12 Вторая теорема Абеля.

Пусть $R<+\infty$ – радиус сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ и ряд сходится в точке $x=R$.

Тогда функция f, заданная равенством $f(x)\equiv \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ $(-R<x\leq R)$, непрерывна.

[Функция f непрерывна на интервале $(-R; R)$ по первой теореме Абеля, и нуждается в проверке непрерывности в точке $x=R$. Для этого рассмотрим наш ряд на отрезке $[0; R]$.

Полагая $v_k(x)=a_k R^k$, $u_k(x)=\left(\frac{x}{R}\right)^k$ $(0\leq x\leq R)$, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)\, v_k(x).$$

По признаку Абеля ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(x) v_k(x)$ сходится, т.к.

Также его сумма является непрерывной на отрезке $[0; R]$, т.к. ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно $v_k(x)$ и u_k непрерывна. В частности, f непрерывна в точке R.]