(17) Свойство счётной аддитивности.

Если $\Pi = \sum_{k=1}^{\infty} \Pi_k$, где Π, Π_k - прямоугольники, то $m(\Pi) = \sum_{k=1}^{\infty} m(\Pi_k)$.

[Пусть $n \in \mathbb{N}$ произвольно. В силу того, что Π_k не пересекаются попарно, найдутся прямоугольники $\Pi'_{n+1}, \dots, \Pi'_s$ такие, что

$\Pi = \sum_{k=1}^{n} \Pi_k + \sum_{j=n+1}^{s} \Pi'_j$, и в силу аддитивности и неотрицательности меры m:

$$\sum_{k=1}^{n} m(\Pi_k) \leq \sum_{k=1}^{n} m(\Pi_k) + \sum_{j=n+1}^{s} m(\Pi'_j) = m\left(\sum_{k=1}^{n} \Pi_k + \sum_{j=n+1}^{s} \Pi'_j\right) = m(\Pi).$$

Из произвольности n получаем $\sum_{k=1}^{\infty} m(\Pi_k) \leq m(\Pi)$.

Обратное неравенство следует из следующего утверждения.

Если $\Pi \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \Pi_k$, то $m(\Pi) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(\Pi_k)$.

[Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и $\overline{\Pi}$ - замкнутый прямоугольник такой, что $\overline{\Pi} \subseteq \Pi$ и $m(\Pi) \leq m(\overline{\Pi}) + \varepsilon/2$. Для каждого k рассмотрим открытый прямоугольник $\widetilde{\Pi}_k$ такой, что

$\Pi_k \subseteq \widetilde{\Pi}_k$, $m(\widetilde{\Pi}_k) < m(\Pi_k) + 2^{-(k+1)} \cdot \varepsilon$ $(k = 1, 2, \dots)$. Ясно,

что $\overline{\Pi} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \widetilde{\Pi}_k$. Семейство $\widetilde{\Pi}_1, \widetilde{\Pi}_2, \dots$ образует открытое

покрытие компактного множества $\overline{\Pi}$ =>

=> существует конечное семейство $\widetilde{\Pi}_1, \dots, \widetilde{\Pi}_N$, которое

покрывает $\overline{\Pi}$: $\overline{\Pi} \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} \widetilde{\Pi}_k$. В силу одного из свойств меры

$$m(\overline{\Pi}) \leq \sum_{k=1}^{N} m(\widetilde{\Pi}_k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(\Pi) \leq m(\overline{\Pi}) + \varepsilon/2 \leq \sum_{k=1}^{N} m(\widetilde{\Pi}_k) + \varepsilon/2 \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} m(\widetilde{\Pi}_k) + \varepsilon/2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(\Pi_k) + \varepsilon. \quad \blacksquare$$