13 Дифференцирование степенного ряда.

Для степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ корректно определена функция

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (|x|<R),$$

где R – радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Функция $f(x)$ дифференцируема при $|x|<R$ и

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} \quad (|x|<R).$$

[Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{k=1}^{\infty} k a x^{k-1}$ равен R, т.к. $\overline{\lim_k} |(k+1)a_{k+1}|^{1/k} = \overline{\lim_k} |a_k|^{1/k}$. Пусть $|x|<R$. Тогда существуют $R_1 < R$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\forall t \in B_\delta(0) \ (|x+t| < R_1), \text{ где } B_\delta(0) = \{t \in \mathbb{R} \mid |t| < \delta\}.$$

Определим функцию

$$g_k(t) = \begin{cases} a_k \cdot \frac{1}{t}\left((x+t)^k - x^k\right), & \text{если } t \in \check{B}_\delta(0), \\ k a_k x^{k-1}, & \text{если } t = 0 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N})$$

При этом $g_k(t) = a_k\left((x+t)^{k-1} + x(x+t)^{k-2} + \ldots + x^{k-1}\right) \ (t \in B_\delta(0))$

непрерывны на $B_\delta(0)$ и

$$|g_k(t)| \le k|a_k| R_1^{k-1} \quad (t \in B_\delta(0),\ k \in \mathbb{N}).$$

Тогда для $t \in \check{B}_\delta(0)$: $\frac{1}{t}(f(x+t)-f(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t)$, причём

$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(t)$ в силу того, что $|g_k(t)| \leq k|a_k|R_1^{k-1}$, является

непрерывной функцией $\Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x+t)-f(x)) = \lim_{t \to 0} \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} g_k(0) = \sum_{k=1}^{\infty} k a x^{k-1}$$

]