\lambda}{dt} a^i + \lambda \frac{da^i}{dt} \right) \mathbf{e}_i = \frac{d\lambda}{dt} a^i \mathbf{e}_i + \lambda \frac{da^i}{dt} \mathbf{e}_i = \lambda' \mathbf{a} + \lambda \mathbf{a}'. \end{aligned}$$

3. Для производной скалярного произведения двух векторных функций  $\mathbf{a}(t)$  и  $\mathbf{b}(t)$  также выполняется правило Лейбница:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})' = (\mathbf{a}', \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}').$$

**Доказательство.**

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})' = (g_{ij} a^i b^j)' = g_{ij} \frac{da^i}{dt} b^j + g_{ij} a^i \frac{db^j}{dt} = (\mathbf{a}', \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}').$$

Выпишем еще вычисления, использующие ортонормированный базис

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{b})' &= (a^1 b^1 + a^2 b^2 + \dots + a^n b^n)' = \\ &= \left( \frac{da^1}{dt} b^1 + a^1 \frac{db^1}{dt} \right) + \left( \frac{da^2}{dt} b^2 + a^2 \frac{db^2}{dt} \right) + \dots + \left( \frac{da^n}{dt} b^n + a^n \frac{db^n}{dt} \right) = \\ &= \left( \frac{da^1}{dt} b^1 + \frac{da^2}{dt} b^2 + \dots + \frac{da^n}{dt} b^n \right) + \left( a^1 \frac{db^1}{dt} + a^2 \frac{db^2}{dt} + \dots + a^n \frac{db^n}{dt} \right) = \\ &= (\mathbf{a}', \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}'). \end{aligned}$$

4. Для производной функции  $f(t) = \alpha(\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t))$ , получающейся подстановкой двух векторных функций  $\mathbf{a}(t)$  и  $\mathbf{b}(t)$  в произвольную билинейную форму

$$\alpha : \mathbf{E}_n \times \mathbf{E}_n \ni \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \mapsto \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{R},$$

также выполняется правило Лейбница:

$$(\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}))' = \alpha(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}').$$

**Доказательство.** Поскольку

$$\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha_{ij} a^i b^j,$$

то доказательство ничем не отличается от доказательства для производной скалярного произведения:

$$(\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}))' = (\alpha_{ij} a^i b^j)' = \alpha_{ij} \frac{da^i}{dt} b^j + \alpha_{ij} a^i \frac{db^j}{dt} = \alpha(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}').$$

5. В частности, правило Лейбница выполняется для производной косого произведения двух векторных функций  $\mathbf{a}(t)$  и  $\mathbf{b}(t)$ :

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle' = \langle \mathbf{a}', \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}' \rangle.$$

6. Для производной функции  $f(t) = \alpha(\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t), \mathbf{c}(t))$ , получающейся подстановкой трех векторных функций  $\mathbf{a}(t)$ ,  $\mathbf{b}(t)$  и  $\mathbf{c}(t)$  в произвольную трилинейную форму

$$\alpha : \mathbf{E}_n \times \mathbf{E}_n \times \mathbf{E}_n \ni \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\} \mapsto \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{R},$$

также выполняется правило Лейбница:

$$(\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}))' = \alpha(\mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}', \mathbf{c}) + \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}').$$

**Доказательство.** Поскольку в координатах

$$\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha_{ijk} a^i b^j c^k,$$

то доказательство аналогично случаю билинейной формы:

$$\begin{aligned} (\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}))' &= (\alpha_{ijk} a^i b^j c^k)' = \\ &= \alpha_{ijk} \frac{da^i}{dt} b^j c^k + \alpha_{ijk} a^i \frac{db^j}{dt} c^k + \alpha_{ijk} a^i b^j \frac{dc^k}{dt} = \\ &= \alpha(\mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}', \mathbf{c}) + \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}'). \end{aligned}$$

7. В частности, правило Лейбница выполняется для производной смешанного произведения трех векторных функций  $\mathbf{a}(t)$ ,  $\mathbf{b}(t)$  и  $\mathbf{c}(t)$ :

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})' = (\mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}', \mathbf{c}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}').$$

8. Для производной векторной функции  $\alpha(\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t))$ , получающейся подстановкой двух векторных функций  $\mathbf{a}(t)$  и  $\mathbf{b}(t)$  в произвольное билинейное отображение

$$\alpha : \mathbf{E}_n \times \mathbf{E}_n \ni \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \mapsto \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{E}_n,$$

также выполняется правило Лейбница:

$$(\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}))' = \alpha(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}').$$

**Доказательство.** Поскольку

$$\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha_{ij}^k a^i b^j \mathbf{e}_k,$$

то

$$(\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}))' = (\alpha_{ij}^k a^i b^j \mathbf{e}_k)' = \alpha_{ij}^k \frac{da^i}{dt} b^j \mathbf{e}_k + \alpha_{ij}^k a^i \frac{db^j}{dt} \mathbf{e}_k = \alpha(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}').$$

9. В частности, правило Лейбница выполняется для производной векторного произведения двух векторных функций  $\mathbf{a}(t)$  и  $\mathbf{b}(t)$ :

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]' = [\mathbf{a}', \mathbf{b}] + [\mathbf{a}, \mathbf{b}'].$$

10. Имеет место следующая формула Тейлора для векторной функции  $\mathbf{r}(t)$  класса  $C^k$  при  $k \geq m$ :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \frac{\mathbf{r}'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \dots + \frac{\mathbf{r}^{(m)}(t_0)}{m!}(t - t_0)^m + \mathbf{w}_m(t),$$

где символом

$$\mathbf{r}^{(m)}(t) = \frac{d^m \mathbf{r}}{dt^m}$$

обозначена производная порядка  $m$ , и

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{w}_m(t)}{(t - t_0)^m} = \mathbf{0}.$$

**Доказательство.** Выписываем формулы Тейлора для координатных функций и суммируем:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= x^i(t)\mathbf{e}_i = \\ &\left( x^i(t_0) + \frac{1}{1!} \frac{dx^i}{dt} \Big|_{t_0} (t - t_0) + \dots + \frac{1}{m!} \frac{d^m x^i}{dt^m} \Big|_{t_0} (t - t_0)^m + w_m^i(t) \right) \mathbf{e}_i = \\ &x^i(t_0)\mathbf{e}_i + \frac{1}{1!} \frac{dx^i}{dt} \Big|_{t_0} \mathbf{e}_i(t - t_0) + \dots + \frac{1}{m!} \frac{d^m x^i}{dt^m} \Big|_{t_0} \mathbf{e}_i(t - t_0)^m + w_m^i(t)\mathbf{e}_i = \\ &\mathbf{r}(t_0) + \frac{\mathbf{r}'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \dots + \frac{\mathbf{r}^{(m)}(t_0)}{m!}(t - t_0)^m + \mathbf{w}_m(t), \end{aligned}$$

где

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{w_m^i(t)}{(t - t_0)^m} = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{w}_m(t) = w_m^i(t)\mathbf{e}_i.$$

11. Если для векторной функции  $\mathbf{r}(t)$ , определенной на интервале  $(a, b) \subset \mathbf{R}$ , выполняется условие

$$\mathbf{r}' \equiv \mathbf{0},$$

то

$$\mathbf{r} = \text{const} \quad \text{на } (a, b).$$

**Доказательство.** Имеем:

$$\mathbf{r}' \equiv \mathbf{0} \Leftrightarrow \frac{dx^i}{dt} \equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \Leftrightarrow x^i = a^i = \text{const} \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{r} = a^i \mathbf{e}_i = \mathbf{a} = \text{const}.$$

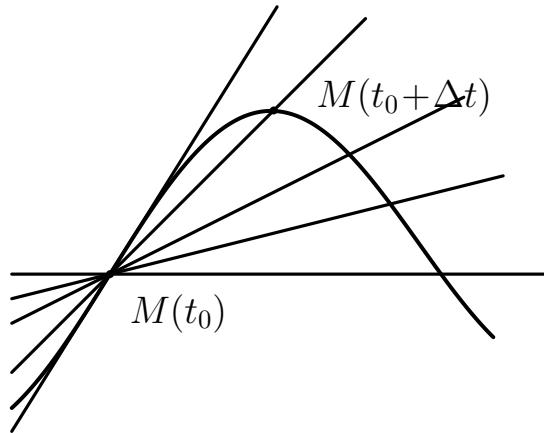
Пусть задана векторная функция

$$f : (a, b) \ni t \mapsto \mathbf{r}(t) \in \mathbf{E}_n. \quad (16)$$

Рассмотрим аффинное пространство  $\mathcal{E}_n$ , ассоциированное с векторным пространством  $\mathbf{E}_n$ , и некоторый репер  $\{O, \mathbf{e}_i\}$  в  $\mathcal{E}_n$ . Отложив векторы  $\mathbf{r}(t)$ ,  $t \in (a, b)$ , от точки  $O$ , так что

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OM(t)},$$

получим отображение  $\tilde{f} : (a, b) \ni t \mapsto M(t) \in \mathcal{E}_n$ . Линия, описываемая переменной точкой  $M(t)$ , называется *годографом* векторной функции (16).



Прямая, проходящая через точки  $M(t_0)$  и  $M(t_0 + \Delta t)$ , называется секущей.

Ее направляющим вектором является вектор

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t_0 + \Delta t)} = \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0) = \Delta \mathbf{r},$$

коллинеарный вектору

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \quad (17)$$

При стремлении  $\Delta t$  к нулю секущая будет стремиться к касательной к годографу  $M(t)$  в точке  $M(t_0)$ , а вектор (17) к производной:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Таким образом, геометрический смысл производной  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0)$  векторной функции  $\mathbf{r}(t)$ , если эта производная не является нулевым вектором, следующий:  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0)$  — направляющий вектор касательной к годографу функции  $\mathbf{r}(t)$  в точке  $\mathbf{r}(t_0)$ .

Рассмотрим еще кинематическую интерпретацию производной векторной функции  $\mathbf{r}(t)$ . Будем смотреть на параметр  $t$  как на время, изменяющееся в интервале  $(a, b)$ , а на точку  $M(t)$  как на положение материальной частицы в пространстве. Тогда за время  $\Delta t$  материальная частица проходит путь от точки с радиус-вектором  $\mathbf{r}(t_0)$  до точки с радиус-вектором  $\mathbf{r}(t_0 + \Delta t)$ . При этом

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t}$$

— вектор средней скорости частицы на интервале  $(t_0, t_0 + \Delta t)$  (вектор скорости для равномерного прямолинейного движения частицы на указанном временном интервале). Поэтому

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

— это вектор моментальной скорости частицы в данный момент времени  $t_0$ .

### 3 Некоторые специальные векторные функции.

В этом параграфе, говоря о векторной функции, считаем, что она является дифференцируемой достаточно высокого класса дифференцируемости  $C^k$ .

**Векторная функция постоянного модуля.**

Рассматриваем функцию

$$f : (a, b) \ni t \mapsto \mathbf{r}(t) \in \mathbf{E}_n,$$

принимающую значения в евклидовом пространстве, модуль которой является постоянным числом, не зависящим от  $t$ :

$$|\mathbf{r}(t)| = c = \text{const}. \quad (18)$$

Условие (18) эквивалентно постоянству скалярного квадрата функции  $\mathbf{r}(t)$ :

$$(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}(t)) = c^2 = \text{const}. \quad (19)$$

Дифференцируя соотношение (19), получаем

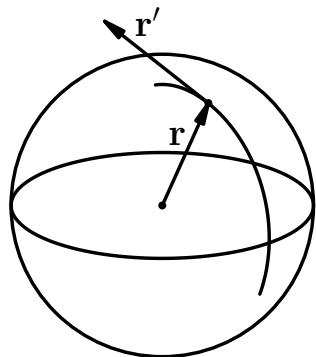
$$\begin{aligned} (\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \text{const} &\Leftrightarrow (\mathbf{r}, \mathbf{r})' = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{r}', \mathbf{r}) + (\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \Leftrightarrow \mathbf{r}' \perp \mathbf{r}. \end{aligned}$$

В результате получаем следующее предложение.

**Предложение.** *Векторная функция имеет постоянный модуль на интервале  $(a, b)$  тогда и только тогда, когда она ортогональна своей производной на этом интервале.*

Геометрически, условие  $|\mathbf{r}(t)| = a = \text{const}$  означает, что годограф векторной функции лежит на сфере радиуса  $a$  в евклидовом пространстве  $\mathcal{E}_n$ ,

и касательная к годографу векторной функции ортогональна радиусу сферы, проведенному в точку касания.



### Векторная функция постоянного направления.

**Предложение.** *Векторная функция*

$$f : (a, b) \ni t \mapsto \mathbf{r}(t) \in \mathbf{E}_n,$$

не обращающаяся в нуль на интервале  $(a, b)$  (т.е.  $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{0}$  при  $t \in (a, b)$ ), имеет постоянное направление на  $(a, b)$  тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{r}'(t) \parallel \mathbf{r}(t) \quad \text{при } t \in (a, b).$$

**Доказательство.** Всякий ненулевой вектор  $\mathbf{v}$  можно представить в виде

$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}| \mathbf{e}, \quad \text{где } |\mathbf{e}| = 1.$$

Единичный вектор  $\mathbf{e}$  при этом и задает направление вектора  $\mathbf{v}$ .

$(\Rightarrow)$  Если направление функции  $\mathbf{r}(t)$  постоянно, то

$$\mathbf{r}(t) = \lambda(t) \mathbf{e}, \quad \text{где } \mathbf{e} = \text{const.}$$

Дифференцируя это соотношение, получим

$$\mathbf{r}' = \lambda' \mathbf{e} = \frac{\lambda'}{\lambda} \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{r}' \parallel \mathbf{r}.$$

( $\Leftarrow$ ) Обратно, пусть  $\mathbf{r}'(t) \parallel \mathbf{r}(t)$ . Представим функцию  $\mathbf{r}(t)$  в виде

$$\mathbf{r}(t) = \lambda(t) \mathbf{e}(t), \quad \text{где } |\mathbf{e}(t)| = 1 \quad (20)$$

(можно считать, что  $\lambda(t)$  совпадает с  $|\mathbf{r}(t)|$ ). Продифференцируем соотношение (20). Имеем:

$$\mathbf{r}' = \lambda' \mathbf{e} + \lambda \mathbf{e}'.$$

Поскольку  $\mathbf{r}' \parallel \mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{0}$ , то найдется такое  $\mu = \mu(t)$ , что

$$\lambda' \mathbf{e} + \lambda \mathbf{e}' = \mu(\lambda \mathbf{e}). \quad (21)$$

Функция  $\mathbf{e}(t)$ , входящая в соотношение (21), имеет постоянный модуль, равный единице, поэтому по доказанному выше,  $\mathbf{e}' \perp \mathbf{e}$  и  $(\mathbf{e}', \mathbf{e}) = 0$ . Умножим теперь векторное равенство (21) на  $\mathbf{e}'$  скалярно. Получаем  $\lambda(\mathbf{e}', \mathbf{e}') = 0$ . Поскольку  $|\lambda(t)| = |\mathbf{r}(t)| \neq 0$  при  $t \in (a, b)$ , то  $|\mathbf{e}'|^2 = (\mathbf{e}', \mathbf{e}') = 0$ . Следовательно,  $\mathbf{e}' = \mathbf{0}$  и  $\mathbf{e} = \text{const}$ , а это и означает, что векторная функция  $\mathbf{r} = \lambda \mathbf{e}$  имеет постоянное направление.

**Векторная функция, параллельная фиксированной плоскости.**

**Предложение.** *Векторная функция*

$$f : (a, b) \ni t \mapsto \mathbf{r}(t) \in \mathbf{E}_3,$$

такая что  $\mathbf{r}(t) \nparallel \mathbf{r}'(t)$  при  $t \in (a, b)$ , параллельна некоторой неизменной плоскости (принимает значения в некотором двумерном подпространстве  $\mathbf{V}_2 \subset \mathbf{E}_3$ ) тогда и только тогда, когда векторы  $\mathbf{r}(t)$ ,  $\mathbf{r}'(t)$  и  $\mathbf{r}''(t)$

компланарны при всех  $t \in (a, b)$ , то есть тогда и только тогда, когда

$$(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t)) = 0 \quad \text{при } t \in (a, b).$$

### Доказательство.

( $\Rightarrow$ ) Пусть плоскость  $\pi = [M_0, \mathbf{V}_2]$ , которой параллельна векторная функция, имеет нормальный вектор  $\mathbf{N} = \text{const}$ . Тогда  $(\mathbf{r}, \mathbf{N}) = 0$ . Дифференцируя два раза это соотношение, получим  $(\mathbf{r}', \mathbf{N}) = 0$  и  $(\mathbf{r}'', \mathbf{N}) = 0$ . Это значит, что все три вектора  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{r}''$  ортогональны вектору  $\mathbf{N}$  и, следовательно, принадлежат направляющему подпространству  $\mathbf{V}_2(\pi)$  плоскости  $\pi$ .

( $\Leftarrow$ ) Пусть теперь векторы  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{r}''$  компланарны. Поскольку  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  линейно независимы, то

$$\mathbf{r}'' = \lambda \mathbf{r} + \mu \mathbf{r}'.$$

При каждом  $t$  векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  принадлежат направляющему подпространству  $\mathbf{V}_2(t) = \mathcal{L}\{\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t)\}$  плоскости  $\pi$  с нормальным вектором  $\mathbf{N}(t) = [\mathbf{r}, \mathbf{r}']$ . Направляющее подпространство этой плоскости будет постоянным, если вектор  $\mathbf{N}(t) = [\mathbf{r}, \mathbf{r}']$  имеет постоянное направление. Для доказательства этого достаточно показать, что  $\mathbf{N}' \parallel \mathbf{N}$ . Имеем

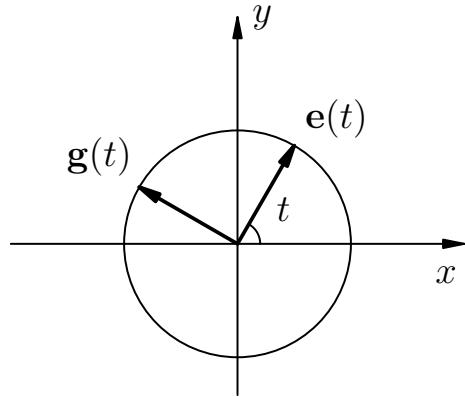
$$\begin{aligned} \mathbf{N}' &= [\mathbf{r}, \mathbf{r}']' = [\mathbf{r}', \mathbf{r}'] + [\mathbf{r}, \mathbf{r}''] = \mathbf{0} + [\mathbf{r}, \lambda \mathbf{r} + \mu \mathbf{r}'] = \\ &= \lambda [\mathbf{r}, \mathbf{r}] + \mu [\mathbf{r}, \mathbf{r}'] = \mathbf{0} + \mu \mathbf{N} = \mu \mathbf{N}. \end{aligned} \quad \square$$

### Круговые векторные функции на евклидовой плоскости.

Так называются векторные функции

$$\mathbf{R} \ni t \mapsto \mathbf{e}(t) = \mathbf{i} \cos t + \mathbf{j} \sin t \in \mathbf{E}_2,$$

$$\mathbf{R} \ni t \mapsto \mathbf{g}(t) = \mathbf{e}(t + \frac{\pi}{2}) = -\mathbf{i} \sin t + \mathbf{j} \cos t \in \mathbf{E}_2,$$



Для производных векторных круговых функций имеют место следующие формулы:

$$\frac{d\mathbf{e}(t)}{dt} = \mathbf{g}(t), \quad \frac{d\mathbf{g}(t)}{dt} = -\mathbf{e}(t).$$

Отметим также формулу

$$\mathbf{e}(t + \alpha) = \mathbf{e}(t) \cos \alpha + \mathbf{g}(t) \sin \alpha.$$

## 4 Кривые в евклидовом пространстве.

Наша ближайшая задача — сформулировать определение кривой линии в евклидовом пространстве, которое наилучшим образом описывало бы интуитивное представление о гладкой кривой линии.

**Определение.** Параметризованной кривой или путем класса  $C^k$  ( $k > 0$ ) в евклидовом пространстве  $\mathcal{E}_n$  называется отображение

$$f : U \rightarrow \mathcal{E}_n,$$

задаваемое в некотором репере  $\{O, \mathbf{e}_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , дифференцируемой класса  $C^k$  векторной функцией  $\mathbf{r}(t)$ , где  $\mathbf{r}(t)$  — радиус-вектор точки  $f(t)$ , а  $U$  — это либо некоторый конечный интервал  $(a, b) \subset \mathbf{R}$ , либо интервал одного из видов  $(-\infty, b)$ ,  $(a, \infty)$ , либо все множество вещественных чисел  $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ .

Поскольку всегда можно предполагать (хотя бы формально), что некоторый репер в  $\mathcal{E}_n$  задан, то для обозначения параметризованной кривой будем использовать также обозначение  $\mathbf{r}(t)$ .

Кинематической интерпретацией параметризованной кривой в пространстве  $\mathcal{E}_3$  является процесс движения материальной точки в этом пространстве.

Подмножество  $f(U) \subset \mathcal{E}_n$ , состоящее из образов элементов  $t \in U$  при отображении  $f$ , то есть подмножество

$$f(U) = \{M \in \mathcal{E}_n \mid M = f(t), t \in U\}$$

называется *образом* или *носителем* параметризованной кривой  $f$ .

Кинематической интерпретацией образа параметризованной кривой в евклидовом пространстве  $\mathcal{E}_3$  является траектория, описываемая материальной точкой  $\mathbf{r}(t)$  в пространстве  $\mathcal{E}_3$  в процессе ее движения. Вектор  $\mathbf{r}'(t_0)$  при этом представляет собой вектор скорости материальной точки  $\mathbf{r}(t)$  в момент времени  $t_0$ .

С точки зрения интуитивного представления о гладких кривых линиях у сформулированного определения есть определенные «недостатки»: в процессе движения точка  $f(t)$  может останавливаться, потом начать двигаться под углом к первоначальному направлению движения или даже назад.

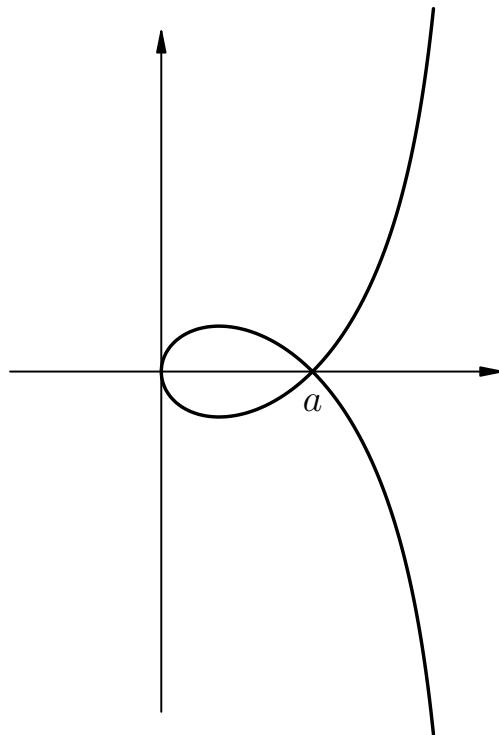
**Определение.** Параметризованная кривая  $f : U \rightarrow \mathcal{E}_n$ , определяемая векторной функцией  $\mathbf{r}(t)$  называется регулярной при  $t = t_0$ , если  $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ .

Если  $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$  для всех  $t \in U$ , то параметризованная кривая называется регулярной.

Регулярная параметризованная кривая имеет ненулевой вектор скорости  $\mathbf{r}'(t)$ , но она может неоднократно проходить через некоторые точки или повторять часть траектории.

Рассмотрим в качестве примера регулярную параметризованную кривую на евклидовой плоскости, заданную в прямоугольной системе координат уравнениями

$$x = \frac{2at^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{at(t^2-1)}{1+t^2}, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (22)$$



Эта параметризованная кривая дважды проходит через точку  $(a, 0)$ : при  $t = -1$  и при  $t = 1$ .

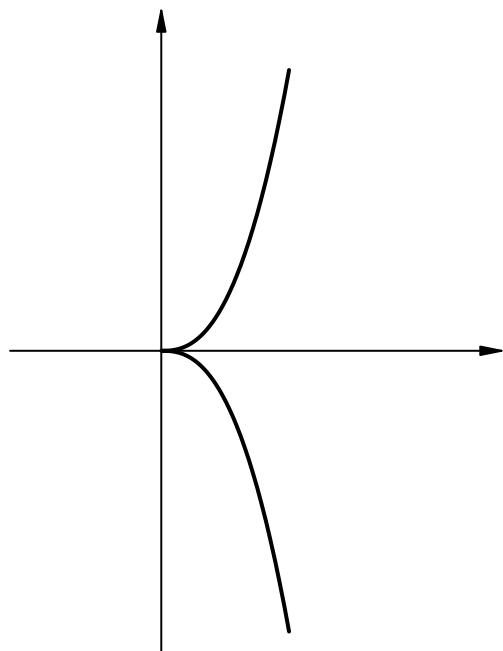
Носитель кривой (22) является кривой третьего порядка, называемой *строфоидой*. Исключая параметр  $t$  из уравнений (22), можно получить алгебраическое уравнение строфоиды

$$(2a - x)y^2 = x(x - a)^2.$$

Параметризованная кривая

$$x = t^2, \quad y = t^5$$

не регулярна в точке  $t = 0$ .



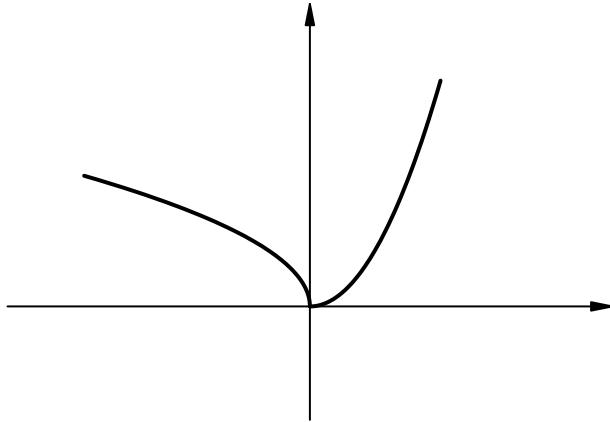
Еще один пример нарушения регулярности. Параметризованная кривая  $f : (-1, 2; 1, 2) \rightarrow \mathcal{E}_2$  с уравнениями

$$x = -t^6, \quad y = -t^3, \quad t \in (-1, 2; 0); \quad x = t^3, \quad y = t^6, \quad t \in (0; 1, 2)$$

не регулярна при  $t = 0$ . Эта кривая имеет класс дифференцируемости  $C^2$ :

$$\mathbf{r}'(0) = \mathbf{r}''(0) = \mathbf{0},$$

а третья производная  $\mathbf{r}'''$  не определена при  $t = 0$ .

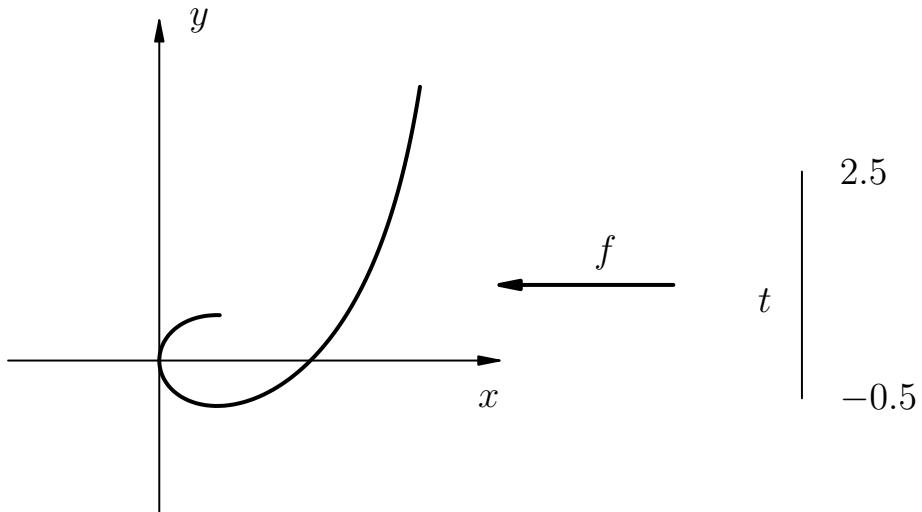


**Определение.** Простой дугой (простой кривой) в пространстве  $\mathcal{E}_n$  будем называть подмножество  $L \subset \mathcal{E}_n$ , которое является образом регулярной параметризованной кривой  $f : U \rightarrow \mathcal{E}_n$ , такой что отображение

$$f : U \rightarrow L = f(U) \tag{23}$$

открытого интервала  $U$  на его образ  $f(U)$  является взаимно однозначным и взаимно непрерывным, то есть гомеоморфизмом.

Само отображение (23) при этом будем называть параметризацией простой дуги.



Напомним некоторые определения из топологии, сформулированные ранее.

Образ  $f(U)$  интервала  $U$  является подмножеством в топологическом пространстве  $\mathcal{E}_n$ . На этом подмножестве, как и на всяком другом подмножестве, индуцируется топология, открытыми подмножествами которой являются пересечения  $f(U) \cap W$  подмножества  $f(U)$  с открытыми подмножествами  $W \subset \mathcal{E}_n$ .

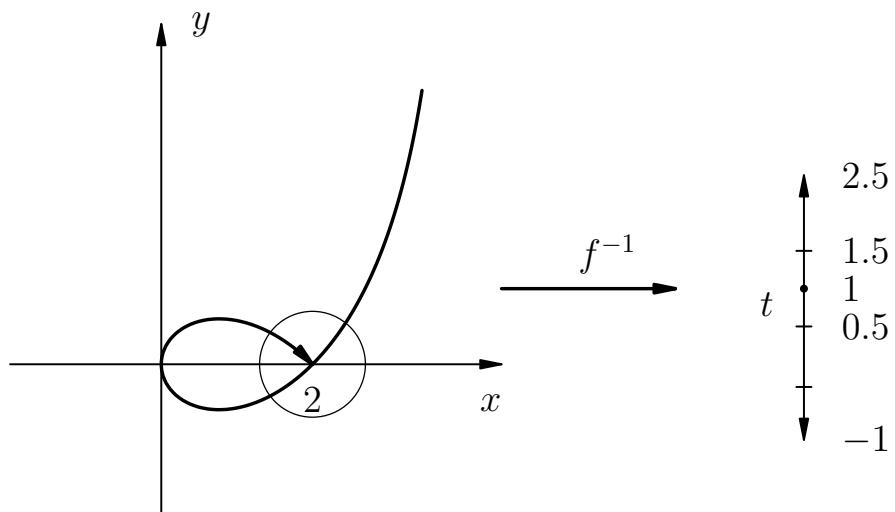
Приведем пример, который показывает, что одной взаимной однозначности соответствия  $f : U \rightarrow f(U)$  недостаточно для того, чтобы обратное отображение  $f^{-1}$  было непрерывным. Рассмотрим образ параметризованной кривой (22) при  $a = 2$ , ограниченной на интервал  $U = (-1; 2, 5)$ :

$$x = \frac{4t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2t(t^2-1)}{1+t^2}, \quad t \in (-1; 2, 5). \quad (24)$$

Отображение  $f$ , заданное уравнениями (24), является непрерывным и взаимно однозначным на интервале  $(-1; 2, 5)$  и  $f(1) = (2; 0)$ . Однако обратное отображение  $f^{-1}$  непрерывным не является. Действительно, возьмем открытый интервал  $W = (0, 5; 1, 5) \subset U$ , содержащий точку  $1 \in W$ . Каким бы малым ни был радиус  $\delta$  открытого круга  $B((2; 0), \delta)$  с центром в точке  $f(1) = (2; 0)$ ,

образ этого круга при отображении  $f^{-1}$  будет содержать точки, близкие к  $-1$ , которые не содержатся в интервале  $W$ .

Или, если воспользоваться непосредственно общим определением непрерывности отображения, прообраз окрестности  $W = (0, 5; 1, 5)$  при отображении  $f^{-1}$ , то есть образ  $f(W)$ , не является открытым подмножеством в  $f(U)$ , поскольку в индуцированной топологии всякая открытая окрестность точки  $(2; 0)$  должна содержать точки, являющиеся образами точек из некоторой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $t = -1$  при отображении  $f$ .



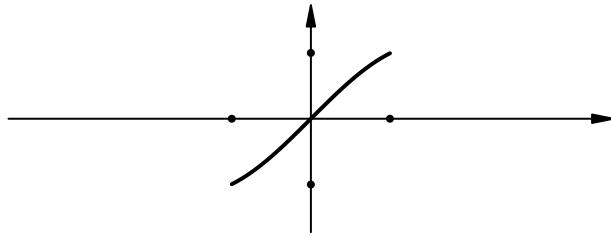
**Определение.** Пусть  $U \subset \mathbf{R}$  и  $U' \subset \mathbf{R}$  — два открытых интервала.

Гомеоморфизм  $\varphi : U \rightarrow U'$  называется диффеоморфизмом (класса  $C^k$ ), если оба отображения  $\varphi$  и  $\varphi^{-1}$  являются дифференцируемыми (класса  $C^k$ ).

Отображение

$$(\pi/3, \pi/3) \ni x \rightarrow y = \sin x \in (-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2)$$

является диффеоморфизмом (класса  $C^\omega$ ).



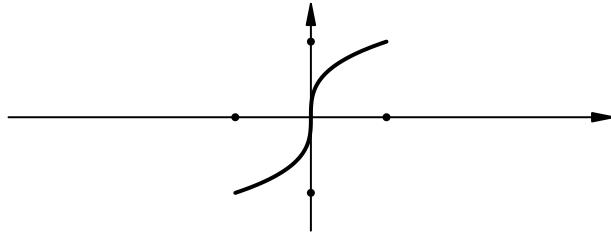
Отображение

$$(-1, 1) \ni x \rightarrow y = x^3 \in (-1, 1)$$

не является диффеоморфизмом, так как обратное отображение

$$(-1, 1) \ni y \rightarrow x = \sqrt[3]{y} \in (-1, 1)$$

не имеет производной при  $y = 0$ .



**Предложение.** Если

$$f : U \ni t \mapsto \mathcal{E}_n \quad u \quad g : U' \ni u \mapsto \mathcal{E}_n$$

две параметризации (класса  $C^k$ ) одной и той же простой дуги  $L$ , то существует диффеоморфизм (класса  $C^k$ )

$$\varphi : U \ni t \mapsto u(t) \in U',$$

такой что  $f = g \circ \varphi$ ,  $f(t) = g(u(t))$ .

**Доказательство.** Поскольку отображения  $f : U \rightarrow L$  и  $g : U' \rightarrow L$  оба являются гомеоморфизмами, то и композиции

$$g^{-1} \circ f : U \ni t \mapsto u(t) \in U' \quad \text{и} \quad f^{-1} \circ g : U' \ni u \mapsto t(u) \in U$$

определяемые диаграммой

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ f \nearrow & & \swarrow g \\ U & \xrightarrow{g^{-1} \circ f} & U' \end{array}$$

являются гомеоморфизмами. Остается проверить, что эти отображения являются дифференцируемыми. Покажем, что  $g^{-1} \circ f$  — дифференцируемое отображение. Дифференцируемость — условие локальное, поэтому достаточно проверить дифференцируемость отображения  $g^{-1} \circ f$  в некоторой окрестности каждой точки  $t \in U$ . Рассмотрим систему координат в  $\mathcal{E}_n$ , определяемую некоторым репером  $(O, \mathbf{e}_i)$ .

Пусть отображения  $f$  и  $g$  задаются дифференцируемыми векторными функциями

$$\mathbf{r}(t) = f^i(t)\mathbf{e}_i \quad \text{и} \quad \mathbf{r}(u) = g^i(u)\mathbf{e}_i,$$

и пусть  $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}(u_0)$ ,  $u_0 = u(t_0)$ , — радиус-вектор некоторой точки кривой  $L$ . Поскольку производная

$$\frac{d\mathbf{r}}{du}(u_0) = \frac{dg^i}{du}(u_0)\mathbf{e}_i \neq \mathbf{0},$$

то при  $u = u_0$  отлична от нуля производная некоторой координатной функции  $g^j : U' \ni u \mapsto x^j = g^j(u)$ . Без ограничения общности можно считать, что отлична от нуля производная  $\frac{dg^1}{du}(u_0) \neq 0$  функции  $x^1 = g^1(u)$ . Имеет место

коммутативная диаграмма отображений

$$\begin{array}{ccccc}
 & & L & & \\
 & f & \nearrow & \swarrow & g \\
 U & \xrightarrow{g^{-1} \circ f} & U' & & \\
 & f^1 \searrow & \swarrow g^1 & & \\
 & & \mathbb{R} & &
 \end{array} \tag{25}$$

в которой  $f^1 = g^1 \circ (g^{-1} \circ f)$  — это координатная функция  $x^1 = f^1(t)$  отображения  $f$ . По теореме об обратной функции функция  $x^1 = g^1(u)$  имеет на некоторой окрестности  $U'_0$  точки  $u_0$  обратную функцию  $(g^1|U'_0)^{-1}$ , и эта функция имеет класс дифференцируемости  $C^k$ , то есть ограничение  $\tilde{g}^1 = g^1|U'_0$  является диффеоморфизмом  $\tilde{g}^1 : U'_0 \rightarrow W_0 \subset \mathbb{R}$  на некоторую окрестность  $W_0$  точки  $x_0^1 = g^1(u_0)$ . Рассмотрим диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 & & L & & \\
 & f & \nearrow & \swarrow & g \\
 U_0 & \xrightarrow{(g^{-1} \circ f)|U_0} & U'_0 & & \\
 & \searrow \tilde{f}^1 & \swarrow \tilde{g}^1 & & \\
 & & W_0 & &
 \end{array} & \text{и} & \begin{array}{ccccc}
 & & L & & \\
 & f & \nearrow & \swarrow & g \\
 U_0 & \xrightarrow{(g^{-1} \circ f)|U_0} & U'_0 & & \\
 & \searrow \tilde{f}^1 & \nearrow (\tilde{g}^1)^{-1} & & \\
 & & W_0 & &
 \end{array} \\
 \end{array} \tag{26}$$

первая из которых является ограничением диаграммы (25), возникающим при замене множеств  $U'$ ,  $\mathbb{R}$  и  $U$  соответственно на  $U'_0$ ,  $W_0$  и  $U_0 = (f^{-1} \circ g)(U'_0)$ , а во второй диаграмме дополнительно диффеоморфизм  $\tilde{g}^1$  заменен на обратный. Из второй диаграммы (26) следует, что отображение

$$(g^{-1} \circ f)|U_0 = (\tilde{g}^1)^{-1} \circ \tilde{f}^1, \quad t \mapsto x^1 = x^1(t) \mapsto u = u(x^1) = u(x^1(t)),$$

является дифференцируемым класса  $C^k$  как композиция дифференцируемых отображений  $(\tilde{g}^1)^{-1}$  и  $\tilde{f}^1$  класса  $C^k$ . Таким образом, отображение  $g^{-1} \circ f$  является дифференцируемым отображением класса  $C^k$ .

Так как формально две рассматриваемые параметризации ничем одна от другой не отличаются, то, аналогичным образом, отображение  $f^{-1} \circ g$  является дифференцируемым класса  $C^k$ . В результате получаем две дифференцируемые класса  $C^k$  взаимно обратные функции  $u = u(t)$  и  $t = t(u)$ , осуществляющие замену параметризации простой дуги.  $\square$

В процессе доказательства этого предложения оказалось доказанным следующее утверждение.

**Предложение.** *Простую дугу  $L$  класса  $C^k$  в пространстве  $\mathcal{E}_n$  в окрестности всякой ее точки можно параметризовать одной из координат  $x^1, \dots, x^n$ .*

Это значит, в частности, что на плоскости локально (в некоторой окрестности произвольной точки) простая дуга  $L$  может быть задана одним из уравнений вида  $y = f(x)$  или  $x = f(y)$ , а в пространстве одной из систем вида

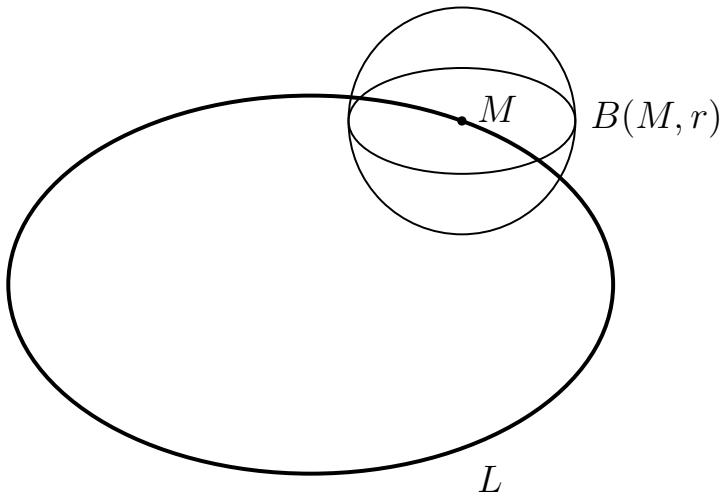
$$y = f(x), z = g(x); \quad x = f(y), z = g(y) \quad \text{или} \quad x = f(z), y = g(z).$$

Сформулируем теперь определение кривой в пространстве  $\mathcal{E}_n$ .

**Определение.** *Кривой в пространстве  $\mathcal{E}_n$  называется подмножество  $L \subset \mathcal{E}_n$ , такое что для любой точки  $M \in L$  найдется открытый шар  $B(M, r)$ , такой что множество*

$$L \cap B(M, r)$$

*является простой дугой.*



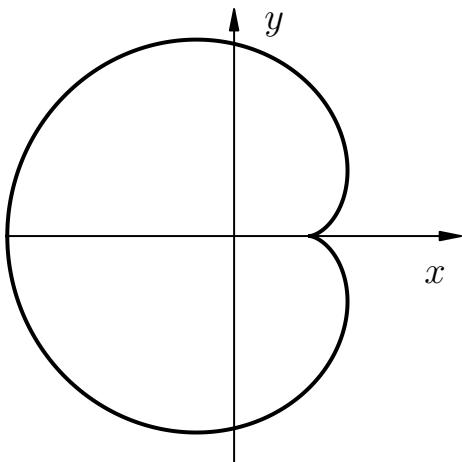
В соответствии с этим определением, кривая — это гладкое подмножество, не имеющее точек самопересечения и угловых точек, поскольку в таких точках не существует требуемых шаров  $B(M, r)$ . Однако иногда мы будем допускать нарушение этого требования гладкости в изолированных точках и говорить о кривых с особыми точками.

### **Примеры.**

Кривая, называемая кардиоидой, имеет параметрические уравнения

$$x = 2a \cos t - a \cos 2t, \quad y = 2a \sin t - a \sin 2t.$$

При  $t = 0$  производная векторной функции обращается в нуль, и кривая имеет особую точку  $(a, 0)$ .



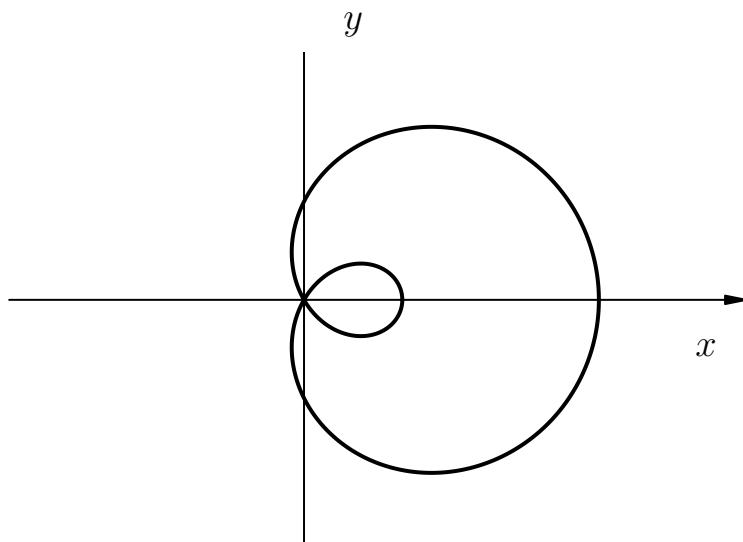
Кардиоида является кривой четвертого порядка. Исключая параметр  $t$  из уравнений (??), можно получить ее алгебраическое уравнение

$$((x - a)^2 + y^2 + 2a(x - a))^2 - 4a^2((x - a)^2 + y^2) = 0.$$

Улитка Паскаля (это тоже алгебраическая кривая четвертого порядка) имеет параметрические уравнения

$$x = a \cos t + \cos 2t + 1, \quad y = a \sin t + \sin 2t.$$

На рисунке представлена улитка Паскаля при  $a = 1$ . Эта кривая имеет точку самопересечения.



Пусть  $L \subset \mathcal{E}_n$  — простая дуга в евклидовом аффинном пространстве и  $\mathbf{r}(s)$  — некоторая ее параметризация.

**Определение.** Параметризация  $\mathbf{r}(s)$  называется *натуральной*, если

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = 1.$$

Параметр  $s$  при этом называется *натуральным*.

В механике натуральный параметр на кривой соответствует движению точки в пространстве с единичной скоростью.

В дальнейшем натуральный параметр на кривой обозначается буквой  $s$ .

**Предложение.** Для любой простой дуги  $L \subset \mathcal{E}_n$  в евклидовом пространстве существует *натуральная параметризация*.

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{r}(t)$  — некоторая параметризация простой дуги  $L$ .

Если натуральная параметризация  $\mathbf{r}(s)$  существует, то параметр  $s$  является дифференцируемой функцией параметра  $t$ :

$$s = s(t) \quad \text{и} \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \left| \frac{ds}{dt} \right|.$$

Предполагая, что функция  $s = s(t)$  является монотонно возрастающей или монотонно убывающей соответственно, получаем

$$s = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt \quad \text{или} \quad s = - \int_{t_0}^t \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt. \quad (27)$$

Функция (27) является монотонной и дифференцируемой (того же класса, что и  $\mathbf{r}(t)$ ). Поскольку

$$\frac{ds}{dt} = \pm \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \neq 0,$$

то по теореме об обратной функции обратная функция  $t = t(s)$  дифференцируемая.

Если  $s$  и  $s^*$  — два различных натуральных параметра на  $L$ , то

$$\left| \frac{ds^*}{ds} \right| = 1 \quad \Rightarrow \quad s^* = \pm \int_{s_0}^s ds = \pm(s - s_0). \quad (28)$$

Соотношение (28) гарантирует корректность следующего определения.

**Определение.** *Длиной отрезка простой дуги  $L$  между точками  $A$  и  $B$  будем называть следующую величину*

$$l(A, B) = |s_B - s_A|,$$

где  $s$  — некоторый натуральный параметр на  $L$ .

Из предыдущих рассуждений следует, что если  $\mathbf{r}(t)$  — некоторая параметризация простой дуги  $L$ , то

$$l(A, B) = \left| \int_{t_A}^{t_B} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt \right| = \left| \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt \right|.$$

В частности, в системах координат, определяемых ортонормированными реперами в пространстве  $\mathcal{E}_3$  и на плоскости  $\mathcal{E}_2$  соответственно, имеем

$$l(A, B) = \left| \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt \right|$$

и

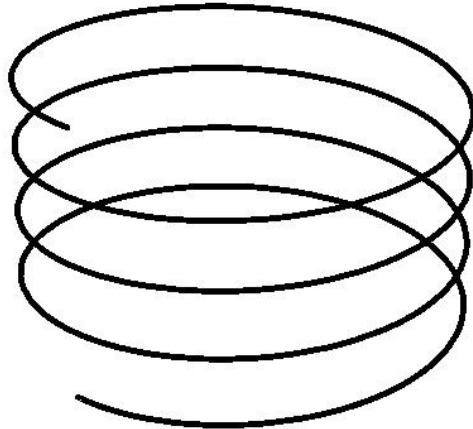
$$l(A, B) = \left| \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \right|.$$

**Пример.** Уравнениями

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{r} = a\mathbf{e}(t) + bt\mathbf{k}$$

задается винтовая линия.

(ParametricPlot3D[{5Cos[t], 5Sin[t], 0.25t}, {t, 0, 8Pi}], ViewPoint -> {3, 3, 2}, PlotStyle -> Thickness[0.009], Boxed -> False, Axes -> None])



Натуральный параметр на этой кривой легко находится:

$$s = \int_0^t \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} t.$$

Кардиоида имеет параметрические уравнения

$$x = 2a \cos t - a \cos 2t, \quad y = 2a \sin t - a \sin 2t.$$

Вычислим натуральный параметр на кардиоиде, отсчитывая его от особой точки ( $t = 0$ ). Имеем

$$x' = -2a \sin t + 2a \sin 2t, \quad y' = 2a \cos t - 2a \cos 2t, \quad \Rightarrow$$

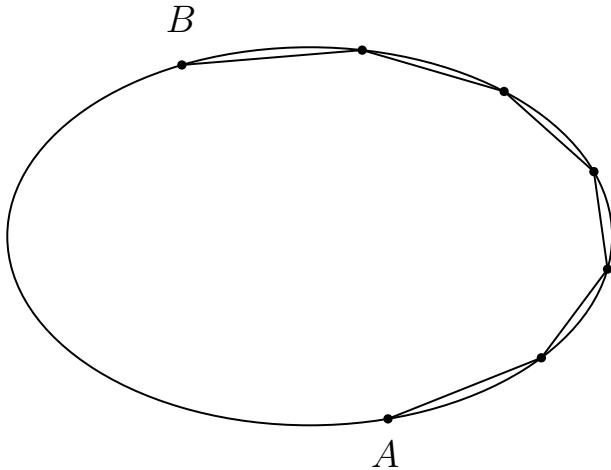
$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= 2a \sqrt{(\sin^2 t - 2 \sin t \sin 2t + \sin^2 2t) + (\cos^2 t - 2 \cos t \cos 2t + \cos^2 2t)} = \\ &= 2a \sqrt{2 - 2 \cos t} = 2a \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} = 4a \sin \frac{t}{2}, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$s = 4a \int_0^t \sin \frac{t}{2} dt = 8a \int_0^t \sin \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) = 8a \left(1 - \cos \frac{t}{2}\right). \quad (29)$$

В частности, подставляя в формулу (29)  $t = 2\pi$ , вычислим длину всей кардиоиды:  $16a$ .

**Замечание.** Можно проверить (см. учебники А.П. Нордена и П.К. Рашевского), что определенная выше длина отрезка кривой между двумя ее точками совпадает с пределом длины вписанной в кривую ломаной линии при условии, что длины звеньев ломаной линии стремятся к нулю, а их число стремится к бесконечности.



### Касательная прямая и соприкасающаяся плоскость кривой в $\mathcal{E}_3$ .

Пусть  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  — регулярная параметризованная кривая в  $\mathcal{E}_3$ , параметризующая некоторую простую дугу  $\gamma$ .

Будем предполагать, что в  $\mathcal{E}_3$  рассматривается правая прямоугольная система координат  $Oxyz$ , определяемая правым ортонормированным репером  $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ . В этом случае уравнение  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  эквивалентно трем координатным уравнениям

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

**Замечание.** Начиная с настоящего момента, при рассмотрении кривых производные от функций произвольного параметра  $t$  будем обозначать точками

над знаками функций:

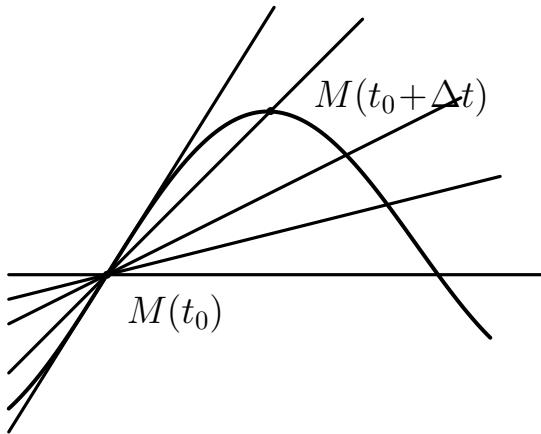
$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}(t) &= \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \ddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \quad \dddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}, \\ \dot{x}(t) &= \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{y}(t) = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \dddot{z}(t) = \frac{d^3z}{dt^3}, \quad \text{и т. д.}\end{aligned}$$

Обозначения

$$\mathbf{r}'(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \mathbf{r}''(s) = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \quad \mathbf{r}'''(s) = \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}, \quad \text{и т. д.}$$

резервируем для обозначения производных по натуральному параметру.

Поскольку рассматриваемая простая дуга  $\gamma$  представляет собой годограф векторной функции  $\mathbf{r}(t)$ , то вектор  $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$  является направляющим вектором касательной (прямой) к кривой  $\gamma$ .



Однако введенные ранее понятия годографа векторной функции и касательной к годографу носили предварительный характер. Поэтому сейчас мы сформулируем независимое определение касательной.

**Определение.** Пусть  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  — регулярная параметризованная кривая в  $\mathcal{E}_3$ , параметризующая некоторую прямую дугу  $\gamma$ . Касательной к кривой  $\mathbf{r}(t)$  в точке  $M(\mathbf{r}_0)$ , ( $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ ) называется прямая, проходящая через точку  $M(\mathbf{r}_0)$  и имеющая направляющий вектор  $\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}}(t_0)$ .

Поскольку при замене параметризации  $t = t(t^*)$  простой дуги вектор производной заменяется на коллинеарный  $\frac{d\mathbf{r}}{dt^*} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{dt^*}$ , то это определение не зависит от выбора параметризации дуги  $\gamma$ .

Уравнения касательной можно записать в одном из следующих видов:

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_0 + \lambda \dot{\mathbf{r}}_0,$$

$$\frac{X - x_0}{\dot{x}_0} = \frac{Y - y_0}{\dot{y}_0} = \frac{Z - z_0}{\dot{z}_0},$$

где  $\boldsymbol{\rho} = \{X, Y, Z\}$  — радиус-вектор точки касательной

Векторное уравнение касательной к кривой в  $\mathcal{E}_3$  можно также записать в виде

$$[\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0] = \mathbf{0}. \quad (30)$$

Если поделить уравнение (30) на  $|\dot{\mathbf{r}}_0|$ , то получится так называемое нормальное уравнение касательной

$$\frac{[\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0]}{|\dot{\mathbf{r}}_0|} = \mathbf{0}. \quad (31)$$

Если подставить в левую часть уравнения (31) радиус-вектор  $\mathbf{r}_M$  произвольной точки  $M$  пространства, то модуль получающегося вектора будет равен расстоянию от точки  $M$  до касательной  $\ell$ :

$$dist(M, \ell) = \frac{|[\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0]|}{|\dot{\mathbf{r}}_0|}. \quad (32)$$

Рассмотрим теперь некоторую натуральную параметризацию  $\mathbf{r}(s)$  простой дуги  $\gamma$  и представим функцию  $\mathbf{r}(s)$ , используя формулу Тейлора, в виде

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_0 \Delta s + \mathbf{a}(\Delta s) \Delta s^2, \quad (33)$$

где  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(s_0)$ ,  $s = s_0 + \Delta s$ , а  $\mathbf{a}(\Delta s)$  — функция, имеющая ограниченный модуль при малых значениях  $\Delta s$ . Подставляя радиус-вектор  $\mathbf{r}(s)$  в формулу (32), найдем расстояние от точки  $M(\mathbf{r}(s))$  кривой до касательной прямой в точке  $M_0(\mathbf{r}_0)$ :

$$dist(M, \ell) = |[\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0]| = |[\mathbf{a}(\Delta s), \mathbf{r}'_0]| \Delta s^2. \quad (34)$$

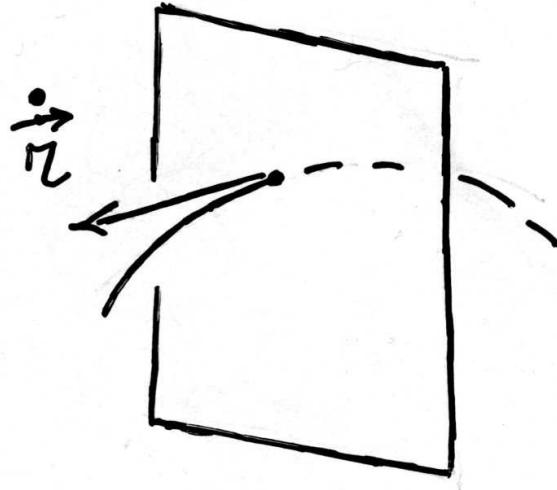
Формула (34) показывает, что расстояние от точки кривой до касательной является бесконечно малой по меньшей мере второго порядка по сравнению с  $\Delta s$ .

Если же взять прямую  $\ell_1$ , проходящую через точку  $M_0(\mathbf{r}_0)$  и имеющую единичный направляющий вектор  $\mathbf{b}$ , не коллинеарный вектору производной  $\mathbf{r}'_0$ , то расстояние

$$dist(M, \ell_1) = |[\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}_0, \mathbf{b}]| = |[\mathbf{b}, \mathbf{r}'_0]| |\Delta s| + o(\Delta s^2)$$

от точки кривой до прямой  $\ell_1$  является бесконечно малой того же порядка, что и  $\Delta s$ .

**Определение.** Плоскость, проходящая через точку  $M_0(\mathbf{r}_0)$  кривой  $\gamma$  перпендикулярно касательной, называется нормальной плоскостью кривой  $\gamma$  в точке  $M_0(\mathbf{r}_0)$ .



Уравнение нормальной плоскости имеет вид

$$(\rho - \mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0) = \mathbf{0} \iff$$

$$\dot{x}_0(X - x_0) + \dot{y}_0(Y - y_0) + \dot{z}_0(Z - z_0) = 0,$$

где  $\rho = \{X, Y, Z\}$  — радиус-вектор точки нормальной плоскости.

**Определение.** Всякая плоскость, проходящая через касательную к кривой  $\gamma$  в точке  $M_0(\mathbf{r}_0)$ , называется касательной плоскостью кривой  $\gamma$  в точке  $M_0(\mathbf{r}_0)$ .

Касательные плоскости образуют пучок. Из этого пучка выделяется одна плоскость, называемая *соприкасающейся*.

**Определение.** Параметризованная кривая  $\mathbf{r}(t)$  называется бирегулярной в точке  $t = t_0$ , если векторы  $\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}}(t_0)$  и  $\ddot{\mathbf{r}}_0 = \ddot{\mathbf{r}}(t_0)$  не коллинеарны:

$$\dot{\mathbf{r}}_0 \nparallel \ddot{\mathbf{r}}_0 \iff [\dot{\mathbf{r}}_0, \ddot{\mathbf{r}}_0] \neq \mathbf{0}.$$

**Предложение.** Свойство бирегулярности точки сохраняется при замене параметра на простой дуге.

**Доказательство.** Рассмотрим замену параметра  $t = t(t^*)$  на простой дуге  $\gamma$ . Напомним, что под параметризацией простой дуги мы всегда понимаем регулярную параметризацию. Имеем:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt^*} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{dt^*} \implies \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^{*2}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \left( \frac{dt}{dt^*} \right)^2 + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{d^2t}{dt^{*2}}. \quad (35)$$

Отсюда следует, что

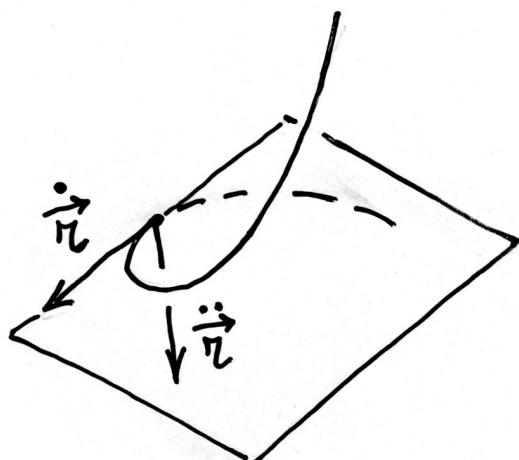
$$\left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt^*}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^{*2}} \right] = \left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right] \left( \frac{dt}{dt^*} \right)^3 \neq \mathbf{0}.$$

Таким образом, бирегулярность характеризует точку простой дуги.

**Определение.** Регулярная параметризованная кривая  $\mathbf{r}(t)$  называется бирегулярной, если она бирегулярна при всех  $t \in U$ .

Простая дуга или кривая называется бирегулярной, если все ее параметризации являются бирегулярными параметризованными кривыми.

**Определение.** Пусть простая дуга  $\gamma$  с параметризацией  $\mathbf{r}(t)$  бирегулярна в точке  $M_0(\mathbf{r}_0)$ , ( $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ ), тогда через точку  $M_0$  можно провести плоскость в направлении двумерного подпространства, натянутого на векторы  $\dot{\mathbf{r}}_0$  и  $\ddot{\mathbf{r}}_0$ . Эта плоскость называется соприкасающейся плоскостью дуги  $\gamma$  (параметризованной кривой  $\mathbf{r}(t)$ ) в точке  $\mathbf{r}_0$ .



Соприкасающаяся плоскость может быть задана следующими уравнениями:

или:

$$(\rho - \mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0, \ddot{\mathbf{r}}_0) = 0 \iff \begin{vmatrix} X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ \dot{x}_0 & \dot{y}_0 & \dot{z}_0 \\ \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 & \ddot{z}_0 \end{vmatrix} = 0$$

или параметрическими уравнениями

$$\rho = \mathbf{r}_0 + \lambda \dot{\mathbf{r}}_0 + \mu \ddot{\mathbf{r}}_0, \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R}.$$

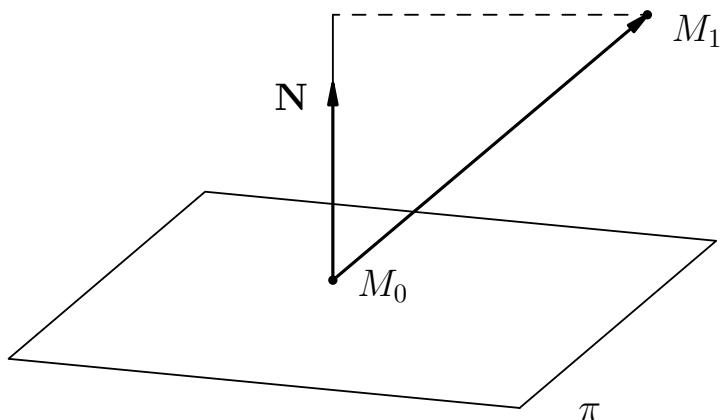
### Геометрический смысл соприкасающейся плоскости.

Напомним, что если плоскость  $\pi$ , имеющая нормальный вектор  $\mathbf{N}$  и проходящая через точку  $M_0$ , задана уравнением

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{N}) = 0,$$

то расстояние  $\text{dist}(M_1, \pi)$  от точки  $M_1(\mathbf{r}_1)$  до плоскости  $\pi$  находится как абсолютная величина проекции вектора  $\overrightarrow{M_0 M_1} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$  на ось с направляющим вектором  $\mathbf{N}$ :

$$\text{dist}(M_1, \pi) = |\text{pr}_{\mathbf{N}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)| = \frac{|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{N})|}{|\mathbf{N}|}. \quad (36)$$



Если направляющее пространство плоскости натянуто на векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , то  $\mathbf{N} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ , и уравнение плоскости можно записать в виде

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = 0 \quad \text{или} \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0.$$

Уравнение

$$\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{N})}{|\mathbf{N}|} = 0 \iff \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}, \mathbf{b})}{|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|} = 0.$$

называется нормальным уравнением плоскости.

Рассмотрим теперь натуральную параметризацию  $\mathbf{r}(s)$  некоторой простой дуги  $\gamma$  и разложим функцию  $\mathbf{r}(s)$  по формуле Тейлора:

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_0 \Delta s + \frac{1}{2} \mathbf{r}''_0 \Delta s^2 + \frac{1}{6} \mathbf{r}'''_0 \Delta s^3 + \mathbf{a}(\Delta s) \Delta s^4. \quad (37)$$

Подставляя это представление для точки кривой  $M(\mathbf{r}(s))$  в нормальное уравнение соприкасающейся плоскости

$$\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0, \mathbf{r}''_0)}{|[\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}''_0]|} = 0$$

и переходя к абсолютному значению полученного числа, найдем расстояние

$$\frac{|(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_0 \Delta s + \frac{1}{2} \mathbf{r}''_0 \Delta s^2 + \frac{1}{6} \mathbf{r}'''_0 \Delta s^3 + \mathbf{a}(\Delta s) \Delta s^4 - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0, \mathbf{r}''_0)|}{|[\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}''_0]|} = \frac{|(\frac{1}{6} \mathbf{r}'''_0 \Delta s^3 + \mathbf{a}(\Delta s) \Delta s^4, \mathbf{r}'_0, \mathbf{r}''_0)|}{|[\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}''_0]|} \quad (38)$$

от точки  $M(\mathbf{r}(s))$  ( $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(s_0 + \Delta s)$ ) кривой  $\gamma$  до соприкасающейся плоскости в точке  $M_0$ .

Если

$$(\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}''_0, \mathbf{r}'''_0) \neq 0, \quad (39)$$

расстояние (38) оказывается величиной третьего порядка малости по сравнению с расстоянием  $|\Delta s|$  между точками  $\mathbf{r}(s_0)$  и  $\mathbf{r}(s_0 + \Delta s)$  вдоль кривой.

В случае же когда

$$(\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}''_0, \mathbf{r}'''_0) = 0, \quad (40)$$

это расстояние оказывается величиной не менее чем четвертого порядка малости по сравнению с  $|\Delta s|$ .

Здесь следует отметить, что условие (40) не зависит от выбора регулярной (в том числе натуральной) параметризации. Действительно, вычисляя выражение для третьей производной в (35)

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt^*} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{dt^*}, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^{*2}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \left( \frac{dt}{dt^*} \right)^2 + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{d^2t}{dt^{*2}}, \quad (41)$$

$$\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^{*3}} = \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} \left( \frac{dt}{dt^*} \right)^3 + \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \cdot 2 \frac{dt}{dt^*} \frac{d^2t}{dt^{*2}} + \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \frac{dt}{dt^*} \frac{d^2t}{dt^{*2}} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{d^3t}{dt^{*3}}, \quad (42)$$

получим

$$\left( \frac{d\mathbf{r}}{dt^*}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^{*2}}, \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^{*3}} \right) = \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt^t}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} \right) \left( \frac{dt}{dt^*} \right)^6. \quad (43)$$

Формула (43) будет использоваться в дальнейшем.

Рассмотрим теперь некоторую касательную плоскость  $\pi$  простой дуги  $\mathbf{r}(s)$  в точке  $M_0(\mathbf{r}(0))$ , не являющуюся соприкасающейся плоскостью. Нормальное уравнение такой плоскости имеет вид

$$\frac{(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0, \mathbf{b})}{|[\mathbf{r}'_0, \mathbf{b}]|} = 0,$$

где вектор  $\mathbf{b}$  не принадлежит соприкасающейся плоскости, то есть векторы  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{r}'_0$  и  $\mathbf{r}''_0$  линейно независимы и, следовательно,

$$(\mathbf{r}''_0, \mathbf{r}'_0, \mathbf{b}) \neq 0.$$

Представляя в этом случае функцию  $\mathbf{r}(s)$  формулой Тейлора

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_0 \Delta s + \frac{1}{2} \mathbf{r}''_0 \Delta s^2 + \mathbf{a}(\Delta s) \Delta s^3, \quad (44)$$

и подставляя выражение (44) в нормальное уравнение касательной плоскости  $\pi$ , найдем расстояние

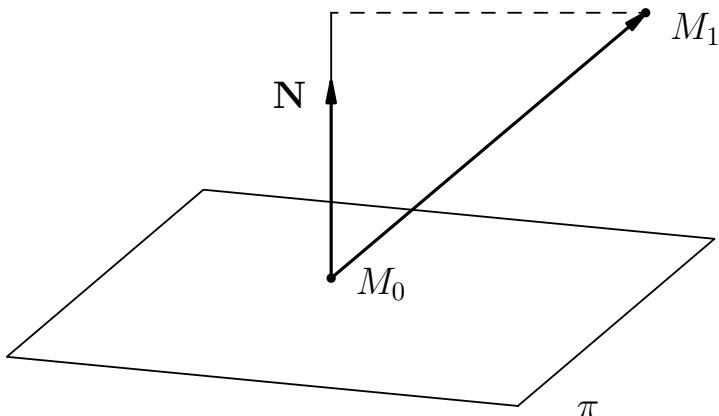
$$\begin{aligned} \frac{|(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_0 \Delta s + \frac{1}{2} \mathbf{r}''_0 \Delta s^2 + \mathbf{a}(\Delta s) \Delta s^3 - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0, \mathbf{b})|}{|[\mathbf{r}'_0, \mathbf{b}]|} &= \\ &= \frac{|(\frac{1}{2} \mathbf{r}''_0 \Delta s^2 + \mathbf{a}(\Delta s) \Delta s^3, \mathbf{r}'_0, \mathbf{b})|}{|[\mathbf{r}'_0, \mathbf{b}]|} \quad (45) \end{aligned}$$

от точки  $M(\mathbf{r}(s))$  кривой до касательной плоскости  $\pi$ . Это расстояние является величиной только второго порядка малости по сравнению с расстоянием  $|\Delta s|$  между точками  $M(\mathbf{r}(s))$  и  $M_0(\mathbf{r}(s_0))$  вдоль кривой.

Обратимся еще раз к общей формуле расстояния от точки до плоскости. Расстояние  $\text{dist}(M_1, \pi)$  от точки  $M_1(\mathbf{r}_1)$  до плоскости  $\pi$ , заданной уравнением  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{N}) = 0$ , является абсолютной величиной проекции вектора  $\overrightarrow{M_0 M_1} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$  на ось с направляющим вектором  $\mathbf{N}$ . Сама же проекция

$$\text{pr}_{\mathbf{N}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) = \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{N})}{|\mathbf{N}|}$$

является положительным числом, если векторы  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$  направлены в одну сторону от плоскости, и отрицательным числом, если эти векторы направлены в разные стороны от плоскости

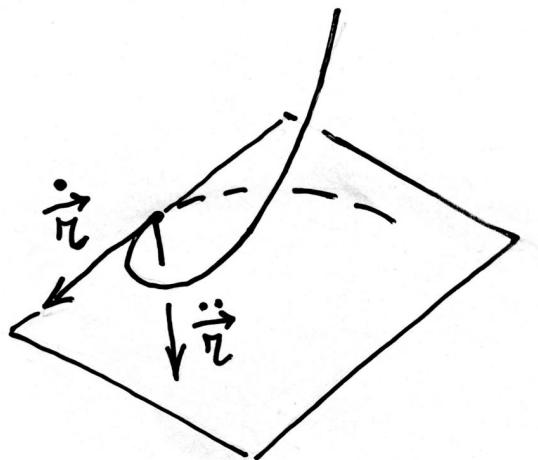


**Определение.** (см. также с. 96) Точка  $M_0(\mathbf{r}(s_0))$  кривой  $\mathbf{r}(s)$  называется точкой уплощения, если выполняется условие (40)

$$(\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}''_0, \mathbf{r}'''_0) = 0.$$

Как следует из формулы (43), это условие не зависит от выбора параметризации кривой.

**Предложение.** При прохождении через точку  $M_0(\mathbf{r}_0)$ , не являющейся точкой уплощения, кривая  $\mathbf{r}(s)$  переходит на другую сторону от соприкасающейся плоскости и остается на той же стороне от касательной плоскости, не являющейся соприкасающейся.



**Доказательство.** Действительно, если точка  $M_0(\mathbf{r}_0)$  не является точкой уплощения, то из формулы (38) следует, что проекция вектора  $\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}_0$  на нормаль к соприкасающейся плоскости имеет вид

$$\frac{\left( \frac{1}{6} \mathbf{r}'''_0 \Delta s^3 + \mathbf{a}(\Delta s) \Delta s^4, \mathbf{r}'_0, \mathbf{r}''_0 \right)}{|[\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}''_0]|} = \frac{\left( \frac{1}{6} \mathbf{r}'''_0, \mathbf{r}'_0, \mathbf{r}''_0 \right)}{|[\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}''_0]|} \Delta s^3 + o(\Delta s^3) \quad (46)$$

и меняет знак при прохождении точки  $M_0(\mathbf{r}_0)$ .

В случае же касательной плоскости, не являющейся соприкасающейся, про-

екция вектора  $\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}_0$  на нормаль к этой плоскости имеет вид (см. (45))

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\mathbf{r}''_0, \mathbf{r}'_0, \mathbf{b}\right)}{|\mathbf{r}'_0, \mathbf{b}|} \Delta s^2 + o(\Delta s^2)$$

и не меняет знака при прохождении точки  $M_0(\mathbf{r}_0)$ .  $\square$

### Натуральный репер в точке кривой.

Рассматриваем простую дугу  $\gamma$  с натуральной параметризацией  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  и бирегулярную точку  $M_0(\mathbf{r}(s_0))$  на этой кривой.

Вектор

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(s_0) = \mathbf{r}'_0 = \frac{d\mathbf{r}}{ds}(s_0)$$

является единичным направляющим вектором касательной к кривой  $\gamma$  в точке  $M_0(\mathbf{r}(s_0))$ . При замене натуральной параметризации  $s^* = -s + s_0$  этот вектор поменяет направление.

Вектор

$$\mathbf{r}''_0 = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}(s_0)$$

лежит в соприкасающейся плоскости кривой  $\gamma$ . Этот вектор  $\mathbf{r}''$  ортогонален касательному вектору и не зависит от выбора натуральной параметризации.

Действительно,  $\mathbf{r}'' = \boldsymbol{\tau}'$  и

$$(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) = 1 \Rightarrow (\boldsymbol{\tau}', \boldsymbol{\tau}) = 0,$$

а замена параметризации  $s^* = -s + s_0$  не изменяет вектор  $\mathbf{r}''$ :

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds^*} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{ds^*} \Rightarrow \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^{*2}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \left( \frac{ds}{ds^*} \right)^2 + \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{d^2s}{ds^{*2}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2},$$

поскольку  $\left( \frac{ds}{ds^*} \right)^2 = 1$  и  $\frac{d^2s}{ds^{*2}} = 0$ .

**Определение.** Вектор

$$\mathbf{r}_0'' = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}(s_0)$$

называется вектором кривизны в точке  $M_0(\mathbf{r}_0)$ .

Кинематический смысл вектора второй производной  $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}(t_0)$  параметризованной кривой  $\mathbf{r}(t)$  — это ускорение, испытываемое материальной частицей в данный момент времени  $t_0$ . Вектор кривизны  $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}(s_0)$  — это ускорение частицы, движущейся по своей траектории с единичной скоростью. Именно наличие этого ускорения в направлении, перпендикулярном направлению движения материальной частицы вынуждает ее поворачивать.

**Определение.** Прямая, проходящая через точку кривой  $M_0(\mathbf{r}_0)$  в направлении вектора кривизны называется главной нормалью кривой  $\gamma$ .

Уравнение главной нормали имеет вид

$$\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}_0 = \lambda \mathbf{r}_0'' \iff \boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{r}_0'',$$

где  $\boldsymbol{\rho}$  — произвольная точка, лежащая на главной нормали, а  $\lambda$  — параметр на главной нормали.

Для единичного вектора, имеющего направление вектора кривизны, применяется обозначение

$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}(s_0) = \frac{\mathbf{r}_0''}{|\mathbf{r}_0''|}. \quad (47)$$

**Определение.** Прямая, проходящая через точку  $M_0(\mathbf{r}_0)$  кривой  $\gamma$  ортогонально соприкасающейся плоскости, называется бинормалью кривой  $\gamma$ .

Уравнение бинормали имеет вид

$$\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}_0 = \lambda [\mathbf{r}_0', \mathbf{r}_0''] \iff \boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_0 + \lambda [\mathbf{r}_0', \mathbf{r}_0''].$$

В качестве единичного направляющего вектора бинормали принято выбирать вектор

$$\beta = [\tau, \nu].$$

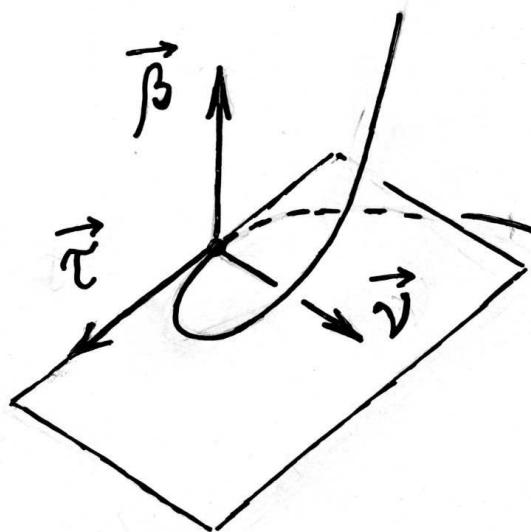
В этом случае тройка векторов

$$\{\tau, \nu, \beta\}$$

образует правый ортонормированный базис в евклидовом векторном пространстве  $E_3$ , ассоциированном с аффинным пространством  $\mathcal{E}_3$ , а набор

$$(M_0(\mathbf{r}_0); \tau, \nu, \beta)$$

представляет собой правый ортонормированный репер с началом в точке кривой  $M_0(\mathbf{r}_0)$ . Этот репер называется *натуральным репером*, или *репером Френе*, или *相伴的三棱柱* простой дуги, параметризованной натуральным параметром.



При замене параметра  $s^* = -s$  репер Френе преобразуется следующим образом:

$$\tau^* = -\tau, \quad \nu^* = \nu, \quad \beta^* = -\beta \quad (48)$$

Репер Френе определяет систему координат в пространстве  $\mathcal{E}_3$ , связанную с данной точкой  $M_0(\mathbf{r}_0)$  кривой  $\gamma$ :

$\tau$  — направляющий вектор первой координатной оси,

$\nu$  — направляющий вектор второй координатной оси, а

$\beta$  — направляющий вектор третьей координатной оси.

Соприкасающаяся и нормальная плоскости являются координатными плоскостями этой системы координат.

**Определение.** Третья координатная плоскость, содержащая касательную и бинормаль, называется спрямляющей плоскостью.

Поскольку вектор главной нормали  $\nu$  является нормальным вектором спрямляющей плоскости, ее уравнение имеет вид

$$(\rho - \mathbf{r}_0, \nu) = 0.$$

Если простая дуга задана уравнением  $\mathbf{r}(t)$ , где параметр  $t$  не является натуральным, но точка  $M_0(\mathbf{r}_0)$ ,  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ , является бирегулярной для параметризованной кривой  $\mathbf{r}(t)$ , то векторы репера Френе можно вычислить следующим образом. Поскольку  $\tau$  — единичный касательный вектор, то

$$\tau = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}.$$

Векторное произведение  $[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]$  ортогонально соприкасающейся плоскости, поэтому

$$[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}] = \lambda \beta. \quad (49)$$

В формуле (49)  $\lambda > 0$ . Действительно, при замене параметра

$$t^* = t^*(t), \quad \text{такой что} \quad \frac{dt^*}{dt} > 0$$

(мы предполагаем, что направление возрастания параметра на кривой остается прежним), имеют место формулы

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt^*} = \frac{dt}{dt^*} \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^{*2}} = \left( \frac{dt}{dt^*} \right)^2 \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{d^2t}{dt^{*2}} \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

откуда

$$\left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt^*}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^{*2}} \right] = \left( \frac{dt}{dt^*} \right)^3 \left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right].$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]}{|[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|}.$$

Поскольку

$$(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}) = 1,$$

то тройка  $\{\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}\}$  является правой и вектор  $\boldsymbol{\nu}$  может быть найден теперь по формуле

$$\boldsymbol{\nu} = [\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}] = \frac{[[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}], \dot{\mathbf{r}}]}{|[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]| |\dot{\mathbf{r}}|}.$$

**Пример.** Найдем репер Френе для кривой

$$\mathbf{r}(t) : \quad x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3.$$

Эта кривая лежит на параболическом цилиндре

$$x^2 - y = 0.$$

Вычислим векторы первой и второй производных векторной функции  $\mathbf{r}(t)$ .

$$\dot{\mathbf{r}}(t) : \quad \dot{x} = 1, \quad \dot{y} = 2t, \quad \dot{z} = 3t^2,$$

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) : \quad \ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 2, \quad \ddot{z} = 6t.$$

Для векторных произведений этих производных получаем выражения

$$[\dot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t)] : \quad \{6t^2, -6t, 2\},$$

$$[[\dot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t)], \dot{\mathbf{r}}(t)] : \quad \{-18t^3 - 4t, -18t^4 + 2, 12t^3 + 6t\}.$$

В точке  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$  с координатами  $(0, 0, 0)$  имеем:

$$\boldsymbol{\tau} = \{1, 0, 0\}, \quad \boldsymbol{\beta} = \{0, 0, 1\}, \quad \boldsymbol{\nu} = \{0, 1, 0\}.$$

В точке  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(1)$  с координатами  $(1, 1, 1)$  имеем:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\sqrt{14}}\{1, 2, 3\}, \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{1}{\sqrt{19}}\{3, -3, 1\}, \quad \boldsymbol{\nu} = \frac{1}{\sqrt{266}}\{-11, -8, 9\}.$$

### Формулы Серре–Френе.

При изменении натурального параметра  $s$  точка  $\mathbf{r}(s)$  перемещается по прямой дуге  $\gamma$ . При этом происходит непрерывное изменение репера Френе

$$(M(\mathbf{r}(s)); \boldsymbol{\tau}(s), \boldsymbol{\nu}(s), \boldsymbol{\beta}(s)). \quad (50)$$

Чтобы выяснить, как именно происходит это изменение в данной точке  $\mathbf{r}_0$ , нужно вычислить производные переменных векторов репера

$$\boldsymbol{\tau}'(s), \quad \boldsymbol{\nu}'(s), \quad \boldsymbol{\beta}'(s). \quad (51)$$

Поскольку репер Френе (50) определяет систему координат, естественным образом связанную с данной точкой, то векторы производных (51) естественно задать их координатами именно в этой системе координат.

Рассмотрим сначала более общую ситуацию, когда в каждой точке  $\mathbf{r}(s)$  кривой  $\gamma$  задан ортонормированный базис

$$\{\mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_2(s), \mathbf{e}_3(s)\}, \quad (52)$$

дифференцируемо зависящий от  $s$ . Такой базис (вместе с точкой  $\mathbf{r}(s)$ ) называют *подвижным* репером. Производные векторов этого репера  $\mathbf{e}'_i(s)$  можно разложить по векторам этого же репера:

$$\mathbf{e}'_i(s) = a_{i1}\mathbf{e}_1(s) + a_{i2}\mathbf{e}_2(s) + a_{i3}\mathbf{e}_3(s).$$

При этом возникает матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad (53)$$

составленная из коэффициентов разложений векторов  $\mathbf{e}'_i(s)$ , расположенных по строкам.

**Предложение.** *Матрица (53) кососимметрична:  $a_{ij} = -a_{ji}$ .*

**Доказательство.** Если  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  — ортонормированный базис и

$$\mathbf{v} = v^1\mathbf{e}_1 + v^2\mathbf{e}_2 + v^3\mathbf{e}_3 \quad (54)$$

— разложение вектора  $\mathbf{v}$  по этому базису, то для коэффициентов разложения (54) координат вектора  $\mathbf{v}$  имеют место следующие выражения:

$$v^1 = (\mathbf{v}, \mathbf{e}_1), \quad v^2 = (\mathbf{v}, \mathbf{e}_2), \quad v^3 = (\mathbf{v}, \mathbf{e}_3). \quad (55)$$

Действительно, поскольку  $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$  при  $i \neq j$ , а  $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ , то умножая соотношение (54) скалярно на векторы  $\mathbf{e}_i$ , получим формулы (55).

Продифференцировав теперь соотношения

$$(\mathbf{e}_i(s), \mathbf{e}_i(s)) = 1, \quad (\mathbf{e}_i(s), \mathbf{e}_j(s)) = 0,$$

имеющие место для векторов переменного базиса (52), получим:

$$(\mathbf{e}_i(s), \mathbf{e}_i(s))' = 2(\mathbf{e}'_i(s), \mathbf{e}_i(s)) = 0 \Rightarrow a_{ii} = 0, i = 1, 2, 3.$$

$$(\mathbf{e}_i(s), \mathbf{e}_j(s))' = (\mathbf{e}'_i(s), \mathbf{e}_j(s)) + (\mathbf{e}_i(s), \mathbf{e}'_j(s)) = 0 \Rightarrow a_{ij} + a_{ji} = 0, i \neq j.$$

□

Вернемся к реперу Френе  $\{\boldsymbol{\tau}(s), \boldsymbol{\nu}(s), \boldsymbol{\beta}(s)\}$  и вычислим матрицу коэффициентов разложения векторов производных (51)

$$\boldsymbol{\tau}'(s), \quad \boldsymbol{\nu}'(s), \quad \boldsymbol{\beta}'(s)$$

по векторам репера Френе. Поскольку

$$\boldsymbol{\nu}(s) \parallel \boldsymbol{\tau}'(s),$$

то  $a_{13} = 0$ , следовательно и  $a_{31} = 0$ , поэтому матрица (53) для репера Френе имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ 0 & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}. \quad (56)$$

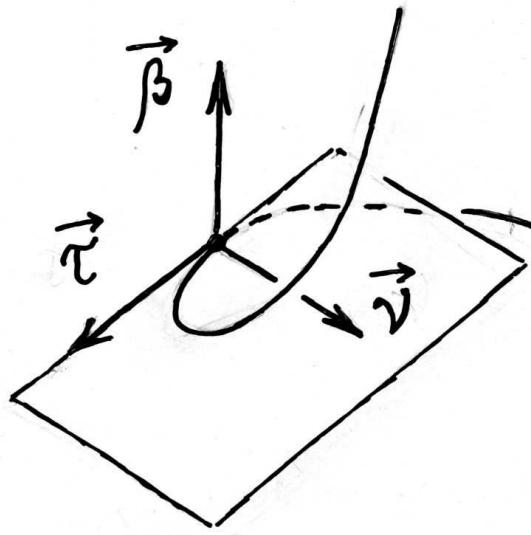
Принято обозначать элементы этой матрицы следующим образом:

$$a_{12} = k(s), \quad a_{23} = \kappa(s).$$

При этом формулы разложения производных векторов натурального репера по векторам самого этого репера принимают вид

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}' &= k\boldsymbol{\nu} \\ \boldsymbol{\nu}' &= -k\boldsymbol{\tau} + \kappa\boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta}' &= -\kappa\boldsymbol{\nu} \end{aligned} \quad (57)$$

Формулы (57) называются *формулами Серре–Френе*.



Выясним, что происходит с коэффициентами в формулах Серре–Френе при замене натурального параметра  $s^* = -s$ . Напомним, что при этом имеют место соотношения (48):

$$\tau^* = -\tau, \quad \nu^* = \nu, \quad \beta^* = -\beta.$$

Поскольку вектор кривизны  $\mathbf{r}''(s)$  не меняется при замене натуральной параметризации и (см. (47))

$$\nu(s) = \frac{\mathbf{r}''(s)}{|\mathbf{r}''(s)|},$$

то  $k(s) = k(s^*)$  в данной точке  $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(s^*)$  кривой  $\gamma$ , то есть  $k(s)$  не зависит от выбора натурального параметра, и  $k(s) > 0$  (мы рассматриваем бирегулярную точку кривой!).

Таким образом,  $k(s)$  — инвариант точки кривой.

**Определение.** Число  $k(s)$  называется *кривизной кривой  $\gamma$  в точке  $\mathbf{r}(s)$* .

Для коэффициента  $\kappa(s)$  в формулах Серре–Френе имеем:

$$\frac{d\beta^*}{ds^*} = -\frac{d\beta}{ds^*} = -\frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{ds^*} = -\frac{d\beta}{ds}(-1) = \frac{d\beta}{ds} = -\kappa(s)\nu = -\kappa(s)\nu^*.$$

Отсюда следует, что  $\kappa(s^*) = \kappa(s)$  в данной точке  $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(s^*)$  кривой  $\gamma$ .

Таким образом,  $\kappa(s)$  — инвариант точки кривой.

**Определение.** Число  $\kappa(s)$  называется кручением кривой  $\gamma$  в точке  $\mathbf{r}(s)$ .

Отметим, что кручение определено только для бирегулярных точек кривой, в то время как кривизна, которая может равняться нулю, определена для всех точек кривой.

### Кинематический смысл кривизны и кручения.

Рассмотрим твердое тело  $U$  (то есть трехмерную область в  $\mathcal{E}_3$ ), вращающееся вокруг некоторой прямой (оси вращения)  $\ell$  с угловой скоростью  $\omega$ .

Произвольная точка  $M$ , принадлежащая вращающемуся телу  $U$ , движется по окружности, центр которой лежит на оси вращения и которая расположена в плоскости, перпендикулярной оси вращения.

Можно считать, что вместе с телом  $U$  вокруг оси  $\ell$  вращается и все пространство  $\mathcal{E}_3$ . Тогда угловая скорость  $\omega$ , как скорость изменения угла поворота тела  $U$ , — это скалярная скорость, с которой перемещается точка, находящаяся на расстоянии единицы от оси вращения (такая точка движется по окружности единичного радиуса). При этом скалярная скорость движения произвольной точки  $M$  с радиус-вектором  $\rho$ , принадлежащей вращающемуся телу  $U$ , равна произведению угловой скорости на расстояние точки  $M$  от оси

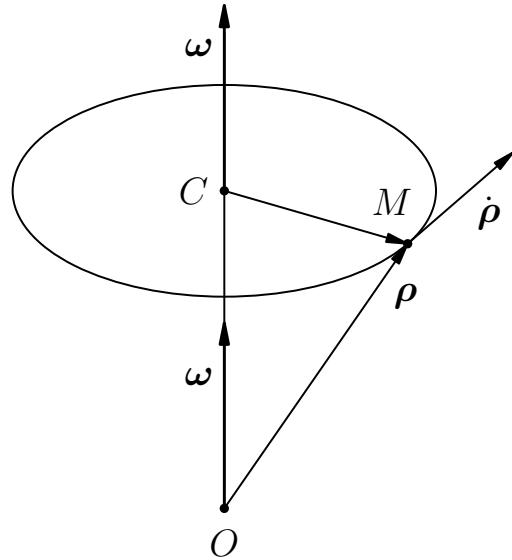
вращения  $\ell$ :

$$\left| \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} \right| = \omega \cdot \text{dist}(M, \ell).$$

Направление вращения определяется вектором  $\boldsymbol{\omega}$ , лежащим на оси вращения, таким что  $|\boldsymbol{\omega}| = \omega$ . (Этот вектор и превращает прямую  $\ell$  в направленную прямую или ось!) Вектор  $\boldsymbol{\omega}$  ориентирует всякую плоскость  $\pi$ , перпендикулярную оси вращения, и вращение точки  $M(\boldsymbol{\rho}_M) \in \pi$  осуществляется в положительном направлении по отношению к этой ориентации. (В физическом пространстве, если смотреть на плоскость  $\pi$  из того полупространства, на которое указывает вектор  $\boldsymbol{\omega}$ , вращение осуществляется против часовой стрелки.)

Пусть точка  $O \in \mathcal{E}_3$ , от которой откладываются радиус-векторы всех точек пространства  $\mathcal{E}_3$  (начало репера), лежит на оси вращения  $\ell$ . Тогда векторная скорость  $\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}$  движения точки  $M(\boldsymbol{\rho})$  находится следующим образом:

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}, \overrightarrow{CM}] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\rho}]. \quad (58)$$



Будем теперь смотреть на репер Френе как на твердое тело и найдем мгновенную угловую скорость вращения этого репера при равномерном движении

точки по кривой со скоростью  $ds/dt = 1$  (параметр  $t$  здесь понимаем как время, таким образом, полагаем  $s = t$ ). Точка кривой при этом является той точкой  $O$ , от которой откладываются радиус-векторы, а векторы репера — это радиус-векторы точек репера, рассматриваемого как твердое тело.

Из формулы (58) получаем следующую систему уравнений для нахождения вектора  $\omega$ :

$$\frac{d\tau}{dt} = [\omega, \tau], \quad \frac{d\nu}{dt} = [\omega, \nu], \quad \frac{d\beta}{dt} = [\omega, \beta]. \quad (59)$$

Пусть вектор  $\omega$  имеет следующее разложение по векторам репера Френе:

$$\omega = \omega^1 \tau + \omega^2 \nu + \omega^3 \beta. \quad (60)$$

Подставляя выражение (60) для вектора  $\omega$  в уравнения (59), получим систему уравнений на координаты вектора  $\omega$ :

$$\begin{aligned} \tau' &= -\omega^2 \beta + \omega^3 \nu \\ \nu' &= \omega^1 \beta - \omega^3 \tau \\ \beta' &= -\omega^1 \nu + \omega^2 \tau \end{aligned} \quad (61)$$

Сравнивая матрицу коэффициентов разложений (61) с матрицей коэффициентов в формулах Серре–Френе (57)

$$\begin{aligned} \tau' &= k \nu \\ \nu' &= -k \tau + \varkappa \beta \\ \beta' &= -\varkappa \nu \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega^3 & -\omega^2 \\ -\omega^3 & 0 & \omega^1 \\ \omega^2 & -\omega^1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \varkappa \\ 0 & -\varkappa & 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\omega^3 = k, \quad \omega^2 = 0, \quad \omega^1 = \kappa,$$

и

$$\boldsymbol{\omega} = \kappa \boldsymbol{\tau} + k \boldsymbol{\beta}. \quad (62)$$

Вектор (62), являющийся вектором мгновенного вращения репера Френе, называется *вектором Дарбу*.

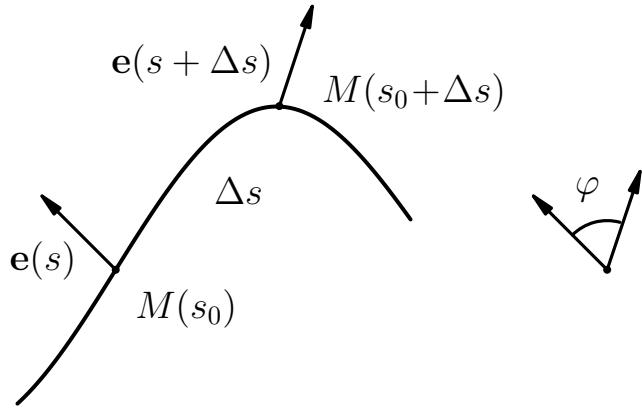
Вектор Дарбу лежит в спрямляющей плоскости кривой. Мгновенное вращение вокруг оси, направляющим вектором которой является вектор Дарбу, можно представить в виде одновременно происходящих двух вращений: вокруг касательной с угловой скоростью  $\kappa$  и вокруг бинормали с угловой скоростью  $k$ .

Второе вращение представляет собой меру «искривления» кривой: касательный вектор  $\boldsymbol{\tau}$  поворачивается в соприкасающейся плоскости (вокруг бинормали) в направлении вектора главной нормали  $\boldsymbol{\nu}$ .

Первое вращение представляет собой меру «закрученности» кривой: вектор главной нормали  $\boldsymbol{\nu}$  поворачивается в нормальной плоскости (вокруг касательной) в направлении вектора бинормали  $\boldsymbol{\beta}$ , если  $\kappa > 0$  и в противоположном направлении, если  $\kappa < 0$ .

### **Геометрический смысл кривизны кривой.**

Пусть в каждой точке кривой  $\gamma$ , заданной уравнением  $\mathbf{r}(s)$ , где  $s$  — натуральный параметр, задан единичный вектор  $\mathbf{e}(s)$  и функция  $\mathbf{e}(s)$  дифференцируема. При движении точки по кривой вектор  $\mathbf{e}(s)$  поворачивается, и пусть  $\varphi = \varphi(\Delta s)$  — угол между векторами  $\mathbf{e}(s)$  и  $\mathbf{e}(s + \Delta s)$ ,  $\varphi(\Delta s) > 0$ .



**Предложение.**

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi(\Delta s)}{|\Delta s|} = |\mathbf{e}'(s)|.$$

**Доказательство.** Действительно,

$$\begin{aligned} |\mathbf{e}'(s)| &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{e}(s + \Delta s) - \mathbf{e}(s)|}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(\mathbf{e}(s + \Delta s) - \mathbf{e}(s))^2}}{|\Delta s|} = \\ &\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 - 2 \cos \varphi}}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{2 |\sin \frac{\varphi}{2}|}{|\Delta s|} = \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\sin \frac{\varphi}{2}|}{\frac{\varphi}{2}} \times \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi}{|\Delta s|}. \quad \square \end{aligned}$$

Поскольку из формул Серре–Френе следует, что

$$k(s) = |\boldsymbol{\tau}'| \quad |\boldsymbol{\kappa}(s)| = |\boldsymbol{\beta}'|,$$

то, как следствие доказанного предложения, получаем следующие геометрические характеристики кривизны и кручения кривой.

*Кривизна кривой  $k(s)$  в точке  $M(\mathbf{r}(s))$  является пределом отношения угла поворота касательной на дуге от  $\mathbf{r}(s)$  до  $\mathbf{r}(s + \Delta s)$  к длине этой дуги  $|\Delta s|$  при  $\Delta s \rightarrow 0$ , или, другими словами, кривизна кривой есть скорость вращения касательной прямой при движении точки по кривой с единичной скоростью.*

*Абсолютная величина кручения кривой*  $|\kappa(s)|$  *в точке*  $M(\mathbf{r}(s))$  *является пределом отношения угла поворота бинормали на дуге от*  $\mathbf{r}(s)$  *до*  $\mathbf{r}(s + \Delta s)$  *к длине этой дуги*  $|\Delta s|$  *при*  $\Delta s \rightarrow 0$ , *или, другими словами, кручение кривой есть скорость вращения соприкасающейся плоскости при движении точки по кривой с единичной скоростью.*

Поскольку кривизна измеряет скорость изменения направления касательной к кривой, она показывает, насколько кривая отклоняется по своей форме от прямой линии.

Для оценки искривленности кривой  $\gamma$  с уравнением  $\mathbf{r}(s)$  в данной точке  $M_0(\mathbf{r}(s_0))$  по значению ее кривизны в данной точке, рассмотрим окружность — кривую, у которой любые два отрезка одинаковой длины могут быть совмещены поворотом и которая поэтому имеет одну и ту же кривизну во всех своих точках.

Окружность радиуса  $r$  имеет уравнение

$$\mathbf{r}(t) = p \mathbf{e}(t) = p(\mathbf{i} \cos t + \mathbf{j} \sin t).$$

Натуральный параметр на окружности имеет вид  $s = pt$ . Поэтому натуральная параметризация окружности имеет вид

$$\mathbf{r}(s) = p \mathbf{e}\left(\frac{s}{p}\right). \quad (63)$$

Напомним, что для производной векторной круговой функции  $\mathbf{e}(t)$  имеется специальное обозначение

$$\mathbf{e}'(t) = \mathbf{g}(t) = -\mathbf{i} \sin t + \mathbf{j} \cos t = \mathbf{e}\left(t + \frac{\pi}{2}\right).$$

При этом

$$\mathbf{g}'(t) = -\mathbf{e}(t).$$

Продифференцируем два раза уравнение (63):

$$\mathbf{r}' = \mathbf{g}\left(\frac{s}{p}\right), \quad \mathbf{r}'' = -\frac{1}{p} \mathbf{e}\left(\frac{s}{p}\right). \quad (64)$$

Из формулы (64) следует, что кривизна окружности радиуса  $p$  равна

$$k(s) = |\mathbf{r}''| = \frac{1}{p} = \text{const.}$$

**Определение.** Величину

$$p(s) = \frac{1}{k(s)}$$

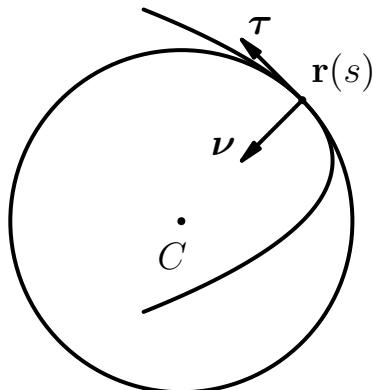
называют радиусом кривизны кривой  $\gamma$  в данной точке  $M(\mathbf{r}(s))$ .

Точку  $C(s)$  с радиус-вектором

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}(s) + p\boldsymbol{\nu}(s)$$

называют центром кривизны кривой  $\gamma$  в точке  $\mathbf{r}(s)$ .

Окружность  $\omega(s)$  с центром в точке  $C(s)$  и радиусом  $p(s) = 1/k(s)$  называется **соприкасающейся окружностью** кривой в данной точке  $M(\mathbf{r}(s))$ .



Вычислим расстояние между точками кривой и соприкасающейся окружности, удаленными от точки  $\mathbf{r}_0$  на одно и тоже расстояние  $\Delta s$  вдоль этих кри-

вых. Для этого рассмотрим систему координат в  $\mathcal{E}_3$  и натуральный параметр на кривой  $\gamma$ , по отношению к которым соприкасающаяся плоскость совпадает с плоскостью  $Oxy$ ,  $s_0 = 0$ , начало координат совпадает с центром кривизны  $C(0)$ ,  $\mathbf{r}(0) = p(0)\mathbf{i}$  и  $\boldsymbol{\tau}(0) = \mathbf{j}$ . Уравнение соприкасающейся окружности  $\omega(0)$  в этой системе координат имеет вид

$$\boldsymbol{\rho}(s) = p\mathbf{e}\left(\frac{s}{p}\right), \quad \text{где } p = p(0).$$

При этом  $\boldsymbol{\rho}(0) = \mathbf{r}(0)$ , а векторы первой и второй производных функции  $\boldsymbol{\rho}(s)$  при  $s = 0$  равны

$$\boldsymbol{\rho}'(0) = \mathbf{g}(0) = \mathbf{j}, \quad \boldsymbol{\rho}''(0) = -\frac{1}{p}\mathbf{e}(0) = -k(0)\mathbf{i} = \mathbf{r}''(0).$$

Поскольку у векторных функций  $\mathbf{r}(s)$  и  $\boldsymbol{\rho}(s)$  при  $s = 0$  совпадают первые и вторые производные, то

$$|\mathbf{r}(s) - \boldsymbol{\rho}(s)| = \frac{1}{6} |\mathbf{r}'''(0) - \boldsymbol{\rho}'''(0) + \mathbf{a}(s)| |s^3|, \quad |\mathbf{a}(s)| = o(s^3),$$

является величиной не менее чем третьего порядка малости по сравнению с  $s$  (в окрестности  $s_0 = 0$ ).

## 5 Формулы для вычисления кривизны и кручения.

Сначала рассмотрим случай, когда кривая параметризована натуральным параметром:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ .

Имеем

$$\mathbf{r}' = \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{r}'' = \boldsymbol{\tau}' = k\boldsymbol{\nu}, \quad [\mathbf{r}', \mathbf{r}''] = k\boldsymbol{\beta}, \quad (65)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}''' = (k\boldsymbol{\nu})' &= k'\boldsymbol{\nu} + k\boldsymbol{\nu}' = k'\boldsymbol{\nu} + k(-k\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\beta}) = \\ &- k^2\boldsymbol{\tau} + k'\boldsymbol{\nu} + k\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\beta}. \quad (66)\end{aligned}$$

Из выражений (65) и (66) находим

$$(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''') = k^2\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}) = k^2\boldsymbol{\kappa},$$

откуда получаем следующие выражения для кривизны и кручения

$$k = |\mathbf{r}''| = |[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']|, \quad \boldsymbol{\kappa} = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{|\mathbf{r}''|^2}. \quad (67)$$

В координатах эти формулы принимают вид

$$k = \sqrt{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2}. \quad (68)$$

Случай произвольной параметризации  $\mathbf{r}(t)$  можно свести к случаю натуральной параметризации  $\mathbf{r}(s)$ , используя формулу  $t = t(s)$ , связывающую параметры  $t$  и  $s$ . Производные по параметру  $t$  обозначаем точкой  $\dot{\mathbf{r}}$ . Имеем:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(t(s)) \Rightarrow \mathbf{r}' &= \dot{\mathbf{r}} t', \quad \mathbf{r}'' = \ddot{\mathbf{r}} (t')^2 + \dot{\mathbf{r}} t'', \\ \mathbf{r}''' &= \dddot{\mathbf{r}} (t')^3 + 3\ddot{\mathbf{r}} t' t'' + \dot{\mathbf{r}} t''',\end{aligned}$$

откуда

$$[\mathbf{r}', \mathbf{r}''] = [\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}](t')^3, \quad (\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''') = (\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}})(t')^6.$$

Учитывая, что

$$|t'| = \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}|}, \quad \text{поскольку} \quad 1 = |\mathbf{r}'| = |\dot{\mathbf{r}}| |t'|,$$

получаем следующие формулы для кривизны и кручения:

$$k = |[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']| = |[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]| \cdot |(t')|^3 = \frac{|[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3},$$

$$\kappa = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{|\mathbf{r}''|^2} = \frac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}})(t')^6}{|[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|^2 \cdot |(t')|^6} = \frac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}})}{|[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|^2}.$$

В координатах эти формулы принимают вид

$$k = \frac{\sqrt{\left| \begin{array}{cc} \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{y} & \ddot{z} \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} \dot{z} & \dot{x} \\ \ddot{z} & \ddot{x} \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{array} \right|^2}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\kappa = \frac{\left| \begin{array}{ccc} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{y} & \ddot{z} \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} \dot{z} & \dot{x} \\ \ddot{z} & \ddot{x} \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{array} \right|^2}.$$
(69)

**Определение.** Точка кривой, в которой кривизна кривой обращается в нуль, называется точкой спрямления.

Поскольку  $|\mathbf{r}''(s_0)| = 0$  в точке спрямления  $\mathbf{r}(s_0)$ , то и  $\mathbf{r}''(s_0) = 0$ . Таким образом, в точке спрямления нарушается бирегулярность кривой. Название «точка спрямления» объясняется утверждением следующего предложения.

**Предложение.** Если кривизна  $k(s)$  кривой обращается в нуль на некотором отрезке  $[s_0, s_1] \subset \mathbf{R}$ , то кривая на этом отрезке является частью прямой линии.

**Доказательство.**

$$k(s) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\tau}' = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\tau} = \mathbf{a} = const \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{a} = \text{const} \Rightarrow \mathbf{r}(s) = s\mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad \text{где } \mathbf{b} = \text{const} \quad \square$$

Ясно также, что прямая линия — это кривая с нулевой кривизной (понятие «кривая», таким образом, в дифференциальной геометрии является понятием, включающим в себя в частном случае и прямую линию).

**Определение.** Точка кривой, в которой кручение кривой обращается в нуль, называется точкой уплощения.

Название «точка уплощения» (см. также с. 76) объясняется утверждением следующего предложения.

**Предложение.** Если кручение  $\kappa(s)$  кривой обращается в нуль на некотором отрезке  $[s_0, s_1] \subset \mathbf{R}$ , то на этом отрезке кривая принадлежит некоторой плоскости.

**Доказательство.** Имеем

$$\kappa(s) = 0 \Rightarrow \beta' = -\kappa \nu = \mathbf{0} \Rightarrow \beta(s) = \text{const.}$$

Отсюда

$$(\mathbf{r}, \beta)' = (\mathbf{r}', \beta) = (\tau, \beta) = 0 \Rightarrow (\mathbf{r}, \beta) = c = \text{const},$$

а это и означает, что  $\mathbf{r}(s)$  удовлетворяет уравнению плоскости

$$(\mathbf{r}, \beta) = c$$

с нормальным вектором  $\beta$  (и отстоящей от начала координат  $O$  на расстоянии  $|c|$ ).  $\square$

Если  $\kappa(s_0) = 0$  в точке  $\mathbf{r}(s_0)$  кривой  $\mathbf{r}(s)$ , то в окрестности этой точки расстояние от точки  $\mathbf{r}(s_0 + \Delta s)$  до соприкасающейся плоскости является ве-

личиной не менее чем четвертого порядка малости по сравнению с  $|\Delta s|$  (см. с. 74).

**Теорема (основная теорема теории кривых).** *Пусть у двух кривых  $\mathbf{r}_1(s)$  и  $\mathbf{r}_2(s)$  в  $\mathcal{E}_3$  с общей областью изменения натуральных параметров  $s \in (a, b) \subset \mathbf{R}$  совпадают при всех  $s$  кривизны и кручения:*

$$k_1(s) = k_2(s) = k(s), \quad \varkappa_1(s) = \varkappa_2(s) = \varkappa(s) \quad \text{и} \quad k(s) > 0.$$

*Тогда существует такое движение пространства  $\mathcal{E}_3$ , при котором первая кривая переходит во вторую.*

**Доказательство.** Выберем некоторое значение  $s_0 \in (a, b)$  и осуществим движение пространства  $\mathcal{E}_3$ , при котором репер

$$(M_1(\mathbf{r}_1(s_0)); \boldsymbol{\tau}_1(s_0), \boldsymbol{\nu}_1(s_0), \boldsymbol{\beta}_1(s_0))$$

переходит в репер

$$M_2(\mathbf{r}_2(s_0)); \boldsymbol{\tau}_2(s_0), \boldsymbol{\nu}_2(s_0), \boldsymbol{\beta}_2(s_0).$$

Покажем, что при этом ассоциированный изоморфизм евклидовых векторных пространств при любом  $s$  отображает векторы

$$\boldsymbol{\tau}_1(s), \quad \boldsymbol{\nu}_1(s), \quad \boldsymbol{\beta}_1(s)$$

в векторы

$$\boldsymbol{\tau}_2(s), \quad \boldsymbol{\nu}_2(s), \quad \boldsymbol{\beta}_2(s)$$

соответственно. Для этого рассмотрим функцию

$$f(s) = (\boldsymbol{\tau}_1(s), \boldsymbol{\tau}_2(s)) + (\boldsymbol{\nu}_1(s), \boldsymbol{\nu}_2(s)) + (\boldsymbol{\beta}_1(s), \boldsymbol{\beta}_2(s)) \quad (70)$$

и вычислим ее производную, используя формулы Серре–Френе. Имеем:

$$\begin{aligned} f' &= (k\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\tau}_2) + (\boldsymbol{\tau}_1, k\boldsymbol{\nu}_2) + (-k\boldsymbol{\tau}_1 + \varkappa\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\nu}_2) + \\ &\quad + (\boldsymbol{\nu}_1, -k\boldsymbol{\tau}_2 + \varkappa\boldsymbol{\beta}_2) + (-\varkappa\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\beta}_2) + (\boldsymbol{\beta}_1, -\varkappa\boldsymbol{\nu}_2) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$f = \text{const} = f(s_0) = \boldsymbol{\tau}_1(s_0)^2 + \boldsymbol{\nu}_1(s_0)^2 + \boldsymbol{\beta}_1(s_0)^2 = 3.$$

Поскольку функция (70), как сумма трех скалярных произведений единичных векторов, представляет собой сумму трех косинусов, которая может равняться 3 только тогда, когда в каждом произведении перемножаются равные векторы, то

$$\boldsymbol{\tau}_1(s) = \boldsymbol{\tau}_2(s), \quad \boldsymbol{\nu}_1(s) = \boldsymbol{\nu}_2(s), \quad \boldsymbol{\beta}_1(s) = \boldsymbol{\beta}_2(s).$$

Первое равенство,  $\boldsymbol{\tau}_1(s) = \boldsymbol{\tau}_2(s)$ , влечет

$$\mathbf{r}'_1(s) = \mathbf{r}'_2(s) \implies \mathbf{r}_2(s) = \mathbf{r}_1(s) + \mathbf{c},$$

где  $\mathbf{c}$  — постоянный вектор. Поскольку  $\mathbf{r}_2(s_0) = \mathbf{r}_1(s_0)$ , отсюда следует, что

$$\mathbf{c} = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \mathbf{r}_2(s) = \mathbf{r}_1(s) \quad \text{для всех } s \in (a, b). \quad \square$$

**Теорема.** Пусть заданы две непрерывные функции

$$k(s) > 0 \quad u \quad \varkappa(s), \quad s \in (a, b) \subset \mathbf{R}.$$

Тогда существует бирегулярная параметризованная кривая  $\mathbf{r}(s)$ , заданная векторной функцией натурального параметра  $s \in (a, b)$ , для которой функция  $k(s)$  является кривизной, а функция  $\varkappa(s)$  кручением.

**Доказательство** этой теоремы не предполагается в настоящем курсе. Можно прочитать его в конспекте лекций, предназначенных для отделения математики.

### Уравнения

$$k = k(s), \quad \varkappa = \varkappa(s)$$

называются *натуральными уравнениями* бирегулярной параметризованной кривой в  $\mathcal{E}_3$ .

**Замечание.** В доказанной теореме мы рассматривали параметризованные кривые, поскольку функция  $\mathbf{r}(s)$ , возникающая в процессе интегрирования натуральных уравнений  $k = k(s)$  и  $\varkappa = \varkappa(s)$  может определять простую дугу только в некоторой окрестности каждого значения  $s_0 \in (a, b)$ , а на всей области изменения параметра  $s \in (a, b)$  параметризованная кривая  $\mathbf{r}(s)$  может проходить многократно через некоторые точки и даже некоторые участки своей траектории. Простейшим примером могут служить натуральные уравнения  $k(s) = 1$ ,  $\varkappa(s) = 0$ , которые определяют кривую  $\mathbf{r} = \mathbf{e}(s) = \mathbf{i} \cos s + \mathbf{j} \sin s$  при  $b - a > 2\pi$ .

## 6 Кривые на плоскости

При изучении геометрии плоскости  $\mathcal{E}_2$  удобно считать, что эта плоскость вложена в трехмерное пространство  $\mathcal{E}_3$ . В этом случае правую прямоугольную систему координат на плоскости  $\mathcal{E}_2$ , определяемую репером  $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$ , можно считать системой координат, индуцированной на плоскости с уравнением  $z = 0$  правой прямоугольной системой координат в  $\mathcal{E}_3$ , определяемой репе-

ром  $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ . Это позволяет выводить уравнения, относящиеся к кривым на плоскости, из уже известных уравнений для пространственных кривых.

Уравнение касательной  $\rho = \mathbf{r}_0 + \lambda \dot{\mathbf{r}}_0$  к кривой  $\mathbf{r}(t)$  принимает вид

$$\frac{X - x_0}{\dot{x}_0} = \frac{Y - y_0}{\dot{y}_0},$$

где  $\rho = \{X, Y\}$  — радиус-вектор точки касательной.

Прямая, проходящая через точку  $\mathbf{r}_0$  кривой  $\gamma$  перпендикулярно касательной, называется *нормалью* кривой  $\gamma$  в точке  $\mathbf{r}_0$ . Если плоскость  $\mathcal{E}_2$  вложена в пространство  $\mathcal{E}_3$ , то нормаль кривой  $\mathbf{r}(t)$ , расположенной в плоскости  $\mathcal{E}_2$ , совпадает с главной нормалью этой кривой, рассматриваемой как кривая в  $\mathcal{E}_3$ . Уравнения нормали плоской кривой имеют вид

$$\begin{aligned} (\rho - \mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0) = \mathbf{0} &\iff \\ \dot{x}_0(X - x_0) + \dot{y}_0(Y - y_0) = 0 &\iff \frac{X - x_0}{-\dot{y}_0} = \frac{Y - y_0}{\dot{x}_0}, \end{aligned}$$

где  $\rho = \{X, Y\}$  — радиус-вектор точки нормали.

Для единичных векторов касательной и нормали бирегулярной кривой  $\mathbf{r}(s)$  на плоскости  $\mathcal{E}_2$  будем использовать обозначения

$$\tau \quad \text{и} \quad \nu,$$

где

$$\tau = \mathbf{r}' \quad \text{и} \quad \mathbf{r}'' = k\nu, \quad k > 0.$$

При этом  $k = k(s)$  называется кривизной кривой  $\mathbf{r}(s)$ .

Уравнения Серре–Френе для бирегулярной кривой на плоскости  $\mathcal{E}_2$  прини-

мают вид

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}' &= k\boldsymbol{\nu} \\ \boldsymbol{\nu}' &= -k\boldsymbol{\tau}.\end{aligned}\tag{71}$$

Эти уравнения можно вывести или независимо из условий

$$(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}) = 0 \implies (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu})' = (\boldsymbol{\tau}', \boldsymbol{\nu}) + (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}') = 0,$$

или полагая  $\kappa = 0$  в уравнениях Серре–Френе для пространственной кривой.

Формула для нахождения натурального параметра кривой  $\mathbf{r}(t)$  принимает вид

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt.$$

Полагая  $z = 0$  в формуле (69) (см. с. 95) для кривизны пространственной кривой, получим формулу для вычисления кривизны плоской кривой, параметризованной произвольным регулярным параметром  $t$ :

$$k = \frac{\sqrt{\left| \begin{array}{cc} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{array} \right|^2}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}.\tag{72}$$

В частности, если кривая задана уравнением  $y = y(x)$ , то есть если роль параметра вдоль кривой играет абсцисса точки:  $x = t$ ,  $y = y(t)$ , то

$$\dot{x} = 1, \quad \text{а} \quad \ddot{x} = 0,$$

и формула (72) принимает вид

$$k = \frac{|\ddot{y}|}{(1 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}.\tag{73}$$

Например, для параболы  $y = ax^2$  из формулы (73) получаем следующее выражение для ее кривизны:

$$k = \frac{2a}{(1 + 4a^2x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Аналогично (73), для кривизны кривой, заданной уравнением  $x = x(y)$ , имеет место формула

$$k = \frac{|\ddot{x}|}{(1 + \dot{x}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

### **Относительная кривизна кривой на плоскости.**

Кривая в пространстве, заданная натуральными уравнениями  $k = k(s)$ ,  $\varkappa(s) = 0$  определяется однозначно с точностью до собственного (то есть сохраняющего ориентацию) движения в пространстве. Однако кривая на плоскости по функции  $k = k(s)$  с точностью до собственного движения на плоскости не определяется, что связано с тем, что кривые, симметричные относительно прямой, имеют одинаковые натуральные уравнения, но не совмещаются собственным движением плоскости. Это объясняет необходимость введения понятия *относительной кривизны*.

Рассмотрим параметризованную кривую на плоскости, заданную векторной функцией  $\mathbf{r}(s)$  натурального параметра  $s$ . Единичный касательный вектор  $\tau(s)$  этой кривой можно представить в виде

$$\tau(s) = \mathbf{e}(\varphi(s)) = \mathbf{i} \cos \varphi(s) + \mathbf{j} \sin \varphi(s). \quad (74)$$

**Определение.** *Относительной кривизной параметризованной кривой  $\mathbf{r}(s)$  называется величина*

$$k_r = \frac{d\varphi}{ds}. \quad (75)$$

В отличие от соответствующей формулы для обычной кривизны, угол  $\varphi$  в формуле (75) является ориентированным, обладающим знаком.

Дифференцируя выражение (74) для вектора  $\tau(s)$ , получим

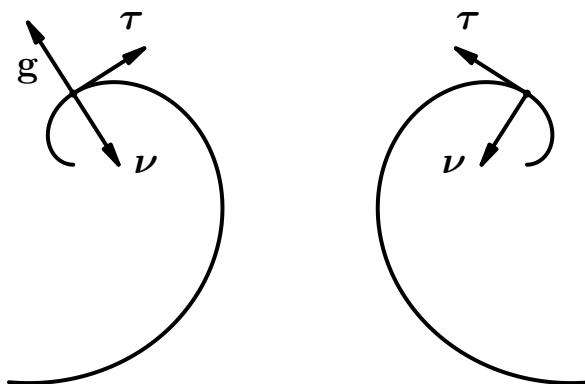
$$\mathbf{r}'' = k(s)\nu(s) = \mathbf{g}(\varphi(s))\frac{d\varphi}{ds} = k_r(s)\mathbf{g}(\varphi(s)).$$

где

$$\mathbf{g}(\varphi) = -\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi = \mathbf{e}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

— вектор, получающийся поворотом вектора  $\mathbf{e}(\varphi)$  на угол  $\frac{\pi}{2}$  в положительном направлении.

Таким образом,  $k_r = k$ , если вектор  $\tau$  при движении точки по кривой поворачивается в положительном направлении, то есть при  $\langle \tau, \nu \rangle > 0$ , и  $k_r = -k$ , если вектор  $\tau$  при движении точки по кривой поворачивается в отрицательном направлении, то есть при  $\langle \tau, \nu \rangle < 0$ . Напомним, что символом  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  обозначается косое произведение векторов на ориентированной плоскости:  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = ([\mathbf{a}], \mathbf{b})$ , где  $\mathbf{a} \mapsto [\mathbf{a}]$  — операция поворота вектора на прямой угол в положительном направлении.



При замене натурального параметра  $s^* = -s$  относительная кривизна параметризованной кривой меняет знак.

Принимая во внимание, что  $\operatorname{sgn}\langle \tau, \nu \rangle = \operatorname{sgn}\langle \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}} \rangle$ , получаем следующие формулы для относительной кривизны регулярной параметризованной кривой  $\mathbf{r}(t)$ :

$$k_r = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\langle \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}} \rangle}{|\dot{\mathbf{r}}|^{\frac{3}{2}}}$$

и кривой  $y = y(x)$ :

$$k = \frac{\ddot{y}}{(1 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

**Теорема (основная теорема для плоских кривых).** Пусть у двух параметризованных кривых  $\mathbf{r}_1(s)$  и  $\mathbf{r}_2(s)$  на плоскости  $\mathcal{E}_2$  с общей областью изменения натуральных параметров  $s \in (a, b) \subset \mathbf{R}$  совпадают при всех  $s$  относительные кривизны:

$$k_{r1}(s) = k_{r2}(s) = k_r(s).$$

Тогда существует такое сохраняющее ориентацию движение плоскости  $\mathcal{E}_2$ , при котором первая кривая переходит во вторую.

**Доказательство** аналогично случаю пространственных кривых. Его можно найти в указанном выше конспекте лекций для отделения математики.

Для нахождения кривой  $\mathbf{r}(s)$  на плоскости, параметризованной натуральным параметром, для которой заданная непрерывная функция  $k_r = k_r(s)$ ,  $s \in (a, b)$ , является относительной кривизной, нужно проинтегрировать уравнения (75) и (74):

$$k_r = \frac{d\varphi}{ds}, \quad \tau(s) = \mathbf{e}(\varphi(s)) = \mathbf{i} \cos \varphi(s) + \mathbf{j} \sin \varphi(s).$$

Из первого уравнения находится функция, определяющая угол поворота на-

правляющего вектора касательной  $\tau(s)$ :

$$\varphi(s) = \int_{s_0}^s k_r(s) ds,$$

а из второго уравнение кривой:

$$\mathbf{r}(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{e}(\varphi(s)) ds + \mathbf{c}, \quad (76)$$

где  $\mathbf{c}$  — произвольный постоянный вектор.

В координатах уравнение (76) принимает вид

$$x(s) = \int_{s_0}^s \cos(\varphi(s)) ds + c_1, \quad y(s) = \int_{s_0}^s \sin(\varphi(s)) ds + c_2.$$

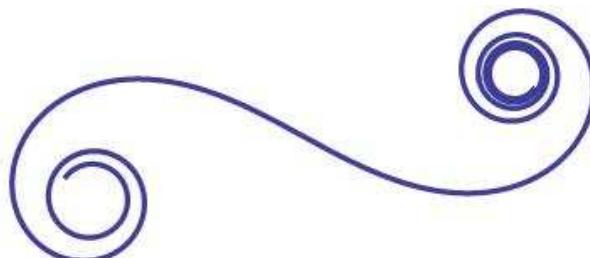
### Примеры построения плоской кривой по ее относительной кривизне.

1. Рассмотрим сначала самый простой случай:  $k_r = s$ . В этом случае

$$\varphi(s) = \int_0^s s ds = \frac{s^2}{2}, \quad x(s) = \int_{s_0}^s \cos \frac{s^2}{2} ds, \quad y(s) = \int_{s_0}^s \sin \frac{s^2}{2} ds.$$

С помощью пакета программ Mathematica строим эту кривую:

```
g[s_] := NIntegrate[Cos[t^2/2 + t], {t, 0, s}]
h[s_] := NIntegrate[Sin[t^2/2 + t], {t, 0, s}]
ParametricPlot[{g[s], h[s]}, {s, -2 Pi, 2 Pi},
PlotStyle -> Thickness[0.009], Axes -> None]
```



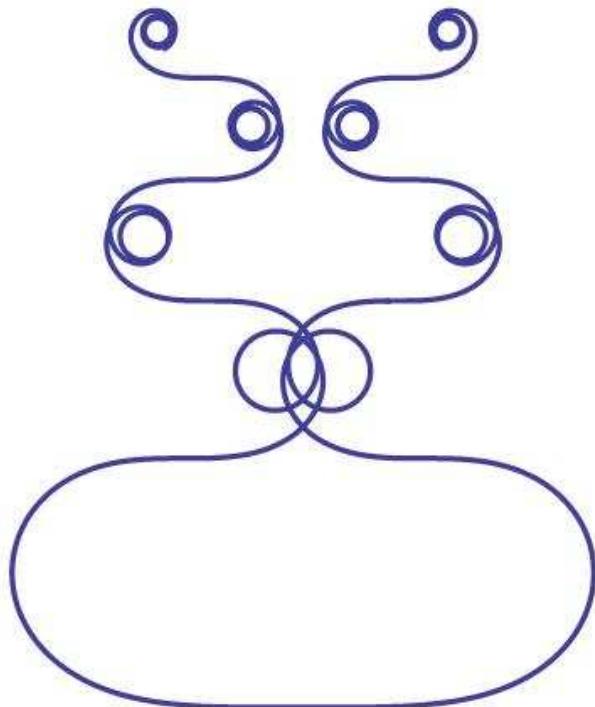
2. Пусть теперь  $k_r = s \sin s$ . В этом случае

$$\varphi(s) = \int_0^s s \sin s ds = -s \cos s + \sin s,$$

$$x(s) = \int_{s_0}^s \cos(-s \cos s + \sin s) ds, \quad y(s) = \int_{s_0}^s \sin(-s \cos s + \sin s) ds.$$

С помощью пакета программ Mathematica строим эту кривую:

```
ga1[s_] := NIntegrate[Cos[Sin[t] - t*Cos[t]], {t, 0, s}]
ga2[s_] := NIntegrate[Sin[Sin[t] - t*Cos[t]], {t, 0, s}]
ParametricPlot[{ga1[s], ga2[s]}, {s, -15, 15},
PlotStyle -> Thickness[0.009], Axes -> None]
```



**Неявное задание плоских кривых.** Множество точек на плоскости, представляющее собой кривую, может быть задано уравнением вида

$$F(x, y) = 0, \quad (77)$$

где  $F(x, y)$  — дифференцируемая функция двух переменных. Уравнением такого вида задается, например, эллипс на плоскости. В этом случае говорят о неявном задании кривой. Под «явным» заданием кривой при этом понимается задание ее параметрическим уравнением.

Как известно из теории кривых второго порядка, уравнение вида (77) может задавать и пару пересекающихся прямых и вообще не задавать никаких вещественных точек на плоскости. Это приводит к необходимости исследования множеств на плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению вида (77).

Итак, пусть в некоторой области (открытом подмножестве) плоскости  $U \subset \mathcal{E}_2$  в прямоугольной системе координат задана дифференцируемая (достаточно высокого класса дифференцируемости) функция  $F(x, y)$ . Для исследования множества  $\gamma$  точек, удовлетворяющих уравнению  $F(x, y) = 0$ , представим функцию  $F(x, y)$  формулой Тейлора в окрестности  $W$  точки  $(x_0, y_0) \in U$ :

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \Phi(x, y), \quad (78)$$

где

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$$

— частные производные функции  $F$  по  $x$  и  $y$  соответственно, а  $\Phi(x, y)$  — функция, являющаяся при  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0$  бесконечно малой не ниже второго порядка по сравнению с  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ .

Предположим, что точка  $(x_0, y_0)$  удовлетворяет уравнению (77), то есть  $F(x_0, y_0) = 0$ . Тогда в окрестности  $W$  уравнение (77) можно представить в

виде

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \Phi(x, y) = 0. \quad (79)$$

Если

$$(F_x(x_0, y_0))^2 + (F_y(x_0, y_0))^2 \neq 0,$$

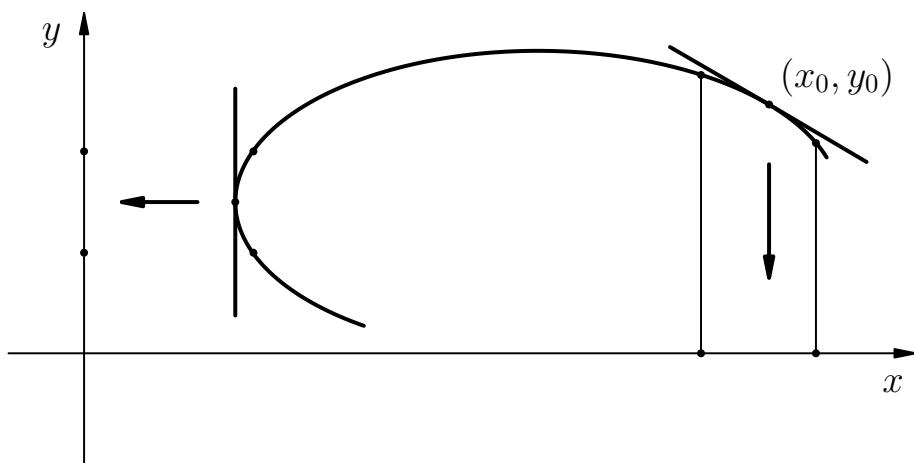
то с точностью до бесконечно малых второго порядка уравнение (79) представляет собой прямую

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \quad (80)$$

Это означает, что если, например,  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ , то в окрестности  $W$  точки  $(x_0, y_0)$  уравнение (79) можно представить в виде

$$y - y_0 = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}(x - x_0) + \Psi(x, y),$$

где  $\Psi(x, y)$  — бесконечно малая не ниже второго порядка по сравнению с  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ . Отсюда следует, что множество точек, удовлетворяющих уравнению (77), в некоторой окрестности  $W$  точки  $(x_0, y_0)$  взаимнооднозначно проектируется на ось  $Ox$ .



В результате, на области  $W$  уравнение (77) можно разрешить относительно  $y$ , и, следовательно, часть  $\gamma \cap W$  множества  $\gamma$  может быть задана как график

некоторой функции  $y = f(x)$ . Это является содержанием так называемой теоремы о неявной функции из курса математического анализа.

Аналогично, если  $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ , то в окрестности  $W$  точки  $(x_0, y_0)$  уравнение (79) может быть разрешено относительно  $x$  и часть  $\gamma \cap W$  множества  $\gamma$  может быть задана как график некоторой функции  $x = g(y)$ . Таким образом, имеет место следующее предложение.

**Предложение.** *Пусть в области  $U \subset \mathcal{E}_2$  в прямоугольной системе координат задана дифференцируемая функция  $F(x, y)$ , и пусть  $\gamma$  — множество точек из области  $U$ , удовлетворяющих уравнению  $F(x, y) = 0$ . Если для всякой точки  $M(x_0, y_0) \in U$  хотя бы одна из частных производных  $F_x(x_0, y_0)$  и  $F_y(x_0, y_0)$  не обращается в нуль, то  $\gamma$  представляет собой кривую на  $\mathcal{E}_2$ .*

**Уравнения касательной и нормали кривой,**

**заданной уравнением  $F(x, y) = 0$ .**

Пусть уравнением  $F(x, y) = 0$  на области  $U$  плоскости задана кривая  $\gamma$ . Для нахождения уравнений касательной и нормали кривой  $\gamma$  в ее точке  $M_0(x_0, y_0)$  рассмотрим некоторую (регулярную) параметризацию

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \iff x = x(t), \quad y = y(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad (81)$$

этой кривой в окрестности точки  $M_0(x_0, y_0)$ . Поскольку при всяком значении параметра  $t$  точка (81) удовлетворяет уравнению  $F(x, y) = 0$ , то имеет место тождество

$$F(x(t), y(t)) \equiv 0.$$

Дифференцируя обе части этого тождества, получим

$$\frac{d}{dt}F(x(t), y(t)) \equiv 0 \iff F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} \equiv 0. \quad (82)$$

В частности, при  $t = t_0$  имеем

$$F_x(x_0, y_0) \frac{dx}{dt}(t_0) + F_y(x_0, y_0) \frac{dy}{dt}(t_0) = 0, \quad (83)$$

откуда следует, что если

$$(F_x(x_0, y_0))^2 + (F_y(x_0, y_0))^2 \neq 0,$$

то вектор

$$\mathbf{N} = \nabla F(x_0, y_0) = \{F_x(x_0, y_0), F_y(x_0, y_0)\} \quad (84)$$

является ненулевым вектором, ортогональным касательному вектору

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0) = \left\{ \frac{dx}{dt}(t_0), \frac{dy}{dt}(t_0) \right\}$$

кривой  $\gamma$  в точке  $M_0(x_0, y_0)$  и, следовательно, является направляющим вектором нормали этой кривой. Вектор

$$\mathbf{T} = \{-F_y(x_0, y_0), F_x(x_0, y_0)\}$$

при этом ортогоначен вектору  $\mathbf{N}$  и поэтому является направляющим вектором касательной кривой  $\gamma$  в точке  $M_0(x_0, y_0)$ . Отсюда получаем уравнения касательной (см. (80))

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

$$\iff \frac{x - x_0}{-F_y(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F_x(x_0, y_0)} \quad (85)$$

и нормали

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0)}$$

$$\iff F_y(x_0, y_0)(x - x_0) - F_x(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 \quad (86)$$

кривой  $\gamma$ .

**Замечание.** Проведенные выше рассуждения позволяют заключить, что уравнениями (85) определяется также и касательная к кривой, заданной на аффинной плоскости, или кривой на евклидовой плоскости, но заданной в аффинной системе координат. При этом  $\nabla F(x_0, y_0)$  в (84) является линейной формой, аннулирующей направляющее подпространство касательной.

**Особые точки кривой, заданной уравнением  $F(x, y) = 0$ .**

В соответствии со сформулированным определением кривой, для каждой точки  $M_0 \in \gamma$  кривой  $\gamma$  на плоскости можно указать открытый шар  $B(M_0, \varepsilon)$  с центром в  $M_0$ , такой что часть кривой  $\gamma$ , содержащаяся в  $B(M_0, \varepsilon)$ , является простой дугой.

Если множество  $\gamma$  является простой дугой в некоторых окрестностях всех своих точек, за исключением некоторого множества точек  $\text{sing}(\gamma)$ , то будем говорить, что  $\gamma$  является **кривой с особыми точками**, а точки из множества  $\text{sing}(\gamma)$  являются особыми точками кривой  $\gamma$ .

Очевидно, если удалить особые точки из множества  $\gamma$ , то останется кривая  $\tilde{\gamma} = \gamma \setminus \text{sing}(\gamma)$ .

Будем предполагать, что множество  $\text{sing}(\gamma)$  состоит из изолированных точек, то есть что если  $M_0 \in \text{sing}(\gamma)$ , то в некотором открытом шаре  $B(M_0, \varepsilon)$

с центром в  $M_0$  других особых точек нет:

$$sing(\gamma) \cap B(M_0, \varepsilon) = M_0.$$

По предложению на с. 109, множество точек  $\gamma$  на плоскости  $\mathcal{E}_2$  (или  $\mathcal{A}_2$ ), координаты которых удовлетворяют уравнению  $F(x, y) = 0$  является кривой, если для любой точки  $M_0(x_0, y_0) \in \gamma$  хотя бы одна из частных производных  $F_x(x_0, y_0)$ ,  $F_y(x_0, y_0)$  не обращается в нуль.

## 7 Семейства кривых на плоскости.

В этом параграфе будут изучаться однопараметрические семейства кривых на плоскости  $\mathcal{E}_2$ . Под семейством кривых на плоскости, параметризованным параметром  $c$ , принимающим значения из некоторого интервала  $U \subset \mathbf{R}$ , будем понимать множество кривых  $\gamma(c)$ ,  $c \in U$ , заданных в системе координат  $Oxy$  либо уравнением

$$F(x, y, c) = 0, \quad F : \mathbb{R}^2 \times U \ni \{x, y; c\} \mapsto F(x, y, c) \in \mathbf{R}, \quad (87)$$

где  $F(x, y, c)$  — функция некоторого класса дифференцируемости трех переменных, либо уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, c) \Leftrightarrow x = x(t, c), \quad y = y(t, c), \quad (88)$$

где  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, c)$  — векторно-значная функция переменных  $t$  и  $c$  некоторого класса дифференцируемости.

Фиксируя значение параметра  $c$  в уравнении (87), получаем неявное уравнение

$$F(x, y, c_0) = 0$$

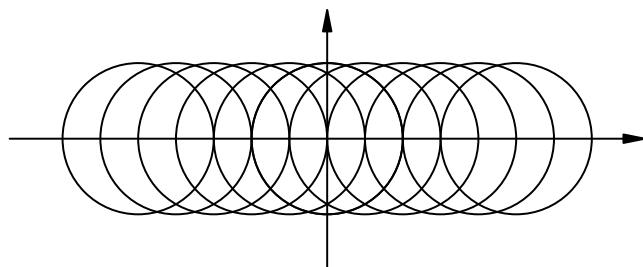
некоторой кривой семейства, а фиксируя значение значение параметра  $c$  в уравнении (88), получаем параметрическое уравнение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, c_0)$$

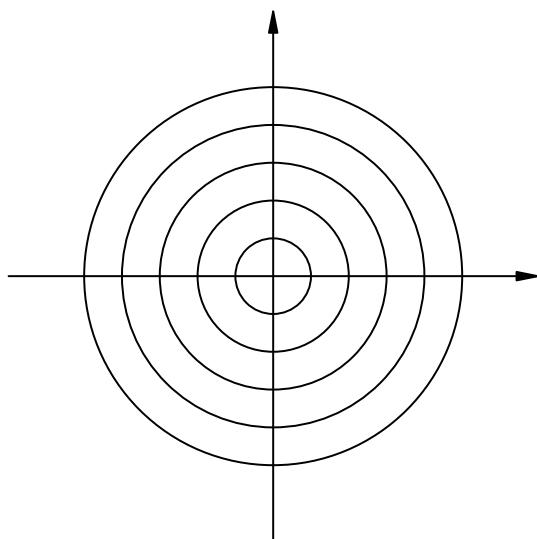
кривой семейства.

### Примеры семейств кривых.

1. Уравнением  $(x - c)^2 + y^2 - 1 = 0$  задается семейство окружностей с центрами на оси  $Ox$  радиуса 1.

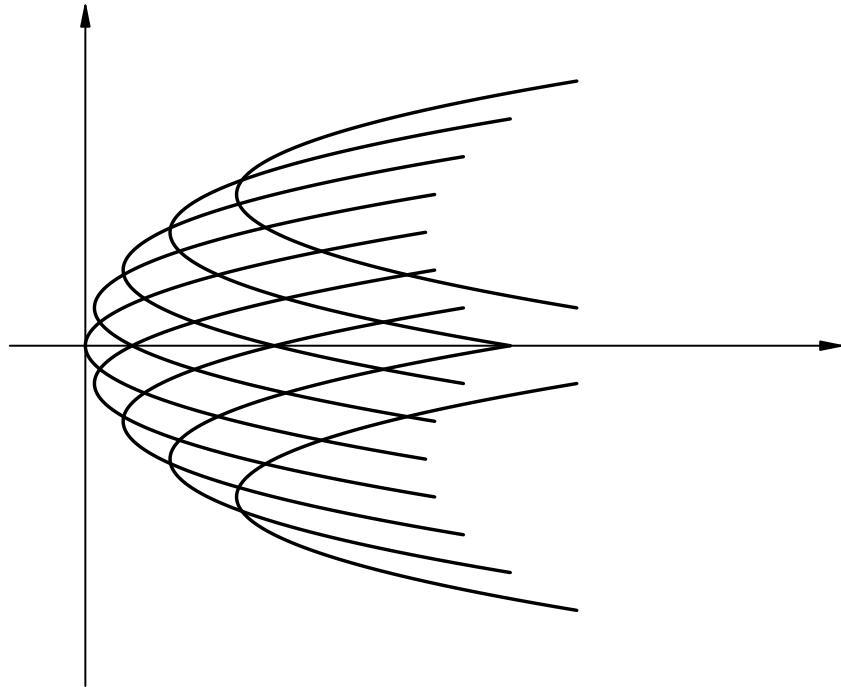


2. Уравнением  $x^2 + y^2 - c^2 = 0$  задается семейство концентрических окружностей с общим центром в начале координат.

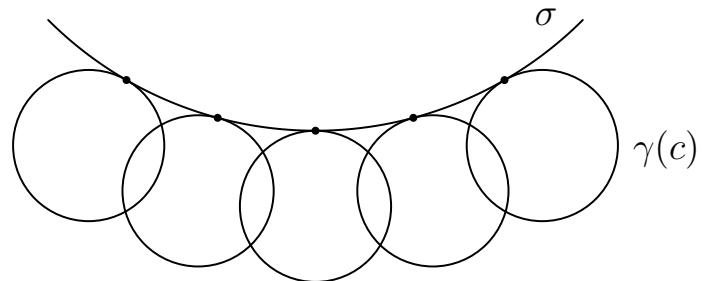


3. Уравнением  $x - \frac{c^2}{2} - 2(y - c)^2 = 0$  задается семейство парабол с параметром  $p = 0.25$ , вершины которых лежат на параболе  $y^2 - 2x = 0$  (в

уравнении семейства она присутствует, заданная параметрическими уравнениями  $x = \frac{c^2}{2}$ ,  $y = c$ ), а оси параллельны оси абсцисс.



**Определение.** Огибающей однопараметрического семейства кривых  $\gamma(c)$ ,  $c \in U$ , называется кривая  $\sigma$ , которая в каждой своей точке касается некоторой кривой семейства.



По определению, две кривые, проходящие через точку  $r_0$ , касаются в этой точке, если они имеют в этой точке общую касательную.

Пусть некоторое семейство кривых  $\gamma(c)$ ,  $c \in U$ , задано уравнением (87):

$$F(x, y, c) = 0.$$

Предположим, оно имеет огибающую  $\sigma$ . Как найти эту огибающую?

Точка огибающей имеется на каждой кривой семейства, это значит, что каждой кривой семейства  $\gamma(c)$  соответствует некоторая точка огибающей  $\sigma$ . Эта точка определяется кривой  $\gamma(c)$ , а, значит, определяется значением параметра  $c$ , соответствующим этой кривой. Поэтому можно искать огибающую как параметризованную кривую, заданную уравнениями вида

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(c) \Leftrightarrow x = x(c), y = y(c). \quad (89)$$

Точка  $(x(c), y(c))$  огибающей (89), соответствующая значению параметра  $c$ , лежит на кривой семейства  $\gamma(c)$ , соответствующей этому же значению параметра  $c$ , поэтому ее координаты удовлетворяют уравнению (87) кривой  $\gamma(c)$ .

Подставляя уравнения (89) в уравнение (87), получаем тождество

$$F(x(c), y(c), c) \equiv 0. \quad (90)$$

Дифференцируя левую часть тождества (90) по параметру  $c$  как сложную функцию, получаем

$$F_x \frac{dx}{dc} + F_y \frac{dy}{dc} + F_c \equiv 0. \quad (91)$$

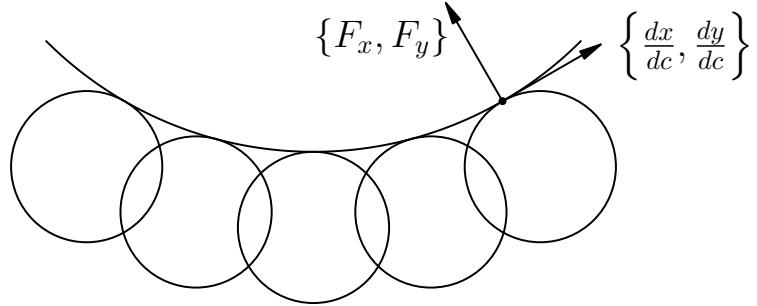
Вектор с координатами

$$\{F_x(x, y, c), F_y(x, y, c)\}$$

является нормальным вектором кривой семейства  $\gamma(c)$ , поэтому он ортогонален касательному вектору этой кривой, но касательный вектор огибающей

$$\left\{ \frac{dx}{dc}, \frac{dy}{dc} \right\}$$

и касательный вектор кривой семейства  $\gamma(c)$  коллинеарны в их общей точке  $M(x(c), y(c))$ .



поэтому

$$F_x \frac{dx}{dc} + F_y \frac{dy}{dc} = 0. \quad (92)$$

Подставляя (92) в (91), получим, что точка огибающей с координатами  $x = x(c)$ ,  $y = y(c)$  удовлетворяет уравнению

$$F_c(x(c), y(c), c) = 0. \quad (93)$$

Поскольку она также удовлетворяет уравнению (90), то для нахождения огибающей получаем следующую систему уравнений:

$$F(x, y, c) = 0, \quad F_c(x, y, c) = 0. \quad (94)$$

Из этой системы можно попытаться либо исключить параметр  $c$  и получить ее решение в неявном виде  $\Phi(x, y) = 0$ , либо выразить  $x$  и  $y$  как функции  $x = x(c)$ ,  $y = y(c)$  параметра  $c$ .

**Определение.** *Множество точек, координаты которых удовлетворяют системе уравнений (94), называется дискриминантным множеством или дискриминантной кривой семейства.*

В каком случае дискриминантная кривая является огибающей? Предположим, мы разрешили систему уравнений (94) в некоторой окрестности относительно переменных  $x$  и  $y$  и получили дифференцируемые функции  $x = x(c)$ ,  $y = y(c)$ . Подставляя эти функции в (91)

$$F_x \frac{dx}{dc} + F_y \frac{dy}{dc} + F_c \equiv 0 \quad (91)$$

и учитывая, что  $F_c(x(c), y(c), c) = 0$ , получим равенство

$$F_x \frac{dx}{dc} + F_y \frac{dy}{dc} = 0. \quad (95)$$

Но в равенстве (95) числа  $F_x$  и  $F_y$  являются координатами нормального вектора только в случае, когда они не равны нулю одновременно.

Таким образом, дискриминантная кривая содержит не только огибающую, но и множество особых точек кривых семейства.

Кроме того, в системе уравнений (94) при некотором значении  $c = c_0$  может оказаться, что  $F_c(x, y, c_0) \equiv 0$ . В этом случае кривая семейства  $\gamma(c_0)$ , имеющая уравнение  $F(x, y, c_0) = 0$ , будет целиком содержаться в дискриминантном множестве.

Система уравнений (94) может оказаться и несовместной. Например, для семейства концентрических окружностей  $x^2 + y^2 - c^2 = 0$ ,  $c \in (0, a)$ , система (94) имеет вид

$$x^2 + y^2 - c^2 = 0, \quad 2c = 0.$$

Поскольку значение  $c = 0$  не входит в область определения параметра семейства, в этом случае дискриминантная кривая представляет собой пустое множество.

Опираясь на теорему о неявной функции, можно утверждать следующее: если некоторая точка  $(x_0, y_0, c_0) \in \mathbb{R}^3$  является решением системы уравнений (94) и в этой точке

$$\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ F_{cx} & F_{cy} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (96)$$

то в некоторой окрестности  $U \subset \mathbb{R}^3$  точки  $(x_0, y_0, c_0)$  решения системы уравнений (94) задают параметризованную кривую  $x = x(c), y = y(c)$ .

### Примеры.

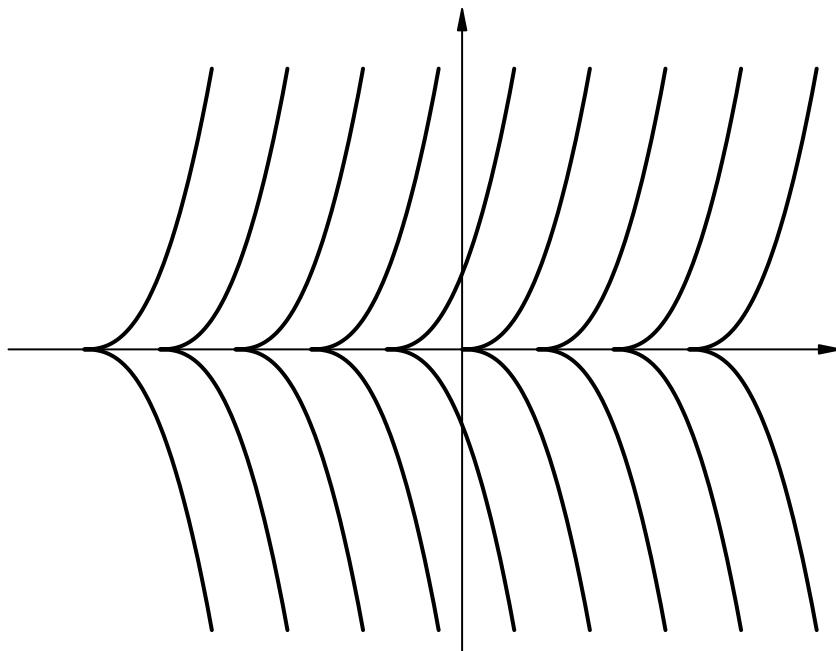
1. Семейство  $(x - c)^5 - y^2 = 0$ . Система уравнений (94) имеет вид

$$(x - c)^5 - y^2 = 0, \quad -5(x - c)^4 = 0.$$

Ее решением является прямая  $x = c, y = 0$ . В точках этой прямой обе частные производные

$$F_x = 5(x - c)^4, \quad F_y = 2y$$

обращаются в нуль. Дискриминантная кривая состоит из особых точек, огибающей нет.

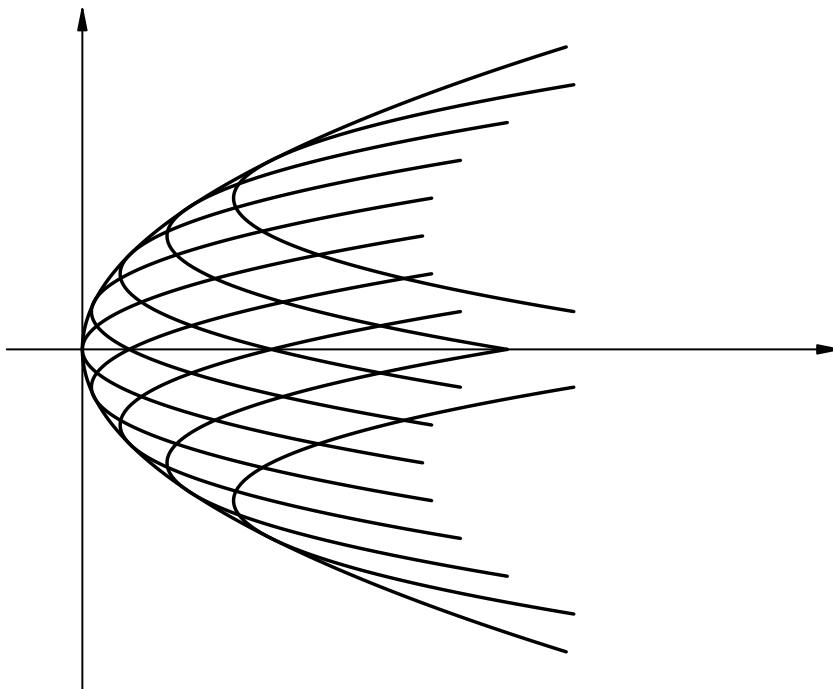


2. Уравнением  $x - \frac{c^2}{2} - 2(y - c)^2 = 0$  задается семейство парабол с параметром  $p = 0.25$ , вершины которых лежат на параболе  $y^2 - 2x = 0$ , а оси параллельны оси абсцисс. Дифференцируя уравнение семейства по  $c$ , получаем

$$F_c = -c + 4(y - c) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5}{4}c.$$

Подставляя  $y = (5/4)c$  в уравнение семейства, получим

$$x = \frac{5}{8}c^2, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{2}{5}y^2.$$



В данном случае рассматриваемое семейство имеет огибающую, которая представляет собой параболу.

Отметим еще одну интерпретацию огибающей. Рассмотрим две (близкие) кривые семейства с уравнениями

$$F(x, y, c) = 0 \quad \text{и} \quad F(x, y, c + \Delta c) = 0. \quad (97)$$

Системе уравнений (97) удовлетворяют точки пересечения близких кривых семейства. Устремляя  $\Delta c$  к нулю, получим в пределе точки, удовлетворяющие уравнению

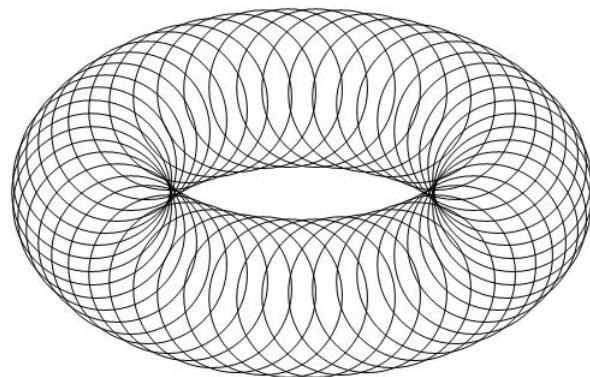
$$\lim_{\Delta c \rightarrow 0} \frac{F(x, y, c + \Delta c) - F(x, y, c)}{\Delta c} = F_c(x, y, c) = 0.$$

Таким образом, огибающую можно интерпретировать как множество точек пересечения кривых семейства, соответствующих «бесконечно близким» значениям параметра  $c$ .

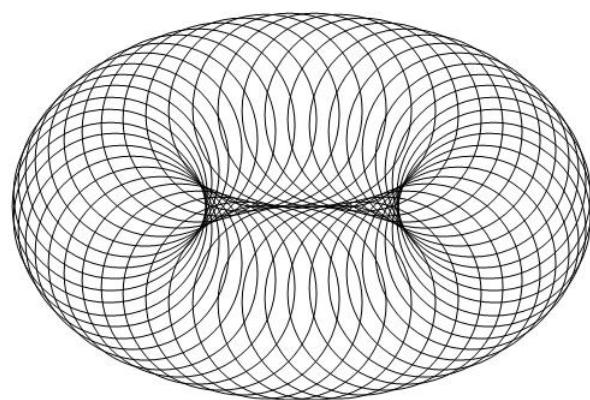
На рисунках ниже изображены два семейства окружностей, центры которых лежат на эллипсе

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Окружности первого семейства имеют постоянный радиус, равный 1,5, а окружности второго семейства имеют постоянный радиус, равный 2.



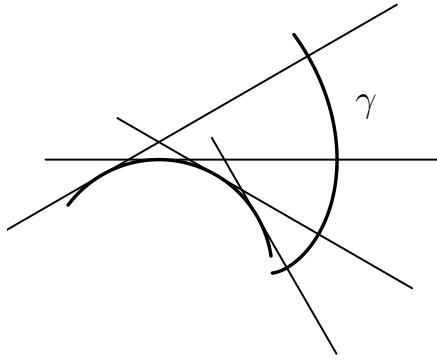
```
Graphics[ Table[{Circle[
{4 Cos[2 Pi t/50], 2 Sin[2 Pi t/50]}, 1.5]}, {t, 50}]]
```



```
Graphics[Table[{Circle[
{4 Cos[2 Pi t/50], 2 Sin[2 Pi t/50]}, 2]}, {t, 50}]]
```

## Эволюта плоской кривой.

**Определение.** Эволютой плоской кривой называется огибающая ее нормалей.



Пусть простая дуга  $\gamma$  задана уравнением  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ , где  $s$  — натуральный параметр. Уравнение семейства нормалей кривой  $\gamma$  имеет вид

$$(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}(s), \mathbf{r}'(s)) = 0. \quad (98)$$

Левая часть уравнения (98) представляет собой функцию  $F(x, y, s)$ . Параметром семейства нормалей является натуральный параметр  $s$  кривой  $\gamma$ . Для нахождения огибающей дифференцируем уравнение (98) по  $s$ :

$$\begin{aligned} F_s(x, y, s) = (-\mathbf{r}'(s), \mathbf{r}'(s)) + (\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}(s), \mathbf{r}''(s)) = 0 &\iff \\ (\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}(s), k(s)\boldsymbol{\nu}(s)) - 1 = 0. & \end{aligned} \quad (99)$$

Объединяя уравнения (98) и (99) и предполагая, что кривизна простой дуги  $\gamma$  не обращается в нуль, получаем систему уравнений

$$(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}(s), \boldsymbol{\tau}(s)) = 0, \quad (\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}(s), \boldsymbol{\nu}(s)) = \frac{1}{k(s)}. \quad (100)$$

Поскольку система (100) определяет проекции вектора  $\rho - \mathbf{r}(s)$  на взаимно ортогональные прямые — касательную и нормаль простой дуги  $\gamma$ , уравнение эволюты имеет вид

$$\rho = \mathbf{r}(s) + \frac{1}{k(s)}\nu(s). \quad (101)$$

Отметим, что у нормалей кривой (прямых линий) нет особых точек.

Непосредственным следствием уравнения (101) является следующее утверждение.

**Предложение.** Эволюта плоской кривой является геометрическим местом ее центров кривизны.

Выведем уравнения эволюты для простой дуги, заданной как образ регулярной параметризованной кривой  $\mathbf{r}(t)$ , где  $t$  — произвольный параметр.

Уравнение (98) в этом случае принимает вид

$$(X - x(t))\dot{x}(t) + (Y - y(t))\dot{y}(t) = 0.$$

Дифференцирование по  $t$  (параметру семейства нормалей) дает второе уравнение

$$(X - x(t))\ddot{x}(t) + (Y - y(t))\ddot{y}(t) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2.$$

Решая полученную систему уравнений методом Крамера относительно  $X - x(t)$  и  $Y - y(t)$ , получаем

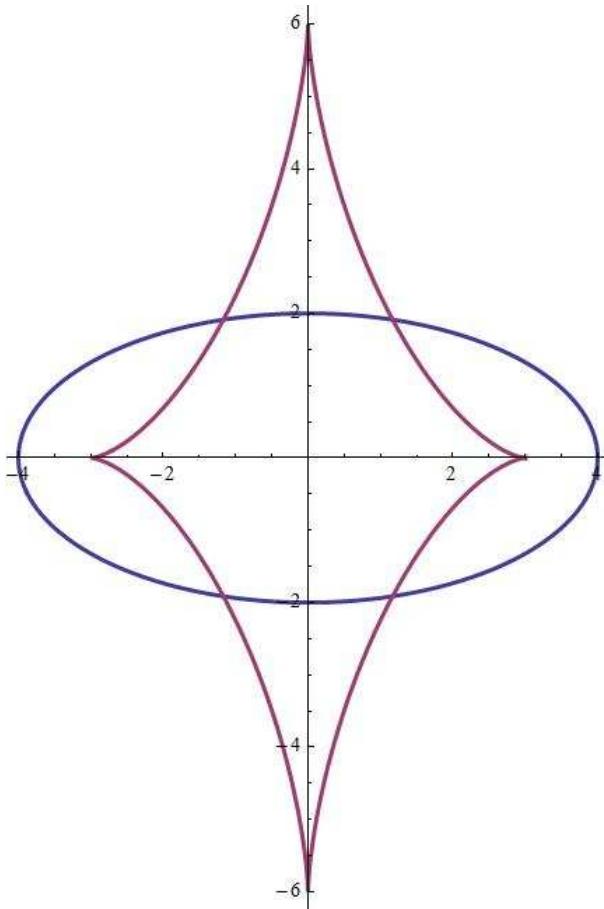
$$X - x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \dot{y} \\ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 & \ddot{y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \end{vmatrix}}, \quad Y - y = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & 0 \\ \ddot{x} & \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}}.$$

Таким образом, уравнения эволюты в этом случае имеют вид

$$X = x(t) - \dot{y}(t) \cdot \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}, \quad Y = y(t) + \dot{x}(t) \cdot \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}.$$

На рисунке ниже построена эволюта эллипса, имеющего уравнения

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \iff x = 4 \cos t, y = 2 \sin t.$$



$$m = 4; n = 2;$$

```
ParametricPlot[{{ m*Cos[t] ,
n*Sin[t]}, {(m^2 - n^2)/m*(Cos[t])^3, (n^2 - m^2)/
n*(Sin[t])^3}}, {t, 0, 2 Pi}, PlotStyle -> Thickness[0.007]]
```

В заключение параграфа выведем уравнения дискриминантной кривой для случая, когда кривые семейства заданы параметрическими уравнениями (88)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, c) \Leftrightarrow x = x(t, c), y = y(t, c). \quad (88)$$

Кривая  $\gamma(c)$  семейства касается огибающей в некоторой своей точке, определяемой значением параметра  $t$  на этой кривой. При этом  $t$  зависит от кривой, следовательно, зависит от  $c$ . Таким образом, огибающая определяется (неизвестной) функцией  $t = t(c)$  и векторным уравнением

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(c) = \mathbf{r}(t(c), c). \quad (102)$$

Касательным вектором огибающей (102) является вектор

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dc} = \mathbf{r}'_t t'_c + \mathbf{r}'_c, \quad (103)$$

а касательным вектором кривой семейства вектор  $\mathbf{r}'_t$  (при  $t = t(c)$ ). Условием коллинеарности этих векторов является обращение в нуль их косого произведения

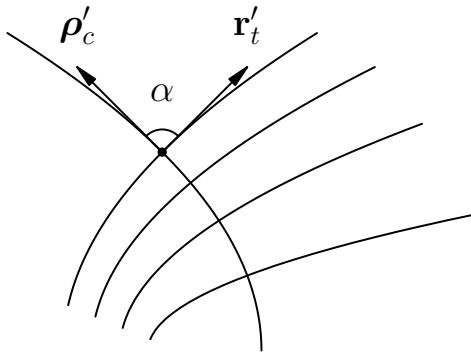
$$\langle \mathbf{r}'_t t'_c + \mathbf{r}'_c, \mathbf{r}'_t \rangle = \langle \mathbf{r}'_c, \mathbf{r}'_t \rangle.$$

Поэтому в данном случае огибающая, если она существует, удовлетворяет системе уравнений

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, c), \quad \langle \mathbf{r}'_c, \mathbf{r}'_t \rangle = 0.$$

### **Изогональные траектории семейства кривых.**

**Определение.** Изогональной траекторией однопараметрического семейства кривых называется кривая, пересекающая кривые семейства под постоянным углом.



Будем рассматривать случай, когда кривые семейства заданы параметрическими уравнениями (88)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, c) \Leftrightarrow x = x(t, c), y = y(t, c).$$

Точка изогональной траектории лежит на кривой  $\gamma(c)$  семейства и поэтому определяется некоторым значением параметра  $t$  на этой кривой. При этом  $t$  зависит от кривой, следовательно, зависит от  $c$ . Таким образом, изогональная траектория задается (неизвестной) функцией  $t = t(c)$  и векторным уравнением (как и в случае огибающей)

$$\rho = \rho(c) = \mathbf{r}(t(c), c).$$

Касательным вектором этой траектории (как и в случае огибающей) является вектор

$$\rho'_c = \frac{d\rho}{dc} = \mathbf{r}'_t t'_c + \mathbf{r}'_c.$$

Поскольку угол между  $\rho'_c$  и касательным вектором  $\mathbf{r}'_t$  кривой семейства равен  $\alpha$ , то

$$\cos \alpha = \frac{(\rho'_c, \mathbf{r}'_t)}{|\rho'_c| |\mathbf{r}'_t|} = \frac{(\mathbf{r}'_t t'_c + \mathbf{r}'_c, \mathbf{r}'_t)}{\sqrt{(\mathbf{r}'_t t'_c + \mathbf{r}'_c)^2} \sqrt{(\mathbf{r}'_t)^2}}. \quad (104)$$

Таким образом, для нахождения изогональных траекторий нужно решить дифференциальное уравнение (104) относительно неизвестной функции  $t = t(c)$ . Поскольку решение этого уравнения зависит от произвольной постоянной, изогональные траектории образуют однопараметрическое семейство.

**Пример.** Найдем изогональные траектории семейства прямых, проходящих через начало координат. Уравнение семейства имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}(c)t, \quad t \in (-\infty, \infty), \quad \text{где } \mathbf{e}(c) = \mathbf{i} \cos c + \mathbf{j} \sin c.$$

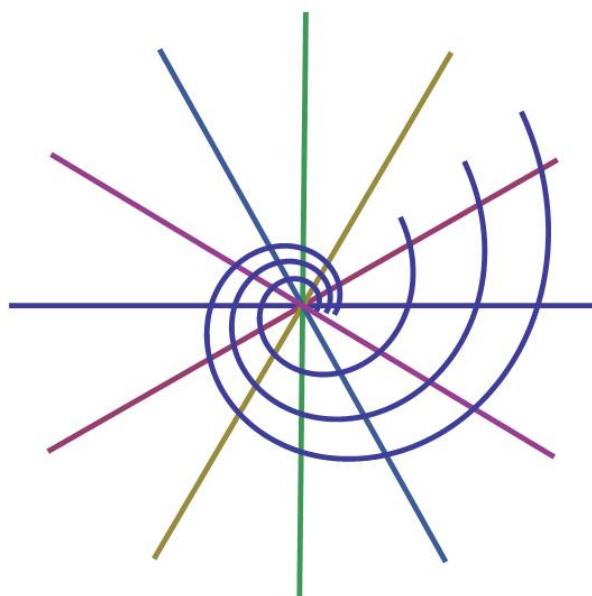
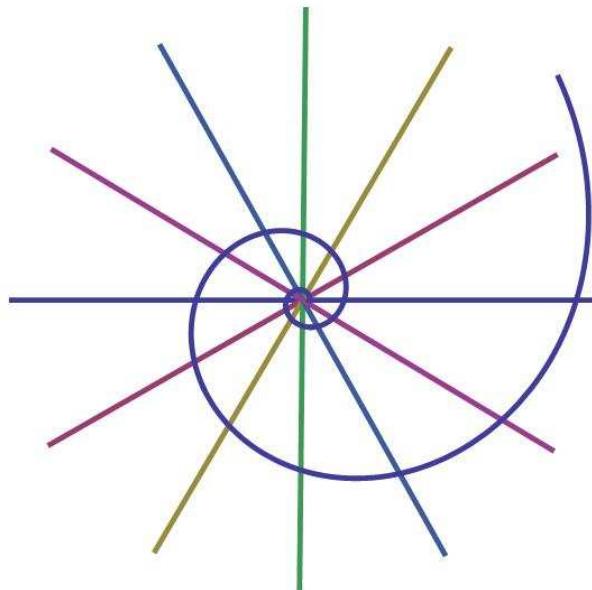
Имеем:  $\mathbf{r}'_t = \mathbf{e}(c)$ ,  $\mathbf{r}'_c = \mathbf{g}(c)t$ . Поэтому уравнение (104) принимает вид

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{(\mathbf{r}'_t t'_c + \mathbf{r}'_c, \mathbf{r}'_t)}{\sqrt{(\mathbf{r}'_t t'_c + \mathbf{r}'_c)^2} \sqrt{(\mathbf{r}'_t)^2}} = \frac{(\mathbf{e}(c)t'_c + \mathbf{g}(c)t, \mathbf{e}(c))}{\sqrt{(t'_c)^2 + t^2} \sqrt{1}} \Leftrightarrow \\ \cos^2 \alpha ((t'_c)^2 + t^2) &= (t'_c)^2 \Leftrightarrow t^2 \cos^2 \alpha = (t'_c)^2 \sin^2 \alpha \Leftrightarrow \\ \frac{dt}{t} &= \pm \operatorname{ctg} \alpha dc \Leftrightarrow t = \pm e^{c \operatorname{ctg} \alpha + a}, \end{aligned} \quad (105)$$

где  $a$  — постоянная интегрирования.

В уравнении  $\mathbf{r} = \mathbf{e}(c)t$  параметр  $c$  может рассматриваться как полярный угол  $\varphi$ , а параметр  $t$  как полярный радиус  $\rho$  полярной системы координат, ассоциированной с прямоугольной системой координат  $Oxy$ , поэтому из (105) получаем следующие полярные уравнения изогональных траекторий рассматриваемого семейства:

$$\rho = \pm e^{(\operatorname{ctg} \alpha)\varphi + a}$$



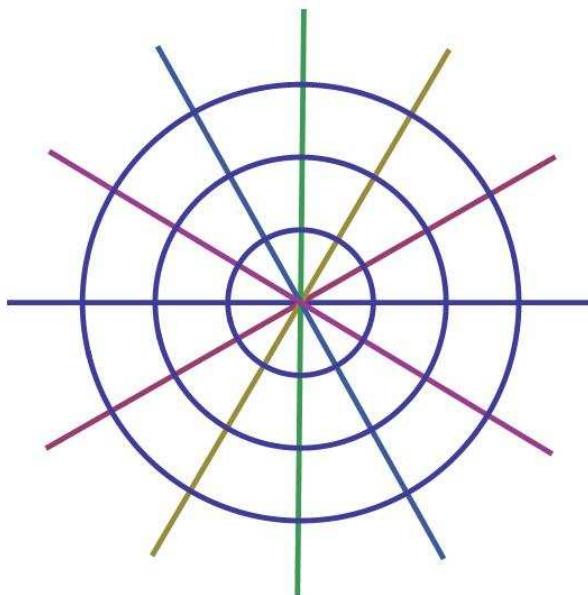
**Определение.** Ортогональной траекторией однопараметрического семейства кривых называется кривая, пересекающая кривые семейства под прямым углом.

Из (104) при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  получаем следующее дифференциальное уравнение

для нахождения ортогональных траекторий:

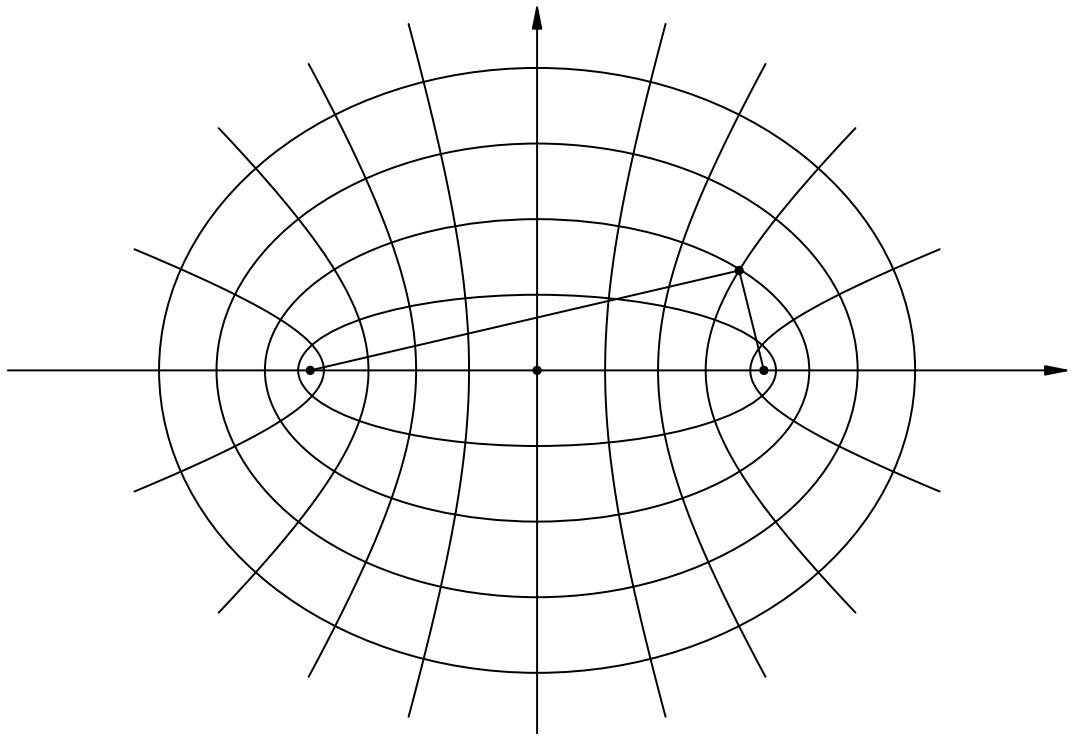
$$(\mathbf{r}'_t t'_c + \mathbf{r}'_c, \mathbf{r}'_t) = 0. \quad (106)$$

Если в предыдущем примере положить  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , то получим  $t'_c = 0$  и, следовательно,  $t = const$ . Ортогональные траектории образуют семейство концентрических окружностей.



В курсе «Аналитическая геометрия» было доказано следующее предложение.

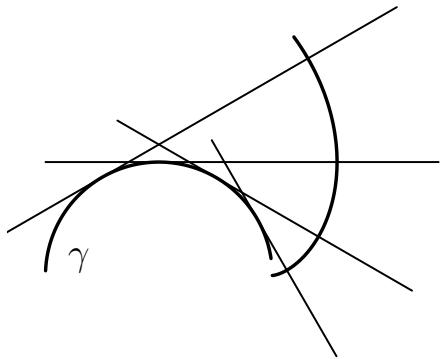
**Предложение.** Софокусные (т. е. имеющие общие фокусы) эллипс и гипербола пересекаются под прямым углом.



Если фокусы  $F_1$  и  $F_2$  зафиксированы и рассмотрены: семейство эллипсов с фокусами  $F_1$  и  $F_2$  и семейство гипербол с фокусами  $F_1$  и  $F_2$ , то каждое из этих семейств является семейством ортогональных траекторий по отношению ко второму.

### **Эвольвента плоской кривой.**

**Определение.** Эвольвентой плоской кривой называется ортогональная траектория семейства ее касательных.



Пусть простая дуга  $\gamma$  задана параметрическим уравнением  $\mathbf{r}(s)$ , где  $s$  — натуральный параметр. Семейство ее касательных имеет уравнение

$$\boldsymbol{\sigma}(s, t) = \mathbf{r}(s) + t\boldsymbol{\tau}(s). \quad (107)$$

Для семейства (107) уравнение (106) принимает вид

$$(\boldsymbol{\sigma}'_t t'_s + \boldsymbol{\sigma}'_s, \boldsymbol{\sigma}'_t) = 0 \Leftrightarrow (\boldsymbol{\tau}(s)t'_s + \boldsymbol{\tau}(s) + tk(s)\boldsymbol{\nu}(s), \boldsymbol{\tau}(s)) = 0. \Leftrightarrow \\ t'_s + 1 = 0 \Leftrightarrow t = s_0 - s.$$

Подставляя  $t = s_0 - s$  в уравнение семейства (107), получаем уравнение эвольвента

$$\boldsymbol{\rho}(s) = \boldsymbol{\sigma}(s, s_0 - s) = \mathbf{r}(s) + (s_0 - s)\boldsymbol{\tau}(s). \quad (108)$$

Уравнение (108) только с виду простое, поскольку для его нахождения требуется сначала найти натуральный параметр.

### Свойства эвольвент.

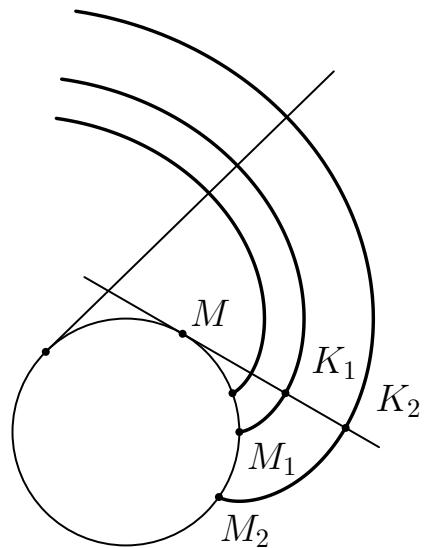
1. Пусть  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — две эвольвенты кривой  $\gamma$ . Расстояние между точками эвольвент  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , лежащих на одной касательной к  $\gamma$ , не зависит от выбора касательной к  $\gamma$ .

Действительно, если эвольвенты  $\beta_1$  и  $\beta_2$  имеют соответственно уравнения

$$\rho_1(s) = \mathbf{r}(s) + (s_1 - s)\tau(s) \quad \text{и} \quad \rho_2(s) = \mathbf{r}(s) + (s_2 - s)\tau(s),$$

то

$$\rho_1(s) - \rho_2(s) = (s_1 - s_2)\tau(s) \Rightarrow |\rho_1(s) - \rho_2(s)| = |s_1 - s_2|.$$



Эвольвенты окружности.

2. Если кривая  $\beta$  является эвольвентой кривой  $\gamma$ , то  $\gamma$  является эволютой кривой  $\beta$ .

Этот факт иллюстрируется рисунком на с. 131.

3. Из уравнения эвольвенты (108)

$$\rho(s) = \mathbf{r}(s) + (s_0 - s)\tau(s)$$

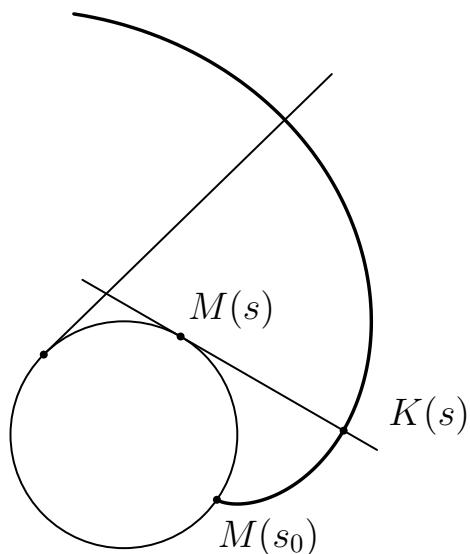
следует, что

$$\rho(s_0) = \mathbf{r}(s_0) + (s_0 - s_0)\tau(s) = \mathbf{r}(s_0), \quad \text{то есть} \quad \rho(s_0) = \mathbf{r}(s_0),$$

то есть при  $s = s_0$  точка эвольвенты  $K(s_0)$  лежит на кривой  $\gamma$  и совпадает с точкой  $M(s_0)$ . Поэтому расстояние между точкой  $M(s)$  кривой  $\gamma$  и точкой  $K(s)$  эвольвенты, лежащей на касательной в точке  $M(s)$ ,

$$|\rho(s) - \mathbf{r}(s)| = |s_0 - s|,$$

равно длине дуги кривой  $\gamma$  между точками  $M(s_0)$  и  $M(s)$ .



Это позволяет предложить следующую «физическую» интерпретацию эвольвенты: эвольвента — это развертка кривой  $\gamma$ , то есть кривая, описываемая концом туго натянутой нерастяжимой нити, намотанной на кривую  $\gamma$ , при ее сматывании с  $\gamma$ . При этом имеется в виду, что при сматывании нить в каждый момент времени направлена по касательной к кривой.

## 8 Поверхности в евклидовом пространстве

**Определение.** Параметризованной поверхностью класса  $C^k$  ( $k > 0$ ) в евклидовом аффинном пространстве  $\mathcal{E}_3$  называется отображение

$$\varphi : U \rightarrow \mathcal{E}_3,$$

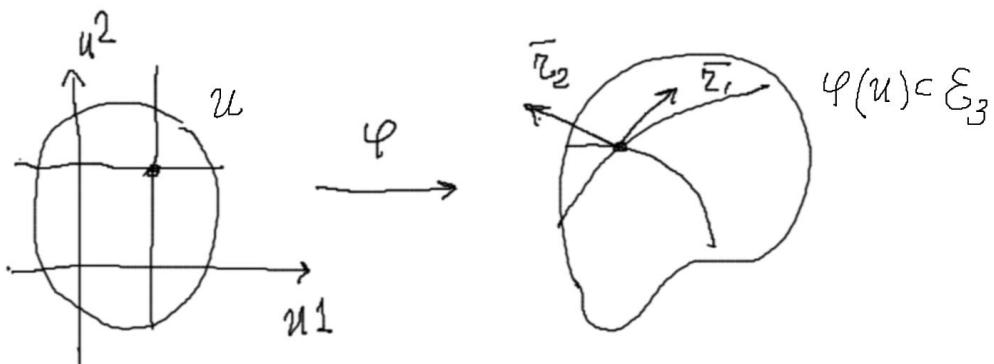
областью определения которого является открытое подмножество  $U \subset \mathbf{R}^2$ , заданное в некотором референсе  $\{O, \mathbf{e}_i\}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , пространства  $\mathcal{E}_3$  дифференцируемой класса  $C^k$  векторной функцией

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^a) = x^i(u^a)\mathbf{e}_i, \quad a = 1, 2, \quad (109)$$

где  $\mathbf{r}(u^a)$  — радиус-вектор точки  $\varphi(u^a)$ , удовлетворяющей условию регулярности: частные производные

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \quad u \quad \mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}$$

линейно независимы при всех  $(u^1, u^2) \in U$ .



Параметризованную поверхность будем обозначать как пару  $(U, \varphi)$ , для ее обозначения будем использовать также векторную функцию  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^a)$ . Уравнения (109) будем также записывать в виде  $x^i = x^i(u^a)$  и  $x^i = \varphi^i(u^a)$ .

**Определение.** Носителем (или образом) параметризованной поверхности  $(U, \varphi)$  называется подмножество  $\varphi(U)$  в  $\mathcal{E}_3$ , представляющее собой образ  $U$  при отображении  $\varphi$ .

**Определение.** Простой поверхностью в  $\mathcal{E}_3$  называется подмножество  $S \subset \mathcal{E}_3$ , которое является образом параметризованной поверхности  $\varphi : U \rightarrow \mathcal{E}_3$ , такой что отображение

$$\varphi : U \rightarrow \varphi(U) = S$$

является гомеоморфизмом, то есть взаимно однозначным и взаимно непрерывным.

Уравнения (109) при этом называются параметрическими уравнениями простой поверхности  $S$ .

Отметим, что говоря о гомеоморфизме  $\varphi$ , мы рассматриваем образ  $\varphi(U) = S \subset \mathcal{E}_3$  как топологическое пространство с индуцированной топологией: открытыми подмножествами в  $S$  являются пересечения  $S \cap W$  подмножества  $S$  с открытыми множествами пространства  $\mathcal{E}_3$ .

**Примерами простых поверхностей являются графики функций.** Пусть  $U$  — открытое подмножество в  $\mathbb{R}^2$  и

$$f : U \ni (x^1, x^2) \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$$

— дифференцируемая функция. Графиком функции  $f$  называется следующее подмножество в  $\mathbb{R}^3$ :

$$\text{graph}(f) = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^1, x^2) \in U, x^3 = f(x^1, x^2)\}.$$

График  $graph(f)$  является простой поверхностью, поскольку отображение

$$F : U \ni (x^1, x^2) \mapsto (x^1, x^2, x^3) \in graph(f)$$

является взаимно однозначным и обратное отображение  $F^{-1} : graph(f) \rightarrow U$

является непрерывным как ограничение непрерывного отображения

$$pr : \mathbb{R}^3 \ni (x^1, x^2, x^3) \mapsto (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2.$$

**Предложение.** Пусть  $(U, \varphi)$  — параметризованная поверхность в  $\mathcal{E}_3$ .

Тогда для любой точки  $u_0 = (u_0^1, u_0^2)$  найдется содержащее ее открытое подмножество  $V_{u_0} \subset U$ , такое что ограничение  $\varphi|V_{u_0} : V_{u_0} \rightarrow \mathcal{E}_3$  является параметризацией простой поверхности  $\varphi(V_{u_0})$ .

**Доказательство.** Пусть отображение  $\varphi$  в координатах, определяемых некоторым репером  $(O, \mathbf{e}_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , в пространстве  $\mathcal{E}_3$ , задается функциями

$$x^1 = \varphi^1(u^a) = x^1(u^a), \quad x^2 = \varphi^2(u^a) = x^2(u^a), \quad x^3 = \varphi^3(u^a) = x^3(u^a).$$

Поскольку векторы  $\mathbf{r}_1(u_0^a)$  и  $\mathbf{r}_2(u_0^a)$  линейно независимы, то матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^3}{\partial u^1} & \frac{\partial x^3}{\partial u^2} \end{pmatrix}_{u^a=u_0^a}$$

составленная из их координат — частных производных, вычисленных при  $u^a = u_0^a$ , имеет ранг 2. В этой матрице имеется не равный нулю минор размера  $2 \times 2$ .

Без ограничения общности можно считать, что не равен нулю минор

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \end{array} \right|_{u^a=u_0^a} \quad (110)$$

По теореме об обратной функции в этом случае имеется открытое подмножество  $V_{u_0} \subset \mathbb{R}^2$ , такое что отображение

$$\psi : V_{u_0} \ni (u^1, u^2) \mapsto (x^1 = x^1(u^1, u^2), x^2 = x^2(u^1, u^2)) \in \psi(V_{u_0}) \subset \mathbb{R}^2 \quad (111)$$

является взаимно однозначным, а обратное отображение

$$\psi^{-1} : \psi(V_{u_0}) \ni (x^1, x^2) \mapsto (u^1(x^1, x^2), u^2(x^1, x^2)) \in V_{u_0} \quad (112)$$

является дифференцируемым.

**Определение.** Взаимно однозначное дифференцируемое отображение, обратное к которому также является дифференцируемым отображением, называется **диффеоморфизмом**.

Подмножество  $\varphi(V_{u_0})$  теперь можно задать как образ множества  $\psi(V_{u_0})$  при отображении

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(V_{u_0}) \rightarrow \mathcal{E}_3.$$

В координатах, определяемых репером  $(O, \mathbf{e}_i)$ , это отображение принимает вид

$$(x^1, x^2) \mapsto (x^1, x^2, x^3 = \varphi^3(u^a(x^1, x^2))),$$

откуда следует, что в координатах подмножество  $\varphi(V_{u_0})$  представляет собой график функции и поэтому является простой поверхностью.  $\square$

**Определение.** Подмножество  $S \subset \mathcal{E}_3$  называется *поверхностью*, если у любой точки  $M \in S$  найдется открытая окрестность  $W$  (открытое множество, содержащее точку  $M$ ), такая что  $W \cap S$  — простая поверхность.

Простая поверхность может быть получена как образ различных параметризованных поверхностей. Эти параметризованные поверхности называют параметризациями поверхности  $S$ . Имеет место следующее предложение о замене параметризации, аналогичное соответствующему предложению в теории кривых.

**Предложение.** *Пусть*

$$\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathcal{E}_3, \quad x^i = \varphi_1^i(u^a) \quad u \quad \varphi_2 : U_2 \rightarrow \mathcal{E}_3, \quad x^i = \varphi_2^i(u^{a'})$$

— две параметризации простой поверхности  $S$ . Тогда существует диффеоморфизм

$$\chi : U_2 \rightarrow U_1, \quad u^a = \chi^a(u^{a'}), \tag{113}$$

такой что

$$\varphi_2 = \varphi_1 \circ \chi, \quad \varphi_2^i(u^{a'}) = \varphi_1^i(\chi^a(u^{a'})).$$

**Доказательство** основывается на теореме об обратной функции и аналогично соответствующему доказательству в теории кривых.

Как и в случае кривых, будем иногда рассматривать и подмножества  $S \subset \mathcal{E}_3$ , для которых сформулированные требования нарушаются в изолированных точках или вдоль некоторых кривых линий, называя такие подмножества поверхностями с особенностями. Точки, не являющиеся особыми, в этом случае называются *регулярными*.

**Касательное векторное пространство к поверхности в точке  $M$ .**

Рассмотрим некоторую поверхность  $S \subset \mathcal{E}_3$  и некоторую параметризованную кривую  $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathcal{E}_3$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ . Будем говорить, что кривая  $\gamma$  принадле-

жит поверхности  $S$  или лежит на этой поверхности, если ее образ принадлежит поверхности  $S$ , то есть  $\gamma(t) \in S$  для всех  $t \in (a, b)$ . Вектор  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0)$  будем называть касательным вектором параметризованной кривой  $\gamma$  при  $t = t_0$ , для этого вектора будем использовать обозначение  $\dot{\gamma}(t_0) = \dot{\gamma}_{t_0}$ .

Пусть

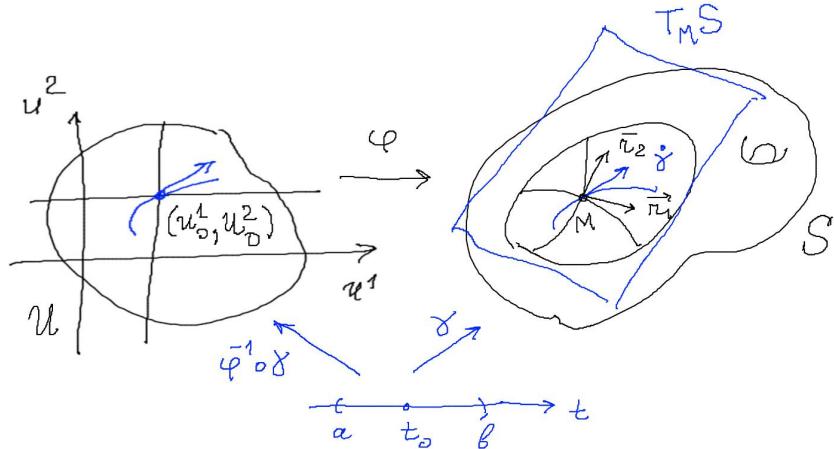
$$\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset S, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2), \quad (114)$$

— некоторая параметризация поверхности  $S$ , а  $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathcal{E}_3$  — параметризованная кривая, образ которой содержится в  $\varphi(U)$ .

Отображение

$$\varphi^{-1} \circ \gamma : (a, b) \rightarrow U \subset \mathbf{R}^2$$

относит каждому  $t \in (a, b)$  значения параметров



$$u^1 = u^1(t), \quad u^2 = u^2(t), \quad (115)$$

соответствующие точке  $\gamma(t)$ . Поэтому параметризованную кривую  $\gamma$  можно задать уравнениями (115).

Уравнения (115) параметризованной кривой  $\gamma$  называют *внутренними*. Происхождение этого названия следующее: параметры  $\{u^1, u^2\}$  играют роль ко-

ординат на поверхности  $S$ , которые рассматриваются как «внутренние» координаты на поверхности по отношению к координатам  $\{x^1, x^2, x^3\}$  во «внешнем» пространстве  $\mathcal{E}_3$ . Подстановка уравнений параметризованной кривой  $\gamma$ :  $x^1 = x^1(t)$ ,  $x^2 = x^2(t)$  в формулы (112)

$$\psi^{-1} : \psi(V_{u_0}) \ni (x^1, x^2) \mapsto (u^1(x^1, x^2), u^2(x^1, x^2)) \in V_{u_0} \quad (112)$$

показывает, что функции (115) дифференцируемы.

Подставляя внутренние уравнения (115) параметризованной кривой  $\gamma$  в параметрические уравнения (114) поверхности, получим уравнение параметризованной кривой  $\gamma$  в пространстве  $\mathcal{E}_3$ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1(t), u^2(t)). \quad (116)$$

Вычислим касательный вектор кривой  $\gamma$ , заданной уравнением (116), при  $t = t_0$ . При этом значении параметра  $t$  кривая  $\gamma$  проходит через точку  $M = \gamma(t_0)$  с радиус-вектором  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(u_0^1, u_0^2)$ , где  $u_0^1 = u^1(t_0)$ ,  $u_0^2 = u^2(t_0)$ . Имеем:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \frac{du^1}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} \frac{du^2}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^a} \frac{du^a}{dt}. \quad (117)$$

В дальнейшем будем использовать обозначения

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} = \mathbf{r}_1, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} = \mathbf{r}_2.$$

В этих обозначениях формула (117) принимает вид

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{du^1}{dt} \mathbf{r}_1 + \frac{du^2}{dt} \mathbf{r}_2 = \frac{du^a}{dt} \mathbf{r}_a. \quad (118)$$

Из соотношений (118) следует, что касательный вектор  $\dot{\gamma}_{t_0}$  всякой параметризованной кривой  $\gamma$ , проходящей через данную точку, принадлежит двумерному подпространству  $T_M S \subset \mathbf{E}_3$ , натянутому на векторы  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(u_0^a)$  и  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(u_0^a)$ .

**Определение.** Подпространство  $T_M S$  называется касательным (векторным) пространством к поверхности  $S$  в точке  $M \in S$ .

Всякий вектор

$$\mathbf{v} = v^a \mathbf{r}_a = v^1 \mathbf{r}_1 + v^2 \mathbf{r}_2 \in T_M S$$

является касательным вектором в точке  $M$  некоторой параметризованной кривой, лежащей на поверхности  $S$ . Таких параметризованных кривых бесконечно много, одной из них является параметризованная кривая, имеющая внутренние уравнения

$$u^a = u_0^a + t v^a, \quad a = 1, 2. \quad (119)$$

Действительно, из (119) при  $t = 0$  получаем

$$\frac{du^a}{dt}(0) = v^a.$$

Векторы  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  при этом принадлежат касательному пространству  $T_M S$ , они являются касательными векторами параметризованных кривых

$$u^1 = u_0^1 + t, \quad u^2 = u_0^2 \quad \text{и} \quad u^1 = u_0^1, \quad u^2 = u_0^2 + t$$

соответственно. Эти регулярные параметризованные кривые называются координатными линиями на поверхности  $S$  в области параметризации  $\varphi(U)$ , а параметры  $\{u^1, u^2\}$  криволинейными координатами на поверхности  $S$  для данной параметризации.

Поскольку векторы  $\mathbf{r}_1(u_0^a)$  и  $\mathbf{r}_2(u_0^a)$  линейно независимы, они образуют базис в двумерном касательном пространстве  $T_M S$ . Координатами именно в этом базисе естественным образом задаются касательные векторы кривых, проходящих через точку  $M$ .

Координаты  $v^a$  вектора  $\mathbf{v} = v^a \mathbf{r}_a \in T_M S$  зависят от выбора криволинейной системы координат в окрестности точки  $M \in S$ , которая определяется конкретной параметризацией поверхности. Если в окрестности точки  $M \in S$  заданы две криволинейные системы координат, связанные соотношениями (113)

$$u^a = u^a(u^{a'}), \quad u^{a'} = u^{a'}(u^a),$$

то касательные векторы

$$\mathbf{r}_a = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^a}, \quad a = 1, 2, \quad \text{и} \quad \mathbf{r}_{a'} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^{a'}}, \quad a' = 1', 2',$$

образующие базисы в касательном пространстве  $T_M S$  поверхности  $S$  в точке  $M$ , связаны соотношениями

$$\mathbf{r}_a = \frac{\partial u^{a'}}{\partial u^a} \mathbf{r}_{a'}, \quad \mathbf{r}_{a'} = \frac{\partial u^a}{\partial u^{a'}} \mathbf{r}_a. \quad (120)$$

Действительно, например

$$\mathbf{r}_{a'} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^{a'}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^a} \frac{\partial u^a}{\partial u^{a'}} = \frac{\partial u^a}{\partial u^{a'}} \mathbf{r}_a.$$

Преобразованиям базиса (120) в  $T_M S$  соответствуют преобразования координат векторов

$$v^{a'} = \frac{\partial u^{a'}}{\partial u^a} v^a, \quad v^a = \frac{\partial u^a}{\partial u^{a'}} v^{a'}. \quad (121)$$

Формулы (121) являются также следствием соотношений

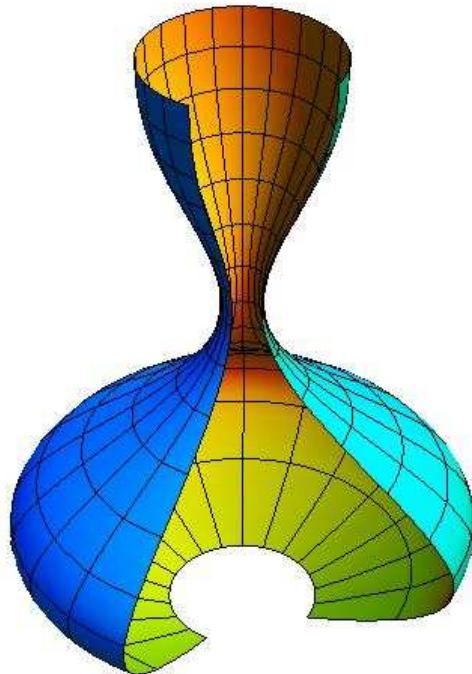
$$\frac{du^{a'}}{dt} = \frac{\partial u^{a'}}{\partial u^a} \frac{du^a}{dt}, \quad \frac{du^a}{dt} = \frac{\partial u^a}{\partial u^{a'}} \frac{du^{a'}}{dt}.$$

**Замечание.** Хотя все рассматриваемые векторы являются элементами векторного пространства  $\mathbf{E}_3$ , ассоциированного с  $\mathcal{E}_3$  (или свободными векторами геометрического пространства), касательные векторы в точке  $M$  связаны

именно с точкой  $M$ . В дальнейшем удобно будет считать, что касательное пространство в точке  $M$  состоит из векторов с началом именно в этой точке. В этом смысле элементами пространства  $T_M S$  являются пары  $(M, \mathbf{v})$ , где  $M \in S$ , поэтому касательные пространства в различных точках не могут иметь общих векторов.

**Пример.** Поверхность, получаемая в прямоугольной системе координат вращением кривой  $x = f(z)$  вокруг оси  $Oz$ , имеет уравнения

$$x = f(u^1) \cos(u^2), \quad y = f(u^1) \sin(u^2), \quad z = u^1.$$



В параметризациях этой поверхности, определяемых неравенствами  $a < u^1 < b$ ,  $\alpha < u^2 < \beta$  при  $\beta - \alpha < 2\pi$ , координатные линии называ-

ются меридианами и параллелями.

**Определение.** Плоскость  $\pi_M S$ , проходящая через точку  $M \in S$ , направляющим подпространством которой является касательное пространство  $T_M S$ , называется *касательной плоскостью поверхности  $S$  в точке  $M \in S$* .

Пусть  $\rho$  — радиус-вектор произвольной точки касательной плоскости  $\pi_M S$ , а  $\{X^i\}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , — ее координаты в репере  $\{O, \mathbf{e}_i\}$  пространства  $\mathcal{E}_3$ . Тогда касательная плоскость  $\pi_M S$  может быть задана следующими уравнениями:

$$(\rho - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} X^1 - x_0^1 & X^2 - x_0^2 & X^3 - x_0^3 \\ x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$x_a^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^a}(u_0^b), \quad a = 1, 2,$$

— координаты векторов  $\mathbf{r}_a(u_0^b)$  в репере  $\{O, \mathbf{e}_i\}$ .

**Определение.** Всякий ненулевой вектор  $\mathbf{N}$ , ортогональный касательному пространству  $T_M S$  поверхности  $S$ , называется **нормальным вектором** поверхности  $S$  в точке  $M \in S$ .

Подпространство (одномерное)  $N_M S$ , содержащее все векторы, ортогональные касательному пространству поверхности  $S$ , называется **нормальным пространством** поверхности  $S$  в точке  $M \in S$ .

Прямая  $\ell$ , проходящая через точку  $M$  и имеющая в качестве направляющего вектора нормальный вектор поверхности в этой точке, называется **нормалью** поверхности  $S$  в точке  $M \in S$ .

**Замечание.** Нормальные векторы поверхности в точке  $M \in S$  также удобно рассматривать как связанные именно с данной точкой  $M$ . При этом элементами пространства  $N_M S$ , как и в случае касательного пространства, следует считать пары  $(M, \mathbf{v})$ ,  $M \in S$ .

Нормальный вектор  $S$  в точке  $M \in S$  можно найти, решая систему уравнений

$$(\mathbf{N}, \mathbf{r}_1) = 0, \quad (\mathbf{N}, \mathbf{r}_2) = 0$$

или пользуясь операцией векторного произведения:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2].$$

В последнем случае уравнение нормали запишется в виде

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_0 + \lambda[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2],$$

где  $\boldsymbol{\rho}$  — радиус-вектор произвольной точки нормали, а  $\lambda$  — параметр вдоль нормали.

### Ориентация поверхности.

**Определение.** Ориентацией поверхности  $S$  называется выбор в каждой точке  $M \in S$  единичного нормального вектора  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(M)$ , такой что отображение

$$\nu : S \rightarrow \mathbf{E}_3, \quad \nu(M) = \mathbf{n}(M), \tag{122}$$

является непрерывным.

Отображение (122) называют также полем нормального вектора.

Поскольку нормальное подпространство одномерно, в каждой точке  $M \in S$  существуют только два единичных нормальных вектора  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$ . По-

этому у связной поверхности  $S$ , то есть поверхности, которая не представляется в виде объединения двух своих открытых непересекающихся подмножеств, имеется не более двух ориентаций.

**Определение.** *Поверхность, допускающая ориентацию, называется ориентируемой.*

*Поверхность, на которой задана ориентация, называется ориентированной.*

Если зафиксирована ориентация пространства  $\mathcal{E}_3$ , то ориентация поверхности  $S$  задает ориентацию на каждом касательном пространстве  $T_M S$ : пара векторов  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$  из  $T_M S$  является правой, если правой является тройка  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{n}\}$  или, эквивалентным образом, тройка  $\{\mathbf{n}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ . При этом операция поворота вектора  $\mathbf{a} \in T_M S$  на прямой угол может быть задана формулой

$$\Phi_{\frac{\pi}{2}} : T_M S \ni \mathbf{a} \mapsto [\mathbf{a}] = [\mathbf{n}, \mathbf{a}] \in T_M S.$$

### Примеры.

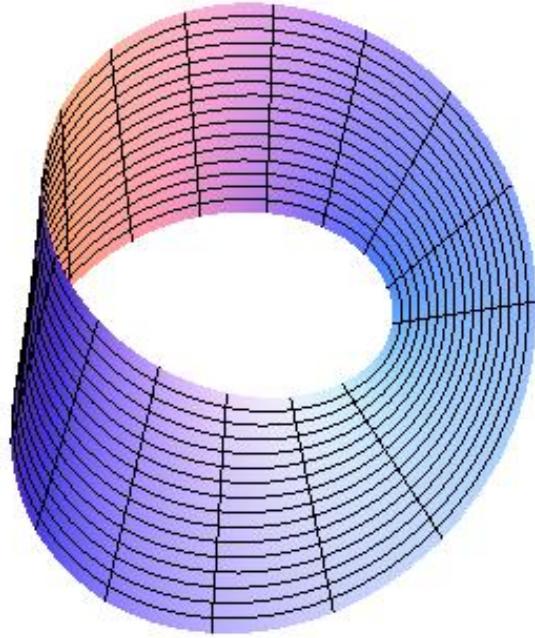
1. Сфера  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  ориентируема. Ориентация на сфере может быть задана, например, следующим образом:

$$\mathbf{n}(M) = \frac{\mathbf{r}_M}{|\mathbf{r}_M|}.$$

2. Лист Мёбиуса. Поверхность, являющаяся образом параметризованной поверхности

$$\mathbf{r} = a \mathbf{e}(u^1) + u^2 \left( \mathbf{e}(u^1) \cos \frac{u^1}{2} + \mathbf{k} \sin \frac{u^1}{2} \right), \quad u^1 \in (-\pi, 2\pi), \quad u^2 \in \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right),$$

заданной в прямоугольной системе координат в  $\mathcal{E}_3$ , не является ориентируемой.



3. На простой поверхности с параметризацией  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^a)$  возникает естественная ориентация

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]}{|[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]|}.$$

### Тензоры на поверхности.

На каждом касательном пространстве  $T_M S$  поверхности  $S \subset \mathcal{E}_3$  имеется операция скалярного произведения векторов, наследуемая из пространства  $\mathbf{E}_3$ , ассоциированного с  $\mathcal{E}_3$ :

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (v^a \mathbf{r}_a, w^b \mathbf{r}_b) = v^a w^b (\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) = g_{ab} v^a w^b, \quad \text{где } g_{ab} = (\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b).$$

Кроме того, имеется операция косого произведения векторов

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = (\mathbf{n}, \mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Эти операции представляют собой билинейные отображения вида

$$b : T_M S \times T_M S \ni \{\mathbf{v}, \mathbf{w}\} \mapsto b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{R},$$

определенные в каждой точке поверхности  $S$ .

Такого рода отображения, у которых может быть не два, а произвольное (конечное) число аргументов

$$\begin{aligned} T : T_M S \times T_M S \times \dots \times T_M S \ni \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_q\} \mapsto \\ T(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_q) \in \mathbf{R}, \quad (123) \end{aligned}$$

являющиеся линейными по каждому аргументу, называются тензорами.

Если некоторая область  $U$  поверхности  $S$  параметризована и на ней введены криволинейные координаты  $\{u^a\}$ , то в касательном пространстве  $T_M S$  каждой точки  $M \in U$  появляется базис  $\{\mathbf{r}_a = \partial \mathbf{r} / \partial u^a\}$ ,  $a = 1, 2$ . При этом значения тензора (123) в криволинейных координатах принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q) = T(v_1^{a_1} \mathbf{r}_{a_1}, v_2^{a_2} \mathbf{r}_{a_2}, \dots, v_q^{a_q} \mathbf{r}_{a_q}) = \\ T(\mathbf{r}_{a_1}, \mathbf{r}_{a_2}, \dots, \mathbf{r}_{a_q}) v_1^{a_1} v_2^{a_2} \dots v_q^{a_q} = T_{a_1 a_2 \dots a_q} v_1^{a_1} v_2^{a_2} \dots v_q^{a_q}. \end{aligned}$$

Числа

$$T_{a_1 a_2 \dots a_q} = T(\mathbf{r}_{a_1}, \mathbf{r}_{a_2}, \dots, \mathbf{r}_{a_q}) \quad (124)$$

называются координатами тензора.

Замена криволинейных координат

$$u^{a'} = u^{a'}(u^a), \quad u^a = u^a(u^{a'})$$

на области  $U \subset S$  поверхности (замена параметризации) приводит к замене базиса в  $T_M S$  по формулам (120)

$$\mathbf{r}_{a'} = \frac{\partial u^a}{\partial u^{a'}} \mathbf{r}_a, \quad \mathbf{r}_a = \frac{\partial u^{a'}}{\partial u^a} \mathbf{r}_{a'}. \quad (120)$$

Замена базиса (120) приводит (см. (124)) к следующим формулам преобразования координат тензора при замене криволинейных координат:

$$T_{a'_1 a'_2 \dots a'_q} = \frac{\partial u^{a_1}}{\partial u^{a'_1}} \frac{\partial u^{a_2}}{\partial u^{a'_2}} \dots \frac{\partial u^{a_q}}{\partial u^{a'_q}} T_{a_1 a_2 \dots a_q}. \quad (125)$$

**Определение.** Если некоторый тензор (123) задан в каждой точке поверхности  $S$  или некоторого открытое подмножества  $U \subset S$  и координаты тензора являются дифференцируемыми функциями (некоторого класса дифференцируемости  $C^\ell$ )

$$T_{a_1 a_2 \dots a_q} = T_{a_1 a_2 \dots a_q}(u^c)$$

криволинейных координат  $u^c$ , то говорят, что задано дифференцируемое тензорное поле (класса дифференцируемости  $C^\ell$ ) (или поле тензора) на поверхности  $S$  или соответственно на области  $U$ .

Корректность этого определения (то есть независимость от конкретной системы криволинейных координат) следует из формулы (125).

Из этой же формулы (125) следует, что класс дифференцируемости тензорного поля не может выше, чем  $C^{k-1}$ , если поверхность  $S$  имеет класс дифференцируемости  $C^k$ .

Кроме тензорных полей на поверхности можно рассматривать скалярные поля, то есть функции, относящие каждой точке поверхности некоторое вещественное число,  $F : S \rightarrow \mathbb{R}$ .

По определению, подмножество  $S \subset \mathcal{E}_3$  является поверхностью, если для любой точки  $M \in S$  существует параметризованная поверхность  $\varphi : U \rightarrow \mathcal{E}_3$ , такая что  $\varphi(U)$  — простая поверхность ( $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  — гомеоморфизм), содержащая точку  $M$ . Композиция  $F \circ \varphi$  представляет собой вещественную функцию двух вещественных аргументов  $u^1$  и  $u^2$ . Функция  $F$  называется дифференцируемой (класса  $C^\ell$ ), если для любой параметризации  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  простого куска  $\varphi(U) \subset S$  поверхности  $S$  функция  $F \circ \varphi$  является дифференцируемой (класса  $C^\ell$ ). Класс дифференцируемости функции не может превышать класс дифференцируемости поверхности  $S$ .

Таким образом, в криволинейных координатах функция  $F : S \rightarrow \mathbb{R}$  задается функциями  $F \circ \varphi$ , которые записывают как  $F(u^a)$ .

### Дифференциал функции как поле линейной формы.

Пусть  $F : S \rightarrow \mathbf{R}$  — дифференцируемая функция (возможно определенная не на всей поверхности, а только на открытом подмножестве поверхности).

Пусть  $M_0 \in S$  — некоторая точка поверхности  $S$ , а  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset S$ ,  $\varphi(U) \ni M_0$ , — параметризация поверхности в окрестности точки  $M_0$ , посредством которой на области  $\varphi(U) \subset S$  вводятся криволинейные координаты  $u^a$ .

Рассмотрим произвольный вектор  $\mathbf{v} \in T_{M_0}S$  из касательного пространства в точке  $M_0$ . По определению касательного пространства, этот вектор является касательным вектором  $\dot{\gamma}_{t_0}$  некоторой кривой  $\gamma : (a, b) \rightarrow S \subset \mathcal{E}_3$ , проходящей при  $t = t_0 \in (a, b)$  через точку  $M_0$ . Пусть кривая  $\gamma$  задается в локальных координатах уравнениями  $\mathbf{r}(u^a(t))$ , тогда

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}(u^a(t))}{dt}(t_0) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^a}(u_0^a) \frac{du^a}{dt}(t_0) = \frac{du^a}{dt}(t_0) \mathbf{r}_a.$$

Дифференциал  $dF_{M_0}$  функции  $F$  в точке  $M_0$  определяется как отображение

$$dF_{M_0} : T_{M_0}S \rightarrow \mathbf{R},$$

относящее вектору  $\mathbf{v} = \dot{\gamma}_{t_0}$  число  $\frac{d(F \circ \gamma)}{dt}(t_0)$  — производную функции  $F$  в направлении вектора  $\mathbf{v}$ . В криволинейных координатах отображение  $dF_{M_0}$  имеет вид

$$\begin{aligned} dF_{M_0} : \mathbf{v} = \frac{du^a}{dt}(t_0) \mathbf{r}_a &\longmapsto \frac{dF(u^a(t))}{dt}(t_0) = \\ &= \frac{\partial F}{\partial u^a}(u_0^c) \frac{du^a}{dt}(t_0) = \frac{\partial F}{\partial u^a} v^a \in \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (126)$$

Поскольку ни вектор  $\mathbf{v} = \dot{\gamma}_{t_0}$ , ни число  $\frac{d(F \circ \gamma)}{dt}(t_0)$  не зависят от выбора параметризации, то отображение

$$dF_{M_0} : T_{M_0}S \ni \mathbf{v} = \dot{\gamma}_{t_0} \longmapsto \frac{d(F \circ \gamma)}{dt}(t_0) \in \mathbf{R}$$

определен корректно. С другой стороны, поскольку отображение  $dF_{M_0}$  в криволинейных координатах имеет вид

$$dF_{M_0}(\mathbf{v}) = \frac{\partial F}{\partial u^a}(u_0^a) v^a, \quad (127)$$

то оно является линейным и тем самым линейной формой на  $T_{M_0}S$  с координатами  $\partial_a F(u_0^b)$ .

Линейную форму  $dF_{M_0}$  можно сразу определить формулой (127), поскольку для координат  $\partial_a F(u_0^b)$  выполняется тензорный закон преобразования

$$\frac{\partial F}{\partial u^a} = \frac{\partial F}{\partial u^{a'}} \frac{\partial u^{a'}}{\partial u^a}.$$

Поскольку в формулах (126) и (127)  $M_0$  — это произвольная точка поверхности, а функции  $\partial_a F(u^b)$ , очевидно, дифференцируемы, то этими формулами определяется поле линейной формы на  $S$ .

Это поле называется *дифференциалом функции*  $F$  или *градиентом* функции  $F$ .

Криволинейные координаты  $u^a$  являются функциями, определенными на области  $\varphi(U)$  поверхности  $S$ . Эти функции, очевидно, дифференцируемы, поскольку в координатах они имеют вид  $u^a = u^a(u^b)$ . Поэтому на области  $\varphi(U)$  дифференциалы функций  $u^a$  являются линейными формами. Координатами формы  $du^a$  являются частные производные  $\frac{\partial u^a}{\partial u^b}$ , где индекс  $a$  фиксирован, а индекс  $b$  принимает значения 1, 2. Поэтому

$$du^a(\mathbf{v}) = \frac{\partial u^a}{\partial u^b} v^b = \delta_b^a v^b = v^a.$$

Отсюда следует, что в каждой точке  $M$  области  $U$  формы  $du^1$  и  $du^2$  образуют базис пространства  $T_M^*S$ , сопряженного касательному пространству  $T_MS$ , сопряженный базису  $\{\mathbf{r}_a\}$ ,  $a = 1, 2$ .

### Метрический тензор поверхности.

В каждой точке поверхности имеется операция скалярного произведения векторов, лежащих в касательном пространстве, индуцированная скалярным произведением в пространстве в пространстве  $\mathbf{E}_3$ , ассоциированном с  $\mathcal{E}_3$ . Это билинейное отображение

$$g : T_MS \times T_MS \ni \{\mathbf{v}, \mathbf{w}\} \mapsto (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{R}.$$

Когда точка  $M$  пробегает всю поверхность, получается тензорное поле, называемое *полем метрического тензора*, или просто *метрическим тензором* поверхности. Координаты этого тензора имеют вид

$$g_{ab} = g(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) = (\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) \quad \Rightarrow \quad g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{v}, \mathbf{w}) = g_{ab} v^a w^b. \quad (128)$$

Поскольку кроме метрического тензора с поверхностью  $S$  в  $\mathcal{E}_3$  ассоциируются и другие тензоры, тензор (128) называют также *первым основным тензором* поверхности  $S$ .

Пусть параметризованная кривая  $\mathbf{r}(t)$ , лежащая в образе  $\varphi(U)$  параметризации  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^a)$  поверхности  $S$ , задана внутренними уравнениями  $u^a = u^a(t)$ . Тогда касательный вектор этой кривой имеет вид

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^a} \frac{du^a}{dt} = \frac{du^a}{dt} \mathbf{r}_a = \frac{du^1}{dt} \mathbf{r}_1 + \frac{du^2}{dt} \mathbf{r}_2,$$

и его скалярный квадрат равен

$$\left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 = \left( \frac{du^a}{dt} \mathbf{r}_a, \frac{du^b}{dt} \mathbf{r}_b \right) = g_{ab} \frac{du^a}{dt} \frac{du^b}{dt}.$$

Отсюда следует, что квадрат дифференциала длины дуги кривой, лежащей на поверхности, имеет вид

$$ds^2 = d\mathbf{r}^2 = g_{ab} du^a du^b = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}du^1 du^2 + g_{22}(du^2)^2. \quad (129)$$

Выражение (129) традиционно называют *первой квадратичной дифференциальной формой* поверхности  $S$ , а также *первой фундаментальной формой* поверхности  $S$ .

В обозначениях

$$u^1 = u, \quad u^2 = v, \quad g_{11} = E, \quad g_{12} = F, \quad g_{22} = G,$$

введенных еще Гауссом, эту форму записывают в виде

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Зная метрический тензор поверхности, можно вычислять углы между векторами в касательных пространствах поверхности, в частности, углы между

кривыми на поверхности, заданными своими уравнениями в криволинейных координатах. Если  $\mathbf{v} = v^a \mathbf{r}_a(u_0^1, u_0^2)$  и  $\mathbf{w} = w^a \mathbf{r}_a(u_0^1, u_0^2)$  — два вектора из касательного пространства  $T_M S$  в точке  $M \in S$  с радиус-вектором  $\mathbf{r}_M = \mathbf{r}(u_0^1, u_0^2)$ ,  $\alpha$  — угол между  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$ , а  $g_{ab} = g_{ab}(u_0^1, u_0^2)$ , то

$$\cos \alpha = \frac{g_{ab} v^a w^b}{\sqrt{g_{cd} v^c v^d} \sqrt{g_{ef} w^e w^f}}.$$

Длина дуги кривой, лежащей на поверхности и заданной в криволинейных координатах уравнениями  $u^a = u^a(t)$ , между двумя ее точками  $M_0(t_0)$  и  $M_1(t_1)$  вычисляется по формуле

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ab}(u^c(t)) \frac{du^a}{dt} \frac{du^b}{dt}} dt. \quad (130)$$

В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

**Задача.** Пусть поверхность  $S$  задана уравнениями

$$x = u^1 \cos u^2, \quad y = u^1 \sin u^2, \quad z = u^1 u^2.$$

Найти угол  $\alpha$  между кривыми  $\gamma$  и  $\gamma_*$ , заданными соответственно уравнениями

$$u^1 = t + 1, \quad u^2 = t - 1 \quad \text{и} \quad u^1 = 3 - 2t_*, \quad u^2 = t_* - 2.$$

**Решение.** Вычисляем базисные векторы в касательных пространствах:

$$\mathbf{r}_1 = \{\cos u^2, \sin u^2, u^2\}, \quad \mathbf{r}_2 = \{-u^1 \sin u^2, u^1 \cos u^2, u^1\},$$

откуда

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (u^2)^2 & u^1 u^2 \\ u^1 u^2 & 2(u^1)^2 \end{pmatrix}.$$

Найдем точку пересечения кривых:

$$\begin{cases} t+1 = 3 - 2t_* \\ t-1 = t_* - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t+2t_* = 2 \\ t-t_* = -1 \end{cases} \Leftrightarrow t=0, t_*=1$$

Эта точка имеет криволинейные координаты  $u^1 = 1, u^2 = -1$ . Метрический тензор в этой точке имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Касательные векторы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}_*$  к кривым  $\gamma$  и  $\gamma_*$  в точке их пересечения имеют координаты

$$v^1 = \frac{du^1}{dt} = 1, \quad v^2 = \frac{du^2}{dt} = -1, \quad v_*^1 = \frac{du^1}{dt_*} = -2, \quad v_*^2 = \frac{du^2}{dt_*} = 1,$$

откуда

$$(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) = 2 \cdot 1 \cdot (-2) + (-1)(1 \cdot 1 + (-1)(-2)) + 2 \cdot (-1) \cdot 1 = -9,$$

$$\mathbf{v}^2 = 2 \cdot 1^2 - 2(-1) + 2(-1)^2 = 6,$$

$$\mathbf{v}_*^2 = 2 \cdot 2^2 - 2(-2) + 2 \cdot 1^2 = 14.$$

В итоге получаем

$$\cos \alpha = \frac{9}{\sqrt{6}\sqrt{14}}.$$

### Дискриминантный тензор ориентированной поверхности.

В каждой точке ориентированной поверхности имеется операция косого произведения векторов, лежащих в касательном пространстве. Это билинейное отображение, определенное формулой

$$\varepsilon : T_M S \times T_M S \ni \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \mapsto \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{n}(M)) \in \mathbf{R},$$

где  $\mathbf{n}(M)$  — поле единичного нормального вектора поверхности, задающее ориентацию. Когда точка  $M$  пробегает всю поверхность, получаем тензорное поле, называемое *полем дискриминантного тензора*, или просто *дискриминантным тензором* поверхности. Координаты этого тензора имеют вид

$$\varepsilon_{ab} = \varepsilon(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) = (\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b, \mathbf{n}) \quad (131)$$

и образуют кососимметричную матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & 0 \end{pmatrix}. \quad (132)$$

Поскольку

$$\frac{[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|} = \pm \mathbf{n},$$

то из формулы для произведения двух косых произведений на ориентированной плоскости:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{c}) & (\mathbf{a}, \mathbf{d}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{c}) & (\mathbf{b}, \mathbf{d}) \end{vmatrix},$$

при  $\mathbf{a} = \mathbf{c} = \mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{d} = \mathbf{r}_2$  получаем

$$(\varepsilon_{12})^2 = \det(g_{ab}) \quad \text{и} \quad \varepsilon_{12} = \pm \sqrt{\det(g_{ab})}. \quad (133)$$

Знак «+» в формуле (133) соответствует тому случаю, когда  $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$  — правая пара векторов в  $T_M S$ , а знак «—» случаю, когда эта пара левая.

### Площадь поверхности.

На простой поверхности  $S$ , представляющей собой образ параметризованной поверхности

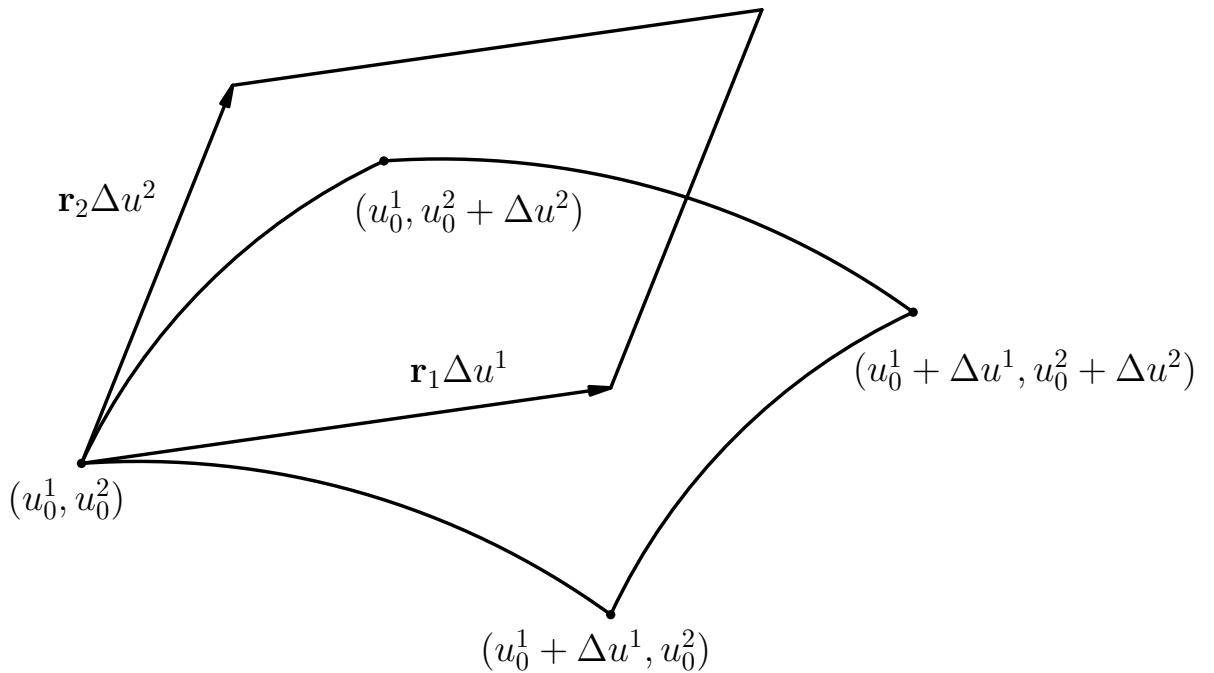
$$\varphi : U \ni \{u^1, u^2\} \mapsto \mathbf{r}(u^1, u^2) \in \mathcal{E}_3,$$

рассмотрим координатные линии, заданные уравнениями

$$u^1 = u_0^1, \quad u^2 = u_0^2, \quad u^1 = u_0^1 + \Delta u^1, \quad u^2 = u_0^2 + \Delta u^2.$$

При малых значениях  $\Delta u^1$  и  $\Delta u^2$  образуемый этими линиями криволинейный четырехугольник почти не отличается от параллелограмма в касательной плоскости  $T_{M_0}S$  в точке  $M_0(u_0^1, u_0^2)$ , сторонами которого являются векторы

$$\mathbf{r}_1(u_0^1, u_0^2)\Delta u^1 \quad \text{и} \quad \mathbf{r}_2(u_0^1, u_0^2)\Delta u^2.$$



Площадь этого параллелограмма равна (считаем, что  $\Delta u^1 > 0, \Delta u^2 > 0$ )

$$|\langle \mathbf{r}_1(u_0^1, u_0^2)\Delta u^1, \mathbf{r}_2(u_0^1, u_0^2)\Delta u^2 \rangle| = |\varepsilon_{12}| \Delta u^1 \Delta u^2 = \sqrt{\det(g_{ab})} \Delta u^1 \Delta u^2.$$

Суммируя площади всех таких параллелограммов, соответствующих разбиению области  $U$  прямыми линиями  $u^1 = u_0^1 + m\alpha, u^2 = u_0^2 + m\alpha, m \in \mathbf{Z}$ , и

устремляя  $\alpha$  к нулю, получим

$$\iint_U \sqrt{\det(g_{ab})} du^1 du^2. \quad (134)$$

**Определение.** Число, определяемое интегралом (134), если оно существует, называется площадью простой поверхности  $S$ , являющейся образом параметризованной поверхности  $\varphi : U \rightarrow \mathcal{E}_3$ .

### Неявное задание поверхностей.

Множество точек пространства, представляющее собой поверхность, может быть задано уравнением вида

$$F(x, y, z) = 0, \quad (135)$$

где  $F(x, y, z)$  — дифференцируемая функция трех переменных. Уравнением такого вида задается, например, эллипсоид или сфера. В этом случае говорят о неявном задании поверхности.

Это приводит к необходимости исследования множеств в пространстве, координаты точек которых удовлетворяют уравнению вида (135).

Итак, пусть в некоторой области пространства  $U \subset \mathcal{E}_3$  в прямоугольной системе координат задана дифференцируемая (достаточно высокого класса дифференцируемости) функция  $F(x, y, z)$ . Для исследования множества  $S$  точек, удовлетворяющих уравнению  $F(x, y, z) = 0$ , представим функцию  $F(x, y, z)$  формулой Тейлора в окрестности  $W$  точки  $(x_0, y_0, z_0) \in U$ :

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= F(x_0, y_0, z_0) + F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \\ &\quad + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) + \Phi(x, y, z), \end{aligned} \quad (136)$$

где

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial F}{\partial z}$$

— частные производные функции  $F$  по  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно, а  $\Phi(x, y, z)$  — функция, являющаяся бесконечно малой не ниже второго порядка по сравнению с  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ .

Предположим, что точка  $(x_0, y_0, z_0)$  удовлетворяет уравнению (135), то есть  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ . Тогда в окрестности  $W$  уравнение (135) можно представить в виде

$$\begin{aligned} F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) + \\ + \Phi(x, y, z) = 0. \end{aligned} \quad (137)$$

Если

$$(F_x(x_0, y_0, z_0))^2 + (F_y(x_0, y_0, z_0))^2 + (F_z(x_0, y_0, z_0))^2 \neq 0,$$

то с точностью до бесконечно малых второго порядка уравнение (137) представляет собой уравнение плоскости:

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \quad (138)$$

Это означает, что если, например,  $F_y(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ , то в окрестности  $W$  точки  $(x_0, y_0, z_0)$  уравнение (137) можно представить в виде

$$y - y_0 = -\frac{F_x(x_0, y_0, z_0)}{F_y(x_0, y_0, z_0)}(x - x_0) - \frac{F_z(x_0, y_0, z_0)}{F_y(x_0, y_0, z_0)}(z - z_0) + \Psi(x, y, z),$$

где  $\Psi(x, y, z)$  — бесконечно малая не ниже второго порядка по сравнению с  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ . Отсюда следует, что множество точек, удовлетворяющих уравнению (135), в некоторой окрестности  $W$  точки  $(x_0, y_0, z_0)$  взаимнооднозначно проектируется на плоскость  $Oxz$ .

В результате, на области  $W$  уравнение (135) можно разрешить относительно  $y$ , и, следовательно, часть  $S \cap W$  множества  $S$  может быть задана как график некоторой функции  $y = f(x, z)$ . Это является содержанием так называемой теоремы о неявной функции из курса математического анализа.

Аналогично, если  $F_x(x_0, y_0, z_0) \neq 0$  или  $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ , то в окрестности  $W$  точки  $(x_0, y_0, z_0)$  уравнение (137) может быть разрешено относительно  $x$  или  $z$  и часть  $S \cap W$  множества  $S$  может быть задана как график некоторой функции  $x = g(y, z)$  или  $z = g(x, y)$ . Таким образом, имеет место следующее предложение.

**Предложение.** Пусть в области  $U \subset \mathcal{E}_3$  в прямоугольной системе координат задана дифференцируемая функция  $F(x, y, z)$ , и пусть  $S$  — множество точек из области  $U$ , удовлетворяющих уравнению  $F(x, y, z) = 0$ . Если для всякой точки  $M(x_0, y_0, z_0) \in S$  хотя бы одна из частных производных  $F_x(x_0, y_0, z_0)$ ,  $F_y(x_0, y_0, z_0)$ ,  $F_z(x_0, y_0, z_0)$  не обращается в нуль, то множество  $S$  представляет собой поверхность в  $\mathcal{E}_3$ .

**Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением  $F(x, y, z) = 0$ .**

Пусть  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  — параметризованная кривая, лежащая на поверхности  $S$ , заданной уравнением  $F(x, y, z) = 0$ , и проходящая через точку  $M(x_0, y_0, z_0)$  при  $t = t_0$ . Подставляя уравнение кривой в уравнение поверхности, получим тождество

$$F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0.$$

Дифференцируя последнее равенство по  $t$  при  $t = t_0$ , получим

$$F_x(x_0, y_0, z_0) \frac{dx}{dt} + F_y(x_0, y_0, z_0) \frac{dy}{dt} + F_z(x_0, y_0, z_0) \frac{dz}{dt} = 0.$$

Из последнего равенства следует, что касательный вектор всякой кривой, проходящей через точку  $M(x_0, y_0, z_0)$ , ортогонален в этой точке вектору  $\mathbf{N}$  с координатами

$$\{F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)\}. \quad (139)$$

Следовательно, вектор, имеющий координаты (139), является нормальным вектором поверхности  $S$  в точке  $M(x_0, y_0, z_0)$ . Поэтому уравнение касательной плоскости поверхности, заданной уравнением  $F(x, y, z) = 0$ , в точке  $M(x_0, y_0, z_0)$  имеет вид (138)

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Если система координат в пространстве  $\mathcal{E}_3$ , в которой поверхность  $S$  задана уравнением  $F(x, y, z) = 0$ , не является прямоугольной, то уравнение (138) по прежнему остается уравнением касательной плоскости, только в этом случае формулой (139) задаются координаты линейной формы (называемой дифференциалом функции  $F(x, y, z)$  или градиентом).

## 9 Второй фундаментальный тензор поверхности.

### Нормальная кривизна кривой на ориентированной поверхности.

Пусть  $S$  — некоторая ориентируемая поверхность и

$$S \ni M \mapsto \mathbf{n} = \mathbf{n}(M)$$

— поле единичного нормального вектора на  $S$ , задающее ориентацию на  $S$ .

Это поле превращает всякую нормаль к поверхности в ориентированную прямую (или, в других терминах, ось).

**Определение.** Нормальной кривизной кривой  $L$ , лежащей на ориентированной поверхности  $S$ , в точке  $M_0 \in L$  называется проекция вектора кривизны кривой в этой точке на (ориентированную) нормаль поверхности  $S$ .

Рассмотрим некоторую параметризацию  $\mathbf{r}(u^a)$  поверхности  $S$  в окрестности точки  $M_0(u_0^a) \in L$  и некоторую натуральную параметризацию  $\gamma : s \mapsto \mathbf{r}(s)$  кривой  $L$  в окрестности этой же точки. Если в криволинейной системе координат  $\{u^1, u^2\}$  на  $S$  параметризованная кривая  $\gamma$  имеет уравнения  $u^a = u^a(s)$ , то ее уравнение может быть записано в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^a(s)). \quad (140)$$

Дифференцируя уравнение (140), получим следующие выражения для производных:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \frac{du^1}{ds} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} \frac{du^2}{ds} = \frac{du^a}{ds} \mathbf{r}_a. \quad (141)$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d^2u^a}{ds^2} \mathbf{r}_a + \frac{du^a}{ds} \frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial u^b} \frac{du^b}{ds} = \frac{d^2u^a}{ds^2} \mathbf{r}_a + \frac{du^a}{ds} \frac{du^b}{ds} \mathbf{r}_{ab}, \quad (142)$$

где использовано обозначение

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^a \partial u^b} = \mathbf{r}_{ab}.$$

Проектируя вектор кривизны  $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$  на нормаль и учитывая, что

$$\mathbf{r}_a \perp \mathbf{n} \iff (\mathbf{r}_a, \mathbf{n}) = 0,$$

получаем выражение для нормальной кривизны кривой  $L$

$$k_n = \left( \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2}, \mathbf{n} \right) = (\mathbf{r}_{ab}, \mathbf{n}) \frac{du^a}{ds} \frac{du^b}{ds}. \quad (143)$$

Из формулы (143) следует, что *нормальная кривизна кривой  $L$  в точке  $M_0$  зависит только от направления кривой в этой точке, то есть если две кривые, лежащие на поверхности  $S$  и проходящие через точку  $M_0$ , имеют в этой точке общую касательную, то они имеют в этой точке одну и ту же нормальную кривизну.*

**Предложение.** *Функции*

$$h_{ab}(u^c) = (\mathbf{r}_{ab}, \mathbf{n}), \quad a, b = 1, 2,$$

являются координатами некоторого тензорного поля  $h$  на поверхности  $S$ .

**Доказательство.** Необходимо проверить, что при замене криволинейных координат

$$u^{a'} = u^{a'}(u^a), \quad u^a = u^a(u^{a'})$$

на  $S$  в окрестности точки  $M_0$  выполняется соотношение

$$h_{a'b'} = \frac{\partial u^a}{\partial u^{a'}} \frac{\partial u^b}{\partial u^{b'}} h_{ab},$$

поскольку в этом случае для произвольных векторов  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_x S$  будет выполняться

$$h_{a'b'} v^{a'} w^{b'} = \frac{\partial u^a}{\partial u^{a'}} \frac{\partial u^b}{\partial u^{b'}} h_{ab} v^{a'} w^{b'} = h_{ab} \frac{\partial u^a}{\partial u^{a'}} v^{a'} \frac{\partial u^b}{\partial u^{b'}} w^{b'} = h_{ab} v^a w^b$$

и билинейная форма  $h(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  корректно (то есть независимо от выбора криволинейной системы координат в окрестности точки поверхности) определится

формулой

$$h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = h_{ab} v^a w^b.$$

Имеем:

$$\mathbf{r}_{a'b'} = \frac{\partial}{\partial u^{a'}}(\mathbf{r}_{b'}) = \frac{\partial}{\partial u^{a'}} \left( \frac{\partial u^b}{\partial u^{b'}} \mathbf{r}_b \right) = \frac{\partial^2 u^b}{\partial u^{a'} \partial u^{b'}} \mathbf{r}_b + \frac{\partial u^b}{\partial u^{b'}} \frac{\partial u^a}{\partial u^{a'}} \mathbf{r}_{ab},$$

откуда

$$\begin{aligned} h_{a'b'} &= (\mathbf{r}_{a'b'}, \mathbf{n}) = \left( \frac{\partial^2 u^b}{\partial u^{a'} \partial u^{b'}} \mathbf{r}_b + \frac{\partial u^b}{\partial u^{b'}} \frac{\partial u^a}{\partial u^{a'}} \mathbf{r}_{ab}, \mathbf{n} \right) = \\ &= \frac{\partial u^a}{\partial u^{a'}} \frac{\partial u^b}{\partial u^{b'}} (\mathbf{r}_{ab}, \mathbf{n}) = \frac{\partial u^a}{\partial u^{a'}} \frac{\partial u^b}{\partial u^{b'}} h_{ab}. \quad \square \end{aligned}$$

Другой путь рассуждений: формулой (143) в данной системе координат определяется квадратичная форма, но ее значение  $k_n = \left( \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2}, \mathbf{n} \right)$  на произвольном векторе  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$  от выбора системы координат не зависит. Поэтому это корректно определенная квадратичная форма, ей соответствует взаимно однозначно симметричная билинейная форма, то есть тензор указанного типа.

### Определение.

*Тензорное поле*

$$h : T_M S \times T_M S \rightarrow \mathbf{R}, \quad h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = h_{ab} v^a w^b, \quad (144)$$

на поверхности  $S$  называется полем второго основного тензора поверхности  $S$ , или просто вторым основным тензором поверхности  $S$ .

Тензор  $h_{ab}$  является симметричным:  $h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = h(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ . Ему соответствует квадратичная дифференциальная форма

$$h_{ab} du^a du^b = h_{11}(du^1)^2 + 2h_{12}du^1 du^2 + h_{22}(du^2)^2, \quad (145)$$

называемая *второй квадратичной дифференциальной формой* поверхности  $S$ , а также *второй фундаментальной формой* поверхности  $S$ .

Отметим традиционные обозначения для коэффициентов этой формы в случае, когда для криволинейных координат на поверхности используются обозначения  $u^1 = u$ ,  $u^2 = v$ :

$$h_{11} = L, \quad h_{12} = M, \quad h_{22} = N, \quad \text{или} \quad h_{11} = D, \quad h_{12} = D', \quad h_{22} = D''.$$

### **Формула для вычисления нормальной кривизны.**

Кривая, лежащая на поверхности, редко оказывается заданной натуральным параметром. Поэтому для вычисления нормальной кривизны нужна формула, в которой используется произвольная параметризация кривой. Пусть кривая на поверхности задана уравнениями  $u^a = u^a(t)$  и пусть  $s$  — некоторый натуральный параметр на этой кривой, в явном виде не заданный. Поскольку  $\frac{du^a}{ds} = \frac{du^a}{dt} \frac{dt}{ds}$ , то

$$k_n = h_{ab} \frac{du^a}{ds} \frac{du^b}{ds} = h_{ab} \frac{du^a}{dt} \frac{du^b}{dt} \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 = \frac{h_{ab} \frac{du^a}{dt} \frac{du^b}{dt}}{\left( \frac{ds}{dt} \right)^2} = \frac{h_{ab} \frac{du^a}{dt} \frac{du^b}{dt}}{g_{cd} \frac{du^c}{dt} \frac{du^d}{dt}}. \quad (146)$$

В формулу (146) можно подставить координаты  $\{v^a\}$  любого направляющего вектора  $\mathbf{v}$  касательной к данной кривой вместо производных криволинейных координат:

$$k_n = \frac{h_{ab} v^a v^b}{g_{cd} v^c v^d}.$$

Отметим еще формулу для вычисления координат тензора  $h_{ab}$  в случае, когда система криволинейных координат такова, что  $[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2] \uparrow\!\!\! \uparrow \mathbf{n}$ , то есть  $[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2] = \lambda \mathbf{n}$  при  $\lambda > 0$ .

В этом случае

$$h_{ab} = (\mathbf{r}_{ab} \mathbf{n}) = \frac{(\mathbf{r}_{ab}, [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2])}{|[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]|} = \frac{(\mathbf{r}_{ab}, [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2])}{|\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \rangle|} = \frac{(\mathbf{r}_{ab}, [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2])}{|\varepsilon_{12}|} = \frac{(\mathbf{r}_{ab}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}.$$

### Нормальные сечения поверхности.

Пусть  $M$  — некоторая точка поверхности  $S$ . Пересечение  $S \cap \pi$  поверхности  $S$  с плоскостью  $\pi$ , проходящей через нормаль к поверхности  $S$  в точке  $M(\mathbf{r}_0)$ , называется нормальным сечением поверхности  $S$ . Для некоторой окрестности  $U \subset S$  точки  $M$  пересечение  $\pi \cap U$  будет кривой. Действительно, если поверхность задана параметрическими уравнениями  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$ , а плоскость задана уравнением  $(\mathbf{a}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ , где  $\mathbf{a}$  — нормальный вектор плоскости  $\pi$ , то пересечение удовлетворяет уравнению

$$(\mathbf{a}, \mathbf{r}(u^1, u^2) - \mathbf{r}_0) = 0 \Leftrightarrow F(u^1, u^2) = 0,$$

которое можно рассматривать как неявное уравнение для кривой в области параметров  $(u^1, u^2)$ . При этом в точке  $(u_0^1, u_0^2)$  обе производные

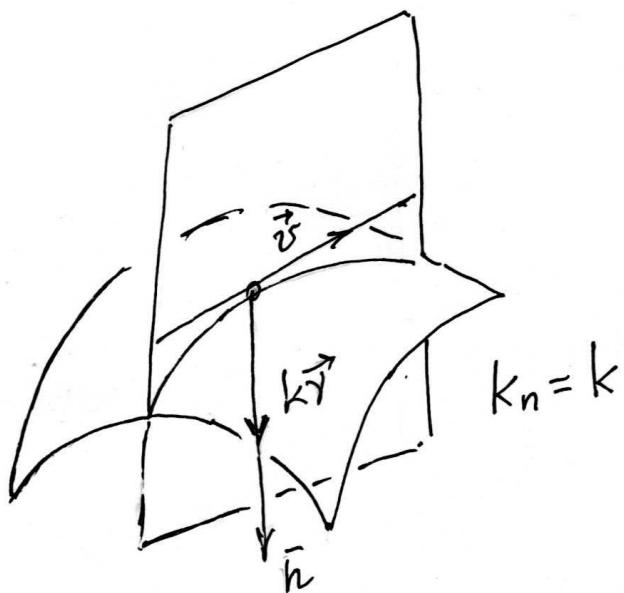
$$F_{u^1} = (\mathbf{a}, \mathbf{r}_1) \quad \text{и} \quad F_{u^2} = (\mathbf{a}, \mathbf{r}_2) \quad \text{функции} \quad F(u^1, u^2) \quad (147)$$

не могут обратиться в нуль, поскольку нормальный вектор  $\mathbf{a}$  плоскости  $\pi$  ортогонален нормальному вектору  $\mathbf{n}(M)$  поверхности  $S$  и, следовательно, лежит в касательной плоскости поверхности и не может быть ортогонален каждому из линейно независимых векторов  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ .

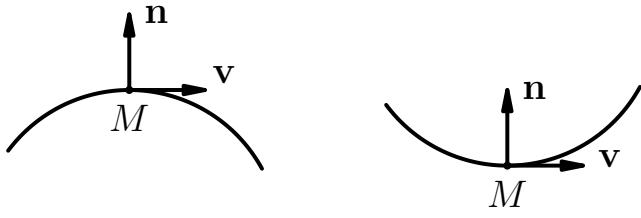
Пусть теперь  $L(M, \mathbf{v})$  — кривая на поверхности  $S$ , возникающая в некоторой окрестности точки  $M \in S$  при пересечении поверхности  $S$  с плоскостью  $\pi(M, \mathbf{v})$ , проходящей через нормаль поверхности в данной точке  $M \in S$  и

содержащей вектор  $\mathbf{v} \in T_M S$  (плоскость  $\pi(M, \mathbf{v})$  может быть задана уравнением  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}, \mathbf{v}) = 0$ ). Будем для краткости называть кривую  $L(M, \mathbf{v})$  нормальным сечением поверхности  $S$  в направлении касательного вектора  $\mathbf{v}$ .

Вектор кривизны  $k\mathbf{v}$  этой кривой лежит в плоскости  $\pi(M, \mathbf{v})$  и ортогонален вектору  $\mathbf{v}$ , поэтому он коллинеарен нормальному вектору  $\mathbf{n}$ , и его проекция на ось, определяемую вектором  $\mathbf{n}$ , совпадает с кривизной  $k$  кривой  $L(M, \mathbf{v})$  по абсолютной величине.



Таким образом, нормальная кривизна  $k_n(M, \mathbf{v})$  в точке  $M \in S$  в данном направлении  $\mathbf{v}$  по абсолютной величине совпадает с кривизной  $k(M, \mathbf{v})$  нормального сечения  $L(M, \mathbf{v})$  и характеризует искривленность поверхности в точке  $M$  в данном направлении  $\mathbf{v}$ : если  $k_n < 0$ , то сечение выпукло в направлении вектора  $\mathbf{n}$ , а если  $k_n > 0$ , то сечение вогнуто в направлении вектора  $\mathbf{n}$ .

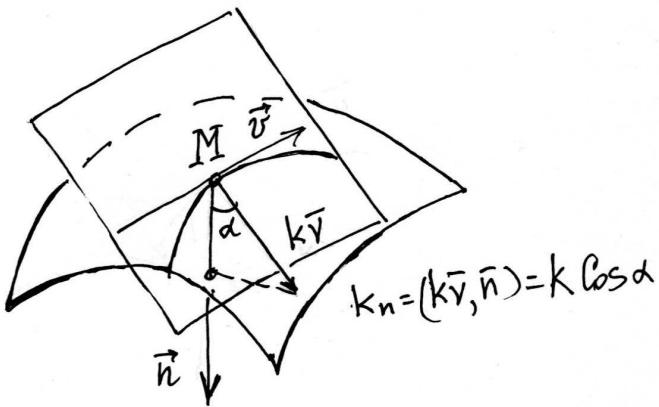


Если теперь пересечь поверхность  $S$  плоскостью  $\pi(\alpha) = \pi(M, \mathbf{v}, \alpha)$ , проходящей через точку  $M$ , содержащей касательный вектор  $\mathbf{v} \in T_M S$  и образующей угол  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) с плоскостью  $\pi(M, \mathbf{v})$  нормального сечения, то для некоторой окрестности  $U \subset S$  точки  $M$  пересечение  $\pi \cap U$  будет кривой, поскольку нормальный вектор  $\mathbf{N}(\alpha)$  плоскости  $\pi(\alpha)$  не может быть при  $\alpha \neq \pi/2$  ортогонален каждому из векторов  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  (см. рассуждения, относящиеся к формулам (147)).

Пусть теперь  $L(\alpha) = L(M, \mathbf{v}, \alpha)$  — кривая, получающаяся при пересечении поверхности плоскостью  $\pi(\alpha) = \pi(M, \mathbf{v}, \alpha)$ , проходящей через точку  $M$ , содержащей касательный вектор  $\mathbf{v} \in T_M S$  и образующей угол  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) с плоскостью  $\pi(M, \mathbf{v})$  нормального сечения. Для краткости будем называть ее наклонным сечением поверхности  $S$  в направлении касательного вектора  $\mathbf{v}$ .

Вектор кривизны  $k(\alpha)\boldsymbol{\nu}(\alpha)$  наклонного сечения  $L(\alpha)$  образует угол  $\alpha$  с вектором кривизны  $k\boldsymbol{\nu}$  нормального сечения. Поскольку нормальная кривизна кривой на поверхности зависит только от направляющего вектора  $\mathbf{v}$  кривой, то нормальные кривизны всех наклонных сечений  $L(\alpha)$  равны нормальной кривизне  $k_n$  нормального сечения:

$$k_n = (k(\alpha)\boldsymbol{\nu}(\alpha), \mathbf{n}).$$



При этом, абсолютная величина  $|k_n|$  нормальной кривизны нормального сечения равна кривизне  $k$  этого нормального сечения, поэтому

$$k = |k_n| = |(k(\alpha)\nu(\alpha), \mathbf{n})| = k(\alpha)(\nu(\alpha), \mathbf{n}) = k(\alpha) \cos \alpha. \quad (148)$$

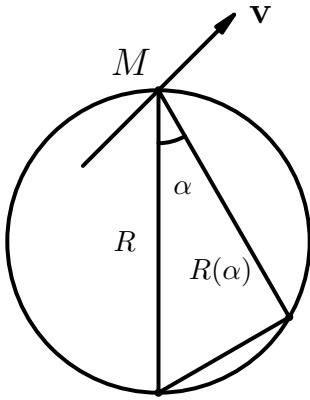
Переходя в формуле (148) от кривизн сечений к радиусам кривизны  $R = \frac{1}{k}$  и  $R(\alpha) = \frac{1}{k(\alpha)}$ , получим формулу

$$R(\alpha) = R \cos \alpha, \quad (149)$$

из которой вытекает теорема, называемая теоремой Менье (Meusnier).

**Теорема.** Если наклонное и нормальное сечения поверхности  $S$ , проходящие через точку  $M \in S$ , имеют в этой точке общую касательную, то центр кривизны наклонного сечения поверхности  $S$  совпадает с проекцией на плоскость этого сечения центра кривизны нормального сечения.

Из формулы (149) следует также, что центры кривизны всех кривых на поверхности  $S$ , проходящих через точку  $M \in S$  и имеющих в этой точке общую касательную, лежат на окружности, которая лежит в нормальной плоскости этих кривых и диаметром которой является отрезок, соединяющий точку  $M$  с центром кривизны нормального сечения.



Значение второго фундаментального тензора поверхности  $S$  в данной ее точке  $M$  характеризует строение поверхности  $S$  в окрестности точки  $M$  с точностью до малых величин третьего порядка.

### Соприкасающийся параболоид.

Выберем в пространстве  $\mathcal{E}_3$  прямоугольную систему координат следующим образом: начало координат поместим в точку  $M$  поверхности  $S$ , а оси координат  $Ox$  и  $Oy$  расположим в касательном пространстве  $T_M S$  поверхности в точке  $M$ . Тогда в достаточно малой окрестности точки  $M = O(0, 0, 0)$  поверхность  $S$  можно задать уравнением  $z = f(x, y)$ . Представим функцию  $z = f(x, y)$  в окрестности начала координат формулой Тейлора:

$$f(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0)x^2 + f_{xy}(0, 0)xy + \frac{1}{2}f_{yy}(0, 0)y^2 + o(x^2 + y^2). \quad (150)$$

Поскольку в начале координат касательная плоскость поверхности (натянутая на векторы  $\{1, 0, f_x\}$  и  $\{0, 1, f_y\}$ ), совпадает с плоскостью  $Oxy$ , то  $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ , и поэтому в окрестности точки  $M$  поверхность задается (пара-

метрическим) уравнением

$$z = f(x, y) = \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0)x^2 + f_{xy}(0, 0)xy + \frac{1}{2}f_{yy}(0, 0)y^2 + o(x^2 + y^2).$$

и если хотя бы одна из производных второго порядка отлична от нуля, то с точностью до малых величин третьего порядка поверхность  $S$  совпадает с поверхностью второго порядка

$$z = \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0)x^2 + f_{xy}(0, 0)xy + \frac{1}{2}f_{yy}(0, 0)y^2. \quad (151)$$

Используя обозначения

$$x = u^1, \quad y = u^2, \quad z = f(u^1, u^2)$$

и выбирая ориентацию

$$\mathbf{n}(u^1, u^2) = \frac{[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]}{\|\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\|},$$

получим следующие параметрические уравнения поверхности (151):

$$x = u^1, \quad y = u^2, \quad z = h_{ab}u^a u^b, \quad (152)$$

где  $h_{ab}$  — координаты второго фундаментального тензора в точке  $M$ .

Убедимся в справедливости формулы (152). Имеем:

$$\mathbf{r}_1 = \{1, 0, f_x\} = \{1, 0, 0\}, \quad \mathbf{r}_2 = \{0, 1, f_y\} = \{0, 1, 0\},$$

откуда следует  $\mathbf{n} = \{0, 0, 1\}$ .

Далее

$$\mathbf{r}_{11} = \{0, 0, f_{xx}\}, \quad \mathbf{r}_{12} = \{0, 0, f_{xy}\}, \quad \mathbf{r}_{22} = \{0, 0, f_{yy}\}$$

и, следовательно,  $f_{ab} = h_{ab}$ . Поворачивая координатные оси  $Ox$  и  $Oy$  в плоскости  $Oxy$ , квадратичную форму  $h_{ab}u^a u^b$  можно привести (с точностью до

знака) к одному из следующих видов:

$$0, \quad ax^2, \quad ax^2 + by^2, \quad ax^2 - by^2, \quad a, b > 0$$

При этом уравнение (151) принимает соответственно вид:

$$1) z = 0, \quad 2) z = ax^2, \quad 3) z = ax^2 + by^2, \quad 4) z = ax^2 - by^2.$$

В первом случае с точностью до малых третьего порядка в окрестности точки  $M$  поверхность совпадает с касательной плоскостью. Такая точка называется *точкой уплощения*.

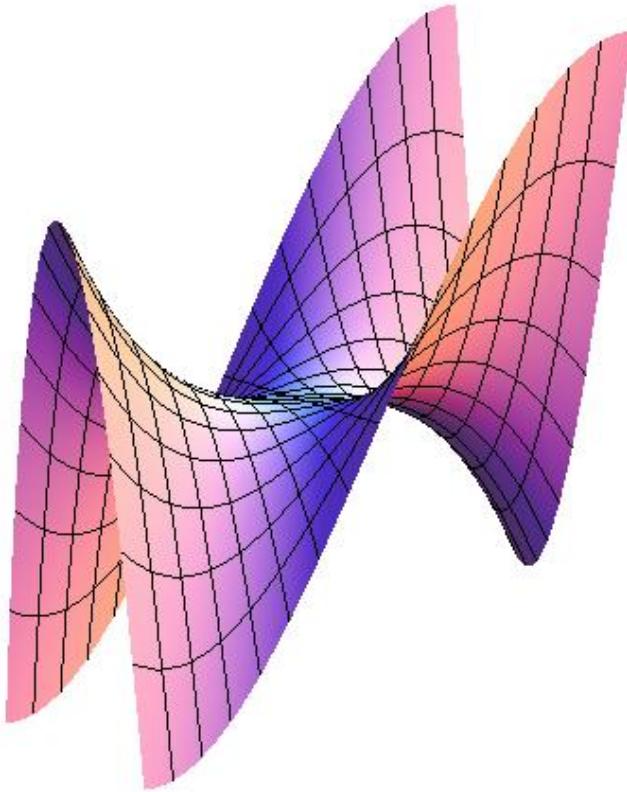
Во втором случае с точностью до малых третьего порядка в окрестности точки  $M$  поверхность совпадает с параболическим цилиндром, а в третьем и четвертом случае — с эллиптическим и гиперболическим параболоидами соответственно. Такие точки называются соответственно точками параболического, эллиптического и гиперболического типов.

Если эллиптический параболоид в третьем случае — это параболоид вращения, точка называется *омбилической*.

Самым сложным оказывается случай окрестности точки уплощения, поскольку в этом случае первыми ненулевыми членами в формуле Тейлора (150) будут члены степени  $> 2$ .

Примером может служить обезьянье седло (*monkey saddle*)

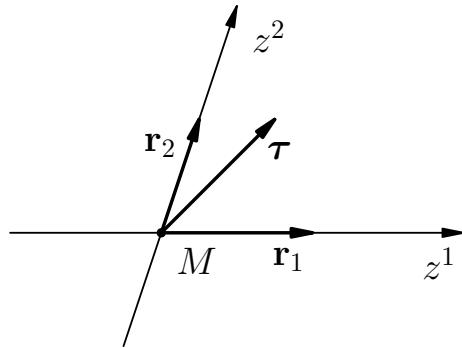
$$z = x^3 - xy^2.$$



### **Индикатриса Дюпена.**

Теорема Менье описывает кривизны кривых, возникающих при пересечении поверхности  $S$  плоскостями, содержащими данный вектор  $\mathbf{v} \in T_M S$ . Индикатриса Дюпена показывает, как меняются кривизны нормальных сечений при изменении направления касательного вектора сечения  $\mathbf{v} \in T_M S$  в касательной плоскости.

В касательной плоскости  $\pi_M S$  в точке  $M$  (мы отличаем касательную плоскость как евклидово аффинное пространство от касательного векторного пространства  $T_M S$ ) рассмотрим репер  $(M, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  и соответствующую систему аффинных координат  $(z^a), a = 1, 2$ .



Всякий единичный вектор  $\tau \in T_M S$  в касательном пространстве поверхности является касательным вектором некоторой параметризованной кривой  $\mathbf{r}(s)$  ( $s$  — натуральный параметр):

$$\tau = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{du^a}{ds} \mathbf{r}_a.$$

Отложим в касательной плоскости  $\pi_M S$  от точки  $M$  в направлении вектора  $\tau$  отрезок

$$\rho_A = \overrightarrow{MA} = \sqrt{R_n} \tau = \frac{1}{\sqrt{|k_n|}} \tau = \frac{1}{\sqrt{|k_n|}} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{|k_n|}} \frac{du^a}{ds} \mathbf{r}_a,$$

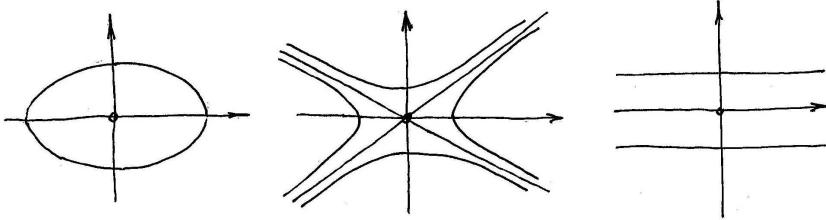
длина которого равна корню квадратному из радиуса кривизны нормального сечения, для которого  $\tau$  является касательным вектором. (При этом рассматриваются только такие направления, для которых нормальная кривизна не равна нулю). Подставляя радиус-вектор  $\rho_A = \overrightarrow{MA} = z^a \mathbf{r}_a$  точки  $A$  во второй фундаментальный тензор поверхности в точке  $M$ , получим уравнение, которому удовлетворяет точка  $A$ , соответствующая произвольному направлению  $\tau$ :

$$h_{ab} z^a z^b = h_{ab} \frac{1}{\sqrt{|k_n|}} \frac{du^a}{ds} \frac{1}{\sqrt{|k_n|}} \frac{du^b}{ds} = \frac{1}{|k_n|} h_{ab} \frac{du^a}{ds} \frac{du^b}{ds} = \frac{k_n}{|k_n|} = \pm 1.$$

Кривая в касательной плоскости  $\pi_M S$ , имеющая уравнение

$$h_{ab}z^a z^b = \pm 1, \quad (153)$$

называется *индикатрисой Дюпена*.



Если соприкасающийся параболоид поверхности в точке  $M$  является соответственно эллиптическим параболоидом, гиперболическим параболоидом или параболическим цилиндром, то индикатриса Дюпена представляет собой соответственно эллипс, пару сопряженных гипербол или пару параллельных прямых. В случае омбилической точки индикатриса Дюпена является окружностью. В случае точки уплощения индикатриса Дюпена не определена.

### Оператор Вейнгартена.

Линейный оператор  $\varphi : \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{V}_n$  определяется полностью своими значениями  $\mathbf{a}_i = \varphi(\mathbf{e}_i)$  на векторах базиса  $\mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , пространства  $\mathbf{V}_n$ . При этом вектор  $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$  переводится оператором  $\varphi$  в вектор  $\varphi(\mathbf{v}) = v^i \mathbf{a}_i$ .

Пусть  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^a)$  — некоторая параметризация простой поверхности  $S$  и  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(u^a)$  — поле нормального вектора. Поскольку  $|\mathbf{n}| = 1$ , то частные производные  $\mathbf{n}_a = \partial_a \mathbf{n}$  ортогональны вектору  $\mathbf{n}$  и поэтому лежат в касательных пространствах  $T_M S$  поверхности  $S$ . Это позволяет, используя параметризацию  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^a)$ , для каждой точки  $M \in S$  определить линейный оператор

$h : T_M S \rightarrow T_M S$ , полагая

$$h(\mathbf{r}_a) = -\mathbf{n}_a. \quad (154)$$

Определение (154) использует конкретную параметризацию, поэтому необходимо показать независимость оператора  $h$  от выбора параметризации. Если  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^{a'})$  — другая параметризация, то  $u^a = u^a(u^{a'})$  и  $\mathbf{r}(u^{a'}) = \mathbf{r}(u^a(u^{a'}))$ .

При этом

$$h(\mathbf{r}_{a'}) = h\left(\mathbf{r}_a \frac{\partial u^a}{\partial u^{a'}}\right) = \frac{\partial u^a}{\partial u^{a'}} h(\mathbf{r}_a) = -\frac{\partial u^a}{\partial u^{a'}} \partial_a \mathbf{n} = -\partial_{a'} \mathbf{n} = -\mathbf{n}_{a'}.$$

Таким образом, формулой (154) на  $S$  корректно определен линейный оператор  $h$  (поле линейного оператора). Этот оператор называется оператором Вейнгартена.

Для нахождения матрицы  $(h_a^b)$  оператора Вейнгартена в базисе  $\mathbf{r}_a$ , нужно найти разложения  $h(\mathbf{r}_a) = -\mathbf{n}_a = h_a^b \mathbf{r}_b$ . Имеем:

$$\begin{aligned} (\mathbf{n}, \mathbf{r}_c) = 0 &\Rightarrow \partial_a (\mathbf{n}, \mathbf{r}_c) = 0 \Rightarrow (\mathbf{n}_a, \mathbf{r}_c) + (\mathbf{n}, \mathbf{r}_{ac}) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\mathbf{n}_a, \mathbf{r}_c) = -h_{ac} \Rightarrow (h_a^b \mathbf{r}_b, \mathbf{r}_c) = h_{ac} \Rightarrow h_a^b g_{bc} = h_{ac}. \end{aligned} \quad (155)$$

Пусть  $g^{cd}$  — матрица, обратная к матрице  $g^{bc}$  метрического тензора, то есть  $g_{bc} g^{cd} = \delta_b^d$ . Суммируя по индексу  $c$  обе части последнего равенства в (155) с  $g^{cd}$ , получаем

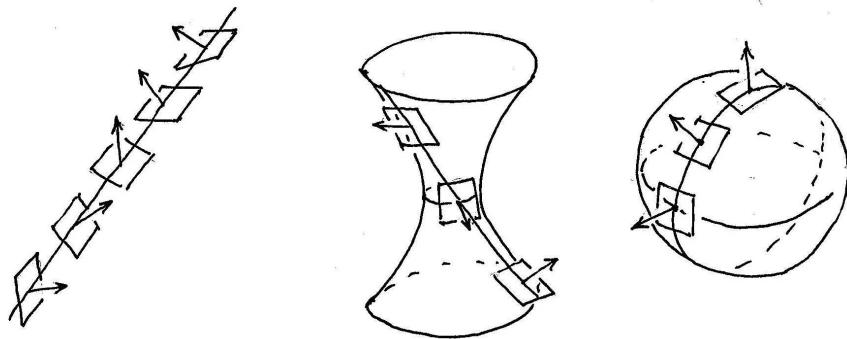
$$h_a^d = h_{ac} g^{cd}. \quad (156)$$

Чтобы выяснить, как изменяется нормальный вектор  $\mathbf{n}$  поверхности  $S$  при движении точки по кривой  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ , лежащей на  $S$ , вычислим производную  $d\mathbf{n}/ds$ . Имеем

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \mathbf{n}_a \frac{du^a}{ds} = -h_a^b(u^c(s)) \frac{du^a}{ds} \mathbf{r}_b \Rightarrow \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -h\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right).$$

Таким образом, оператор Вейнгартена  $h$  показывает изменение нормально-го вектора поверхности (а, значит, и касательной плоскости к поверхности), соответствующее изменению  $d\mathbf{r}/ds$  положения точки  $M$  на поверхности.

Оператор Вейнгартена называется также *основным оператором поверхно-сти и оператором формы* (shape operator).



### Главные направления поверхности.

**Определение.** *Главными направлениями поверхности  $S$  в точке  $M \in S$  называются главные направления ее второго фундаментального тензора  $h_{ab}$  в точке  $M$  (или ее второй квадратичной формы в этой точке, или ее индикатрисы Дюпена), то есть два направления, определяемые единич-ными векторами  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$ , которые ортогональны и сопряжены относи-тельно  $h_{ab}$ :*

$$g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0, \quad h(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0. \quad (157)$$

Помимо соотношений (157) единичные векторы  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  удовлетворяют соотношениям

$$g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) = 1, \quad g(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) = 1,$$

поэтому

$$h(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) = k_1 \quad \text{и} \quad h(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) = k_2$$

— это нормальные кривизны поверхности в точке  $M$ , соответствующие главным направлениям  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  поверхности в этой точке. Они называются *главными кривизнами* поверхности  $S$  в точке  $M$ .

Напомним, что, в общей ситуации, ненулевой вектор  $\mathbf{v}$  в евклидовом пространстве  $E_n$  называется вектором главного направления относительно квадратичной формы  $\varphi$ , если всякий вектор  $\mathbf{x}$ , ортогональный вектору  $\mathbf{v}$ , сопряжен ему относительно  $\varphi$ .

Напомним, как находятся главные направления и главные кривизны.

Координаты вектора  $\mathbf{v}_2$  в соотношениях (157) являются решением системы линейных однородных уравнений (относительно  $z^1$  и  $z^2$ )

$$\begin{cases} g_{ab}v_1^az^b = 0, \\ h_{ab}v_1^az^b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} g_{a1}v_1^az^1 + g_{a2}v_1^az^2 = 0, \\ h_{a1}v_1^az^1 + h_{a2}v_1^az^2 = 0. \end{cases} \quad (158)$$

Эта система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда второе уравнение в (158) пропорционально первому, то есть получается из первого умножением на некоторое число  $\lambda$ :

$$h_{ab}v_1^az^b = \lambda g_{ab}v_1^az^b.$$

Но тогда для коэффициентов этих уравнений (при  $z^1$  и  $z^2$ ) получаем

$$h_{ab}v_1^a - \lambda g_{ab}v_1^a = 0 \iff (h_{ab} - \lambda g_{ab})v_1^a = 0, \quad b = 1, 2. \quad (159)$$

Расписывая последние соотношения подробно, заключаем, что координаты  $v_1^1$

и  $v_1^2$  вектора  $\mathbf{v}_1$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} (h_{11} - \lambda g_{11})z^1 + (h_{21} - \lambda g_{21})z^2 = 0 \\ (h_{12} - \lambda g_{12})z^1 + (h_{22} - \lambda g_{22})z^2 = 0. \end{cases} \quad (160)$$

Система уравнений (160) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю

$$\begin{vmatrix} h_{11} - \lambda g_{11} & h_{21} - \lambda g_{21} \\ h_{12} - \lambda g_{12} & h_{22} - \lambda g_{22} \end{vmatrix} = 0 \iff \det(h_{ab} - \lambda g_{ab}) = 0. \quad (161)$$

Соотношение (161) является уравнением для нахождения  $\lambda$  и называется *характеристическим уравнением*. Это квадратное уравнение (поскольку коэффициент при  $\lambda^2$  равен  $\det(g_{ab}) \neq 0$ ), имеющее два вещественных корня  $\lambda = \lambda_1$  и  $\lambda = \lambda_2$ . Подставляя их в систему уравнений (159), получим системы уравнений, из которых находятся главные направления  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$ :

$$(h_{ab} - \lambda_1 g_{ab})z^a = 0, \quad b = 1, 2. \quad \text{и} \quad (h_{ab} - \lambda_2 g_{ab})z^a = 0, \quad b = 1, 2. \quad (162)$$

Таким образом, для векторов главных направлений  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  выполняются соотношения  $(h_{ab} - \lambda_1 g_{ab})v_1^a = 0$ ,  $(h_{ab} - \lambda_2 g_{ab})v_2^a = 0$ , откуда

$$h_{ab}v_1^a v_1^b = \lambda_1 g_{ab}v_1^a v_1^b, \quad h_{ab}v_2^a v_2^b = \lambda_2 g_{ab}v_2^a v_2^b.$$

Поэтому (см. (??)), корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  характеристического уравнения (161) являются главными кривизнами  $k_1$  и  $k_2$  поверхности  $S$  в данной точке  $M$ .

Если в касательном пространстве  $T_M S$  взять единичные векторы  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  за векторы базиса, матрицы метрического тензора и второго фундаментального тензоров поверхности примут соответственно вид

$$(g_{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad (h_{ab}) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}.$$

**Определение.** Числа

$$K = k_1 k_2 \quad u \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

называются соответственно полной (или гауссовой) и средней кривизнами поверхности  $S$  в точке  $M$ .

Из теоремы Виета следует, что характеристическое уравнение, если коэффициент при  $\lambda^2$  равен 1, имеет вид

$$\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0. \quad (163)$$

Вычисляя определитель в (161)

$$\begin{vmatrix} h_{11} - \lambda g_{11} & h_{21} - \lambda g_{21} \\ h_{12} - \lambda g_{12} & h_{22} - \lambda g_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad (161)$$

характеристическое уравнение можно записать в виде

$$\det(g_{ab})\lambda^2 - (h_{11}g_{22} - h_{21}g_{12} + h_{22}g_{11} - h_{12}g_{21})\lambda + \det(h_{ab}) = 0. \quad (164)$$

Сравнивая (164) с (163), получаем выражения для полной и средней кривизн:

$$K = \frac{\det(h_{ab})}{\det(g_{ab})}, \quad 2H = \frac{g_{11}h_{22} - 2g_{12}h_{12} + g_{22}h_{11}}{\det(g_{ab})}.$$

Простой вид имеют выражения для полной и средней кривизн в терминах оператора Вейнгартена. Чтобы вывести их, умножим уравнение (161) на определитель  $\det(g^{ab})$ . Получим эквивалентное уравнение

$$\det(h_{ab} - \lambda g_{ab}) \det(g^{ab}) = 0.$$

Но поскольку определитель произведения матриц равен произведению их определителей, последнее соотношение можно записать в виде

$$\det((h_{ab} - \lambda g_{ab})g^{bc}) = 0 \iff$$

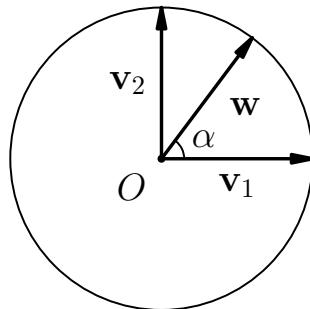
$$\det(h_a^c - \lambda \delta_a^c) = 0 \iff \begin{vmatrix} h_1^1 - \lambda & h_2^1 \\ h_1^2 & h_2^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (165)$$

Поэтому характеристическое уравнение для второго основного тензора поверхности совпадает с характеристическим уравнением (165) оператора Вейнгардена и

$$K = \det(h_a^c), \quad 2H = h_a^a = h_1^1 + h_2^2 = h_{ab}g^{ab}.$$

### Формула Эйлера.

Если единичные векторы  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  главных направлений взяты за базис (будем предполагать, что это правый базис), то произвольный единичный вектор  $\mathbf{w}$  в касательном пространстве  $T_M S$  может быть задан углом  $\alpha$ , который он образует с вектором  $\mathbf{v}_1$ . Тогда вектор  $\mathbf{w}$  будет иметь координаты  $\{\cos \alpha, \sin \alpha\}$ .



Поскольку  $(h_{ab}) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ , то нормальная кривизна  $k_n(\mathbf{w})$  в направлении  $\mathbf{w}$  вычисляется по формуле  $k_n(\mathbf{w}) = h_{ab}w^a w^b = h_{11}w^1 w^1 + h_{22}w^2 w^2$  и, следовательно,

$$k_n(\mathbf{w}) = k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha.$$

Эта формула называется формулой Эйлера.

Из формулы Эйлера, в частности, следует, что  $k_1$  и  $k_2$  — это экстремальные значения нормальной кривизны. Действительно, предполагая, например, для

определенности, что  $k_1 \geq k_2$ , получим

$$k_n(\mathbf{w}) = k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha \geq k_2 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha = k_2.$$

Аналогично показывается, что  $k_1 \geq k_n(\mathbf{w})$ .

### Линии кривизны.

**Определение.** Линией кривизны поверхности  $S$  называется кривая, которая в каждой своей точке касается главного направления поверхности  $S$ .

Координаты  $\{z^a\}$  вектора главного направления  $\mathbf{v}_2$  удовлетворяют системе линейных однородных уравнений (158), в которых  $\{v_1^a\}$  — координаты первого вектора главного направления  $\mathbf{v}_1$ .

$$\begin{cases} g_{ab}v_1^az^b = 0, \\ h_{ab}v_1^az^b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} g_{a1}v_1^az^1 + g_{a2}v_1^az^2 = 0, \\ h_{a1}v_1^az^1 + h_{a2}v_1^az^2 = 0. \end{cases} \quad (158)$$

При нахождении векторов главных направлений мы использовали то, что эта система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда второе уравнение в (158) пропорционально первому. Но сейчас нам удобнее искать линейные формы из сопряженного базиса, аннулирующие векторы главных направлений, поскольку  $v_1^a = du^a(\mathbf{v}_1)$ .

Воспользуемся тем, что система уравнений (158) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} g_{a1}v_1^a & g_{a2}v_1^a \\ h_{a1}v_1^a & h_{a2}v_1^a \end{vmatrix} = 0. \quad (166)$$

Но условие (166) — это уравнение, которому должны удовлетворять координаты вектора главного направления  $\mathbf{v}_1$ . Таким образом, вектор с координатами

$\{v^1, v^2\}$  является вектором главного направления тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} g_{11}v^1 + g_{21}v^2 & g_{12}v^1 + g_{22}v^2 \\ h_{11}v^1 + h_{21}v^2 & h_{12}v^1 + h_{22}v^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (167)$$

Это уравнение второй степени, поэтому оно имеет (в общем случае) два решения.

Кривая  $u^a = u^a(t)$  будет являться линией кривизны, если уравнению (167) удовлетворяет ее касательный вектор  $v^a = \frac{du^a}{dt}$ :

$$\begin{vmatrix} g_{11}\frac{du^1}{dt} + g_{21}\frac{du^2}{dt} & g_{12}\frac{du^1}{dt} + g_{22}\frac{du^2}{dt} \\ h_{11}\frac{du^1}{dt} + h_{21}\frac{du^2}{dt} & h_{12}\frac{du^1}{dt} + h_{22}\frac{du^2}{dt} \end{vmatrix} = 0. \quad (168)$$

Поскольку в явном виде никакой параметр  $t$  в уравнение (168) не входит, его удобнее записывать в дифференциалах, выбирая на конкретной поверхности в качестве параметра одну из криволинейных координат:

$$\begin{vmatrix} g_{11}du^1 + g_{21}du^2 & g_{12}du^1 + g_{22}du^2 \\ h_{11}du^1 + h_{21}du^2 & h_{12}du^1 + h_{22}du^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (169)$$

Уравнение (169) можно представить в следующем удобном для запоминания виде. Коэффициентами при  $(du^1)^2$ ,  $(du^2)^2$  и  $du^1du^2$  в уравнении (169) являются соответственно определители

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ h_{11} & h_{12} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} g_{21} & g_{22} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{22} \\ h_{11} & h_{22} \end{vmatrix},$$

поэтому уравнение (169) эквивалентно уравнению

$$\begin{vmatrix} (du^2)^2 & -du^1du^2 & (du^1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

**Пример.**

У поверхности вращения с уравнениями

$$x = f(u) \cos v, \quad y = f(u) \sin v, \quad z = \varphi(u)$$

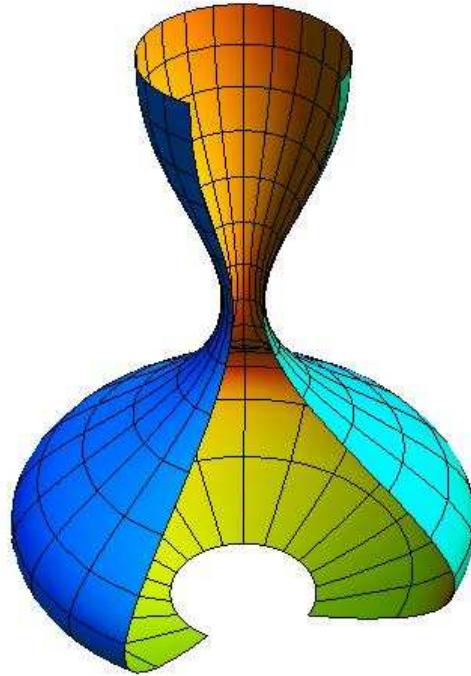
метрический тензор и второй фундаментальный тензор имеют вид

$$(g_{ab}) = \begin{pmatrix} (f')^2 + (\varphi')^2 & 0 \\ 0 & f^2 \end{pmatrix}, \quad (h_{ab}) = \frac{1}{\sqrt{(f')^2 + (\varphi')^2}} \begin{pmatrix} f'\varphi'' - \varphi'f'' & 0 \\ 0 & f\varphi' \end{pmatrix}.$$

Уравнение (169) принимает вид

$$\begin{vmatrix} g_{11}du^1 & g_{22}du^2 \\ h_{11}du^1 & h_{22}du^2 \end{vmatrix} = 0 \iff (g_{11}h_{22} - g_{22}h_{11})du^1du^2 = 0.$$

Решениями его, очевидно, являются координатные линии  $u^1 = const$  и  $u^2 = const$ .



## Асимптотические линии.

**Определение.** Асимптотическим направлением поверхности  $S$  в точке  $M$  называется асимптотическое направление ее второго фундаментального тензора в этой точке.

Асимптотической линией поверхности  $S$  называется кривая, касательный вектор которой в каждой точке имеет асимптотическое направление.

Поскольку асимптотические направления  $\{v^1, v^2\}$  удовлетворяют уравнениям

$$h_{ab}v^av^b = 0,$$

то асимптотические линии удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$h_{ab}\frac{du^a}{dt}\frac{du^b}{dt} = 0 \quad \text{или} \quad h_{ab}du^adu^b = 0. \quad (170)$$

Это уравнение имеет решения только в области гиперболических и параболических точек, где вторая квадратичная форма является или разностью квадратов или имеет только один квадрат в своей канонической форме.

Из уравнений (170) следует, что нормальная кривизна асимптотической линии равна нулю в каждой ее точке.

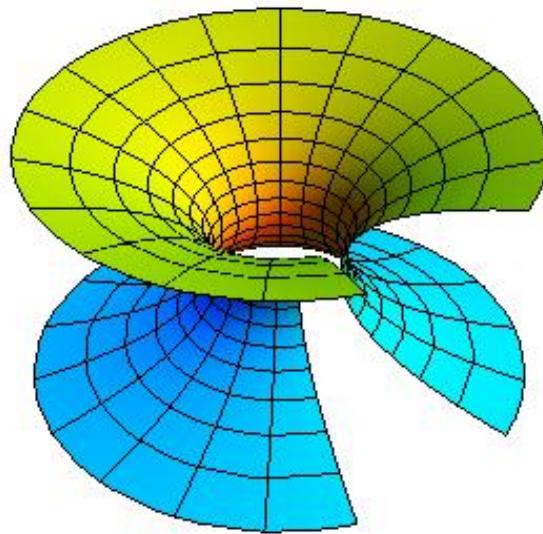
## Пример.

Катеноид — это поверхность вращения

$$x = a \cosh\left(\frac{u}{a}\right) \cos v, \quad y = a \cosh\left(\frac{u}{a}\right) \sin v, \quad z = u,$$

возникающая при вращении линии

$$x = f(u) = a \cosh \frac{u}{a}, \quad y = 0, \quad z = \varphi(u) = u.$$



В этом случае имеем

$$f' = \sinh \frac{u}{a}, \quad f'' = \frac{1}{a} \cosh \frac{u}{a}, \quad \varphi' = 1, \quad \varphi'' = 0,$$

поэтому

$$(h_{ab}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} \cosh \frac{u}{a} & 0 \\ 0 & a \cosh \frac{u}{a} \end{pmatrix}.$$

Уравнение асимптотических линий имеет вид

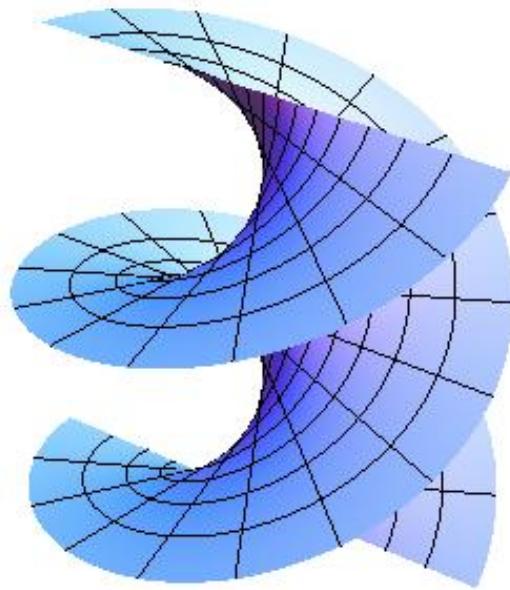
$$\begin{aligned} -\frac{1}{a} \cosh \frac{u}{a} (du)^2 + a \cosh \frac{u}{a} (dv)^2 = 0 &\iff \\ -(du)^2 + a^2 (dv)^2 = 0 &\iff u = \pm av. \end{aligned}$$

В уравнении катеноида, изображенного на рисунке,  $a = 1$ . Приближенно, можно считать, что асимптотические линии проходят по диагоналям координатной сетки.

Поверхность

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av,$$

возникающая при равномерном вращении прямой, пересекающей ось  $Oz$  под прямым углом с одновременным равномерным перемещением вдоль оси  $Oz$ , называется *прямым геликоидом*.



Второй фундаментальный тензор прямого геликоида имеет вид

$$(h_{ab}) = -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому уравнение асимптотических линий прямого геликоида имеет вид

$$dudv = 0 \iff u = const \quad \text{или} \quad v = const.$$

Таким образом, координатные линии прямого геликоида являются его асимптотическими линиями.

Поскольку нормальная кривизна асимптотической линии равна нулю в каждой ее точке, а нормальная кривизна является проекцией вектора кривизны на нормаль к поверхности, то вектор кривизны асимптотической линии лежит в касательной плоскости к поверхности. Это значит, что *соприкасающаяся плоскость асимптотической линии совпадает с касательной плоскостью к поверхности.*

## 10 Основные теоремы теории поверхностей.

**Отображения между поверхностями.**

Пусть  $S$  и  $\tilde{S}$  — две поверхности в  $\mathcal{E}_3$  и

$$f : S \rightarrow \tilde{S}$$

— непрерывное отображение. Рассмотрим точки  $M \in S$  и  $f(M) \in \tilde{S}$  и некоторые параметризации

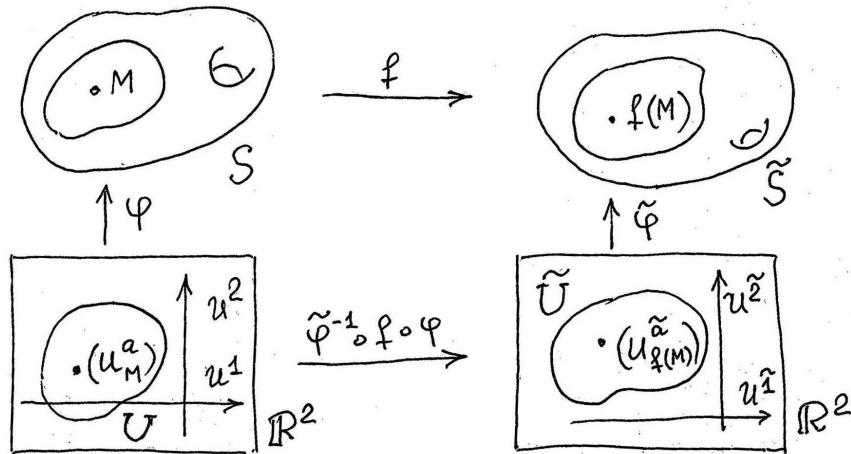
$$\varphi : U \rightarrow S, \quad \mathbf{r}(u^a); \quad \tilde{\varphi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{S}, \quad \mathbf{r}(u^{\tilde{a}}), \quad (171)$$

поверхностей  $S$  и  $\tilde{S}$  в окрестностях точек  $M$  и  $f(M)$ , такие что при отображении  $f$  образ множества  $\varphi(U)$  содержится во множестве  $\tilde{\varphi}(\tilde{U})$ , то есть

$$M \in \varphi(U), \quad f(M) \in \tilde{\varphi}(\tilde{U}), \quad f(\varphi(U)) \subset \tilde{\varphi}(\tilde{U}).$$

Для этого достаточно взять две произвольные параметризации (171) в окрестностях точек  $M$  и  $f(M)$  и сузить в случае необходимости область  $U$ . Тогда в локальных координатах отображение  $f$  будет задаваться уравнениями

$$u^{\tilde{a}} = u^{\tilde{a}}(u^b) = f^{\tilde{a}}(u^b), \quad \tilde{a} = \tilde{1}, \tilde{2}, \quad b = 1, 2. \quad (172)$$



**Определение.** Непрерывное отображение  $f : S \rightarrow \tilde{S}$  называется дифференцируемым (класса  $C^k$ ), если функции (172) дифференцируемы (класса  $C^k$ ) для всех удовлетворяющих вышеописанным условиям параметризаций поверхностей  $S$  и  $\tilde{S}$ .

В этом определении не возникает противоречия при замене криволинейных систем координат

$$u^{\tilde{a}'} = u^{\tilde{a}'}(u^{\tilde{a}}), \quad u^b = u^b(u^{b'})$$

на поверхностях  $S$  и  $\tilde{S}$ , поскольку функции

$$u^{\tilde{a}'} = f^{\tilde{a}'}(u^{b'}) = u^{\tilde{a}'}(u^{b'})$$

будут дифференцируемыми как композиции  $u^{\tilde{a}'} = u^{\tilde{a}'}(u^{\tilde{a}}(u^b(u^{b'})))$  дифференцируемых функций.

Если  $f : S \rightarrow \tilde{S}$  — дифференцируемое отображение, а

$$\gamma : (a, b) \rightarrow S, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u^a(t)), \quad \mathbf{r}(u^a(t_0)) = \mathbf{r}_M,$$

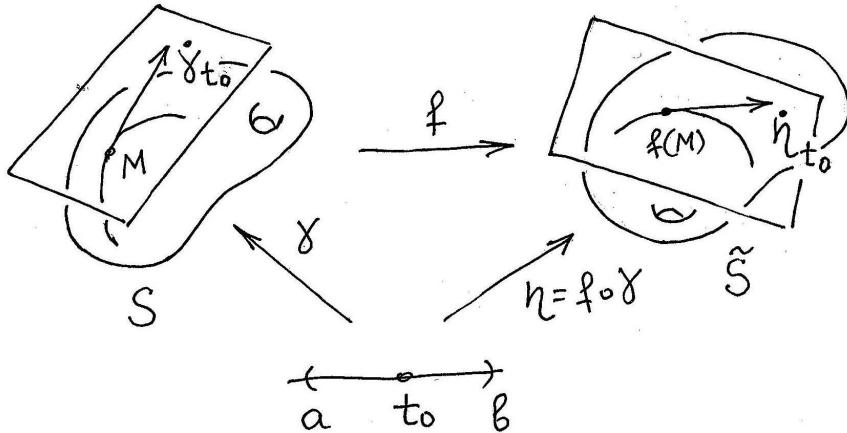
— параметризованная кривая, проходящая через точку  $M \in S$  при  $t = t_0$ , то

композиция  $f \circ \gamma$  является параметризованной кривой

$$\eta = f \circ \gamma : (a, b) \rightarrow \tilde{S}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u^{\tilde{a}}(u^b(t))), \quad \mathbf{r}(u^{\tilde{a}}(u^b(t_0))) = \mathbf{r}_{f(M)},$$

проходящей через точку  $f(M) \in S$  при  $t = t_0$ .

В дальнейшем будет удобно обозначать касательный вектор параметризованной кривой  $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathcal{E}_3$  в точке  $t = t_0$  символом  $\dot{\gamma}_{t_0}$ .



**Определение.** Касательным отображением  $T_M f : T_M S \rightarrow T_{f(M)} \tilde{S}$  к отображению  $f : S \rightarrow \tilde{S}$  называется отображение, относящее касательному вектору  $\dot{\gamma}_{t_0} \in T_M S$  всякой параметризованной кривой  $\gamma$ , проходящей при  $t = t_0$  через точку  $M \in S$ , касательный вектор  $\dot{\eta}_{t_0}$  кривой  $\eta = f \circ \gamma \in T_{f(M)} \tilde{S}$ .

В криволинейных координатах на поверхностях  $S$  и  $\tilde{S}$  отображение  $T_M f$  имеет следующий вид:

$$\mathbf{v} = v^a \mathbf{r}_a = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^a} \frac{du^a}{dt} \longmapsto \mathbf{w} = T_M f(\mathbf{v}) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^{\tilde{a}}} \frac{\partial u^{\tilde{a}}}{\partial u^b} \frac{du^b}{dt} = \frac{\partial u^{\tilde{a}}}{\partial u^b} v^b \mathbf{r}_{\tilde{a}}.$$

Таким образом, в криволинейных координатах отображение  $T_M f$  относит вектору  $\mathbf{v}$  с координатами  $v^a$  вектор  $\mathbf{w}$  с координатами

$$w^{\tilde{a}} = \frac{\partial u^{\tilde{a}}}{\partial u^b} v^b. \quad (173)$$

Из формулы (173) следует, что  $T_M f$  — линейное отображение.

Нас в дальнейшем будет интересовать случай, когда  $f : S \rightarrow \tilde{S}$  — диффеоморфизм, то есть взаимно однозначное дифференцируемое отображение, обратное к которому также является дифференцируемым. При этом матрица

$$(f_b^{\tilde{a}}) = \left( \frac{\partial u^{\tilde{a}}}{\partial u^b} \right)$$

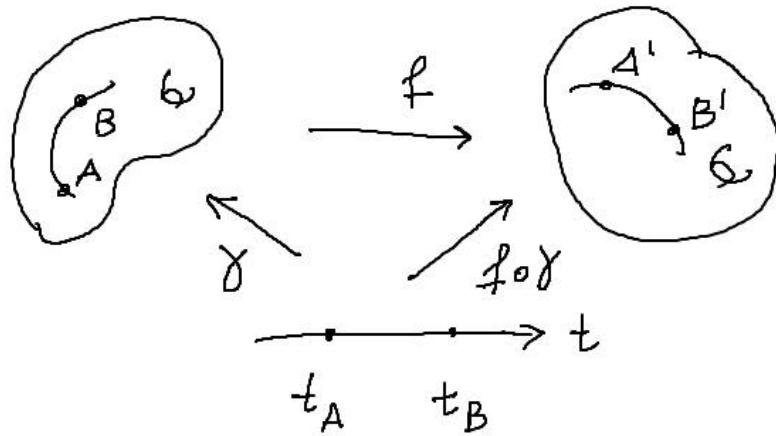
линейного отображения  $T_M f$  оказывается невырожденной, что означает, что касательное отображение  $T_M f$  является изоморфизмом векторных пространств.

Изоморфизм  $\varphi : \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{W}_n$  индуцирует изоморфизм  $\varphi^*$  пространств билинейных форм на пространствах  $\mathbf{V}_n$  и  $\mathbf{W}_n$ , определенный соотношениями

$$\varphi^* : a \mapsto b, \quad \text{где} \quad b(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = a(\varphi^{-1}(\mathbf{w}_1), \varphi^{-1}(\mathbf{w}_2))$$

или  $b(\varphi(\mathbf{v}_1), \varphi(\mathbf{v}_2)) = a(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ .

**Определение.** *Диффеоморфизм  $f : S \rightarrow \tilde{S}$  называется изометрией, если отображение  $f$  сохраняет длины дуг регулярных параметризованных кривых, то есть для любой регулярной параметризованной кривой  $\gamma : (a, b) \rightarrow S$ , принадлежащей поверхности  $S$ , длина отрезка кривой между точками  $\gamma(t_0)$  и  $\gamma(t_1)$  равна длине отрезка кривой  $f \circ \gamma$  между точками  $f(\gamma(t_0))$  и  $f(\gamma(t_1))$ .*



**Предложение.** Диффеоморфизм  $f : S \rightarrow \tilde{S}$  является изометрией тогда и только тогда, когда

$$f^*(g_S) = g_{\tilde{S}},$$

где  $g_S$  и  $g_{\tilde{S}}$  — поля метрических тензоров поверхностей  $S$  и  $\tilde{S}$  соответственно, или

$$(T_M f(\mathbf{v}), T_M f(\mathbf{w})) = (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad \text{для любых } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_M S, M \in S.$$

**Доказательство.** Пусть  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset S$  — параметризация поверхности  $S$ , которая вводит на  $\varphi(U) \subset S$  криволинейные координаты  $u^a$ . Тогда отображение  $f \circ \varphi : U \rightarrow f(\varphi(U)) \subset \tilde{S}$  — параметризация поверхности  $\tilde{S}$ , которая вводит криволинейные координаты на  $f(\varphi(U)) \subset S$ . Обозначим эти координаты  $u^{\tilde{a}}$ . По отношению к введенным координатам отображение  $f$  задается уравнениями  $u^{\tilde{a}} = u^a$ ,  $a = 1, 2$ .

”  $\Rightarrow$  ” Если отображение  $f$  задается уравнениями  $u^{\tilde{a}} = u^a$ ,  $a = 1, 2$ , и при этом  $\tilde{g}_{\tilde{a}\tilde{b}} = g_{ab}$ , где  $g_{ab}$  и  $\tilde{g}_{\tilde{a}\tilde{b}}$  — метрические тензоры поверхностей  $S$  и  $\tilde{S}$

соответственно, то соответствующие кривые на поверхностях  $S$  и  $\tilde{S}$  задаются одними и теми же параметрическими уравнениями и длины дуг этих кривых (см. (130)) совпадают:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\tilde{g}_{\tilde{a}\tilde{b}} \frac{du^{\tilde{a}}}{dt} \frac{du^{\tilde{b}}}{dt}} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ab} \frac{du^a}{dt} \frac{du^b}{dt}} dt. \quad (174)$$

”  $\Leftarrow$  ” Пусть теперь соотношения (174) выполняются для любых пар соответствующих кривых. Перепишем формулы (174), считая верхний предел интегрирования переменным:

$$\int_{t_0}^t \sqrt{\tilde{g}_{\tilde{a}\tilde{b}} \frac{du^{\tilde{a}}}{dt} \frac{du^{\tilde{b}}}{dt}} dt = \int_{t_0}^t \sqrt{g_{ab} \frac{du^a}{dt} \frac{du^b}{dt}} dt. \quad (175)$$

Дифференцируя соотношения (175) по параметру  $t$ , получим

$$\sqrt{\tilde{g}_{\tilde{a}\tilde{b}} \frac{du^{\tilde{a}}}{dt} \frac{du^{\tilde{b}}}{dt}} = \sqrt{g_{ab} \frac{du^a}{dt} \frac{du^b}{dt}} \iff \tilde{g}_{\tilde{a}\tilde{b}} \frac{du^{\tilde{a}}}{dt} \frac{du^{\tilde{b}}}{dt} = g_{ab} \frac{du^a}{dt} \frac{du^b}{dt}. \quad (176)$$

Поскольку числа

$$\frac{du^{\tilde{a}}}{dt} = \frac{du^a}{dt} = v^a$$

могут принимать произвольные значения при фиксированных значениях параметров  $u^{\tilde{a}} = u^a$ ,  $a = 1, 2$ , то равенство (176) влечет равенство симметрических матриц  $\tilde{g}_{\tilde{a}\tilde{b}} = g_{ab}$ . Равенство (176) можно также рассматривать как равенство квадратичных форм, тогда из него следует равенство ассоциированных симметрических билинейных форм.  $\square$

Таким образом, если между двумя поверхностями (открытыми подмножествами поверхностей) можно установить взаимно однозначное и взаимно дифференцируемое соответствие, при котором в соответствующих точках совпадают метрические тензоры (первые квадратичные дифференциальные фор-

мы), то эти поверхности (открытые подмножества этих поверхностей) можно наложить одна на другую без сжатий и растяжений.

### Пример 1.

Катеноид, определенный уравнениями

$$x = a \cosh\left(\frac{u}{a}\right) \cos v, \quad y = a \cosh\left(\frac{u}{a}\right) \sin v, \quad z = u,$$

и прямой геликоид, определенный уравнениями

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av,$$

локально изометричны.

Вычислим метрические тензоры катеноида и прямого геликоида в указанных системах криволинейных координат. Для катеноида

$x = a \cosh\left(\frac{u}{a}\right) \cos v, \quad y = a \cosh\left(\frac{u}{a}\right) \sin v, \quad z = u$  получаем

$$\mathbf{r}_u = \left\{ \sinh\left(\frac{u}{a}\right) \cos v, \sinh\left(\frac{u}{a}\right) \sin v, 1 \right\},$$

$$\mathbf{r}_v = \left\{ -a \cosh\left(\frac{u}{a}\right) \sin v, a \cosh\left(\frac{u}{a}\right) \cos v, 0 \right\}, \quad \text{откуда}$$

$$g_{11} = \sinh^2\left(\frac{u}{a}\right) + 1 = \cosh^2\left(\frac{u}{a}\right), \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = a^2 \cosh^2\left(\frac{u}{a}\right).$$

Для прямого геликоида  $x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av$  получаем

$$\mathbf{r}_u = \{\cos v, \sin v, 0\}, \quad \mathbf{r}_v = \{-u \sin v, u \cos v, a\}, \quad \text{откуда}$$

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = u^2 + a^2.$$

Рассмотрим теперь замену криволинейных координат на геликоиде

$$u = a \sinh\left(\frac{u'}{a}\right), \quad v = v'.$$

Частные производные старых координат по новым имеют вид

$\frac{\partial u}{\partial u'} = \cosh\left(\frac{u'}{a}\right)$ ,  $\frac{\partial v}{\partial u'} = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial v'} = 0$ ,  $\frac{\partial v}{\partial v'} = 1$ . Вычисляя координаты метрического тензора в новой системе координат

$$g_{a'b'} = g_{ab} \frac{\partial u^a}{\partial u^{a'}} \frac{\partial u^b}{\partial u^{b'}},$$

получаем

$$\begin{aligned} g_{1'1'} &= g_{11} \left( \frac{\partial u}{\partial u'} \right)^2 = \cosh^2\left(\frac{u'}{a}\right), \quad g_{1'2'} = g_{2'1'} = 0, \\ g_{2'2'} &= g_{22} \left( \frac{\partial v}{\partial v'} \right)^2 = \left( a \sinh\left(\frac{u'}{a}\right) \right)^2 + a^2 = a^2 \cosh^2\left(\frac{u'}{a}\right). \end{aligned}$$

## Пример 2.

Коническая поверхность и плоскость локально изометричны.

Для доказательства этого факта наиболее удобно воспользоваться полярной системой координат на плоскости

$$\mathbf{r} = v \mathbf{e}(u), \quad \mathbf{e}(u) = \mathbf{i} \cos u + \mathbf{j} \sin u.$$

В этой системе координат

$$\mathbf{r}_u = v \mathbf{e}(u + \frac{\pi}{2}), \quad \mathbf{r}_v = \mathbf{e}(u), \quad \Rightarrow \quad (g_{ab}) = \begin{pmatrix} v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

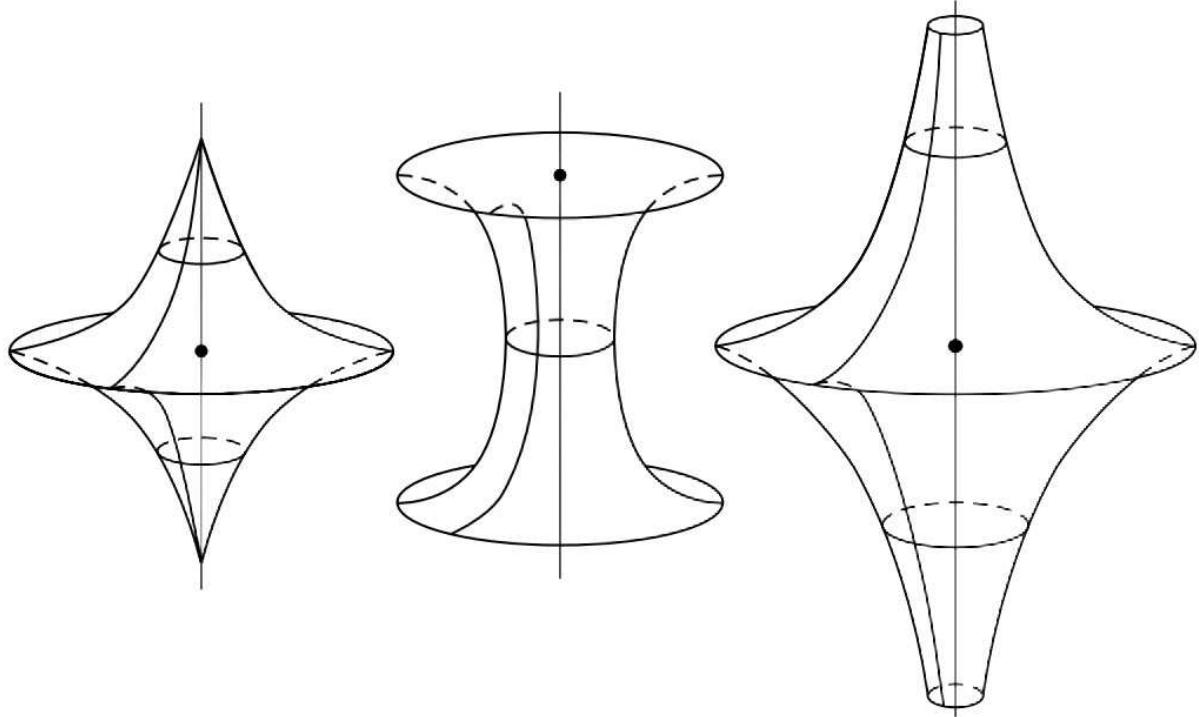
Если вершину конуса расположить в начале координат, в качестве направляющей взять линию  $\gamma$  пересечения конуса со сферой единичного радиуса с центром в начале координат, и на линии  $\gamma$  взять натуральный параметр  $u = s$ , то уравнение конуса примет вид

$$\mathbf{r} = v \mathbf{a}(u), \quad \text{где} \quad |\mathbf{a}(u)| = 1, \quad |\mathbf{a}'(u)| = 1 \quad \text{и} \quad (\mathbf{a}(u), \mathbf{a}'(u)) = 0.$$

Но тогда

$$\mathbf{r}_u = v \mathbf{a}'(u), \quad \mathbf{r}_v = \mathbf{a}(u) \quad \Rightarrow \quad (g_{ab}) = \begin{pmatrix} v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Приведем еще в качестве иллюстрации изображения поверхностей вращения, локально изометрических плоскости Лобачевского. Это волчок Миндинга, катушка Миндинга и псевдосфера Бельтрами. Каждая из этих поверхностей имеет постоянную отрицательную полную кривизну.



### Сопровождающий репер поверхности.

С каждой точкой  $M$  параметризованной поверхности  $S$  можно связать базис пространства  $E_3$ , образованный векторами

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]}{\|[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]\|}.$$

Раскладывая частные производные этих векторных функций по векторам этого же базиса, получим так называемые деривационные формулы

$$\partial_a \mathbf{r}_b = \Gamma_{ab}^c \mathbf{r}_c + A_{ab} \mathbf{n}, \quad \partial_a \mathbf{n} = -h_a^c \mathbf{r}_c. \quad (177)$$

Вторая формула является определением оператора Вейнгартена. Вычислим коэффициенты разложений в первой формуле.

Умножая скалярно первое уравнение на  $\mathbf{n}$ , получим

$$A_{ab} = (\mathbf{r}_{ab}, \mathbf{n}) = h_{ab}.$$

Остается вычислить коэффициенты  $\Gamma_{ab}^c$ . Отметим, что из симметричности по нижним индексам производных  $\mathbf{r}_{ab}$  следует, что коэффициенты  $\Gamma_{ab}^c$  симметричны по нижним индексам:

$$\Gamma_{ab}^c = \Gamma_{ba}^c.$$

Умножая теперь первое из уравнений (177) скалярно на  $\mathbf{r}_d$ , получим

$$(\mathbf{r}_{ab}, \mathbf{r}_d) = \Gamma_{ab}^c (\mathbf{r}_c, \mathbf{r}_d) = \Gamma_{ab}^c g_{cd}. \quad (178)$$

Из уравнений (178), можно выразить коэффициенты  $\Gamma_{ab}^c$  через координаты метрического тензора и их производные. Это осуществляется следующим образом. Продифференцировав равенство  $g_{ab} = (\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)$ , получим

$$\partial_c g_{ab} = (\mathbf{r}_{ca}, \mathbf{r}_b) + (\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_{cb}) = \Gamma_{ca}^d (\mathbf{r}_d, \mathbf{r}_b) + \Gamma_{cb}^d (\mathbf{r}_d, \mathbf{r}_a) = \Gamma_{ca}^d g_{db} + \Gamma_{cb}^d g_{da}. \quad (179)$$

Формулы (179) представляют собой систему шести линейных уравнений относительно шести неизвестных функций  $\Gamma_{ab}^d(u^d)$ . Для решения этой системы переставим в (179) индексы  $a, b, c$  циклически  $c \mapsto a \mapsto b \mapsto c$  два раза и найдем выражение

$$\partial_c g_{ab} + \partial_a g_{bc} - \partial_b g_{ca} = (\Gamma_{ca}^d g_{db} + \Gamma_{cb}^d g_{da}) + (\Gamma_{ab}^d g_{dc} + \Gamma_{ac}^d g_{db}) - (\Gamma_{bc}^d g_{da} + \Gamma_{ba}^d g_{dc}).$$

В правой части последнего равенства второе слагаемое отличается от пятого только знаком, поэтому они взаимно уничтожаются. Аналогично взаимно уничтожаются третье и шестое слагаемые. Поскольку первое и четвертое слагаемые совпадают, то в результате получаем систему уравнений

$$\partial_c g_{ab} + \partial_a g_{bc} - \partial_b g_{ca} = 2\Gamma_{ac}^d g_{db},$$

из которой, суммируя по индексу  $b$  с элементами матрицы  $g^{eb}$  (обратной к матрице  $g_{ab}$  метрического тензора), находим коэффициенты  $\Gamma_{ab}^c$ ,  $a, b, c = 1, 2$ :

$$\Gamma_{ac}^e = \frac{1}{2}g^{eb}(\partial_c g_{ab} + \partial_a g_{bc} - \partial_b g_{ca}). \quad (180)$$

Функции (180) называют также скобками (символами) Кристоффеля (второго рода) и обозначают  $\{ {}^e_{ac} \}$ .

Выпишем деривационные формулы (177) в окончательной форме

$$\mathbf{r}_{ab} = \Gamma_{ab}^c \mathbf{r}_c + h_{ab} \mathbf{n}, \quad \partial_a \mathbf{n} = -h_a^c \mathbf{r}_c. \quad (181)$$

Первая часть этих формул называется уравнениями Гаусса, а вторая уравнениями Вейнгартена.

**Теорема единственности.** Пусть  $S$  и  $\tilde{S}$  — две связные ориентированные поверхности в  $\mathcal{E}_3$  и  $f : S \rightarrow \tilde{S}$  — диффеоморфизм, сохраняющий ориентацию, при котором первый и второй фундаментальные тензоры поверхности  $S$  отображаются соответственно на первый и второй фундаментальные тензоры поверхности  $\tilde{S}$ , то есть для любой точки  $M \in S$  и векторов  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_M S$  выполняется

$$g_S(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = g_{\tilde{S}}(Tf(\mathbf{v}), Tf(\mathbf{w})), \quad h_S(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = h_{\tilde{S}}(Tf(\mathbf{v}), Tf(\mathbf{w})). \quad (182)$$

Тогда существует собственное движение  $F : \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathcal{E}_3$ , такое что диффеоморфизм  $f$  является ограничением движения  $F$  на  $S \subset \mathcal{E}_3$ .  $\square$

Связной мы называем поверхность, любые две точки которой можно соединить непрерывной кривой, лежащей на поверхности.

Выполнение первого из условий (182) означает, что отображение  $f$  является изометрией. Из второго условия следует, что нормальные кривизны

соответствующих кривых, лежащих на поверхностях  $S$  и  $\tilde{S}$  совпадают во всех соответствующих точках, а, следовательно, совпадают и кривизны нормальных сечений в соответствующих точках  $M$  и  $f(M)$  в направлении соответствующих векторов  $v \in T_M S$  и  $T_M f(v) \in T_{f(M)} \tilde{S}$ .

### Тензор кривизны.

Из уравнений Гаусса и Вейнгардена (181)

$$\mathbf{r}_{ab} = \Gamma_{ab}^c \mathbf{r}_c + h_{ab} \mathbf{n}, \quad \partial_a \mathbf{n} = -h_a^c \mathbf{r}_c \quad (181)$$

следует наличие зависимости между первым и вторым фундаментальными тензорами поверхности. Эта зависимость вытекает из равенства частных производных

$$\partial_d \mathbf{r}_{ab} = \partial_a \mathbf{r}_{db} \quad \text{и} \quad \partial_b \partial_a \mathbf{n} = \partial_a \partial_b \mathbf{n}. \quad (183)$$

Вычислим  $\partial_d \mathbf{r}_{ab}$ , учитывая условия (181):

$$\begin{aligned} \partial_d \mathbf{r}_{ab} &= (\partial_d \Gamma_{ab}^c) \mathbf{r}_c + \Gamma_{ab}^c \mathbf{r}_{dc} + (\partial_d h_{ab}) \mathbf{n} + h_{ab} \partial_d \mathbf{n} = \\ &= (\partial_d \Gamma_{ab}^e) \mathbf{r}_e + \Gamma_{ab}^c (\Gamma_{dc}^e \mathbf{r}_e + h_{dc} \mathbf{n}) + (\partial_d h_{ab}) \mathbf{n} + h_{ab} (-h_d^e \mathbf{r}_e) = \\ &= (\partial_d \Gamma_{ab}^e + \Gamma_{ab}^c \Gamma_{dc}^e - h_d^e h_{ab}) \mathbf{r}_e + (\partial_d h_{ab} + \Gamma_{ab}^c h_{dc}) \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Приравнивая нулю в разложении разности  $\partial_d \mathbf{r}_{ab} - \partial_a \mathbf{r}_{db} = 0$  коэффициенты при  $\mathbf{r}_e$  и  $\mathbf{n}$  (производные третьего порядка не зависят от порядка дифференцирования), получим

$$\partial_d \Gamma_{ab}^e - \partial_a \Gamma_{db}^e + \Gamma_{ab}^c \Gamma_{dc}^e - \Gamma_{db}^c \Gamma_{ac}^e = h_d^e h_{ab} - h_a^e h_{db} \quad (184)$$

$$\partial_d h_{ab} - \partial_a h_{db} + \Gamma_{ab}^c h_{dc} - \Gamma_{db}^c h_{ac} = 0. \quad (185)$$

Соотношения (184) называются условиями Гаусса, а соотношения (185) — условиями Петерсона–Кодаци.

Умножив соотношения (184) на  $g_{ef}$  и просуммировав по  $e = 1, 2$ , получим

$$(\partial_d \Gamma_{ab}^e - \partial_a \Gamma_{db}^e + \Gamma_{ab}^c \Gamma_{dc}^e - \Gamma_{db}^c \Gamma_{ac}^e) g_{ef} = h_{fd} h_{ab} - h_{fa} h_{db}. \quad (186)$$

Поскольку выражение в правой части равенства (186) представляет собой набор координат тензора

$$T(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) = h(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)h(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) - h(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)h(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4),$$

то формулой

$$R_{dabf} = (\partial_d \Gamma_{ab}^e - \partial_a \Gamma_{db}^e + \Gamma_{ab}^c \Gamma_{dc}^e - \Gamma_{db}^c \Gamma_{ac}^e) g_{ef} \quad (187)$$

задается тензорное поле, называемое *тензором кривизны* поверхности  $S$ . Этот тензор полностью определяется метрическим тензором  $g_{ab}$ .

Придав индексам в формуле (186) значения  $f = d = 1, a = b = 2$ , получим соотношение

$$\det(h_{ab}) = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = R_{1221},$$

из которого следует, что определитель второго фундаментального тензора выражается через координаты метрического тензора и их производные, но тогда и полная кривизна поверхности

$$K = \frac{\det h_{ab}}{\det g_{ab}}$$

является функцией координат метрического тензора. Как результат, получаем следующую теорему.

**Теорема Гаусса ("Egregium").** *Полная кривизна поверхности не изменяется при изометрических преобразованиях поверхности.*

Изометрическими называются преобразования поверхности, при которых остается неизменным метрический тензор, то есть сохраняются длины кривых и углы между кривыми.

**Теорема существования.** *Пусть на некотором открытом связном множестве  $U \subset \mathbb{R}^2$  заданы функции*

$$g_{ab}(u^1, u^2) \quad u \quad h_{ab}(u^1, u^2), \quad (188)$$

такие что  $g_{ab} = g_{ba}$ ,  $h_{ab} = h_{ba}$  и матрица  $g_{ab}(u^1, u^2)$  является матрицей положительно определенной квадратичной формы при всех  $(u^1, u^2) \in U$ .

Если для функций (188) выполняются условия Гаусса (186) и Петерсона–Кодаци (185)

$$(\partial_d \Gamma_{ab}^e - \partial_a \Gamma_{db}^e + \Gamma_{ab}^c \Gamma_{dc}^e - \Gamma_{db}^c \Gamma_{ac}^e) g_{ef} = h_{fd} h_{ab} - h_{fa} h_{db},$$

$$\partial_d h_{ab} - \partial_a h_{db} + \Gamma_{ab}^c h_{dc} - \Gamma_{db}^c h_{ac} = 0,$$

то для любой точки  $(u_0^1, u_0^2) \in U$  существуют окрестность (открытое связное множество)  $V$ , такая что  $(u_0^1, u_0^2) \in V \subset U$ , и параметризованная поверхность  $\varphi : V \rightarrow \mathcal{E}_3$ , для которой матрицы (188) являются матрицами первого и второго фундаментальных тензоров.

**Замечание.** Поскольку такая локальная простая параметризованная поверхность может быть найдена для любой точки  $(u_0^1, u_0^2) \in U$ , то эти поверхности с помощью движений можно «соединить» в одну поверхность  $\varphi : U \rightarrow \mathcal{E}_3$ , но получающаяся поверхность может пересекать сама себя, касаться с собой, а также наматываться сама на себя. Например, поверхность вращения, у которой параметр  $u^2$  вдоль параллели изменяется в пределах  $(0; 2\pi a)$  при  $a > 1$ .

## 11 Внутренняя геометрия поверхности.

К внутренней геометрии поверхности относят те свойства ее геометрии, которые определяются только первым фундаментальным тензором и не изменяются при изометрических преобразованиях.

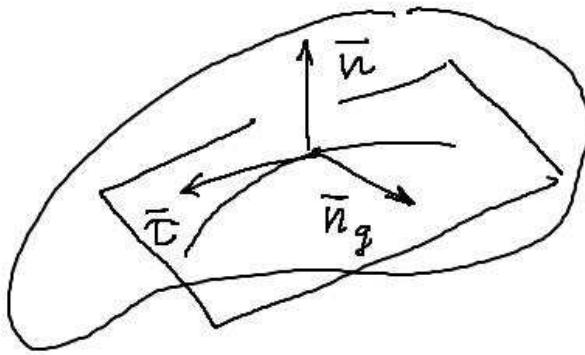
### Сопровождающий репер кривой на поверхности.

Рассмотрим поверхность  $S$ , заданную уравнениями  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^a)$  и параметризованную кривую  $\gamma$  с уравнением  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ , где  $s$  — натуральный параметр, принадлежащую поверхности  $S$ . Кривая гамма может быть задана также уравнениями  $u^a = u^a(s)$  в криволинейных координатах, и тогда ее уравнение в пространстве может быть записано в виде  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^a(s))$ . Будем предполагать, что на поверхности выбрано поле единичного нормального вектора  $\mathbf{n}(u^a)$ .

С кривой  $\gamma$  при каждом значении  $s$  ассоциированы два вектора: касательный вектор  $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$  и единичный вектор нормали  $\mathbf{n}(s) = \mathbf{n}(u^a(s))$  к поверхности  $S$ . Их можно дополнить до правого ортонормированного базиса

$$\{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}_g, \mathbf{n}\} \quad (189)$$

единичным вектором  $\mathbf{n}_g = [\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}]$ , лежащим в касательной плоскости и ортогональным вектору  $\boldsymbol{\tau}$ . (Тройка векторов (189) является правой, так как  $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}, [\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}]) = ([\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}], [\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}]) > 0$ ).



Для производных векторных функций  $\tau$ ,  $\mathbf{n}_g$  и  $\mathbf{n}$  получаем следующие разложения

$$\begin{aligned}\tau' &= k_g \mathbf{n}_g + k_n \mathbf{n} \\ \mathbf{n}'_g &= -k_g \tau + \kappa_g \mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= -k_n \tau - \kappa_g \mathbf{n}_g\end{aligned}\tag{190}$$

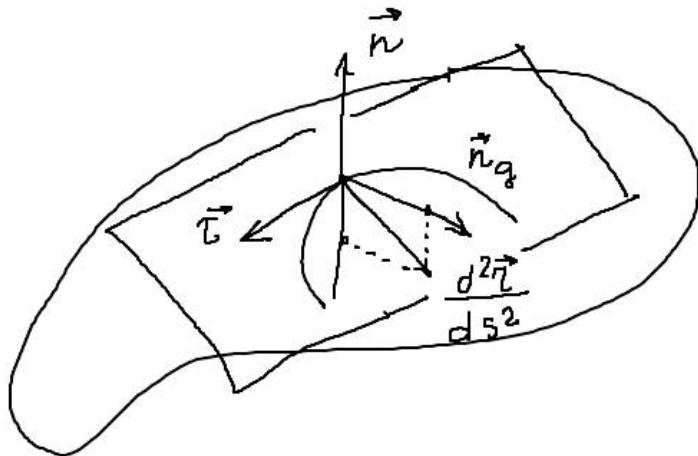
Коэффициент  $k_n$  в формулах (190) является нормальной кривизной кривой, коэффициент  $k_g$  называется геодезической кривизной, а коэффициент  $\kappa_g$  — геодезическим (относительным) кручением.

Косая симметрия матрицы коэффициентов следует (как и в формулах Серре–Френе) из двух соотношений

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}(t), \mathbf{a}(t)) = 1 &\Rightarrow \left( \frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{a} \right) = 0, \\ (\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)) = 0 &\Rightarrow \left( \frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b} \right) + \left( \mathbf{a}, \frac{d\mathbf{b}}{dt} \right) = 0.\end{aligned}$$

Из первой формулы (190) следует, что по абсолютной величине геодезическая кривизна кривой представляет собой модуль проекции вектора кривизны на касательную плоскость к поверхности

$$|k_g| = \left| \left( \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2}, \mathbf{n}_g \right) \right| = \left| pr_{T_M S} \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \right|.$$



**Определение.** Лежащая на поверхности параметризованная кривая  $\gamma$ , заданная функцией  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  натурального параметра  $s$ , называется геодезической линией или просто геодезической, если ее геодезическая кривизна равна нулю при всех значениях параметра  $s$ .

Из определения и формул (190) следует, что кривая является геодезической тогда и только тогда, когда ее вектор кривизны  $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$  направлен по нормали к поверхности. При этом кривизна геодезической в каждой точке совпадает по абсолютной величине с нормальной кривизной, а значит и с кривизной нормального сечения, имеющего с геодезической общую касательную.

При движении по геодезической точка не отклоняется ни в одну сторону в касательной плоскости: проекция вектора  $\tau'$  на ось, определяемую вектором  $\mathbf{n}_g$ , равна нулю. В этом смысле геодезическая является «прямейшей» линией на поверхности. На плоскости, лежащей в пространстве и рассматриваемой как поверхность, геодезическими будут прямые  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}s$ , где  $|\mathbf{a}| = 1$ .

Учитывая выражение для вектора кривизны (142) и уравнения Гаусса (181),

имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} &= \frac{d^2u^a}{ds^2}\mathbf{r}_a + \frac{du^a}{ds}\frac{du^b}{ds}\mathbf{r}_{ab} = \frac{d^2u^c}{ds^2}\mathbf{r}_c + \frac{du^a}{ds}\frac{du^b}{ds}(\Gamma_{ab}^c\mathbf{r}_c + h_{ab}\mathbf{n}) = \\ &= \left( \frac{d^2u^c}{ds^2} + \Gamma_{ab}^c \frac{du^a}{ds} \frac{du^b}{ds} \right) \mathbf{r}_c + h_{ab} \frac{du^a}{ds} \frac{du^b}{ds} \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (191)$$

откуда получаем систему дифференциальных уравнений для нахождения геодезических линий:

$$\frac{d^2u^c}{ds^2} + \Gamma_{ab}^c \frac{du^a}{ds} \frac{du^b}{ds} = 0. \quad (192)$$

В дальнейшем нам придется использовать тот факт, что соотношения (191) имеют место для любой, не обязательно натуральной параметризации кривой  $\mathbf{r}(u^a(t))$ , лежащей на поверхности (при выводе выражения для второй производной  $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$  в (191) никак не использовалось то, что  $s$  — натуральный параметр).

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений (192). Из теории дифференциальных уравнений известно, что эта система имеет единственное решение при заданных начальных условиях

$$u^c(0) = u_0^c, \quad \frac{du^c}{ds}(0) = v^c. \quad (193)$$

Пусть  $u^a = u^a(s)$ ,  $a = 1, 2$ , — решение системы уравнений (192) с начальными условиями (193), в которых  $v^c$  — единичный вектор в точке  $u_0^c$ , то есть  $g_{ab}(u_0^c)v^a v^b = 1$ . Покажем, что параметр  $s$  в этом решении  $u^a = u^a(s)$  является натуральным. Для решения  $u^a = u^a(s)$  уравнений (192) из уравнений (191) (в которых мы априори не предполагаем натуральности параметра  $s$ ) следует, что

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \lambda \mathbf{n} \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds} \left( \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = 0.$$

Это значит, что модуль касательного вектора  $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$  постоянен вдоль кривой. Но начальные условия для решения  $u^a = u^a(s)$  системы уравнений (192) были выбраны так, что при  $u^a = u_0^a$  модуль касательного вектора  $v^c$  равен единице, поэтому он равен единице при всех значениях параметра  $s$ .

Итак, параметр  $s$  в уравнениях  $u^a = u^a(s)$  является натуральным. Но тогда вектор  $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$  является вектором кривизны кривой  $\mathbf{r}(u^a(s))$ , и для него имеет место разложение (191), в котором первое слагаемое равно нулю, а второе слагаемое имеет вид

$$h_{ab} \frac{du^a}{ds} \frac{du^b}{ds} \mathbf{n} = k_n \mathbf{n}.$$

Из дифференциальных уравнений (190) тогда следует, что  $k_g = 0$ , и поэтому уравнения  $u^a = u^a(s)$  задают геодезическую линию.

Проведенные рассуждения приводят к следующему выводу: через каждую точку  $M \in S$  в направлении каждого единичного вектора  $\mathbf{v} \in T_M S$  проходит единственная геодезическая.

Свойство кривой на поверхности быть геодезической не изменяется при изометрических преобразованиях, поскольку коэффициенты уравнений (192) выражаются только через метрический тензор поверхности.

Выясним геометрический смысл относительного кручения кривой  $\gamma$ , лежащей на поверхности. Из последнего уравнения (190)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}' &= k_g \mathbf{n}_g + k_n \mathbf{n} \\ \mathbf{n}'_g &= -k_g \boldsymbol{\tau} + \kappa_g \mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= -k_n \boldsymbol{\tau} - \kappa_g \mathbf{n}_g \end{aligned} \tag{190}$$

следует, что относительное кручение в данной точке кривой  $\gamma$  зависит только

от направляющего вектора кривой  $\tau = \mathbf{r}_a \frac{du^a}{ds}$ , то есть зависит только от производных  $u^a$  по  $s$  первого порядка, поскольку нормальная кривизна зависит только от  $\tau$  и

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \partial_a \mathbf{n} \frac{du^a}{ds}.$$

Для геодезической линии уравнения (190) принимают вид ( $k_g = 0$ )

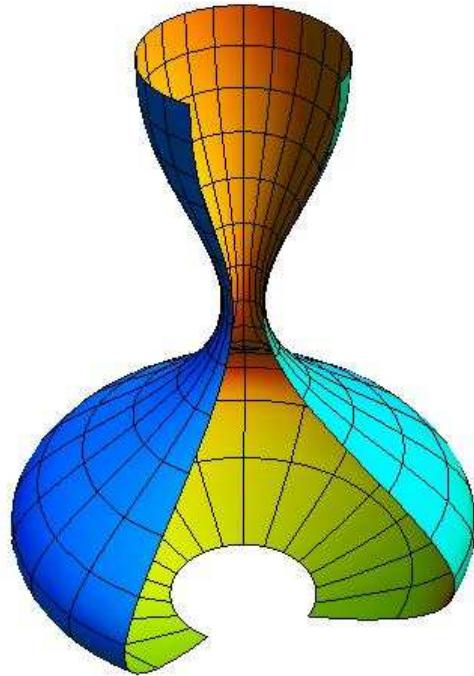
$$\begin{aligned}\tau' &= k_n \mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= -k_n \tau \quad -\kappa_g \mathbf{n}_g \\ \mathbf{n}'_g &= \kappa_g \mathbf{n}\end{aligned}\tag{194}$$

Из уравнений (194) следует, что если поле нормального вектора выбрано так, что  $\mathbf{n} = \boldsymbol{\nu}$  (а, значит,  $\mathbf{n}_g = -\boldsymbol{\beta}$ ), то относительное кручение  $\kappa_g$  геодезической линии совпадает с ее кручением  $\kappa$ . Таким образом, относительное кручение в данной точке  $M_0$  кривой  $\gamma$  совпадает по абсолютной величине с кручением геодезической, проходящей через точку  $M_0$  в направлении касательного вектора кривой  $\gamma$ .

Примерами геодезических линий могут служить меридианы поверхностей вращения.

Поверхность, получаемая в прямоугольной системе координат вращением кривой  $x = f(s)$ ,  $z = g(s)$ , где  $s$  — натуральный параметр, вокруг оси  $Oz$ , имеет уравнения

$$x = f(u^1) \cos(u^2), \quad y = f(u^1) \sin(u^2), \quad z = g(u^1).$$



В этом случае имеем:

$$\mathbf{r}_1 = \{f' \cos(u^2), f' \sin(u^2), g'\}, \quad (f')^2 + (g')^2 = 1,$$

$$\mathbf{r}_2 = \{-f \sin(u^2), f \cos(u^2), 0\},$$

$$\mathbf{r}_{11} = \{f'' \cos(u^2), f'' \sin(u^2), g''\}$$

Поскольку

$$(f')^2 + (g')^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad f' f'' + g' g'' = 0,$$

то для меридиана  $u^1 = s$ ,  $u^2 = u_0^2$  выполняются соотношения

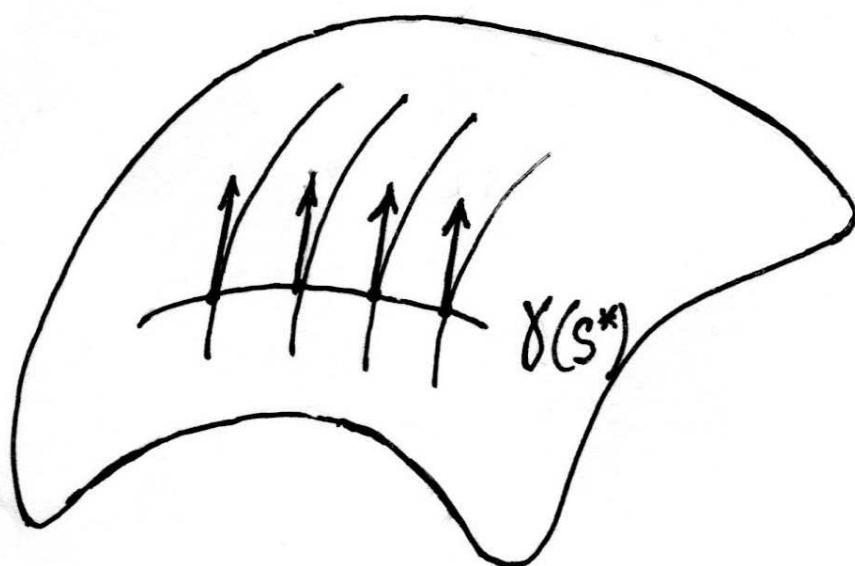
$$\left( \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2}, \boldsymbol{\tau} \right) = (\mathbf{r}_{11}, \mathbf{r}_1) = 0, \quad \left( \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2}, \mathbf{n}_g \right) = (\mathbf{r}_{11}, \mathbf{r}_2) = 0,$$

и, следовательно, меридиан является геодезической.

Если соединить две достаточно близкие точки  $M_0$  и  $M_1$  поверхности  $S$  различными кривыми, то длина отрезка геодезической между точками  $M_0$  и  $M_1$  будет меньше длины соответствующего отрезка любой другой кривой. В этом смысле геодезическая является «кратчайшей» линией, соединяющей точки поверхности.

Для доказательства этого факта нам потребуется так называемая полугеодезическая система координат на поверхности в окрестности произвольной ее точки  $M_0$ .

Рассмотрим на поверхности  $S$  некоторую кривую  $\gamma$  (простую дугу)  $u^a = \gamma^a(s^*)$ , параметризованную натуральным параметром  $s^*$ , проходящую через  $M_0$  при  $s^* = s_0^*$ . Пусть  $\tau(s^*)$  — единичный касательный вектор этой кривой в произвольной ее точке, а  $\mathbf{v}(s^*) = [\mathbf{n}(\gamma^a(s^*)), \tau(s^*)]$  — единичный вектор, получающийся поворотом вектора  $\tau(s^*)$  на прямой угол в касательной плоскости. Через каждую точку  $M(s_0^*)$  кривой  $\gamma$  проведем геодезическую в направлении вектора  $\mathbf{v}(s_0^*)$ .



Уравнения  $u^a = u^a(s_0^*, s)$  этой геодезической являются решением системы дифференциальных уравнений (192)

$$\frac{d^2 u^c}{ds^2} + \Gamma_{ab}^c \frac{du^a}{ds} \frac{du^b}{ds} = 0 \quad (192)$$

при начальных условиях

$$u^c(0) = \gamma^c(s_0^*), \quad \frac{du^c}{ds}(0) = v^c(s_0^*).$$

Объединяя уравнения  $u^a = u^a(s_0^*, s)$  этих геодезических при различных значениях параметра  $s_0^*$ , получим функции

$$u^1 = u^1(s^*, s), \quad u^2 = u^2(s^*, s), \quad (195)$$

которые являются дифференцируемыми по каждому из параметров  $s^*, s$ , поскольку решение системы дифференциальных уравнений (192) дифференцируемо зависит от начальных условий. Поэтому функции (195) задают дифференцируемое отображение

$$f : U' \ni \{s^*, s\} \mapsto \{u^1, u^2\} \in \mathbb{R}^2$$

некоторой открытой окрестности точки  $(s_0^*, 0) \in \mathbb{R}^2$  в  $\mathbb{R}^2$ . Поскольку в точке  $(s_0^*, 0)$  матрица Якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial s^*} & \frac{\partial u^1}{\partial s} \\ \frac{\partial u^2}{\partial s^*} & \frac{\partial u^2}{\partial s} \end{pmatrix} \Big|_{s^*=s_0^*, s=0}$$

представляет собой матрицу координат единичных взаимно ортогональных векторов

$$\boldsymbol{\tau}(s_0^*) \quad \text{и} \quad \mathbf{v}(s_0^*),$$

то она невырождена. По теореме об обратной функции отсюда следует, что функции (195) задают диффеоморфизм некоторого открытого множества  $W \subset$

$\mathbb{R}^2$ , содержащего точку  $(s_0^*, 0)$ , на открытое множество  $U \subset \mathbb{R}^2$ , содержащее точку  $(u_0^1 = \gamma^1(s_0^*, 0), u_0^2 = \gamma^2(s_0^*, 0))$ .

Таким образом, на функции (195) можно смотреть как на преобразование криволинейных координат

$$u^1 = u^1(s^*, s), \quad u^2 = u^2(s^*, s) \quad (196)$$

в окрестности точки  $M_0 = \gamma(s_0^*)$ . Обозначим новые координаты следующим образом:

$$s = \hat{u}^1 \quad s^* = \hat{u}^2$$

и назовем полугеодезическими, поскольку семейство координатных линий  $\hat{u}^2 = \hat{u}_0^2$  является семейством геодезических линий.

Для изучения свойств полугеодезических систем координат вычислим прежде всего координаты метрического тензора в такой системе координат.

Итак, пусть задана некоторая полугеодезическая система координат  $\{u^1, u^2\}$  на поверхности  $S$ . (Знакок  $\hat{\phantom{a}}$  над  $u^a$  не ставим, поскольку сейчас рассматривается уже произвольная полугеодезическая система координат.) Поскольку параметр  $u^1$  — это длина дуги геодезической, то  $\mathbf{r}_1 = \partial_1 \mathbf{r}$  — единичный вектор, и

$$g_{11} = 1.$$

Всякая кривая  $u^1 = s$ ,  $u^2 = u_0^2$  является геодезической. Подставим ее уравнения в систему уравнений геодезических линий (192)

$$\frac{d^2 u^c}{ds^2} + \Gamma_{ab}^c \frac{du^a}{ds} \frac{du^b}{ds} = 0. \quad (192)$$

Учитывая, что

$$\frac{du^1}{ds} = 1, \quad \frac{d^2u^1}{ds^2} = 0, \quad \frac{du^2}{ds} = 0, \quad \frac{d^2u^2}{ds^2} = 0,$$

получим

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = 0. \quad (197)$$

Вычислим коэффициенты  $\Gamma_{11}^1$  и  $\Gamma_{11}^2$  по формулам (180)

$$\Gamma_{ac}^e = \frac{1}{2}g^{eb}(\partial_c g_{ab} + \partial_a g_{bc} - \partial_b g_{ac}), \quad (180)$$

учитывая, что  $g_{11} = 1$ . При  $a = c = 1$  формулы (180) принимают вид

$$\Gamma_{11}^e = \frac{1}{2}g^{eb}(\partial_1 g_{1b} + \partial_1 g_{b1} - \partial_b g_{11}). \quad (198)$$

Все слагаемые в формулах (198), в которых дифференцируется  $g_{11} = 1$ , равны нулю, поэтому слагаемые  $\partial_1 g_{1b}$  и  $\partial_1 g_{b1}$  отличны от нуля, только если  $b = 2$ .

Таким образом,

$$\Gamma_{11}^1 = 0 \Leftrightarrow g^{12}(\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{21}) = 0,$$

$$\Gamma_{11}^2 = 0 \Leftrightarrow g^{22}(\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{21}) = 0.$$

Поскольку  $g_{12} = g_{21}$ , а обе координаты  $g^{12}$  и  $g^{22}$  не могут быть равными нулю одновременно, отсюда следует, что  $\partial_1 g_{12} = 0$ . Значит функция  $g_{12}(u^1, u^2)$  не зависит от переменной  $u^1$ , но тогда (при  $u^1 = 0$  мы попадаем на кривую  $\gamma$  и  $u^2 = s^*$  — это натуральный параметр на  $\gamma$ )

$$g_{12}(u^1, u^2) = g_{12}(0, u^2) = (\mathbf{v}(s^*), \boldsymbol{\tau}(s^*)) = 0.$$

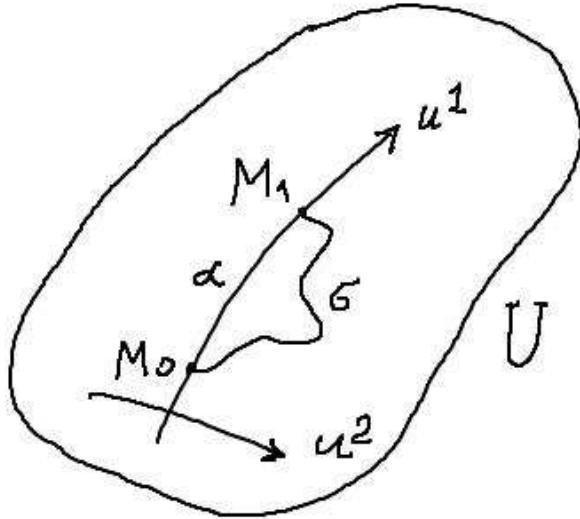
Таким образом, в полугеодезической системе координат

$$(g_{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{22}(u^1, u^2) \end{pmatrix}. \quad (199)$$

Из (199) следует, что координатные линии в полугеодезической системе координат пересекаются под прямым углом, и линии  $u^1 = c = \text{const}$  получаются из линии  $\gamma$  с уравнением  $u^1 = u_0^1$  сдвигом точек на одно и то же расстояние  $c - u_0^1$  вдоль координатных линий с уравнениями  $u^2 = a = \text{const}$  (эти координатные линии — геодезические и  $u^1$  — это натуральный параметр на каждой из них).

По построению полугеодезической системы координат, если нам задана произвольная геодезическая  $\alpha$ , и точка  $M_0$ , лежащая на ней, то на некотором открытом связном множестве  $U$ , содержащем точку  $M_0$ , можно ввести полугеодезические координаты  $\{u^a\}$ , такие что  $M_0$  имеет координаты  $(u_0^1, u_0^2)$ , а  $\alpha$  задается уравнением  $u^2 = u_0^2$ .

**Теорема.** Пусть  $M_1(u_1^1, u_0^2)$ ,  $u_1^1 > u_0^1$ , — точка на геодезической  $\alpha$ , такая что дуга  $M_0M_1$  геодезической  $\alpha$  целиком содержится в вышеуказанном открытом множестве  $U$ . Тогда длина дуги  $M_0M_1$  геодезической  $\alpha$  меньше длины дуги  $M_0M_1$  любой другой кривой  $\sigma$ , лежащей в  $U$  и соединяющей  $M_0$  с  $M_1$ .



**Доказательство.** Пусть  $u^a = u^a(t)$  — уравнения кривой  $\sigma$ , соединяющей точки  $M_0(t_0)$  и  $M_1(t_1)$ ,  $t_1 > t_0$ . Тогда длина  $\ell$  дуги  $M_0M_1$  этой кривой равна

$$\begin{aligned} \ell &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + g_{22} \left(\frac{du^2}{dt}\right)^2} dt \geqslant \\ &\geqslant \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2} dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{du^1}{dt} dt = |u_1^1 - u_0^1|. \end{aligned} \quad (200)$$

Если функция  $u^2(t)$  не является константой вдоль кривой, то неравенство в формуле (200) становится строгим.  $\square$

## 12 Топология на множестве.

Топология является разделом математики, в котором изучаются топологические пространства и непрерывные отображения между топологическими пространствами.

Топологическое пространство представляет собой множество  $X$ , наделенное некоторой структурой, которая позволяет говорить о близости точек и под-

множеств в  $X$ . Отображение между топологическими пространствами называется непрерывным, если оно сохраняет отношение близости точки и подмножества, то есть если точка  $x$  пространства  $X$  близка к подмножеству  $A \subset X$ , то при непрерывном отображении  $f : X \rightarrow Y$  точка  $f(x)$  оказывается близкой к подмножеству  $f(A)$ .

Точки подмножества  $A \subset X$  считаются близкими к  $A$ . Множество всех точек, близких к подмножеству  $A$ , называется замыканием множества  $A$  и обозначается  $\overline{A}$ . Условие непрерывности отображения  $f$  при этом можно представить в виде  $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$  для любого подмножества  $A \subset X$ .

На евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  точка  $(x, y)$  считается близкой к подмножеству  $A$ , если в любой окрестности  $U$  точки  $x$  найдутся точки из подмножества  $A$ . Поэтому, например, замыкание  $\overline{A}$  множества  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ , состоящего из точек, расположенных внутри единичного круга, содержит помимо самого множества  $A$  еще и точки граничной окружности  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ . Следовательно, множество  $\overline{A}$  представляет собой замкнутый круг  $\overline{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ . При непрерывном отображении

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto z = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R},$$

относящем точке  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ее расстояние от начала координат, множества  $f(A)$ ,  $f(\overline{A})$  и  $\overline{f(A)}$  имеют вид  $f(A) = [0, 1]$ ,  $f(\overline{A}) = \overline{f(A)} = [0, 1]$ .

Структуру топологического пространства на множестве можно вводить различными способами, одним из которых является рассмотренная выше операция замыкания множества. В настоящем курсе, однако, используется другой, более принятый в настоящее время, способ.

## **Топологическое пространство.**

**Определение.** Топологией на множестве  $X$  называется семейство  $\tau$  его подмножеств, которое удовлетворяет следующим трем условиям:

1.  $\emptyset$  и  $X$  принадлежат  $\tau$ .
2. Если  $U \in \tau$  и  $V \in \tau$ , то  $U \cap V \in \tau$ .
3. Для любого семейства  $\{U_\alpha \in \tau\}$ ,  $\alpha \in A$ , подмножеств из  $\tau$  их объединение также принадлежит  $\tau$ :  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$ .

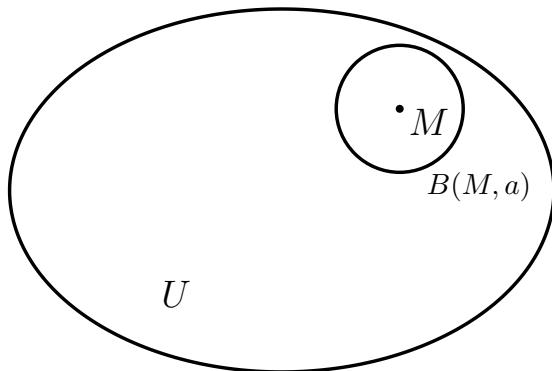
Если перечисленные три условия выполнены, то пара  $(X, \tau)$  называется топологическим пространством, а подмножества из  $\tau$  называются открытыми подмножествами в  $(X, \tau)$ .

На одном и том же множестве  $X$  могут быть заданы различные топологии. Если не возникает недоразумения, в дальнейшем часто топологическое пространство  $(X, \tau)$  обозначается одним символом  $X$ , открытые подмножества для краткости называются просто *открытыми множествами*. Для обозначения топологии на топологическом пространстве  $X$  используется также обозначение  $\tau_X$ .

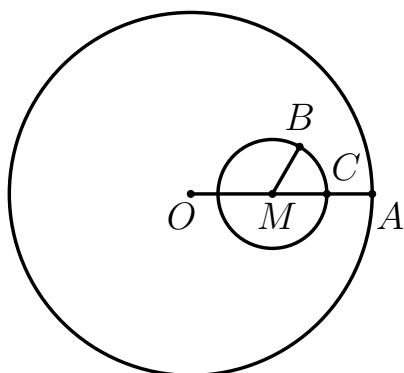
**Определение.** Если  $X$  и  $Y$  — два топологических пространства, то отображение  $f : X \rightarrow Y$  называется непрерывным, если прообраз  $f^{-1}(U)$  всякого открытого множества  $U$  пространства  $Y$  является открытым множеством в  $X$ .

Примером топологического пространства является евклидово аффинное пространство  $\mathcal{E}_n$ , в котором непустое подмножество  $U \subset \mathcal{E}_n$  называется *открытым*, если для любой точки  $M \in U$  найдется открытый шар  $B(M, a)$  с

центром в этой точке, целиком принадлежащий подмножеству  $U$ .



При этом всякий открытый шар сам является открытым множеством. Действительно, для каждой точки  $M \in B(O, a)$ , как показывает следующий рисунок, найдется открытый шар  $B(M, b)$  радиуса  $b = \frac{1}{2}|MA|$ , целиком принадлежащий шару  $M \in B(O, a)$ .



Объединение любого количества открытых подмножеств при этом очевидным образом является открытым подмножеством. Пересечение двух открытых множеств  $U_1 \cap U_2$  является открытым, поскольку для любой точки  $M \in U_1 \cap U_2$

имеются два открытых шара  $B(M, a_1) \subset U_1$  и  $B(M, a_2) \subset U_2$  и поэтому  $B(M, a) \subset U_1 \cap U_2$ , где  $a = \min\{a_1, a_2\}$ .

Большое количество примеров топологических пространств можно получить, используя следующее определение.

**Определение.** Пусть  $(X, \tau)$  — топологическое пространство и  $S \subset X$  — произвольное подмножество. Топологией на множестве  $S$ , индуцированной топологией  $\tau$  пространства  $X$ , называется совокупность  $\tau_S$  множеств вида  $U \cap S$ , где  $U \in \tau$  — открытое множество в  $X$ .

Проверим, что семейство  $\tau_S$  удовлетворяет аксиомам топологии.

Очевидно,

$$\emptyset \cap S = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \tau_S, \quad X \cap S = S \Rightarrow S \in \tau_S.$$

Далее,

$$U_1 \cap S, U_2 \cap S \in \tau_S, \Rightarrow (U_1 \cap S) \cap (U_2 \cap S) = (U_1 \cap U_2) \cap S \in \tau_S.$$

Наконец,

$$\bigcup_{\alpha \in A} (U_\alpha \cap S) = \left( \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \right) \cap S \in \tau_S.$$

□

Таким образом, любое подмножество плоскости  $\mathcal{E}_2$ , трехмерного пространстве  $\mathcal{E}_3$  или евклидова пространства  $\mathcal{E}_n$  произвольной размерности  $n$  является топологическим пространством.

Например, любая кривая или поверхность, а также, например, множество точек в  $\mathbb{R}^n$ , координаты которых являются рациональными числами.

Пустое множество  $\emptyset$  является топологическим пространством с единственным открытым подмножеством  $\emptyset$ . Для любого топологического пространства

$X$  существует единственное непрерывное отображение  $f : \emptyset \rightarrow X$  — пустое отображение, в том числе пустое отображение  $f : \emptyset \rightarrow \emptyset$ . Непрерывных отображений  $f : X \rightarrow \emptyset$  из непустого пространства  $X$  в пустое пространство  $\emptyset$  не существует.

Из определения непрерывного отображения следует, что композиция

$$g \circ f : X \rightarrow Z \quad \text{непрерывных отображений} \quad f : X \rightarrow Y \text{ и } g : Y \rightarrow Z$$

является непрерывным отображением.

Действительно,

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)),$$

и если  $U$  — открытое множество, то открытым является и  $g^{-1}(U)$ , а вместе с ним и  $f^{-1}(g^{-1}(U))$ .

**Определение.** Пусть  $X$  и  $Y$  — топологические пространства. Биекция (взаимно однозначное отображение)  $f : X \rightarrow Y$  называется гомеоморфизмом, если отображения  $f$  и  $f^{-1}$  оба являются непрерывными.

Если существует гомеоморфизм  $f : X \rightarrow Y$ , то пространства  $X$  и  $Y$  называются гомеоморфными.

Говорят также, что гомеоморфизм — это взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение. Гомеоморфизм устанавливает взаимно однозначное соответствие между открытыми множествами пространств  $X$  и  $Y$ , поэтому с точки зрения топологии гомеоморфные пространства эквивалентны, обладают одними и теми же топологическими свойствами.

## Метрические пространства.

Определение топологии в пространстве  $\mathcal{E}_n$  можно непосредственно обобщить на случай произвольного метрического пространства.

**Определение.** Пусть  $X$  — некоторое множество. Метрикой на  $X$  называется функция  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющая условиям

1.  $d(x, y) \geq 0$ ,
2.  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ,
3.  $d(x, y) = d(y, x)$ ,
4.  $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

для любых  $x, y, z \in X$  (неравенство треугольника).

Если перечисленные условия выполнены, то пара  $(X, d)$  называется метрическим пространством.

Значение  $d(x, y) \in \mathbb{R}$  называется расстоянием между точками  $x, y \in X$ .

Метрика на  $X$  индуцирует на  $X$  топологию, определяемую следующим образом:

Открытым шаром в метрическом пространстве  $X$  с центром в точке  $x_0$  и радиусом  $r$  ( $r > 0$ ) называется подмножество

$$B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x_0, x) < r\}.$$

Подмножество  $U \subset X$  называется открытым, если для любой точки  $x \in U$  найдется открытый шар  $B(x, r)$  с центром в этой точке, целиком принадлежащий подмножеству  $U$ .

Очевидно, всякое подмножество  $S$  метрического пространства  $(X, d)$  само является метрическим пространством с метрикой  $d_S$ , являющейся огранич-

нием метрики  $d$  на подмножество  $S \times S \subset X \times X$ .

Поэтому в качестве примера метрического пространства можно взять любое подмножество на прямой, на плоскости или в пространстве  $\mathcal{E}_n$ .

**Дискретная метрика и дискретная топология.** На произвольном множестве (любой мощности)  $X$  можно ввести метрику условием

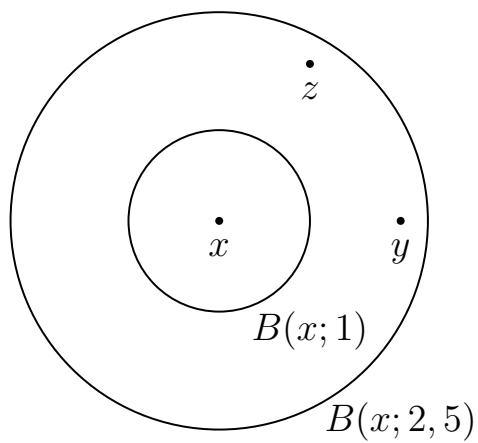
$$d_{dis}(x, y) = 1 \quad \text{для любых } x, y \in X.$$

Такая метрика называется *дискретной*.

На произвольном множестве  $X$  можно ввести топологию  $\tau_{dis}$ , состоящую из всех подмножеств множества  $X$ . Такая топология называется *дискретной*.

В дискретной топологии любое подмножество  $S \subset X$  является открытым, в том числе каждая точка.

Дискретная метрика на  $X$  порождает дискретную топологию на  $X$ . Это следует из того, что всякий открытый шар  $B(x, r)$  радиуса  $r > 1$  совпадает со всем пространством  $X$ , а открытый шар  $B(x, r)$  радиуса  $r \leq 1$  совпадает со своим центром  $x$ .



В метрическом пространстве шар большего радиуса может быть частью

шара меньшего радиуса, если у этих шаров разные центры. Примером такой ситуации может служить пространство, состоящее из трех точек  $x$ ,  $y$  и  $z$  с метрикой

$$d(x, y) = d(x, z) = 5, \quad d(y, z) = 8.$$

В этом пространстве  $B(y, 7) = \{x, y\} \subset \{x, y, z\} = B(x, 6)$ .

В качестве другого примера можно взять открытый круг  $X$  радиуса 6 с центром в начале координат на евклидовой плоскости в качестве метрического пространства. Тогда круг с центром в точке  $(0; 5)$  радиуса 8 будет собственной частью круга  $X$ . Этот круг представляет собой общую часть двух пересекающихся кругов на евклидовой плоскости.

### **Антидискретная топология.**

На любом множестве  $X$  можно ввести топологию, состоящую только из двух множеств  $X$  и  $\emptyset$ . Такая топология называется **антидискретной**.

Очевидно, если  $X$  состоит более чем из одной точки, то не существует такой метрики на  $X$ , которая индуцировала бы антидискретную топологию.

**Определение.** *Если на множестве  $X$  заданы две разные топологии  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и каждое множество из  $\tau_1$  принадлежит одновременно и  $\tau_2$ , то есть  $\tau_1 \subset \tau_2$ , то говорят, что топология  $\tau_1$  слабее топологии  $\tau_2$ , а топология  $\tau_2$  сильнее топологии  $\tau_1$ .*

В ситуации сформулированного определения,

$$f : (X, \tau_1) \rightarrow Y \quad \text{— непрерывно} \quad \Rightarrow \quad f : (X, \tau_2) \rightarrow Y \quad \text{— непрерывно.}$$

Действительно, если  $f^{-1}(U)$  открыто в  $\tau_1$ , то оно открыто и в  $\tau_2$ .

Аналогично,

$$f : Y \rightarrow (X, \tau_2) \text{ — непрерывно} \Rightarrow f : Y \rightarrow (X, \tau_1) \text{ — непрерывно.}$$

В частности, тождественное отображение  $id_X : (X, \tau_2) \rightarrow (X, \tau_1)$  является непрерывным, а обратное тождественное отображение  $id_X : (X, \tau_1) \rightarrow (X, \tau_2)$  непрерывным не является, поскольку, если  $U \in \tau_2$ , но  $U \notin \tau_1$ , то  $id^{-1}(U)$  не является открытым.

Дискретная топология на  $X$  сильнее любой другой топологии на  $X$ , а антидискретная топология слабее любой другой топологии.

**Задача.** На множестве  $(0; 1) \times (0; 1) \subset \mathbb{R}^2$  рассмотрим две топологии: индуцированную топологию  $\tau_1$  и топологию  $\tau_2$ , в которой открытыми множествами являются открытые подмножества в отрезках  $x_0 \times (0; 1)$  и их произвольные объединения. Показать, что  $\tau_2$  сильнее  $\tau_1$ .

**Пример.**

$$X = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots \right\} \subset \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}; \quad Y = X \cup \{0\}.$$

На множестве  $X$  индуцируется дискретная топология, поскольку каждую точку  $(1/2)^n \in X$  можно изолировать в интервале  $((1/2)^n - \varepsilon, (1/2)^n + \varepsilon)$  при  $\varepsilon < (1/2)^{n+1}$ . Любое отображение  $f : X \rightarrow Z$  в произвольное топологическое пространство  $Z$  будет непрерывным.

Пересечение  $Y \cap U$ , где  $U$  — открытый интервал в  $\mathbb{R}$ , содержащий 0, содержит бесконечно много точек множества  $Y$ . Поэтому, если отображение  $f : Y \rightarrow Z$  — непрерывно, то прообраз  $f^{-1}(U)$  открытого множества

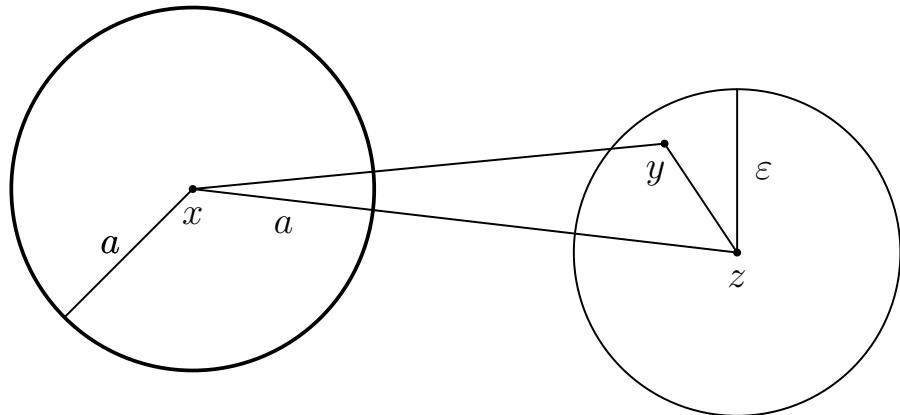
$U \subset Z$ , содержащего  $f(0)$ , будет содержать все члены последовательности  $a_n = (1/2)^n$ , начиная с некоторого.

**Определение.** Подмножество  $W$  в топологическом пространстве  $(X, \tau)$  называется замкнутым, если его дополнение  $W^C = X \setminus W$  открыто.

В метрическом пространстве  $(X, d)$  подмножество

$$B[x, a] = \{y \in X | d(x, y) \leq a\}$$

называется замкнутым шаром радиуса  $a$  с центром в точке  $x$ . Замкнутый шар является замкнутым подмножеством в  $(X, d)$ .



Действительно, пусть  $z \notin B[x, a]$ . Тогда  $d(x, z) > a$ . Пусть  $\varepsilon = \varepsilon(z) < d(x, z) - a$  и, следовательно,  $d(x, z) > a + \varepsilon$ . Для открытого шара  $B(z, \varepsilon)$  имеем:

$$y \in B(z, \varepsilon) \Rightarrow d(y, x) \geq d(x, z) - d(y, z) > d(x, z) - \varepsilon > (a + \varepsilon) - \varepsilon = a.$$

Таким образом,  $B(z, \varepsilon) \subset X \setminus B[x, a]$ . Поэтому

$$X \setminus B[x, a] = \bigcup_{z \in X \setminus B[x, a]} B(z, \varepsilon(z))$$

— открытое множество как объединение открытых множеств.

### Свойства замкнутых множеств.

Имеют место следующие формулы де Моргана для дополнений объединения и пересечения двух подмножеств  $A$  и  $B$  во множестве  $X$ :

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C, \quad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C,$$

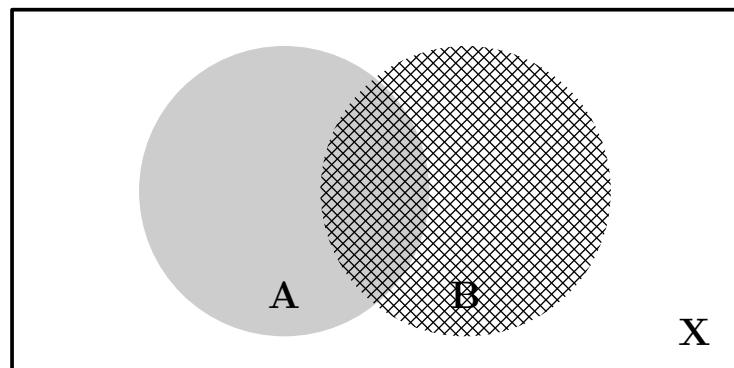
которые легко доказываются. Элемент  $x \in X$  не принадлежит ни  $A$  ни  $B$  тогда и только тогда, когда он принадлежит и дополнению  $A$  и дополнению  $B$ :

$$x \in X \setminus (A \cup B) \iff x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$$

Элемент  $x \in X$  не принадлежит общей части  $A$  и  $B$  тогда и только тогда, когда он не принадлежит хотя бы одному из этих множеств, то есть принадлежит дополнению хотя бы одного из множеств  $A$  и  $B$ :

$$x \in X \setminus (A \cap B) \iff x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$$

Удобно усматривать формулы де Моргана с помощью диаграмм Венна



Аналогично доказываются формулы де Моргана для произвольного семейства  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  подмножеств множества  $X$ :

$$(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha)^C = \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha^C, \quad (\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha)^C = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha^C. \quad (201)$$

**Предложение.** Замкнутые множества обладают следующими свойствами:

1.  $\emptyset$  и  $X$  замкнуты.
2. Если  $U_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , — замкнутые множества, то и  $\bigcup_{i=1}^n U_i$  — замкнутое множество.
3. Для любого семейства  $\{U_\alpha\}$ ,  $\alpha \in A$  замкнутых множеств их пересечение  $\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$  является замкнутым множеством.

**Доказательство.** Эти свойства доказываются применением формул де Моргана (201) к дополнениям замкнутых множеств и использованием свойств открытых множеств (см. с. 216):

1.  $\emptyset$  замкнуто, поскольку  $\emptyset^C = X$  открыто,  $X$  замкнуто, поскольку  $X^C = \emptyset$  открыто.
2.  $\bigcup_{i=1}^n U_i$  — замкнутое множество, поскольку  $(\bigcup_{i=1}^n U_i)^C = \bigcap_{i=1}^n U_i^C$  открыто.
3.  $\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$  — замкнутое множество, поскольку  $(\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha)^C = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha^C$  открыто.  $\square$

Поскольку открытые множества являются дополнениями замкнутых, то топологию на множестве можно задать, определив семейство замкнутых подмножеств как семейство подмножеств, обладающее свойствами, перечисленными в доказанном выше предложении.

При этом отображение  $f : X \rightarrow Y$  будет непрерывным тогда и только

тогда, когда прообраз  $f^{-1}(A)$  всякого замкнутого множества  $A \subset Y$  будет замкнут в  $X$ .

**Определение.** Внутренностью подмножества  $A \subset X$  в топологическом пространстве  $(X, \tau)$  называется наибольшее (по включению) открытое множество  $U \in \tau$ , содержащееся в  $A$ .

Для обозначения внутренности (*interior*) множества  $A$  будем использовать обозначения  $\text{int}(A)$  и  $\overset{\circ}{A}$ .

Наибольшее открытое множество, содержащееся в  $A$ , содержит в себе любое другое открытое множество, содержащееся в  $A$ , поэтому

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{U \in \tau, U \subset A} U.$$

Открытое множество  $U$ , содержащее данную точку  $x \in X$ , называется открытой окрестностью точки  $x$ . Для обозначения открытой окрестности точки  $x$  будем использовать обозначение  $U_x$ .

**Замечание.** Окрестностью точки  $x \in X$  называют подмножество  $V$ , содержащее некоторую открытую окрестность  $U_x$  точки  $x$ . В дальнейшем будем использовать только открытые окрестности и для краткости будем называть их просто окрестностями.

Очевидно, для того, чтобы точка  $x \in A$  принадлежала внутренности подмножества  $A$ , необходимо и достаточно, чтобы вместе с точкой  $x$  в  $A$  содержалась некоторая окрестность точки  $x$ :  $U_x \subset A$ .

Действительно, если  $x \in \overset{\circ}{A}$ , то  $\overset{\circ}{A}$  и является требуемой окрестностью. С другой стороны, если  $A \supset U_x$ , то  $\overset{\circ}{A} \supset U_x \ni x$ , поскольку  $\overset{\circ}{A}$  — наибольшее открытое множество, содержащееся в  $A$ .

Точка  $x \in A$ , принадлежащая внутренности  $\overset{\circ}{A}$  подмножества  $A$ , называется *внутренней точкой* этого множества.

Если  $A \subset (X, d)$  — подмножество в метрическом пространстве (в частности,  $A \subset \overset{\circ}{\mathcal{E}_n}$ ), то  $x \in \overset{\circ}{A}$  тогда и только тогда, когда в  $A$  содержится некоторый открытый шар с центром в точке  $x$ .

### **Свойства операции взятия внутренности.**

1. Подмножество  $A$  открыто тогда и только тогда, когда  $\overset{\circ}{A} = A$ .
2.  $\text{int}(A \cup B) \supset \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$ ,
3.  $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$ .

Доказательства вытекают из следующего очевидного свойства внутренности подмножества:

$$A \subset B \implies \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}.$$

Они остаются в качестве упражнений, могут встретиться в экзаменационных билетах.

Приведем примеры, когда в свойстве 2 включение строгое ( $\subsetneq$ ).

1.  $A = [-1; 0] \subset \mathbb{R}$ ,  $B = [0; 1] \subset \mathbb{R}$ . Точка  $0 \in \mathbb{R}$  принадлежит внутренности объединения, но не принадлежит внутренности ни одного из множеств  $A$  и  $B$ .
2.  $X = \mathbb{R}$ ,  $A = \mathbb{Q}$  — подмножество рациональных чисел,  $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  — подмножество иррациональных чисел. В этом случае  $\text{int}(A) = \emptyset$ ,  $\text{int}(B) = \emptyset$ , а  $\text{int}(A \cup B) = \mathbb{R} = X$ .

Следующее определение двойственno определению внутренности множества.

**Определение.** Замыканием подмножества  $A \subset X$  в топологическом пространстве  $(X, \tau)$  называется наименьшее (по включению) замкнутое множество  $U$  пространства  $X$ , содержащее подмножество  $A$ .

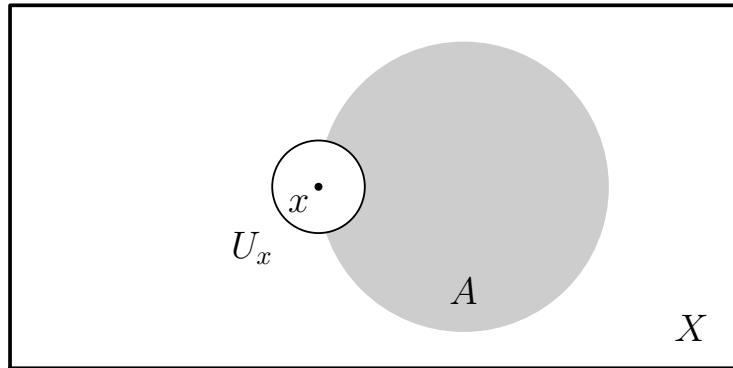
Для обозначения замыкания (*closure*) множества  $A$  будем использовать обозначения  $cl(A)$  и  $\overline{A}$ .

Наименьшее замкнутое множество, содержащее  $A$ , содержится в любом другом замкнутом множестве, содержащем  $A$ , поэтому

$$\overline{A} = \bigcap_{W \supset A, W^C \in \tau} W.$$

**Предложение.** Точка  $x$  принадлежит замыканию множества  $A$  тогда и только тогда, когда всякая открытая окрестность  $U_x$  точки  $x$  имеет непустое пересечение с  $A$ :

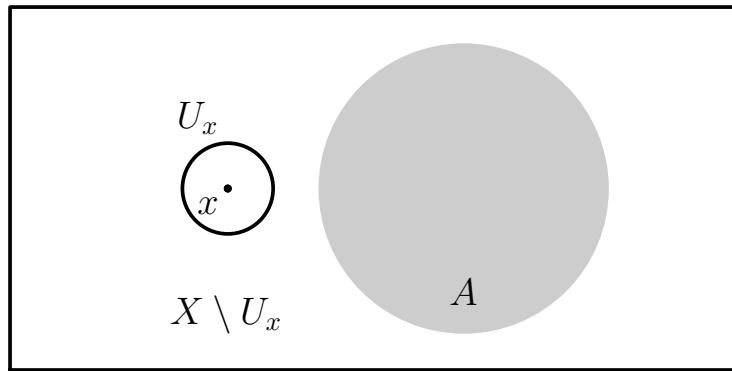
$$x \in \overline{A} \iff U_x \cap A \neq \emptyset \text{ для любой } U_x.$$



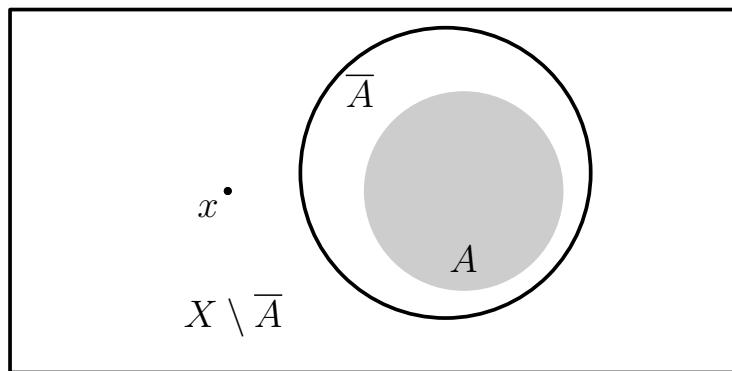
Точка  $x \in X$ , любая открытая окрестность  $U_x$  которой пересекается с подмножеством  $A$ , называется точкой прикосновения подмножества  $A$ .

**Доказательство предложения.**

" $\Rightarrow$ " Предположим, что  $x \in \overline{A}$  и существует окрестность  $U_x$ , такая что  $U \cap A = \emptyset$ . Но тогда  $A \subset X \setminus U_x$ . Поскольку  $X \setminus U_x$  — замкнутое множество, то  $\overline{A} \subset X \setminus U_x$  и, следовательно,  $\overline{A} \not\ni x$ . Противоречие.



" $\Leftarrow$ " Пусть теперь  $U_x \cap A \neq \emptyset$  для любой открытой окрестности  $U_x$ . Предположив, что  $x \notin \overline{A}$ , получим противоречие, поскольку в этом случае  $X \setminus \overline{A}$  будет открытой окрестностью точки  $x$ , имеющей пустое пересечение с  $A$ .  $\square$



### Свойства операции замыкания.

1. Подмножество  $A$  замкнуто тогда и только тогда, когда  $\overline{A} = A$ .
2.  $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ,

$$3. \overline{(A \cap B)} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Доказательства вытекают из следующего очевидного свойства операции замыкания подмножества:

$$A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}.$$

Они остаются в качестве упражнений, могут встретиться в экзаменационных билетах.

Приведем примеры, когда в свойстве 3 включение строгое ( $\subsetneq$ ).

1.  $A = (-1; 0) \subset \mathbb{R}$ ,  $B = (0; 1) \subset \mathbb{R}$ . Точка  $0 \in \mathbb{R}$  принадлежит пересечению замыканий, но не принадлежит замыканию пересечения, поскольку пересечение  $A \cap B$  в этом случае само является пустым множеством.

2.  $X = \mathbb{R}$ ,  $A = \mathbb{Q}$  — подмножество рациональных чисел,  $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  — подмножество иррациональных чисел. В этом случае  $cl(A) = \mathbb{R}$ ,  $cl(B) = \mathbb{R}$ , а  $cl(A \cap B) = \emptyset$ , поскольку пересечение  $A \cap B$  само является пустым множеством.

**Определение.** Границей подмножества  $A \subset X$  называется пересечение

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^C}$$

замыканий множества  $A$  и его дополнения  $A^C$ .

В евклидовом пространстве границей как открытого шара  $B(x_0, r) = \{x \in \mathcal{E}_n | dist(x_0, x) < r\}$ , так и замкнутого  $B[x_0, r] = \{x \in \mathcal{E}_n | dist(x_0, x) \leq r\}$  является сфера  $S(x_0, r) = \{x \in \mathcal{E}_n | dist(x_0, x) = r\}$ .

**Замечание.** В произвольном метрическом пространстве  $(X, d)$  замыкание  $cl(B(x_0, r))$  открытого шара  $B(x_0, r)$  может не совпадать с замкнутым шаром

$B[x_0, r]$ . Простым примером является дискретная метрика на произвольном множестве  $X$ :  $d(x, y) = 1$  для любых  $x, y \in X$ . Открытый шар  $B(x_0, 1)$  радиуса 1 состоит из одного центра:  $B(x_0, 1) = \{x_0\}$  и является одновременно и замкнутым множеством. Поэтому  $cl(B(x_0, 1)) = \{x_0\}$ . Замкнутый же шар  $B[x_0, 1]$  совпадает со всем пространством  $X$ .

Поскольку множество и его дополнение «симметричны» по отношению к операции взятия дополнения:

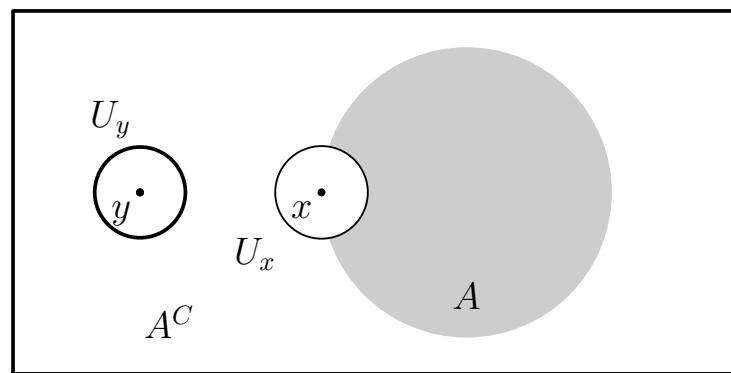
$$B = A^C \iff A = B^C \iff (A^C)^C = A,$$

то границы множества и его дополнения совпадают:

$$\partial A = \partial A^C.$$

Поскольку для точки  $x \in X$  и подмножества  $A \subset X$  имеются две взаимоисключающие возможности: либо  $U_x \cap A \neq \emptyset$  для любой открытой окрестности  $U_x$  точки  $x$ , либо существует открытая окрестность  $U_x$ , такая что  $U_x \cap A = \emptyset$ , то есть  $U_x \subset A^C$ , то

для любой точки  $x \in X$ : либо  $x \in \overline{A}$ , либо  $x \in int(A^C)$ .



Меняя  $A$  и  $A^C$  местами, получим:

$$\text{для любой точки } x \in X: \quad \text{либо } x \in \overline{A^C}, \quad \text{либо } x \in \overset{\circ}{A}.$$

Вышеуказанные соотношения эквивалентны тому, что дополнение внутренности совпадает с замыканием дополнения:

$$(\overset{\circ}{A})^C = \overline{A^C} \iff (int(A^C))^C = \overline{A} \iff int(A^C) = (\overline{A})^C.$$

Отсюда следует, что *граница подмножества состоит из точек замыкания этого множества, не входящих в его внутренность*:

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^C} = \overline{A} \cap (\overset{\circ}{A})^C = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}. \quad (202)$$

Чтобы получить замыкание множества, надо добавить к этому множеству (недостающие) точки его границы. Действительно, поскольку  $\overline{A} \supset A \supset \overset{\circ}{A}$ , то из (202) следует, что

$$\overline{A} = \overset{\circ}{A} \cup \partial A \implies \overline{A} = A \cup \partial A. \quad (203)$$

Чтобы получить внутренность множества, надо из этого множества удалить (входящие в него) точки его границы. Действительно, поскольку  $\partial A \cap \overset{\circ}{A} = \emptyset$ , то из (202) следует, что

$$\overset{\circ}{A} = \overline{A} \setminus \partial A \implies \overset{\circ}{A} = A \setminus \partial A.$$

Эти же соотношения можно доказать и формально:

$$\overline{A} = \overline{A} \cap X = \overline{A} \cap (A \cup A^C) = \overline{A} \cap (A \cup \overline{A^C}) = (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap \overline{A^C}) = A \cup \partial A.$$

$$\overset{\circ}{A} = A \setminus \overline{A^C} = A \setminus (A^C \cup \partial A^C) = (A \setminus A^C) \setminus \partial A^C = A \setminus \partial A^C.$$

Отметим еще одну характеристику границы. Для точки  $x \in X$  и подмножества  $A \subset X$  имеются три взаимоисключающие возможности:

- 1) существует окрестность  $U_x \ni x$ , целиком содержащаяся в  $A$ ,
- 2) существует окрестность  $U_x \ni x$ , целиком содержащаяся в  $A^C$ ,
- 3) всякая окрестность имеет непустые пересечения и с  $A$  и с  $A^C$ .

Поэтому имеет место **дизъюнктное** объединение

$$X = \text{int}(A) \cup \text{int}(A^C) \cup \partial A,$$

и граница  $\partial A$  отделяет внутренние точки множества  $A$  от внутренних точек множества  $A^C$ .

Рассмотрим в качестве **примера** подмножество  $\mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$  плоскости, состоящее из точек с рациональными координатами. Очевидно,

$$\text{int}(\mathbb{Q}^2) = \emptyset, \quad \text{int}(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2) = \emptyset, \quad \overline{\mathbb{Q}^2} = \mathbb{R}^2 \implies \partial \mathbb{Q}^2 = \mathbb{R}^2.$$

**Определение.** Подмножество  $A \subset X$  в топологическом пространстве  $X$  называется *всюду плотным*, если  $\overline{A} = X$ .

Это эквивалентно тому, что любая открытая окрестность  $U_x$  любой точки  $x \in X$  содержит точки из  $A$ .

**Определение.** Топологическое пространство  $X$  называется *сепарабельным*, если оно содержит счетное всюду плотное подмножество.

Евклидово пространство  $\mathcal{E}_n$  является сепарабельным. Счетным всюду плотным подмножеством в нем является, например, множество точек, координаты которых по отношению к некоторому ортонормированному реперу являются рациональными числами. Действительно, любой открытый шар  $B(x, \varepsilon)$  с

центром в точке  $x \in \mathcal{E}_n$  содержит бесконечно много точек с рациональными координатами.

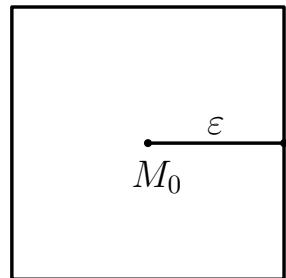
### **База и предбаза топологии.**

**Определение.** *Базой в топологическом пространстве  $(X, \tau)$  называется семейство открытых множеств  $\beta \subset \tau$ , такое что любое непустое открытое множество  $U \in \tau$  может быть представлено в виде объединения множеств из  $\beta$ .*

В евклидовом пространстве  $\mathcal{E}_n$  в качестве базы можно взять, например, множество всех открытых шаров. Именно с помощью этой базы мы и вводили топологию в  $\mathcal{E}_n$ .

Другой базой является множество всех открытых кубов

$$C(M_0, 2\varepsilon) = \{M(x^i) \in \mathcal{E}_n : |x^i - x_0^i| < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0. \quad (204)$$



Базой топологии  $\tau$ , очевидно, является и сама топология  $\tau$ . Однако, в качестве базы удобно рассматривать как можно «меньшие» семейства открытых подмножеств.

Например, в евклидовом пространстве  $\mathcal{E}_n$  семейство открытых шаров, у которых координаты центра и радиус являются рациональными числами, представляет собой счетную базу (базу, состоящую из счетного множества открытых множеств).

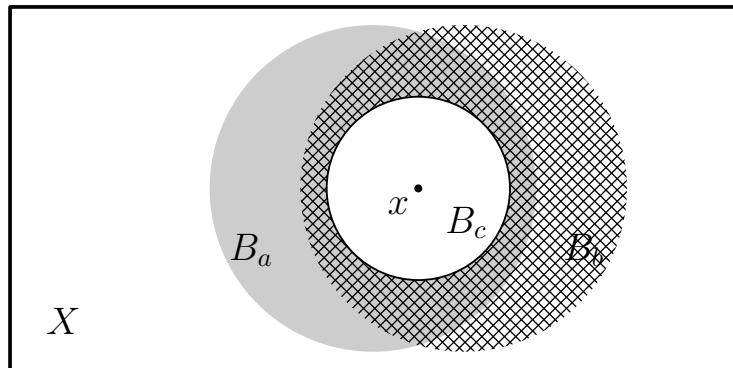
Пространства, имеющие счетную базу, называют также пространствами, удовлетворяющими второй аксиоме счетности.

Другой счетной базой в  $\mathcal{E}_n$  является семейство открытых кубов, у которых координаты центра и длина ребра являются рациональными числами.

Базу удобно использовать для доказательства того, что некоторое подмножество  $A \subset X$  является открытым. А именно, подмножество  $A \subset X$  открыто тогда и только тогда, когда для каждой точки  $x \in A$  найдется подмножество  $U_x$  из базы, содержащее  $x$  и содержащееся в  $A$ :  $x \in U_x \subset A$ .

**Предложение (о задании топологии посредством базы).** Семейство  $\beta = \{B_a\}_{a \in A}$  подмножеств множества  $X$  является базой некоторой топологии  $\tau$  на  $X$  тогда и только тогда, когда

- 1)  $X = \bigcup_{a \in A} B_a$ ,
- 2) для любых  $B_a$  и  $B_b$  из  $\beta$ , таких что  $B_a \cap B_b \neq \emptyset$ , и для любой точки  $x \in B_a \cap B_b$  существует  $B_c \in \beta$ , такое что  $x \in B_c \subset B_a \cap B_b$ .



**Доказательство.**

" $\Rightarrow$ " Если семейство  $\beta = \{B_a\}_{a \in A}$  является базой топологии  $\tau$  пространст-

ва  $(X, \tau)$ , то, очевидно, оба условия предложения выполняются: пересечение  $B_a \cap B_b \neq \emptyset$  является открытым, поэтому оно является объединением некоторого семейства открытых множеств из базы, но тогда одно из этих множеств содержит данную точку  $x \in B_a \cap B_b$ .

" $\Leftarrow$ " По определению базы, любое открытое множество из топологии должно быть объединением некоторой совокупности множеств из  $\beta = \{B_a\}_{a \in A}$ . Пусть  $\tau$  — семейство подмножеств, состоящее из пустого множества и всех подмножеств, которые можно получить, объединяя подмножества из  $\beta$ . Покажем, что  $\tau$  — топология.

Очевидно, множество  $X$  принадлежит  $\tau$ , а объединение  $\bigcup_{i \in I} U_i$  любого семейства подмножеств  $\{U_i\}_{i \in I}$  из  $\tau$  можно получить, объединяя все те подмножества из  $\beta$ , объединения которых по отдельности дают множества  $\{U_i\}_{i \in I}$ , поэтому  $\bigcup_{i \in I} U_i$  принадлежит  $\tau$ .

Если теперь  $U, U'$  — любые два подмножества из  $\tau$  и  $U \cap U' \neq \emptyset$ , то для любой точки  $x \in U \cap U'$  существуют подмножества  $W_x$  и  $W'_x$  из  $\beta$ , такие что  $x \in W_x \subset U$  и  $x \in W'_x \subset U'$ . Но тогда, по второму условию, существует подмножество  $V_x \in \beta$ , такое что  $x \in V_x \subset W_x \cap W'_x$ , и поэтому

$$U \cap U' = \bigcup_{x \in U \cap U'} V_x \in \tau. \quad \square$$

**Определение.** Предбазой в топологическом пространстве  $(X, \tau)$  (или системой образующих топологии  $\tau$ ) называется семейство открытых множеств  $\gamma \subset \tau$ , всевозможные конечные пересечения которых (т. е. пересечения конечного числа таких подмножеств) образуют базу топологии  $\tau$ .

**Предложение.** Любое семейство  $\gamma = \{U_i\}_{i \in I}$  подмножеств множества  $X$ ,

такое что  $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ , является предбазой некоторой топологии  $\tau$  на  $X$ .

**Доказательство.**

Действительно, пусть семейство  $\beta$  получено из семейства  $\gamma$  добавлением к  $\gamma$  всех подмножеств, представимых как конечные пересечения  $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , подмножеств из  $\gamma$ , а семейство  $\tau$  получено из  $\beta$  добавлением к  $\beta$  всех подмножеств, которые представимы как объединения подмножеств из  $\beta$ . Тогда семейство  $\tau$  будет являться слабейшей топологией на  $X$ , в которой все множества из  $\gamma$  являются открытыми.  $\square$

**Пример.** Примем за предбазу топологии  $\tau$  плоскости  $\mathbb{R}^2$  семейство всех прямых линий. Поскольку всякую точку плоскости можно получить как пересечение двух прямых, то все точки (как подмножества) являются открытыми в  $\tau$ . Следовательно,  $\tau$  — дискретная топология.

**Примеры топологий.**

**1. Топология конечных дополнений (топология Зарисского (Zariski)).** На произвольном непустом множестве  $X$  можно ввести топологию, состоящую из  $X$ ,  $\emptyset$  и всех подмножеств  $U$ , имеющих конечное дополнение ( $X \setminus U$  состоит из конечного числа точек). Выполнение аксиом топологии следует из формулы Моргана (201).



Очевидно, всякое открытое множество в топологии Зарисского на  $\mathbb{R}$  является объединением конечного числа открытых интервалов, поэтому топология Зарисского на  $\mathbb{R}$  слабее стандартной топологии.

**2. Топология Зоргенфрея.** На множестве  $\mathbb{R}$  можно ввести топологию, в которой базой является семейство всех конечных полуоткрытых интервалов  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ .



В этой топологии интервалы  $(-\infty, a)$  и  $[b, \infty)$  открыты, поскольку могут быть представлены как (бесконечные) объединения полуоткрытых интервалов

$$(-\infty, a) = \bigcup_{-\infty < c < a} [c, a) \quad \text{и} \quad [b, \infty) = \bigcup_{b < d < \infty} [b, d)$$

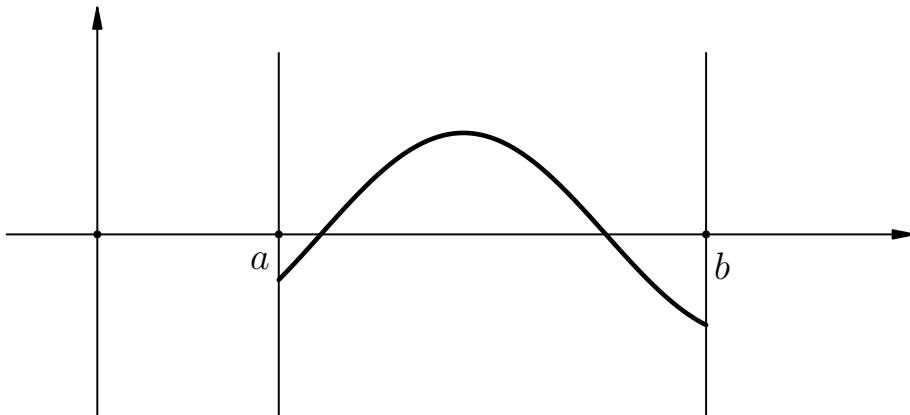
соответственно. Поэтому их дополнение — интервал  $[a, b]$  является замкнутым множеством (открытым и замкнутым одновременно).

Поскольку всякий открытый интервал  $(a, b)$  является открытым множеством в топологии Зоргенфрея:

$$(a, b) = \bigcup_{a < c < b} [c, b),$$

то топология Зоргенфрея сильнее стандартной топологии на  $\mathbb{R}$ .

**3. Пространство  $C[a, b]$  непрерывных функций на отрезке  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ .**

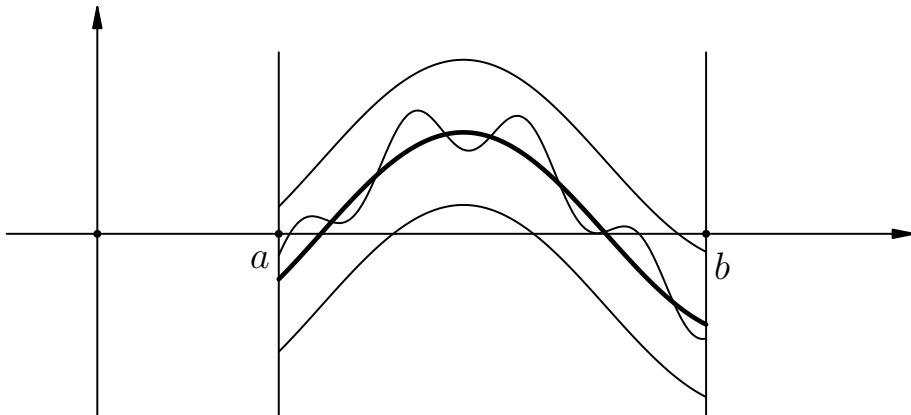


На множестве  $C[a, b]$  можно ввести метрику

$$d(f(x), g(x)) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

и порождаемую этой метрикой топологию. Открытый шар радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $f(x)$  в этой метрике представляет собой множество непрерывных функций  $\alpha(x)$  на  $[a, b]$ , удовлетворяющих соотношению

$$f(x) - \varepsilon < \alpha(x) < f(x) + \varepsilon.$$



Пространство  $C[a, b]$  является одновременно и векторным пространством. В нем имеется подмножество  $P[a, b]$  (и линейное подпространство), состоящее из функций, задаваемых многочленами.

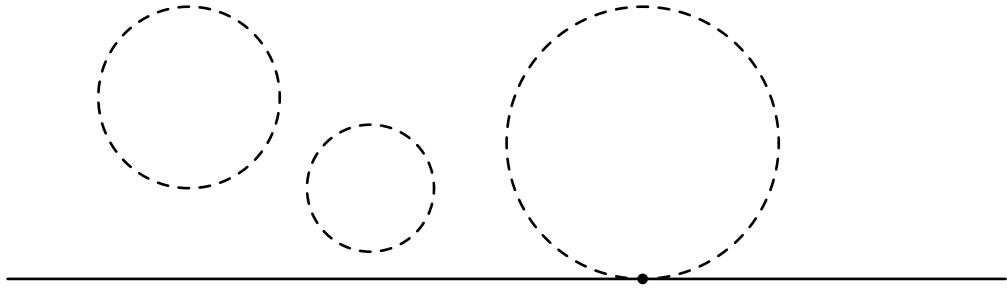
**Теорема Вейерштрасса** утверждает, что замыкание множества  $P[a, b]$  совпадает со всем пространством  $C[a, b]$ . Это означает, что в любом открытом шаре  $B(f(x), \varepsilon)$  всегда найдется многочлен.

#### 4. Топология Немыцкого. На верхней полуплоскости

$$\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \mid y \geq 0\}$$

можно ввести топологию, в которой базой является семейство всех открытых

кругов  $B((x, y), \varepsilon)$  при  $\varepsilon < y$  и открытых кругов  $B((x, y), \varepsilon)$  при  $\varepsilon = y$ , дополненных точкой касания  $(x, 0)$ :  $B((x, \varepsilon), \varepsilon) \cup (x, 0)$ .



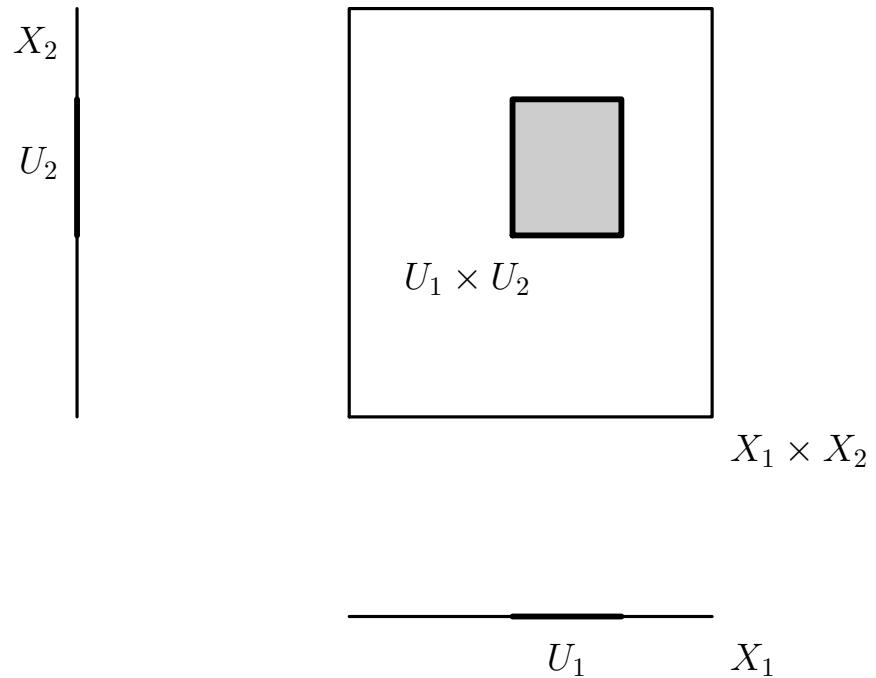
Прямая  $A = \{(x, y) \mid y = 0\} \subset \mathbb{R}_+^2$  является замкнутым подмножеством плоскости Немыцкого. Индуцированная на этой прямой топология является дискретной: каждая точка  $(a, 0)$  является пересечением множества  $A$  с открытым множеством  $B((a, b), b) \cup (a, 0)$ .

### **Произведение топологических пространств.**

Пусть  $(X_1, \tau_1)$  и  $(X_2, \tau_2)$  — два топологических пространства. На произведении множеств  $X_1 \times X_2$  можно ввести топологию  $\tau_1 \times \tau_2$ , базой которой является семейство

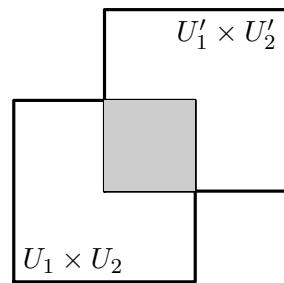
$$\beta = \{U_1 \times U_2 \mid U_1 \in \tau_1, U_2 \in \tau_2\} \quad (205)$$

всевозможных произведений открытых множеств из  $(X_1, \tau_1)$  и  $(X_2, \tau_2)$ .



В том, что (205) действительно является базой некоторой топологии на  $X_1 \times X_2$ , нетрудно убедиться. Действительно, если  $U_1 \times U_2$  и  $U'_1 \times U'_2$  два подмножества из  $\beta$ , то

$$(U_1 \times U_2) \cap (U'_1 \times U'_2) = (U_1 \cap U'_1) \times (U_2 \cap U'_2).$$



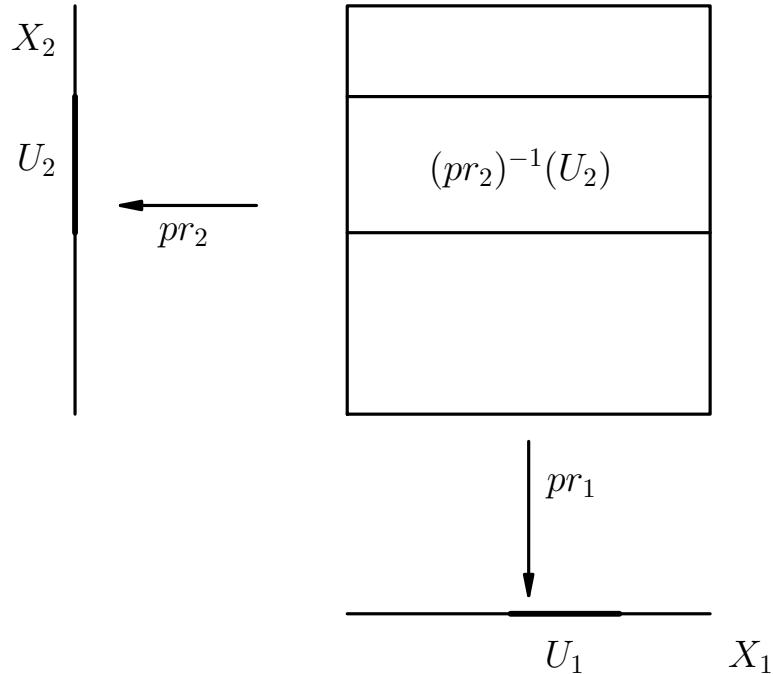
Имеются естественные проекции произведения  $X_1 \times X_2$  на сомножители

$$pr_1 : X_1 \times X_2 \ni (x_1, x_2) \mapsto x_1 \in X_1, \quad pr_2 : X_1 \times X_2 \ni (x_1, x_2) \mapsto x_2 \in X_2.$$
(206)

Проекции (206) являются непрерывными отображениями. Действительно,

$$U_1 \in \tau_1 \Rightarrow (pr_1)^{-1}(U_1) = U_1 \times X_2 \in \beta \subset \tau_1 \times \tau_2,$$

$$U_2 \in \tau_2 \Rightarrow (pr_2)^{-1}(U_2) = X_1 \times U_2 \in \beta \subset \tau_1 \times \tau_2.$$



### Фактортопология.

Пусть на топологическом пространстве  $(X, \tau)$  задано отношение эквивалентности  $\sim$  и  $Y = X/\sim$  — фактормножество, а  $g : X \rightarrow Y$  — каноническое отображение, относящее элементу  $x \in X$  его класс эквивалентности  $[x] \in Y$ . Фактортопологией на множестве  $Y$  называется топология  $\tau_Y$ , состоящая из подмножеств, прообразы которых относительно канонического отображения открыты в пространстве  $X$ :

$$\tau_Y = \{U \subset Y \mid g^{-1}(U) \in \tau_X\}.$$

Проверка аксиом топологии для семейства  $\tau_Y$  не представляет труда. Действительно:

$g^{-1}(Y) = X \in \tau_X$ , поэтому  $Y \in \tau_Y$ .

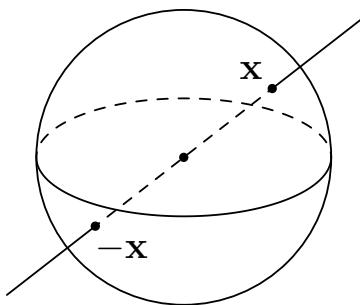
$g^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ , поэтому  $\emptyset \in \tau_Y$ .

Пусть  $U_i \in \tau_Y$ ,  $i \in I$ . Тогда  $g^{-1}(\bigcup_{i \in I} U_i) = \bigcup_{i \in I} g^{-1}(U_i)$ , поэтому  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau_Y$ .

Пусть  $U_1, U_2 \in \tau_Y$ . Тогда  $g^{-1}(U_1 \cap U_2) = g^{-1}(U_1) \cap g^{-1}(U_2)$ , поэтому  $(U_1 \cap U_2) \in \tau_Y$ .

### Примеры.

1. Сфера  $\mathbb{S}^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{x}^2 = 1\}$  — топологическое пространство с топологией, индуцированной из евклидова пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Отношение эквивалентности  $\sim$  на множестве  $\mathbb{S}^n$ , определенное условием  $\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \pm \mathbf{y}$ , приводит к проективному пространству  $\mathbb{P}_n = \mathbb{S}^n / \sim$ . Топология проективного пространства является фактортопологией. Множество  $U \subset \mathbb{P}_n$  является открытым, если его прообраз при проекции  $p : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}_n = \mathbb{S}^n / \sim$  является открытым подмножеством сферы.



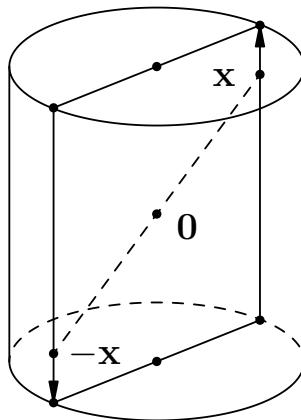
$$\mathbb{S}^n / \{\mathbf{x} \sim \pm \mathbf{x}\}$$

Проективное пространство может быть также определено как факторпространство  $\mathbb{P}_n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} / \sim$ , где  $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$  тогда и только тогда, когда  $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$  для некоторого  $\lambda \in \mathbf{R}$ .

**2.** Определим прямой круговой цилиндр  $Cyl$  как подпространство в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ , заданное соотношениями

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1, \quad -1 \leq x^3 \leq 1,$$

либо как произведение топологических пространств  $Cyl = \mathbb{S}^1 \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ .

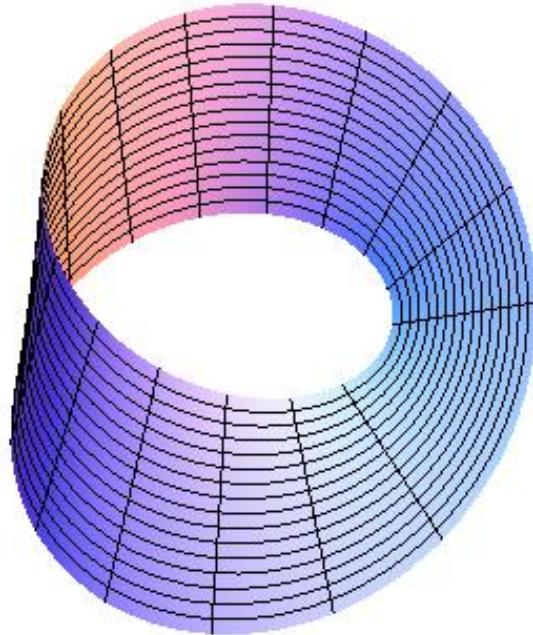


$$(\mathbb{S}^1 \times [-1, 1]) / \{x \sim \pm x\}$$

Отношение эквивалентности  $\sim$  на множестве точек цилиндра  $Cyl$ , определенное условием  $x \sim y \Leftrightarrow x = \pm y$ , приводит к факторпространству, называемому *листом Мёбиуса*.

Наглядно представить получение листа Мёбиуса из цилиндра можно таким образом: будем перемещать образующую цилиндра вдоль цилиндра при движении вдоль направляющей окружности цилиндра, начиная с некоторой точки  $M_1$  направляющей, пока не дойдем до диаметрально противоположной точки окружности — точки  $M_2$ . При этом будет иметь место взаимно однозначное соответствие между точками цилиндра и листа Мёбиуса. При достижении точки  $M_2$  перевернем образующую прямую и «склеим» ее с образующей, про-

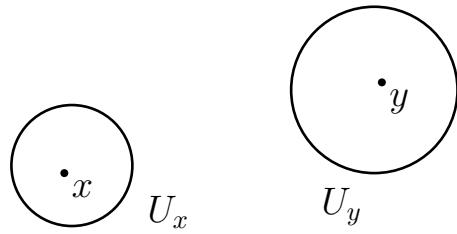
ходящей через точку  $M_1$ . При дальнейшем движении вдоль цилиндра будет происходить отображение второй половины цилиндра на лист Мёбиуса.



### Отделимость в топологических пространствах.

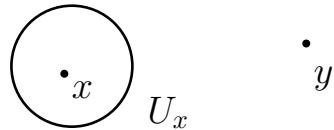
Если  $x$  и  $y$  — две точки метрического пространства  $(X, d)$  и  $2\varepsilon = d(x, y)$ , то открытые шары  $B(x, \varepsilon)$  и  $B(y, \varepsilon)$  не пересекаются.

**Определение.** Топологическое пространство  $(X, \tau)$  называется хаусдорфовым (а также отделенным или  $T_2$ -пространством), если у любых двух его точек  $x$  и  $y$  найдутся открытые окрестности  $U_x$  и  $U_y$ , такие что  $U_x \cap U_y = \emptyset$ .

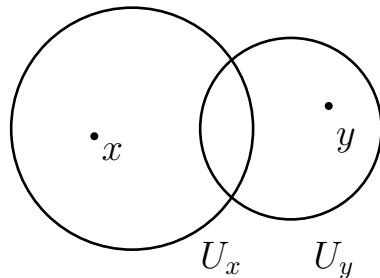


Имеется серия условий отделимости  $T_k$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ . Перечислим их.

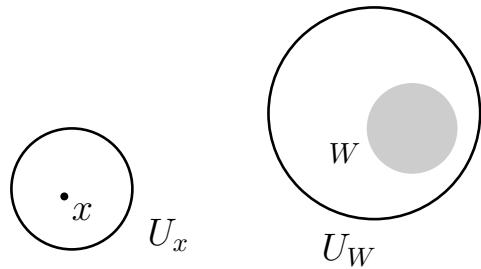
**Определение.** Топологическое пространство  $(X, \tau)$  называется  $T_0$ -пространством (или колмогоровским), если для любых двух его точек  $x$  и  $y$  найдется открытая окрестность одной из них, не содержащая другую.



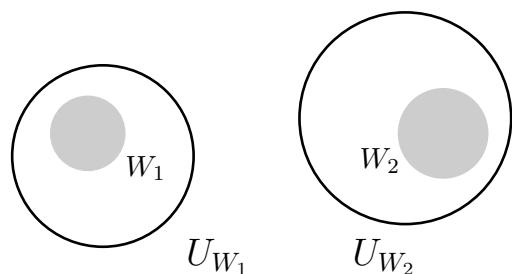
Топологическое пространство  $(X, \tau)$  называется  $T_1$ -пространством (или достижимым), если у любых двух его точек  $x$  и  $y$  найдутся открытые окрестности  $U_x$  и  $U_y$ , такие что  $y \notin U_x$ ,  $x \notin U_y$ .



Топологическое пространство  $(X, \tau)$  называется  $T_3$ -пространством (или регулярным), если оно является  $T_1$ -пространством и для любого замкнутого множества  $W$  и любой точки  $x \notin W$  найдутся открытые множества  $U_x \ni x$  и  $U_W \supset W$ , такие что  $U_x \cap U_W = \emptyset$ .



*Топологическое пространство  $(X, \tau)$  называется  $T_4$ -пространством (или нормальным), если оно является  $T_1$ -пространством и для любых непересекающихся замкнутых множеств  $W_1$  и  $W_2$  найдутся открытые множества  $U_{W_1} \supset W_1$  и  $U_{W_2} \supset W_2$ , такие что  $U_{W_1} \cap U_{W_2} = \emptyset$ .*



**Свойства пространств, удовлетворяющих условиям отделимости, и примеры.**

1. *Топологическое пространство  $(X, \tau)$  является  $T_1$ -пространством тогда и только тогда, когда всякая точка  $x \in X$  является замкнутым множеством.*

Действительно, если  $(X, \tau)$  —  $T_1$ -пространство и  $x_0 \in X$ , а  $U_x \ni x$  — открытая окрестность точки  $x \in X$ ,  $U_x \not\ni x_0$ , то

$$\bigcup_{x \in X, x \neq x_0} U_x = X \setminus x_0$$

— открытое множество.

Обратно, если точка  $x_0 \in X$  — замкнутое множество, то  $X \setminus x_0$  — открытая окрестность всякой точки  $x \neq x_0$ , не содержащая  $x_0$ . Поэтому для любых

$x, y \in X$ , таких что  $x \neq y$ , можно указать открытые множества  $X \setminus \{y\} \ni x$  и  $X \setminus \{x\} \ni y$ .  $\square$

2. Из доказанного свойства следует, что всякое  $T_k$ -пространство является и  $T_\ell$ -пространством при  $\ell < k$ .

3. Всякое подпространство  $S$  хаусдорфова пространства  $(X, \tau)$  является хаусдорфовым пространством.

Действительно, если  $x$  и  $y$  — точки из  $S$ , а  $U_x$  и  $U_y$  — открытые окрестности точек  $x$  и  $y$  в топологии  $\tau$ , такие что  $U_x \cap U_y = \emptyset$ , то  $U_x \cap S$  и  $U_y \cap S$  — открытые окрестности точек  $x$  и  $y$  в топологии  $\tau_S$ , индуцированной на  $S$ , такие что  $(U_x \cap S) \cap (U_y \cap S) = \emptyset$ .  $\square$

Таким образом, евклидовы пространства и подмножества в них, в частности, поверхности, хаусдорфовы.

4. Неотделимость точек можно представлять как их «слипаемость». В антидискретном пространстве все точки слипшииеся и ни одна не может быть отделена от других.

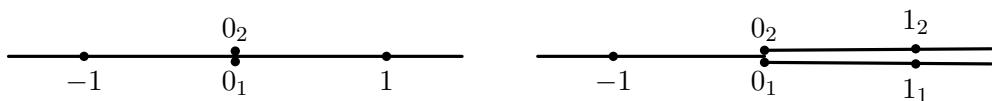
5. В дискретном пространстве каждая точка является открытым множеством, всякое подмножество является одновременно и открытым и замкнутым, поэтому все вышеперечисленные требования отделимости выполняются.

6. Примером  $T_0$ -пространства, не являющегося  $T_1$ -пространством, является так называемое *связное двоеточие*:  $X = \{a, b\}$  с топологией, состоящей из множеств  $\{a, b\}$ ,  $\{b\}$  и  $\emptyset$ . Точка  $b$  отделима от точки  $a$ , а точка  $a$  не отделима от точки  $b$ .

7. Примеры нехаусдорфовых  $T_1$ -пространств.

Возьмем дизъюнктное объединение двух экземпляров числовой прямой  $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$  с топологией, которая является объединением топологий, и введем на этом пространстве отношение эквивалентности  $\sim$ , при котором каждое число первой прямой эквивалентно этому же числу второй прямой, за исключением нулей. Пространство  $X = \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}/\sim$  — числовая прямая с двумя разными нулями  $0_1$  и  $0_2$ , которые нельзя заключить в непересекающиеся открытые окрестности, но каждый из нулей может быть отделен от другого открытым множеством:  $X \setminus \{0_2\}$  — открыто и содержит  $0_1$ , а  $X \setminus \{0_1\}$  — открыто и содержит  $0_2$ . Открытым является и любой интервал  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ , содержащий один из нулей и не содержащий другой.

Аналогично, нехаусдорфовым пространством является факторпространство  $X = \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}/\sim$  по отношению эквивалентности  $\sim$ , при котором эквивалентны одинаковые отрицательные числа топологических слагаемых, а нули и положительные числа не эквивалентны. И в этом случае нули  $0_1$  и  $0_2$  нельзя заключить в непересекающиеся открытые окрестности.



Нехаусдорфовым  $T_1$ -пространством является также любое бесконечное множество  $X$  с топологией Зарисского конечных дополнений: дополнения к точкам  $x$  и  $y$  разделяют эти точки, но любые их окрестности содержат бесконечно много общих точек.

8. Всякое метрическое пространство  $(X, d)$  является регулярным топологическим пространством.

Действительно, пусть  $W$  — замкнутое подмножество в  $(X, d)$  и  $x \notin W$ . В метрическом пространстве расстояние  $d(x, S)$  от  $x$  до произвольного подмножества  $S \subset X$  определяется формулой

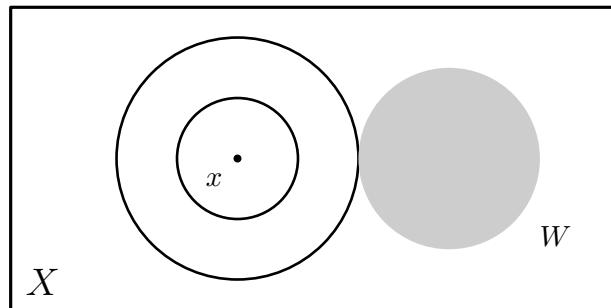
$$d(x, S) = \inf_{y \in S} d(x, y).$$

Если  $W$  — замкнутое подмножество и  $x \notin W$ , то расстояние от  $x$  до  $W$  больше нуля:  $d(x, W) = 2\varepsilon > 0$ . Действительно, в противном случае в любом открытом шаре с центром в точке  $x$  будут содержаться точки множества  $W$ , откуда следует, что  $x \in \overline{W} = W$ .

Но тогда открытые множества

$$B(x, \varepsilon) \ni x \quad \text{и} \quad U = \{y \in X \mid d(x, y) > \varepsilon\} \supset W$$

не пересекаются.



**9. Предложение.** *Всякое метрическое пространство  $(X, d)$  является нормальным топологическим пространством.*

**Доказательство.** Пусть  $W$  и  $W'$  — два непересекающихся замкнутых подмножества в  $(X, d)$ . Поскольку  $W'$  — замкнуто, то, как было показано ранее,

для любого  $x \in W$  существует  $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ , такое что

$$d(x, W') = \inf_{y \in W'} d(x, y) = 3\varepsilon(x) > 0.$$

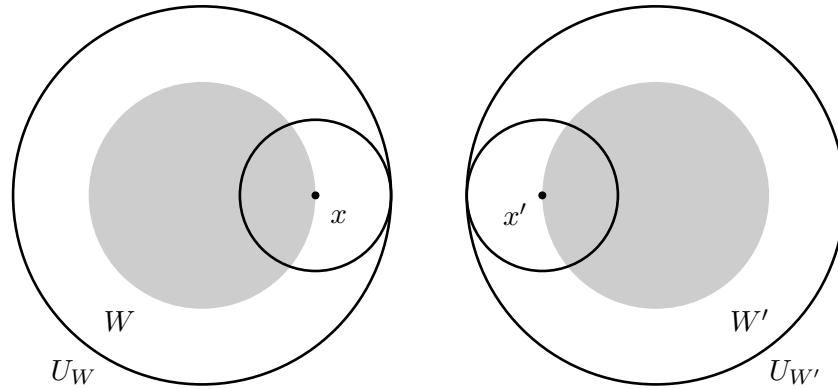
Открытое множество

$$U_W = \bigcup_{x \in W} B(x, \varepsilon(x))$$

содержит в себе  $W$ . Для любого  $x' \in W'$  можно построить аналогичное открытое множество

$$U_{W'} = \bigcup_{x' \in W'} B(x', \varepsilon(x')), \quad \text{где} \quad d(x', W) = \inf_{y \in W} d(x', y) = 3\varepsilon(x') > 0,$$

содержащее в себе  $W'$ .



Остается проверить, что  $U_W \cap U_{W'} = \emptyset$ . Предположим противное, то есть что существует  $y_0 \in U_W \cap U_{W'}$ . По построению множеств  $U_W$  и  $U_{W'}$  существуют  $x_0 \in W$  и  $x'_0 \in W'$  (центры открытых шаров, из которых составлены  $U_W$  и  $U_{W'}$ ), такие что  $d(x_0, y_0) < \varepsilon(x_0)$ ,  $d(x'_0, y_0) < \varepsilon(x'_0)$ . Пусть, для определенности,  $\varepsilon(x'_0) \leq \varepsilon(x_0)$ . Тогда

$$d(x_0, x'_0) \leq d(x_0, y_0) + d(x'_0, y_0) < \varepsilon(x_0) + \varepsilon(x'_0) < 3\varepsilon(x_0) = d(x_0, W'),$$

противоречие.  $\square$

## Компактные топологические пространства.

### Определения.

Покрытием подмножества  $S \subset X$  множества  $X$  называется семейство подмножеств  $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ , такое что

$$S \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Покрытие  $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$  называется конечным, если индексное множество  $A$  является конечным, то есть если покрытие состоит из конечного числа подмножеств.

Покрытие  $\mathcal{W} = \{W_k \mid k \in K\}$  называется подпокрытием покрытия  $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ , если  $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ , то есть если для каждого  $k \in K$  найдется  $\alpha = \alpha(k) \in A$ , такое что  $W_k = U_{\alpha(k)}$ .

**Определение.** Пусть  $(X, \tau)$  — топологическое пространство. Покрытие  $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$  подмножества  $S \subset X$  называется открытым, если  $\mathcal{U} \subset \tau$ , то есть если каждое  $U_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , является открытым множеством в  $X$ .

Подмножество  $S \subset X$  топологического пространства называется компактным, если всякое его открытое покрытие обладает конечным подпокрытием.

В частности, топологическое пространство  $(X, \tau)$  называется компактным, если всякое его открытое покрытие обладает конечным подпокрытием.

Очевидно, что  $S \subset X$  компактно тогда и только тогда, когда оно компактно как подпространство с индуцированной топологией, поскольку семейство  $\mathcal{U} = \{U_\alpha \in \tau_X \mid \alpha \in A\}$  является открытым покрытием подмножества  $S$  тогда и только тогда, когда семейство  $\mathcal{U}_S = \{U_\alpha \cap S \mid \alpha \in A\}$  является открытым покрытием пространства  $S$  в индуцированной топологии.

В соответствии с этим определением, пустое подмножество в топологическом пространстве является компактным.

*Любое пространство, состоящее из конечного числа точек, очевидным образом компактно.*

*Любое пространство, топология которого состоит из конечного числа открытых множеств (в частности, любое антidiscretное пространство), очевидным образом компактно.*

*Любое множество  $X$  с топологией Зарисского конечных дополнений является компактным.*

Действительно, пусть  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  — открытое покрытие пространства  $X$  и  $U_{\alpha_0}$  — некоторый элемент этого покрытия. Тогда  $X \setminus U_{\alpha_0}$  состоит из конечного числа точек  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Каждая из этих точек содержится в некотором элементе покрытия:  $x_i \in U_{\alpha_i}$ , и набор  $\{U_{\alpha_i}\}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , является конечным подпокрытием.

Топологическое пространство  $X$ , не являющееся компактным, называется некомпактным.

Пространство  $\mathbb{R}^n$  некомпактно, поскольку, например, из покрытия его открытыми шарами радиуса 1 нельзя выбрать конечного подпокрытия.

*Гомеоморфные пространства компактны или некомпактны одновре-*

менно.

Открытый шар  $B(0, a) \subset \mathbb{R}^n$  произвольного радиуса  $a$  гомеоморфен открытому шару  $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$  радиуса 1. Примером гомеоморфизма является отображение

$$\varphi : B(0, 1) \ni \mathbf{x} \mapsto a\mathbf{x} \in B(0, a).$$

Открытый шар  $B(0, \frac{\pi}{2}) \subset \mathbb{R}^n$  радиуса  $\frac{\pi}{2}$  гомеоморфен  $\mathbb{R}^n$ . Примером гомеоморфизма является отображение

$$\varphi : B(0, \frac{\pi}{2}) \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}\operatorname{tg}|\mathbf{x}| \in \mathbb{R}^n.$$

Поэтому любой открытый шар некомпактен, в том числе и открытый интервал  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ .

Не трудно и непосредственно указать открытое покрытие шара  $B(0, a) \subset \mathbb{R}^n$ , не допускающее конечного подпокрытия. Для этого надо каждую точку шара заключить в открытый шар радиуса равного половине расстояния от точки до границы.

Замкнутый отрезок  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  компактен.

Действительно, предположив, что из некоторого открытого покрытия  $\mathcal{U} = \{U_\alpha | \alpha \in A\}$  отрезка  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  нельзя выбрать конечного подпокрытия, легко прийти к противоречию. Если не существует конечного подпокрытия отрезка  $[0, 1]$ , значит не существует конечного подсемейства в семействе  $\mathcal{U}$ , покрывающего один из отрезков  $[0, \frac{1}{2}]$  или  $[\frac{1}{2}, 1]$ . Обозначим этот отрезок  $[a_1, b_1]$ . Аналогично, для одного из отрезков  $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$  или  $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ , обединением которых является отрезок  $[a_1, b_1]$ , также не существует покрывающего его конечного подсемейства в семействе  $\mathcal{U}$ . Обозначим этот отрезок

$[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ . Отрезок  $[a_2, b_2]$  в свою очередь можно разбить на две половины, и для одной из этих половин не будет существовать конечного покрытия открытыми множествами из семейства  $\mathcal{U}$ . Применяя метод математической индукции, заключаем, что существуют две последовательности чисел  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$ ,  $a_i < b_k$  для любых  $i, k \in \mathbb{N}$ , таких что  $b_n - a_n < \frac{1}{2^n}$  и ни при каком  $n \in \mathbb{N}$  не существует подсемейства в семействе  $\mathcal{U}$ , покрывающего отрезок  $[a_n, b_n]$ . Пусть

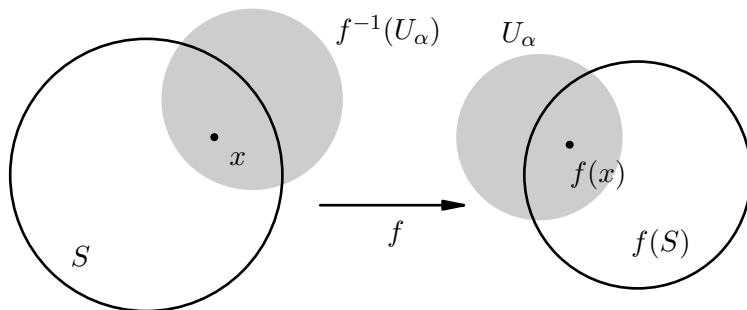
$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Точка  $a$  принадлежит некоторому элементу  $U_{\alpha_0}$  покрытия  $\mathcal{U}$ . Это значит, что имеется открытый интервал  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , содержащийся в  $U_{\alpha_0}$ . Начиная с некоторого  $n_0 \in \mathbb{N}$ , будет выполняться  $a - a_n < \varepsilon$ ,  $b_n - a < \varepsilon$ , но тогда  $[a_n, b_n] \subset U_{\alpha_0}$  при  $n \geq n_0$  покрывается одним элементом  $U_{\alpha_0}$  покрытия  $\mathcal{U}$ .

Противоречие.  $\square$

**Предложение.** Пусть  $f : X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение, а  $S \subset X$  — компактное подмножество в  $X$ . Тогда подмножество  $f(S)$  компактно в  $Y$ .

**Доказательство.** Если  $\mathcal{U}_{f(S)} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$  — открытое покрытие подмножества  $f(S)$ , то  $\mathcal{U}_S = \{f^{-1}(U_\alpha) \mid \alpha \in A\}$  — открытое покрытие подмножества  $S$ . Поскольку  $S$  — компактно, то из покрытия  $\mathcal{U}_S$  можно выбрать конечное подпокрытие  $\mathcal{U}'_S = \{f^{-1}(U_{\alpha_k}) \mid k = 1, 2 \dots n\}$ , но тогда  $\mathcal{U}'_{f(S)} = \{U_{\alpha_k} \mid k = 1, 2 \dots n\} \subset \mathcal{U}$  — конечное подпокрытие подмножества  $f(S)$ .  $\square$



**Теорема.** Пусть  $(X, \tau_X)$  и  $(Y, \tau_Y)$  — топологические пространства. Произведение  $(X \times Y, \tau_X \times \tau_Y)$  компактно тогда и только тогда, когда оба пространства  $(X, \tau_X)$  и  $(Y, \tau_Y)$  компактны.

Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы, докажем некоторые общие утверждения о непрерывных отображениях, которые будут использоваться в доказательстве теоремы.

Отображение  $f : X \rightarrow Y$  между топологическими пространствами непрерывно тогда и только тогда, когда для любой точки  $x \in X$  и любой открытой окрестности  $V_{f(x)}$  точки  $f(x)$  существует открытая окрестность  $U_x$  точки  $x$ , такая что  $f(U_x) \subset V_{f(x)}$ .

Действительно, если  $f$  непрерывно, то  $f^{-1}(V_{f(x)})$  является требуемой окрестностью точки  $x$ .

Обратно, пусть  $W \subset Y$  — произвольное открытое множество и выполняются условия сформулированного утверждения. Покажем, что прообраз  $f^{-1}(W)$  является открытым множеством.

В этом случае для любой точки  $x \in f^{-1}(W)$  в качестве окрестности  $V_{f(x)} \ni f(x)$  можно взять само множество  $W$ . Тогда по условию существует открытая окрестность  $U_x \ni x$ , такая что  $f(U_x) \subset W$ . При этом, очевидно,

$U_x \subset f^{-1}(W)$  и поэтому  $f^{-1}(W) = \bigcup_{x \in f^{-1}(W)} U_x$  открыто как объединение открытых множеств.  $\square$

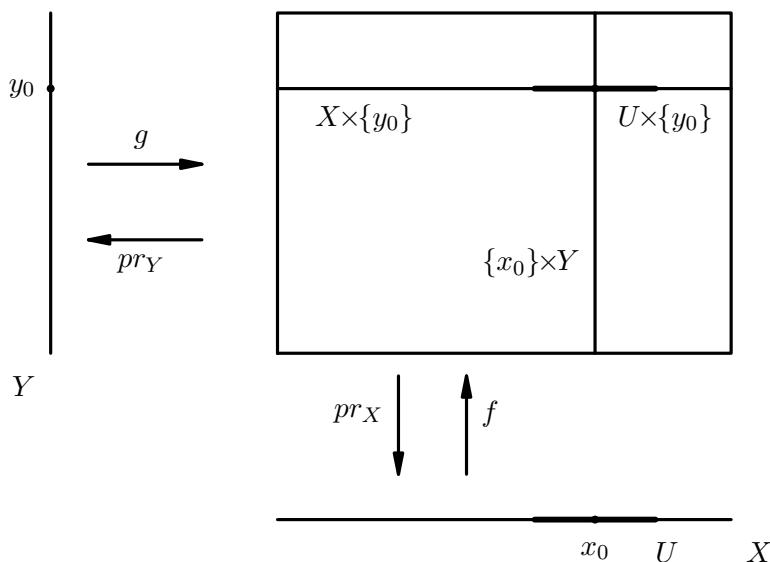
Удобно также специализировать это утверждение следующим образом:

*Отображение  $f : X \rightarrow Y$  между топологическими пространствами непрерывно тогда и только тогда, когда для любой точки  $x \in X$  и любой открытой окрестности  $V_{f(x)}$  точки  $f(x)$  из базы топологии на  $Y$  существует открытая окрестность  $U_x$  точки  $x$  из базы топологии на  $X$ , такая что  $f(U_x) \subset V_{f(x)}$ .*

В произведении топологических пространств  $X \times Y$  можно рассматривать подпространства вида  $\{x_0\} \times Y$  и  $X \times \{y_0\}$ .

Для любых  $x_0 \in X$  и  $y_0 \in Y$  имеют место гомеоморфизмы

$$f : X \ni x \mapsto (x, y_0) \in X \times \{y_0\} \quad \text{и} \quad g : Y \ni y \mapsto (x_0, y) \in \{x_0\} \times Y.$$



Действительно, если  $\mathcal{U} = \{U_\alpha, \alpha \in A\}$  — база топологии на  $X$ , а  $\mathcal{V} = \{V_k, k \in K\}$  — база топологии на  $Y$ , то на произведении имеется база

$\{U_\alpha \times V_k, \alpha \in A, k \in K\}$ . Пересечения открытых множеств  $U_\alpha \times V_k$  из этой базы с подпространством  $X \times \{y_0\}$  образуют базу топологии на  $X \times \{y_0\}$ . Эта база состоит из множеств  $U_\alpha \times \{y_0\}, \alpha \in A$ . При этом, очевидно,

$$f^{-1}(U_\alpha \times \{y_0\}) = U_\alpha, \quad \text{а} \quad (f^{-1})^{-1}(U_\alpha) = f(U_\alpha) = U_\alpha \times \{y_0\},$$

поэтому  $f$  и  $f^{-1}$  — непрерывны.

### Доказательство теоремы.

В одну сторону доказательство теоремы очевидно: если произведение  $X \times Y$  компактно, то  $X$  и  $Y$  компактны как образы компактного пространства соответственно при отображениях  $pr_X : X \times Y \rightarrow X$  и  $pr_Y : X \times Y \rightarrow Y$ .

Пусть теперь  $X$  и  $Y$  компактны и  $\mathcal{W} = \{W_p, p \in P\}$  — произвольное открытое покрытие пространства  $X \times Y$ . Покажем, что в этом покрытии имеется конечное подпокрытие. Каждое открытое множество  $W_p$  является объединением множеств из базы:

$$W_p = \bigcup_{\alpha \in A_p, k \in K_p} U_{p,\alpha} \times V_{p,k}.$$

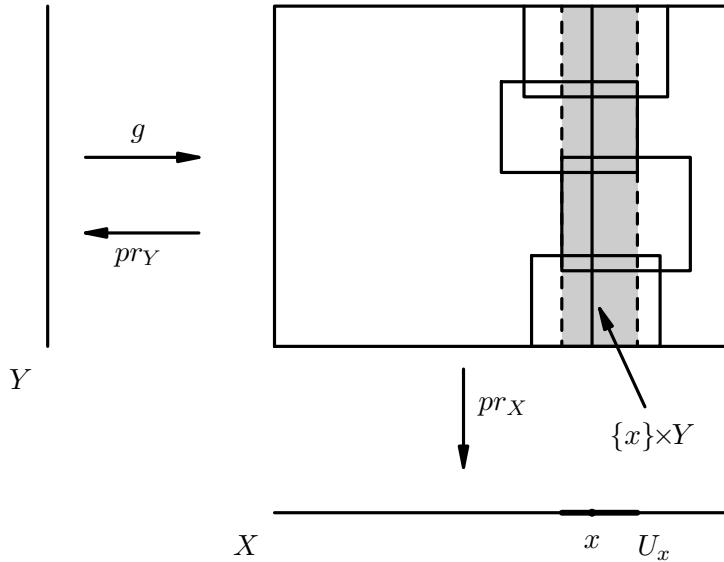
Семейство  $\widetilde{\mathcal{W}} = \{U_{p,\alpha} \times V_{p,k} \mid p \in P, \alpha \in A_p, k \in K_p\}$  очевидным образом является покрытием пространства  $X \times Y$  и всякого подмножества  $\{x\} \times Y \subset X \times Y, x \in X$ . Подмножество  $\{x\} \times Y \subset X \times Y$  компактно, поскольку гомеоморфно пространству  $Y$ . Поэтому покрывается конечным числом множеств

$$U_{p_i, \alpha_i} \times V_{p_i, k_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n(x) \tag{207}$$

из  $\widetilde{\mathcal{W}}$  и поэтому конечным числом множеств

$$W_{p_i}, \quad i = 1, 2 \dots n(x), \quad \text{из покрытия } \mathcal{W}. \tag{208}$$

Пусть  $U_x = \bigcap_{i=1}^{n(x)} U_{p_i, \alpha_i}$ . Тогда множества (207), а вместе с ними и множества (208) покрывают подмножество  $U_x \times Y$ .



Рассмотрим семейство множеств  $\{U_x \mid x \in X\}$ . Это семейство является открытым покрытием компактного пространства  $X$ . Из него можно выделить конечное подпокрытие  $\{U_{x_j} \mid j = 1, 2 \dots m\}$ . При этом семейство  $\{U_{x_j} \times Y \mid j = 1, 2 \dots m\}$  является покрытием произведения  $X \times Y$ . Каждое подмножество  $U_{x_j} \times Y$  покрывается конечным числом  $n(x_j)$  множеств (208) из покрытия  $\mathcal{W}$ . Собирая вместе подмножества (208) для всех  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , получим конечное подпокрытие покрытия  $\mathcal{W}$  пространства  $X \times Y$ .  $\square$

Произведения топологических пространств

$$(X \times Y) \times Z, \quad X \times (Y \times Z) \quad \text{и} \quad X \times Y \times Z \quad (209)$$

канонически гомеоморфны. Канонические биекции между множествами (209), имеющие вид

$$((x, y), z) \rightleftarrows (x, (y, z)) \rightleftarrows (x, y, z),$$

устанавливают и взаимно однозначные соответствия между базами топологических пространств (209). Аналогичным образом, канонически гомеоморфны и произведения любого конечного числа топологических пространств  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , получающиеся при различных расстановках скобок в произведении этих множеств. В частности, гомеоморфны пространства

$$\prod_{i=1}^n X_i = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \quad \text{и} \quad \left( \prod_{i=1}^{n-1} X_i \right) \times X_n.$$

Поэтому, применяя метод математической индукции, получаем следующее предложение.

**Следствие.** *Произведение  $\prod_{i=1}^n X_i = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  компактных топологических пространств является компактным топологическим пространством.*

В частности, компактны замкнутый куб  $[a, b]^n \subset \mathbb{R}^n$  и замкнутый параллелепипед  $\prod_{k=1}^n [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^n$ .

**Предложение.** *Замкнутое подмножество  $S$  компактного пространства  $X$  компактно.*

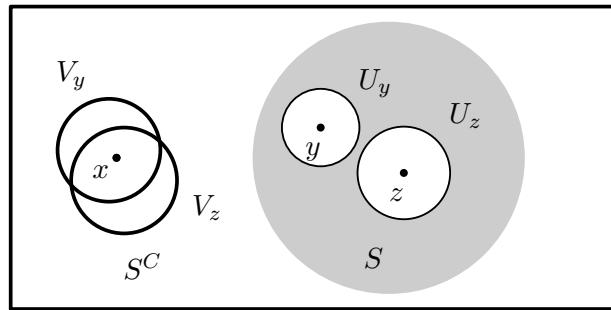
**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{U} = \{U_\alpha, \alpha \in A\}$  — открытое покрытие замкнутого множества  $S$ . Добавим к семейству  $\mathcal{U}$  еще одно множество  $S^C = X \setminus S$ . В результате получим открытое покрытие  $\mathcal{U}'$  пространства  $X$ . Поскольку  $X$  компактное пространство, существует конечное подпокрытие покрытия  $\mathcal{U}'$ . Это подпокрытие имеет вид  $\{U_{\alpha_i}, i = 1, \dots, n\}$  или  $\{U_{\alpha_i}, i = 1, \dots, n\} \cup \{S^C\}$ . И в том и в другом случае  $\{U_{\alpha_i}, i = 1, \dots, n\}$  будет конечным подпокрытием множества  $S$ .  $\square$

**Предложение.** *Компактное подмножество  $S$  хаусдорфова пространст-*

ва  $X$  замкнуто.

Отметим в связи с этим, что подмножество в топологическом пространстве, состоящее из одной точки, всегда компактно, но может не быть замкнутым. Ранее в качестве примера  $T_0$ -пространства, не являющегося  $T_1$ -пространством, рассматривалось *связное двоеточие*:  $X = \{a, b\}$  с топологией, состоящей из множеств  $\{a, b\}$ ,  $\{b\}$  и  $\emptyset$ . Одноточечное подмножество  $\{b\}$  этого пространства не является замкнутым.

**Доказательство.**



Покажем, что дополнение  $S^C$  является открытым множеством. Для этого нужно показать, что у любой точки  $x \in S^C$  найдется открытая окрестность  $U_x \ni x$ , лежащая в  $S^C$ .

Пусть  $x \in S^C$ . Для любой точки  $y \in S$  существуют непересекающиеся открытые окрестности  $V_y \ni x$  и  $U_y \ni y$ . Семейство окрестностей  $\{U_y\}_{y \in S}$  очевидным образом образуют открытое покрытие подмножества  $S$ . Из него можно выбрать конечное подпокрытие  $\{U_{y_i}, i = 1, \dots, n\}$ . Пересечение  $\bigcap_{i=1}^n V_{y_i}$  является при этом открытым множеством, содержащим точку  $x$  и не пересекающимся ни с одним из множеств  $U_{y_i}, i = 1, \dots, n\}$ , а значит и с  $S \subset \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}$ .

□

**Следствие.** *Биективное непрерывное отображение  $f : X \rightarrow Y$  компактного пространства  $X$  в хаусдорфово пространство  $Y$  является гомеоморфизмом.*

**Доказательство.** Нужно показать, что  $f^{-1}$  — непрерывное отображение. Для этого достаточно показать, что прообраз  $(f^{-1})^{-1}(W) = f(W)$  каждого замкнутого множества  $W \subset X$  является замкнутым множеством. Но, поскольку  $X$  — компактно, а  $W$  — замкнуто в  $X$ , то  $W$  — компактно. Образ  $f(W) \subset Y$  компактного множества при непрерывном отображении  $f$  компактен. Поскольку  $Y$  — хаусдорфово пространство, то  $f(W)$  — замкнуто. □

В частности,

**Следствие.** *Биективное непрерывное отображение  $f : X \rightarrow X$  компактного хаусдорфова пространства  $X$  на себя является гомеоморфизмом.*

В случае произвольного топологического пространства это утверждение не имеет места.

Применение формул де Моргана приводит к следующему критерию компактности топологического пространства.

**Предложение.** *Топологическое пространство  $(X, \tau)$  компактно тогда и только тогда, когда в любом семействе  $\mathcal{W} = \{W_\alpha, \alpha \in A\}$  замкнутых подмножеств пространства  $X$  с пустым пересечением  $\bigcap_{\alpha \in A} W_\alpha = \emptyset$  существует конечное подсемейство с пустым пересечением.*

**Доказательство.**

" $\Rightarrow$ " Если  $\mathcal{W} = \{W_\alpha, \alpha \in A\}$  — семейство замкнутых множеств с пустым пересечением, то семейство дополнений  $\mathcal{W}^C = \{W_\alpha^C, \alpha \in A\}$  будет открытым покрытием пространства  $X$ . Действительно,

$$\bigcup_{\alpha \in A} W_\alpha^C = \left(\bigcap_{\alpha \in A} W_\alpha\right)^C = \emptyset^C = X.$$

(Или, другими словами, если бы какая-то точка  $x$  не лежала ни в одном дополнении  $W_\alpha^C$ , то она принадлежала бы каждому  $W_\alpha$ .) Поскольку  $X$  — компактное пространство, то существует конечное подпокрытие  $\{W_{\alpha_i}^C, i = 1, \dots, n\} \subset \mathcal{W}^C$ . Но тогда  $\{W_{\alpha_i}, i = 1, \dots, n\} \subset \mathcal{W}$  — конечное подсемейство с пустым пересечением:

$$\bigcap_{i=1}^n W_{\alpha_i} = \left(\bigcup_{i=1}^n W_{\alpha_i}^C\right)^C = X^C = \emptyset.$$

" $\Leftarrow$ " Обратно, пусть  $\mathcal{U} = \{U_\alpha, \alpha \in A\}$  — открытое покрытие пространства  $X$ . Тогда семейство дополнений  $\mathcal{U}^C = \{U_\alpha^C, \alpha \in A\}$  будет семейством замкнутых множеств с пустым пересечением. Действительно,

$$\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha^C = \left(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right)^C = X^C = \emptyset.$$

Из него можно выбрать конечное подсемейство  $\{U_{\alpha_i}^C, i = 1, \dots, n\}$  с пустым пересечением. Но тогда подсемейство  $\{U_{\alpha_i}, i = 1, \dots, n\} \subset \mathcal{U}$  будет конечным подпокрытием:

$$\bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} = \left(\bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i}^C\right)^C = \emptyset^C = X.$$

□

В качестве примера применения этого критерия рассмотрим семейство бесконечных интервалов  $\{[a, \infty), a \in \mathbb{R}\}$  на прямой  $\mathbb{R}$  со стандартной топологией. Пересечение всех таких интервалов пусто, поскольку для любой точки  $b \in \mathbb{R}$

существует интервал  $[b + 1, \infty)$ , которому она не принадлежит. Однако пересечение конечного числа таких интервалов  $\bigcap_{i=1}^n [a_i, \infty) \neq \emptyset$ , поскольку это пересечение совпадает с интервалом  $[b, \infty)$ , где  $b = \max_{i=1}^n a_i$ . Следовательно,  $\mathbb{R}$  — некомпактно.

Доказанный критерий можно переформулировать в следующих терминах.

**Определение.** Система подмножеств (семейство)  $\mathcal{W} = \{W_\alpha, \alpha \in A\}$  топологического пространства  $X$  называется центрированной, если всякая ее конечная подсистема  $\{W_{\alpha_i}, i = 1, \dots, n\}$  имеет непустое пересечение.

**Предложение.** Топологическое пространство  $(X, \tau)$  компактно тогда и только тогда, когда всякая центрированная система его замкнутых подмножеств имеет непустое пересечение.

**Доказательство.**

" $\Rightarrow$ " Пусть пространство  $X$  компактно и система замкнутых множеств  $\mathcal{W} = \{W_\alpha, \alpha \in A\}$  является центрированной. Предположение, что пересечение  $\bigcap_{\alpha \in A} W_\alpha = \emptyset$ , по предыдущему предложению приводит к тому, что существует конечная подсистема  $\{W_{\alpha_i}, i = 1, \dots, n\}$  с пустым пересечением, что противоречит центрированности системы  $\mathcal{W}$ .

" $\Leftarrow$ " Обратно, пусть  $\mathcal{W} = \{W_\alpha, \alpha \in A\}$  — семейство замкнутых множеств пространства  $X$  с пустым пересечением. Покажем, что найдется конечное подсемейство  $\{W_{\alpha_i}, i = 1, \dots, n\}$  с пустым пересечением. Предположение, что такого подсемейства нет, приводит к противоречию, поскольку в этом случае семейство  $\mathcal{W}$  оказывается центрированной системой замкнутых подмножеств

и должно иметь непустое пересечение.  $\square$

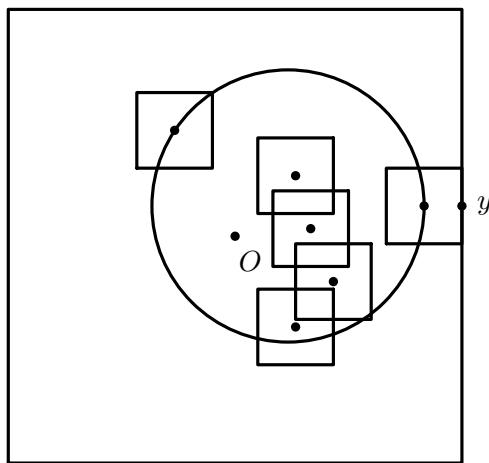
Подмножество  $S$  в евклидовом пространстве  $\mathcal{E}_n$  называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором кубе  $\{\mathbf{x} \in \mathcal{E}_n : |x^i| \leq a, i = 1, \dots, n\}$ .

**Предложение.** *Подмножество  $S$  в евклидовом пространстве  $\mathcal{E}_n$  компактно тогда и только тогда, когда оно является замкнутым и ограничено.*

### Доказательство.

" $\Leftarrow$ " Поскольку куб компактен, а  $S$  — замкнутое подмножество компактного пространства, то  $S$  компактно.

" $\Rightarrow$ " Пусть  $S$  — компактно. Поскольку  $\mathcal{E}_n$  — хаусдорфово, то  $S$  — замкнуто. Остается показать, что  $S$  ограничено. Каждую точку  $\mathbf{x}_0 \in S$  накроем открытым кубом  $\{\mathbf{x} \in \mathcal{E}_n : |x^i - x_0^i| < 1, i = 1, \dots, n\}$  со стороной 2 с центром в  $\mathbf{x}_0$ . Из полученного открытого покрытия выберем конечное подпокрытие.



Пусть оно состоит из кубов  $\{\mathbf{x} \in \mathcal{E}_n : |x^i - x_\alpha^i| < 1, i = 1, \dots, n\}$ ,  $\alpha = 1, \dots, m$ . Координаты центров  $x_\alpha^i$  этих кубов образуют матрицу. Пусть  $a$

— максимальное значение модулей элементов этой матрицы. Тогда  $S$  содержится в кубе  $\{\mathbf{x} : |x^i| < a + 1, i = 1, \dots, n\}$ .  $\square$

**Предложение.** *Всякая непрерывная функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , определенная на компактном пространстве  $X$ , ограничена и достигает на  $X$  своего наибольшего и наименьшего значений.*

**Доказательство.** Образ  $f(X) \subset \mathbb{R}$  компактного пространства при непрерывном отображении является компактным подмножеством в  $\mathbb{R}$  и, следовательно, замкнутым и ограниченным. Пусть

$$M = \sup_{x \in X} f(x), \quad \text{а} \quad m = \inf_{x \in X} f(x).$$

Покажем, что существует  $x \in X$ , такой что  $f(x) = M$ . По определению супремума (точной верхней грани), существует возрастающая последовательность чисел  $a_n \in \mathbb{R}$ , такая что  $a_n = f(x_n)$ ,  $x_n \in X$ , и  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = M$ . Пусть

$$W_n = \{x \in X \mid f(x) \geq a_n\} = f^{-1}([a_n, \infty)).$$



Поскольку  $W_n \supset W_{n+1}$ , то семейство  $\mathcal{W} = \{W_n, n = 1, \dots\}$  представляет собой центрированную систему замкнутых подмножеств в компактном пространстве  $X$ . Поэтому она имеет непустое пересечение  $W_\infty = \bigcap_{n=1}^\infty W_n$ . Если  $y \in W_\infty$ , то  $f(y) = M$ . Действительно, предположив, что  $f(y) < M$ , получим, что  $f(y) < a_k$  для некоторого  $k$  и, следовательно,  $y \notin W_\infty$  в противоречии с тем, что  $y \in W_\infty$ .

Случай инфимума рассматривается аналогично. Можно воспользоваться тем, что  $\inf_{x \in X} f(x) = -\sup_{x \in X} (-f(x))$ .  $\square$

Отметим еще одно свойство компактных топологических пространств.

**Определение.** Точка  $x$  в топологическом пространстве  $X$  называется предельной точкой подмножества  $S$ , если всякая окрестность точки  $x$  содержит точки множества  $S$ , отличные от точки  $x$ .

**Предложение.** Всякое бесконечное подмножество  $S$  в компактном топологическом пространстве  $X$  имеет предельную точку.

**Доказательство.** Предположим, что подмножество  $S$  не имеет ни одной предельной точки. Это значит, что у любой точки  $x \in X \setminus S$  имеется открытая окрестность  $U_x \ni x$ , такая что  $U_x \cap S = \emptyset$ , а у любой точки  $x \in S$  имеется открытая окрестность  $U_x \ni x$ , такая что  $U_x \cap S = \{x\}$ . Семейство  $\{U_x, x \in X\}$  — открытое покрытие компактного пространства  $X$ , поэтому существует конечное подпокрытие  $\{U_{x_i}, i = 1, \dots, n\}$ . Поскольку  $S$  — бесконечное множество, хотя бы одна окрестность  $U_{x_k}$  должна содержать бесконечное множество точек из  $S$ , что противоречит тому, что в каждой окрестности из семейства  $\{U_x, x \in X\}$  имеется не более одной точки из  $S$ .  $\square$

### Связные пространства.

**Определение.** Топологическое пространство  $(X, \tau)$  называется связным, если его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых подмножеств.

Топологическое пространство  $(X, \tau)$ , не являющееся связным, называется несвязным.

Подмножество  $S \subset X$  топологического пространства  $X$  называется связным, если оно является связным топологическим пространством с

индуцированной топологией.

Если пространство  $(X, \tau)$  несвязно, то  $X = U \cup V$ , где  $U$  и  $V$  — непустые открытые подмножества и  $U \cap V = \emptyset$ . При этом оба подмножества  $U$  и  $V$  одновременно и замкнуты. В связном пространстве  $X$  одновременно открыты и замкнуты только  $X$  и  $\emptyset$ .

**Предложение.** *Отрезок  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  связан.*

**Доказательство.** Предположим, что  $[a, b] = U \cup V$ , где  $U$  и  $V$  — непустые открытые и непересекающиеся подмножества в  $[a, b]$ . При этом  $U$  и  $V$  одновременно и замкнуты в  $[a, b]$ . Покажем, что такие подмножества должны пересекаться.

Пусть  $a \in U$ . Множество  $U$  замкнуто в компактном подмножестве  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , поэтому  $U$  компактно, а поскольку  $\mathbb{R}$  — хаусдорфово, то  $U$  замкнуто и в  $\mathbb{R}$ . По аналогичным причинам  $V$  также замкнуто в  $\mathbb{R}$ .

Рассмотрим множество  $W$  таких элементов  $x \in U$ , которые меньше каждого элемента из  $V$ , то есть

$$W = \{x \in U \mid x < y \text{ для любого } y \in V\}.$$

Множество  $W$  — не пусто, поскольку  $W \ni a$ . Пусть число  $c$  — верхняя грань множества  $W$ . Так как  $U$  — замкнуто, то  $c \in U$ . Но  $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap V \neq \emptyset$  для любого  $\varepsilon > 0$ , поскольку иначе  $c$  не было бы верхней гранью множества  $W$ . Поэтому  $c \in \overline{V}$  и, следовательно,  $U \cap V \ni c$ , противоречие.  $\square$ .

**Предложение.** *Образ  $f(X) \subset Y$  связного пространства  $X$  при неприватном отображении  $f : X \rightarrow Y$  связан.*

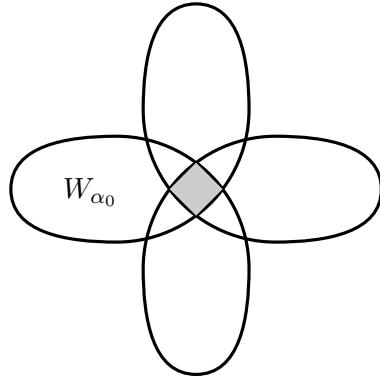
**Доказательство.** Пусть  $f(X) = Z \subset Y$ . Отображение  $f : X \rightarrow Z$  сюръек-

тивно. Пусть  $U \subset Z$  — подмножество, являющееся одновременно открытым и замкнутым в  $Z$ . Его прообраз  $f^{-1}(U)$  открыт и замкнут в связном пространстве  $X$ , поэтому  $f^{-1}(U)$  либо совпадает с  $X$  либо является пустым множеством. Но тогда и  $U = f(f^{-1}(U))$  либо совпадает с  $Z$  либо является пустым множеством. Таким образом одновременно открытыми и замкнутыми в  $f(X)$  являются только все множество  $f(X)$  и  $\emptyset$ .  $\square$

Гомеоморфные пространства, очевидно, либо оба связные либо оба несвязные.

**Предложение.** *Пусть топологическое пространство является обединением подмножеств  $X = \bigcup_{\alpha \in A} W_\alpha$ , где каждое  $W_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , связно, а пересечение  $\bigcap_{\alpha \in A} W_\alpha \neq \emptyset$ . Тогда  $X$  — связное пространство.*

**Доказательство.** Пусть  $V \subset X$  — непустое открытое и замкнутое подмножество в  $X$ . Тогда найдется  $\alpha_0$ , такое что  $V \cap W_{\alpha_0} \neq \emptyset$ . Это пересечение  $V \cap W_{\alpha_0}$  является непустым открытым и замкнутым подмножеством в связном пространстве  $W_{\alpha_0}$ , поэтому  $V \cap W_{\alpha_0} = W_{\alpha_0}$  и, следовательно,  $V \supset W_{\alpha_0}$ . Поскольку  $W_{\alpha_0} \supset \bigcap_{\alpha \in A} W_\alpha \neq \emptyset$ , то и для каждого  $\alpha \in A$  имеем  $V \cap W_\alpha \neq \emptyset$ , но тогда, по аналогичным причинам,  $V \supset W_\alpha$  для каждого  $\alpha \in A$ . Следовательно,  $V = X$ .  $\square$



**Следствие.** *Интервалы  $[a, b], (a, b], (a, b), [a, \infty), (-\infty, b], (a, \infty) (-\infty, b)$  и  $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$  связны.*

**Доказательство.** Пусть точка  $c$  принадлежит рассматриваемому интервалу  $X$  и  $x \in X$  — произвольная точка этого интервала, а

$$W_x = \begin{cases} [c, x], & \text{если } x > c, \\ [x, c], & \text{если } x < c. \end{cases}$$

Тогда  $X = \bigcup_{x \in X} W_x$  и  $\bigcap_{x \in X} W_x \ni c$ , то есть  $\bigcap_{x \in X} W_x \neq \emptyset$ .  $\square$

**Предложение.** *Пусть  $(X, \tau_X)$  и  $(Y, \tau_Y)$  — топологические пространства. Тогда произведение  $X \times Y$  связно тогда и только тогда, когда  $X$  и  $Y$  — связные пространства.*

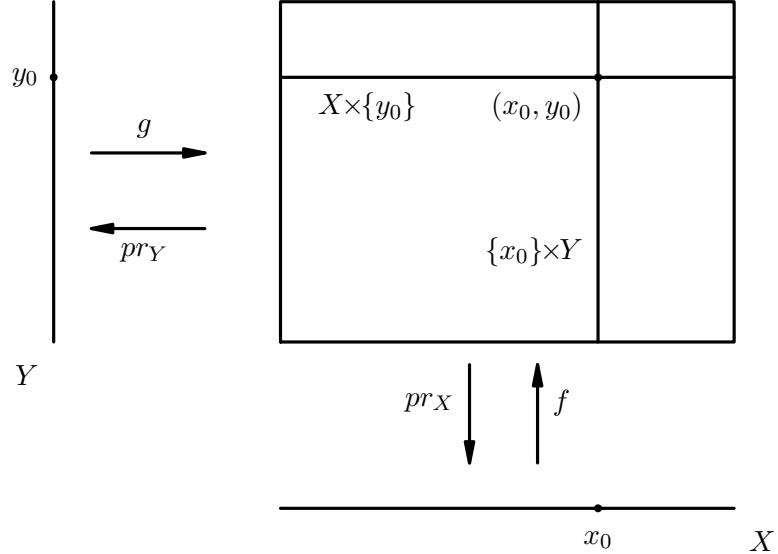
**Доказательство.**

" $\Rightarrow$ " Если  $X \times Y$  связно, то  $X$  и  $Y$  связны как образы пространства  $X \times Y$  при проекциях  $pr_X : X \times Y \rightarrow X$  и  $pr_Y : X \times Y \rightarrow Y$ .

" $\Leftarrow$ " Как было отмечено ранее, в произведении топологических пространств  $X \times Y$  имеются подпространства вида  $\{x_0\} \times Y$  и  $X \times \{y_0\}$ , которые гомеоморфны пространствам  $Y$  и  $X$  соответственно. Соответствующие гомеомор-

физмы имеют вид

$$g : Y \ni y \mapsto (x_0, y) \in \{x_0\} \times Y, \quad f : X \ni x \mapsto (x, y_0) \in X \times \{y_0\}.$$

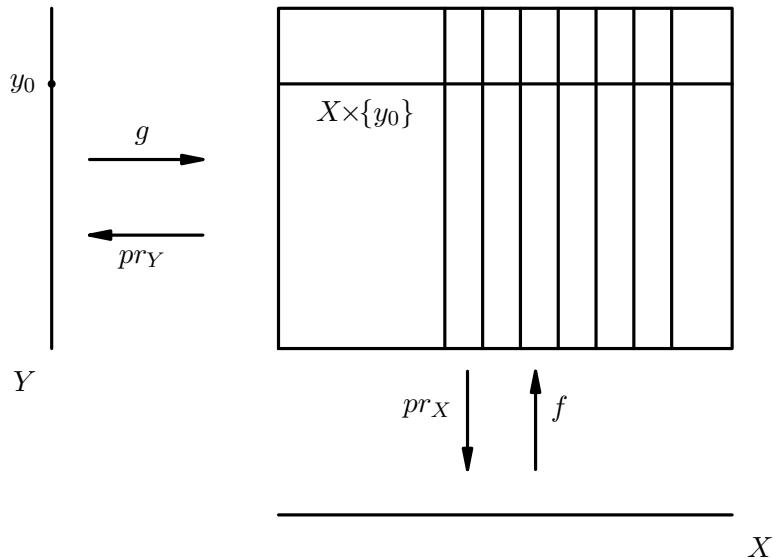


Поскольку  $X$  и  $Y$  связны, то связны и подмножества  $X \times \{y_0\}$  и  $\{x_0\} \times Y$ .

Поскольку  $X \times \{y_0\} \cap \{x_0\} \times Y = \{(x_0, y_0)\} \neq \emptyset$ , то объединение

$$X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y \tag{210}$$

связно. Теперь мы можем представить произведение  $X \times Y$  как объединение семейства связных подмножеств, имеющих непустое пересечение, а именно зафиксируем в (210)  $y_0$ , а  $x_0$  будем варьировать.



Тогда

$$X \times Y = \bigcup_{x \in X} W_x, \quad \text{где} \quad W_x = X \times \{y_0\} \cup \{x\} \times Y.$$

Пересечение  $\bigcap_{x \in X} W_x$  не пусто, поскольку каждое множество  $W_x$  содержит  $X \times \{y_0\}$ . Поэтому  $X \times Y = \bigcup_{x \in X} W_x$  связно.  $\square$

Применение метода математической индукции приводит к следующему утверждению.

**Следствие.** *Произведение  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  связных топологических пространств является связным топологическим пространством.*

**Определение.** *Связной компонентой точки  $x \in X$  в топологическом пространстве  $(X, \tau)$  называется наибольшее (по включению) связное подмножество в  $X$ , содержащее точку  $x$ .*

Из доказанного выше предложения (с. 270) следует, что связная компонента точки  $x$  совпадает с объединением всех связных подмножеств, содержащих точку  $x$ . Кроме того, из этого предложения следует, что связные компоненты

$C_x$  и  $C_y$  двух точек  $x$  и  $y$  либо не пересекаются либо совпадают.

**Предложение.** *Связная компонента точки  $x \in X$  в топологическом пространстве  $(X, \tau)$  является замкнутым множеством.*

**Доказательство.** Пусть  $W$  — связная компонента точки  $x$ . Предположим, что  $W \neq \overline{W}$  и  $y \in \overline{W} \setminus W$ . Покажем, что множество  $W \cup \{y\}$  связно, и придет к противоречию с тем, что  $W$  — максимальное связное множество, содержащее  $x$ .

Предположим, что  $W \cup \{y\}$  несвязно, то есть  $W \cup \{y\} = U_1 \cup U_2$ , где  $U_1$  и  $U_2$  — непустые открытые подмножества в пространстве  $W \cup \{y\}$  и  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ . Точка  $y$  принадлежит одному из этих подмножеств. Пусть  $y \in U_1$  и  $U_1 = (W \cup \{y\}) \cap U'_1$ , где  $U'_1$  — открытое множество в пространстве  $X$  (по определению индуцированной топологии в пространстве  $W \cup \{y\}$ ). По определению индуцированной топологии  $U_1 \cap W$  и  $U_2 \cap W = U_2$  — открытые подмножества в  $W$  и  $(U_1 \cap W) \cup U_2 = W$ . Подмножество  $U_2$  не пусто. Для получения противоречия остается показать, что и  $U_1 \cap W$  не пусто. Но это следует из того, что  $y \in \overline{W}$  и поэтому всякая открытая окрестность точки  $y$ , в том числе и  $U'_1$ , имеет непустое пересечение с  $W$ .  $\square$

**Определение.** *Непустое связное подмножество  $C$  топологического пространства  $(X, \tau)$  называется компонентой связности пространства  $X$ , если подмножество  $C$  не содержитя ни в каком другом связном подмножестве пространства  $X$  (является максимальным связным подмножеством).*

Ясно, что компонента связности пространства  $X$  является связной компонентой всякой своей точки, и что пространство  $X$  является объединением

попарно не пересекающихся компонент связности.

Связная компонента точки может не быть открытым множеством.

Например, компонентами связности пространства  $(\mathbb{Q}, \tau_{\mathbb{Q}})$ , где  $\mathbb{Q}$  — множество рациональных чисел, а  $\tau_{\mathbb{Q}}$  — топология, индуцированная из  $\mathbb{R}$ , являются точки этого пространства. Действительно, пусть  $W \ni x$  — компонента связности точки  $x \in \mathbb{Q}$ . Предположим, что  $W \ni y$ , где  $y \in \mathbb{Q}$ ,  $y \neq x$ . Но тогда

$$W = (W \cap (-\infty, \alpha)) \cup (W \cap (\alpha, \infty)),$$

где  $\alpha$  — иррациональное число, принадлежащее отрезку  $[x, y]$ , если  $y > x$ , или отрезку  $[y, x]$ , если  $y < x$ , то есть  $W$  — несвязно. Таким образом, связная компонента любой точки  $x \in \mathbb{Q}$  совпадает с этой точкой. Точки же в  $\mathbb{Q}$  не являются открытыми множествами в топологии, индуцированной из  $\mathbb{R}$ , поскольку базу этой топологии образуют пересечения открытых отрезков  $(a, b)$  с  $\mathbb{Q}$ , а каждое такое множество  $(a, b) \cap \mathbb{Q}$  содержит бесконечное множество точек.

Если число компонент связности конечно, то всякая компонента связности будет открытым множеством. Действительно, объединение всех компонент связности, кроме одной, является замкнутым множеством, как конечное объединение замкнутых множеств.

### Примеры.

1. Бесконечное множество  $X$  с топологией Зарисского конечных дополнений связно.

Действительно, любые два открытых подмножества в  $X$  имеют непустое пересечение.

2. Прямая  $\mathbb{R}$  и плоскость  $\mathbb{R}^2$  со стандартными топологиями не гомеоморфны.

Этот факт кажется естественным, но доказать его можно следующим образом. Предположим, имеется гомеоморфизм  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  и  $f^{-1}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ . Очевидно, если удалить из двух гомеоморфных пространств  $X$  и  $Y$  точки  $x_0 \in X$  и  $y_0 = f(x_0) \in Y$ , соответствующие одна другой при гомеоморфизме  $f : X \rightarrow Y$ , то ограничение  $f : X \setminus \{x_0\} \rightarrow Y \setminus \{y_0\}$  также будет гомеоморфизмом. Однако  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  состоит из двух компонент связности, а  $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$  — связное множество.

### Линейно связные пространства.

Путем в топологическом пространстве  $(X, \tau)$  называется непрерывное отображение  $\gamma : [0; 1] \rightarrow X$ . Точка  $\gamma(0)$  называется началом пути, а точка  $\gamma(1)$  — концом пути. Говорят, что путь  $\gamma$  соединяет точку  $\gamma(0)$  с точкой  $\gamma(1)$ , а также что  $\gamma$  — путь из  $\gamma(0)$  в  $\gamma(1)$ . Образ  $\gamma([0; 1])$  называют *траекторией* пути  $\gamma$ .

Если  $\gamma$  — путь, соединяющий  $\gamma(0)$  с  $\gamma(1)$ , то путь  $\bar{\gamma}$ , определенный соотношением  $\bar{\gamma}(t) = \gamma(1 - t)$ , соединяет  $\gamma(1)$  с  $\gamma(0)$ .

Путь  $\bar{\gamma}$  проходит по той же траектории, что и  $\gamma$ , но в противоположном направлении.

Путь  $\gamma$ , такой что  $\gamma(t) = x_0$  для всех  $t \in [0; 1]$ , называется *постоянным* путем.

Пусть  $\gamma : [0; 1] \rightarrow X$  и  $\sigma : [0; 1] \rightarrow X$  — два пути, такие что  $\gamma(1) = \sigma(0)$ , то есть конец первого пути совпадает с началом второго. Тогда можно

определить путь

$$(\gamma * \sigma)(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \sigma(2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \quad (211)$$

Действительно, отображение (211) непрерывно в каждой точке отрезков  $[0; \frac{1}{2}]$  и  $(\frac{1}{2}, 1]$  как композиция непрерывных отображений  $\gamma$  и  $\sigma$  с отображениями  $t \mapsto 2t$  и  $t \mapsto 2t - 1$  соответственно, а для открытой окрестности  $U_{\gamma(1)}$  точки  $\gamma(1)$  выполняется

$$(\gamma * \sigma)^{-1}(U_{\gamma(1)}) = \gamma^{-1}(U_{\gamma(1)}) \cup \sigma^{-1}(U_{\gamma(1)}).$$

Поэтому  $(\gamma * \sigma)^{-1}(U_{f(1)})$  содержит два некоторых отрезка  $(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2})$  и  $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \varepsilon]$ , а, значит и их объединение  $(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon)$ . Таким образом, отображение  $\gamma * \sigma$  непрерывно в точке  $\frac{1}{2} \in [0; 1]$ .

Путь  $\gamma * \sigma$ , определенный формулой (211), называется *произведением* путей  $\gamma$  и  $\sigma$ .

**Определение.** Топологическое пространство  $(X, \tau)$  называется *линейно связным*, если любые две его точки  $x_0$  и  $x_1$  можно соединить путем. Подмножество  $S \subset X$  называется *линейно связным*, если оно линейно связано как подпространство.

**Предложение.** Образ  $f(X)$  линейно связного пространства  $X$  при непрерывном отображении  $f : X \rightarrow Y$  является линейно связным.

Доказательство очевидно: если точки  $y_0, y_1$  принадлежат образу  $f(X)$ , то существуют  $x_0, x_1 \in X$ , такие что  $y_0 = f(x_0)$ , а  $y_1 = f(x_1)$ . Существует путь  $\gamma$ , соединяющий  $x_0$  и  $x_1$ , тогда путь  $f \circ \gamma$  соединяет точки  $y_0$  и  $y_1$ .  $\square$

**Предложение.** Пусть топологическое пространство является обобщением подмножеств  $X = \bigcup_{\alpha \in A} W_\alpha$ , где каждое  $W_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , линейно связно, а пересечение  $\bigcap_{\alpha \in A} W_\alpha \neq \emptyset$ . Тогда  $X$  — линейно связное пространство.

**Доказательство.** Доказательство очевидно: если точки  $x_0$  и  $x_1$  обе принадлежат одному и тому же подмножеству  $W_\alpha$ , то путь их соединяющий существует, поскольку  $W_\alpha$  линейно связно. Если же  $x_0 \in W_\alpha$ , а  $x_1 \in W_\beta$ , то каждую из них можно соединить путем с некоторой точкой  $y \in W_\alpha \cap W_\beta$ .  $\square$

**Предложение.** Пусть  $(X, \tau_X)$  и  $(Y, \tau_Y)$  — топологические пространства. Тогда произведение  $X \times Y$  линейно связно тогда и только тогда, когда  $X$  и  $Y$  — линейно связные пространства.

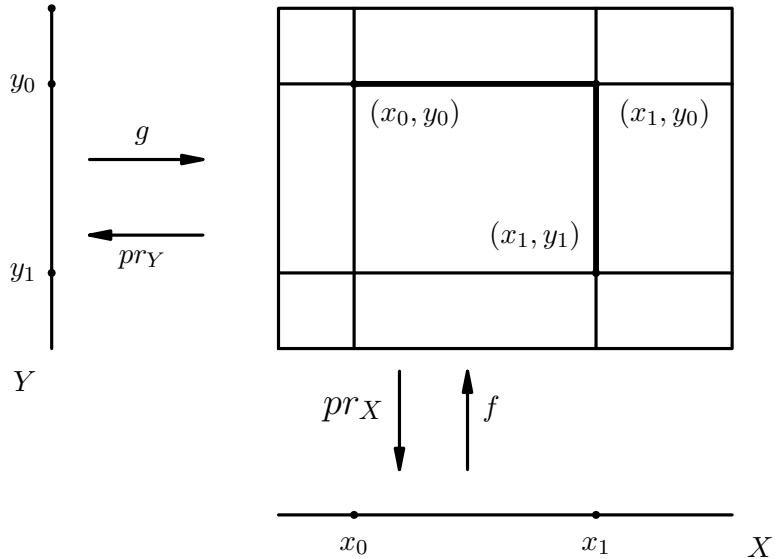
**Доказательство.**

" $\Rightarrow$ " Если  $X \times Y$  линейно связно, то  $X$  и  $Y$  линейно связны как образы пространства  $X \times Y$  при проекциях  $pr_X : X \times Y \rightarrow X$  и  $pr_Y : X \times Y \rightarrow Y$ .

" $\Leftarrow$ " Рассмотрим две произвольные точки  $(x_0, y_0)$  и  $(x_1, y_1)$  в произведении  $X \times Y$ . В пространстве  $X \times Y$  имеются подпространства  $X \times \{y_0\}$  и  $\{x_1\} \times Y$ , гомеоморфные пространствам  $X$  и  $Y$  соответственно. Пусть

$$f : X \ni x \mapsto (x, y_0) \in X \times \{y_0\} \quad \text{и} \quad g : Y \ni y \mapsto (x_1, y) \in \{x_1\} \times Y$$

— соответствующие гомеоморфизмы.



Так как  $X$  и  $Y$  линейно связны, то существуют путь  $\gamma$  в пространстве  $X$ , соединяющий точку  $x_0$  с точкой  $x_1$ , и путь  $\sigma$  в пространстве  $Y$ , соединяющий точку  $y_0$  с точкой  $y_1$ . Но тогда путь  $f \circ \gamma$  соединяет точку  $(x_0, y_0)$  с точкой  $(x_1, y_0)$ , а путь  $g \circ \sigma$  соединяет точку  $(x_1, y_0)$  с точкой  $(x_1, y_1)$ . Произведение  $(f \circ \gamma) * (g \circ \sigma)$  этих путей соединяет точку  $(x_0, y_0)$  с точкой  $(x_1, y_1)$ .  $\square$

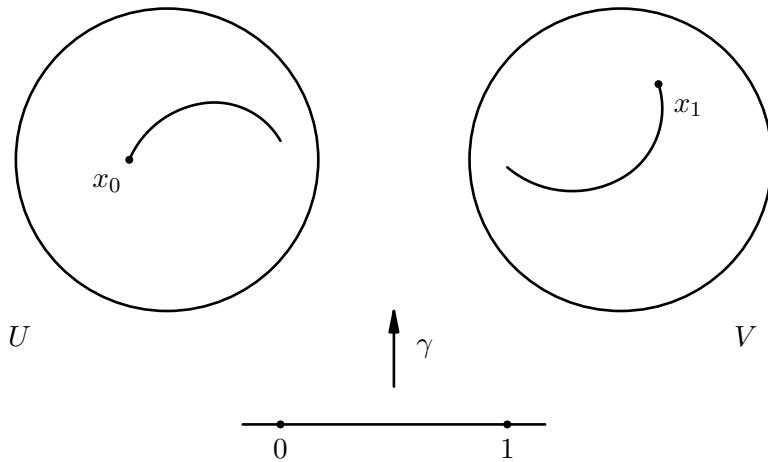
Применение метода математической индукции приводит к следующему утверждению.

**Следствие.** *Произведение  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  линейно связных топологических пространств является линейно связным пространством.*

**Предложение.** *Линейно связное пространство  $(X, \tau_X)$  является связным пространством.*

### Доказательство.

Предположим противное, что  $X = U \cup V$ , где  $U$  и  $V$  — непустые открытые множества и  $U \cap V = \emptyset$ . Пусть  $x_0 \in U$ , а  $x_1 \in V$ .



Рассмотрим путь  $\gamma : [0; 1] \rightarrow X$ , соединяющий  $x_0$  с  $x_1$ . При этом

$$[0; 1] = \gamma^{-1}(X) = \gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V),$$

где  $\gamma^{-1}(U)$  и  $\gamma^{-1}(V)$  — непустые открытые не пересекающиеся множества.

Противоречие.  $\square$

**Пример связного пространства, не являющегося линейно связным.**

Рассмотрим на плоскости  $\mathbb{R}^2$  подмножество  $X = A \cup B$ , являющееся объединением подмножества  $A$ , состоящего из одной точки  $a$  с координатами  $(0; 1)$  (**блоха**), и

$$B = [0; 1] \times \{0\} \cup \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2^n} \right\} \times [0; 1] \right) \quad (\text{гребенка}).$$

**Предложение.** *Множество  $X = A \cup B$ , определенное выше, является связным пространством, но не является линейно связным пространством.*

**Доказательство.**

1. Покажем, что  $X$  связно. Отметим сначала, что множество  $B$  линейно связно и, следовательно, связно. Предположим, что  $X = U \sqcup V$  — дизъ-

юнктное объединение двух открытых (а, следовательно, и замкнутых) подмножеств. Пусть  $a \in U$  и пусть  $U = U' \cap X$ , где  $U'$  — открытое множество в  $\mathbb{R}^2$ . Пересечение  $U' \cap B \neq \emptyset$ , но  $U' \cap B = U \cap B$ , поэтому  $U \cap B \neq \emptyset$ . Поскольку  $U$  открыто и замкнуто в  $X$ , то  $U \cap B$  открыто и замкнуто в  $B$ . Но  $B$  связно, поэтому  $U \cap B = B$  и, следовательно,  $U = X$ .

2. Покажем теперь, что  $X$  не является линейно связным. Для этого достаточно показать, что любой путь  $\gamma$  с началом в точке  $a$  ( $\gamma(0) = a$ ) является постоянным путем, то есть таким, что  $\gamma(t) = a$  для всех  $t \in [0; 1]$ . Это эквивалентно тому, что  $\gamma^{-1}(a) = [0; 1]$ . Поскольку отрезок  $[0; 1]$  связан, а  $\gamma^{-1}(a) \neq \emptyset$ , достаточно показать, что  $\gamma^{-1}(a)$  является одновременно и открытым и замкнутым подмножеством в  $[0; 1]$ .

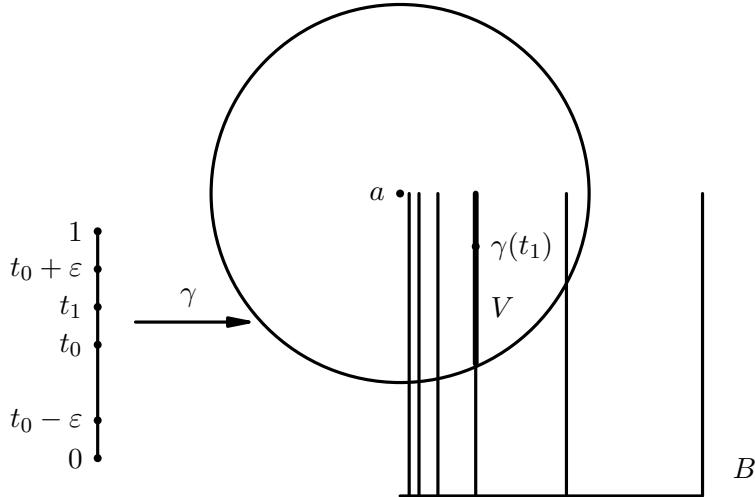
Подмножество  $\gamma^{-1}(a)$  замкнуто, поскольку точка  $a$  замкнута в хаусдорфовом пространстве  $X$ , а прообраз замкнутого множества замкнут.

Остается показать, что  $\gamma^{-1}(a)$  открыто в  $[0, 1]$ . Для этого достаточно показать, что вместе с каждой точкой  $t_0 \in \gamma^{-1}(a)$  подмножество  $\gamma^{-1}(a)$  содержит некоторый открытый интервал  $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ , если  $t_0 \neq 0$ , или интервал  $[0, \varepsilon)$  для точки 0.

Предположим противное, то есть что для любого  $\varepsilon > 0$  интервал  $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$  (интервал  $[0, \varepsilon)$ , если  $t_0 = 0$ ) содержит число  $t_1$ , такое что  $\gamma(t_1) \in B$ . Поскольку  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  — непрерывное отображение, и отображение включения  $i : X \rightarrow \mathbb{R}^2$  непрерывно по определению индуцированной топологии как инициальной, то из того, что  $i \circ \gamma(t_0) = a$ , следует, что существует  $\varepsilon > 0$ , такое что образ  $W = \gamma((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon))$  содержится в открытом круге  $B(a, \frac{2}{3}) \subset \mathbb{R}^2$ .

Если абсцисса точки  $\gamma(t_1)$  равна  $\frac{1}{k}$ , то  $\gamma(t_1)$  принадлежит отрезку

$$V = \left( \left\{ \frac{1}{k} \right\} \times [0; 1] \right) \cap B(a, \frac{2}{3}).$$



Рассмотрим пересечение  $V \cap W$  подмножества  $V$  с образом  $W$  интервала  $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ . Подмножество  $V$  открыто и замкнуто в  $X \cap B(a, \frac{2}{3})$  (в индуцированной топологии), поэтому пересечение  $V \cap W$  открыто и замкнуто в  $W$  (в индуцированной топологии). Но  $W = \gamma((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon))$  — связное подмножество, поскольку является образом связного интервала  $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ , а  $V \cap W$  — непустое открытое и замкнутое подмножество в  $W$ . Это значит, что  $V \cap W = W$  и, следовательно,  $W \subset V \subset B$ , но  $\gamma(t_0) = a \notin B$ . Противоречие. Таким образом, вместе с каждой точкой  $t_0 \in \gamma^{-1}(a)$  подмножество  $\gamma^{-1}(a)$  содержит некоторый открытый интервал  $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$  и, следовательно,  $\gamma^{-1}(a) = [0; 1]$  как открытое и замкнутое подмножество отрезка  $[0; 1]$ .

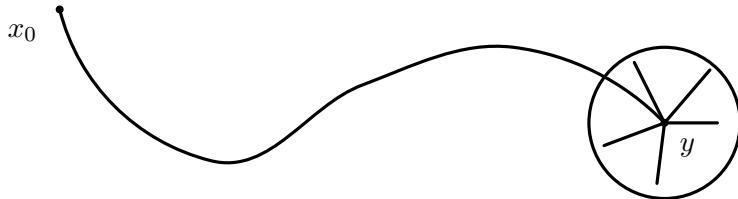
□

Другим примером является подмножество  $X \subset \mathbb{R}^2$ , являющееся объединением графика функции  $y = \sin \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$ , и отрезка  $\{0\} \times [-1, 1]$  оси ординат.

**Предложение.** *Всякое непустое открытое связное подмножество  $S$  в  $\mathbb{R}^n$  линейно связно.*

### Доказательство.

Предположим, что открытое подмножество  $S \subset \mathbb{R}^n$  связно, но не линейно связно. Выберем произвольную точку  $x_0 \in S$  и рассмотрим множество  $W$  точек из  $S$ , с которыми точку  $x_0$  можно соединить путем  $\gamma : [0; 1] \rightarrow S$ . Покажем, что множество  $W$  открыто. Пусть  $y \in W \subset S$ . Так как  $S$  — открыто, то существует открытый шар  $B(y, \varepsilon) \subset S$ . Пусть  $z \in B(y, \varepsilon)$ . Тогда существует путь  $\sigma$  из  $y$  в  $z$  по радиусу шара, а путь  $\gamma * \sigma$  соединяет  $x_0$  с  $z$ . Таким образом, вместе с каждой точкой  $y \in W$  в  $W$  содержится и некоторый открытый шар с центром в этой точке.



Пусть теперь множество точек  $V$ , которые нельзя соединить с точкой  $x_0$  не пусто и  $x_1 \in V$ . Вместе с точкой  $x_1$  в  $S$  содержится и некоторый открытый шар  $B(x_1, \varepsilon) \subset S$  с центром в этой точке. Все точки этого шара можно соединить с точкой  $x_1$  путем. Но это значит, что точки шара  $B(x_1, \varepsilon)$  нельзя соединить путем с точкой  $x_0$ . Таким образом, множество  $V$  открыто,  $S = W \cup V$  и  $W \cap V = \emptyset$ . Противоречие.  $\square$