

⑦ Интегральный признак сходимости ряда.

Пусть $f(x) \geq 0$ ($x \geq 0$) не возрастает. Ряд $\sum_{j=1}^{\infty} f(j)$ сходится тогда и только тогда, когда функция

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (x > 0) \text{ ограничена.}$$

[$F(x)$ определена $\forall x > 0$.

Пусть $\sum_{j=1}^{\infty} f(j)$ сходится. Тогда $\exists K > 0 \forall n \in \mathbb{N} \left(\sum_{j=1}^n f(j) \leq K \right)$.

Таким образом $\forall x > 0$:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \leq \int_0^{[x]+1} f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^2 f(t) dt + \dots + \int_{[x]}^{[x]+1} f(t) dt \leq$$

$$F(0) + \sum_{j=1}^{[x]} f(j) \leq f(0) + K.$$

Обратно, если $F(x) \leq K$ ($x \geq 0$), то

$$\sum_{j=1}^n f(j) = \sum_{j=1}^n f(j) \int_{j-1}^j dt \leq \sum_{j=1}^n \int_{j-1}^j f(t) dt = \int_0^n f(t) dt = F(n) \leq K.]$$