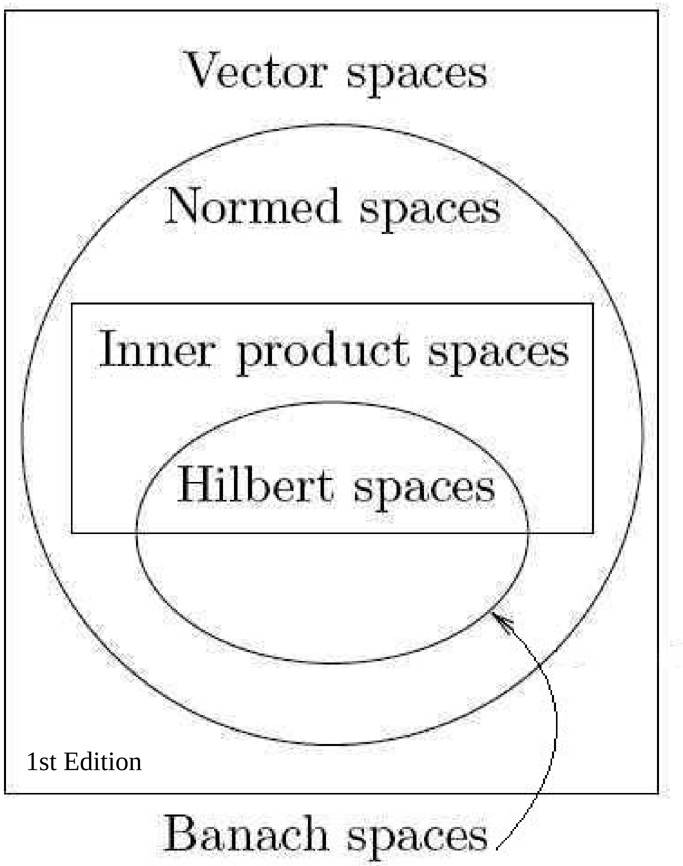
Phạm Đình Đồng



Exercises in Functional Analysis

A review for final exam
2008

Lời tựa

To all the girls
i love before.

Tôi đến với giải tích hàm như một "sự sắp đặt của số phận". Có lẽ, đó là nguyên nhân để tôi việc viết tập tài liệu nhỏ này. Xin nhấn mạnh rằng, đây chỉ là sự góp nhặt khai triển chẳng có gì là sáng tạo. Thỉnh thoảng có đôi lời khen tặng, tôi lấy làm xấu hổ như đã cưỡng chiếm một cái gì đó không phải phận mình được hưởng.

Khi một kẻ bình thường quên ước lượng tài sức của mình, viết về một điều quá rộng lớn và trừu tượng chắc hẳn không thể tránh khỏi thiếu sót. Rất mong sự chỉ giáo của các độc giả.

Nước muôn sông không đủ cho tôi rửa tai để nghe những lời cao luận.

Huế, tháng 5, 2008.

Phạm Đình Đồng

"A journey of a thousand miles begin with one step" - Lão Tử

1 Không gian định chuẩn

Bài tập 1.1. *Cho X là một không gian vectơ , $f_1, f_2 : X \longrightarrow K$ là các ánh xạ tuyến tính thỏa $f_1(x)f_2(x) = 0, \forall x \in X$. Chứng minh rằng $f_1 \equiv 0$ hoặc $f_2 \equiv 0$.*

Chứng minh. Giả sử $f_1 \neq 0$ ta cần chứng minh $f_2 = 0$. Vì $f_1 \neq 0$ nên tồn tại $x_1 \in X$ sao cho $f_1(x_1) \neq 0$, lúc đó

$$f_2(x_1 f_1(x_1)) = f_2(x_1)f_1(x_1) = 0$$

Suy ra $f_2(x_1) = 0$ hay $x_1 \in Ker f_2$.
Nếu $f_2 \neq 0$ lúc đó tồn tại $x_2 \in X$ sao cho $f_2(x_2) \neq 0$ thì $x_2 \in Ker f_1$. Đặt $x_0 = x_1 + x_2$, lúc đó

$$f_1(x_0) = f_1(x_1) + f_1(x_2) = f_1(x_1) \neq 0$$

$$f_2(x_0) = f_2(x_1) + f_2(x_2) = f_2(x_2) \neq 0$$

$$\Longrightarrow f_1(x_0)f_2(x_0) = f_1(x_1)f_2(x_2) \neq 0$$

Mâu thuẫn với giả thiết, vậy $f_2 \equiv 0$. □

Bài tập 1.2. *Cho X là không gian vectơ , $A : X \longrightarrow X$ là ánh xạ tuyến tính thỏa $A^2 = 0$. Chứng minh rằng $Id - A$ là song ánh.*

Chứng minh. Với mọi $x_1, x_2 \in X$ thỏa $(Id - A)(x_1) = (Id - A)(x_2) \Rightarrow x_1 - A(x_1) = x_2 - A(x_2) \Rightarrow A(x_1 - x_2) = x_1 - x_2 \Rightarrow A^2(x_1 - x_2) = A(x_1) - A(x_2) = 0 \Rightarrow A(x_1) = A(x_2)$. từ đó suy ra $x_1 = x_2$. Vậy $Id - A$ là đơn ánh.
Với mọi $y \in X$, xét $x = A(y) + y \in X$, khi đó $(Id - A)(x) = (Id - A)(A(y) + y) = A(y) + y - A(A(y) + y) = A(y) + y - A^2(y) - A(y) = y$. Vậy $Id - A$ là toàn ánh.
Vậy $Id - A$ là song ánh. □

Bài tập 1.3. *Cho X, Y là hai không gian vectơ với $dim X = n, dim Y = m$. Chứng minh rằng $dim(L(X, Y)) = n.m$.*

Chứng minh. Ta có $L(X, Y) = \{f : X \longrightarrow Y$ là các ánh xạ tuyến tính $\}$ là một không gian vectơ . Lúc đó $L(X, Y) \cong \text{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K})$, suy ra $dim(L(X, Y)) = dim\text{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K})$.
Mặt khác ta thấy A_{ij} là ma trận sao cho $a_{ij} = 1, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ còn các vị trí còn lại bằng 0 thì lúc đó hệ gồm $\{(A_{ij})\}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$

là độc lập tuyến tính.
Mặt khác

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

thì

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} A_{ij}$$

Do đó $\{A_{ij}\}$ là hệ sinh của $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K})$.
Vậy $\{A_{ij}\}$ là cơ sở của $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K})$ và nó có $m \times n$ phần tử.
Vậy $dim(L(X,Y)) = n.m.$ $\square$

Bài tập 1.4. *Cho $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ là ánh xạ tuyến tính , $Y \subset X$ thỏa $Kerf \subset Y$. Chứng minh rằng $Y = X$ hoặc $Y = Kerf$.*

Chứng minh. Giả sử Y là không gian con của X chứa $\mathrm{Ker}f$ thực sự. Lúc đó có $y_0 \in Y$ và $y_0 \notin \mathrm{Ker}f$ nên $f(y_0) \neq 0$.
Với mọi $x \in X$, ta đặt $z = x - \frac{f(x)}{f(y_0)} y_0$ thì

$$f(z) = f(x - \frac{f(x)}{f(y_0)} y_0) = f(x) - \frac{f(x)}{f(y_0)} f(y_0) = f(x) - f(x) = 0$$

$$\Rightarrow z = x - \frac{f(x)}{f(y_0)} y_0 \in \mathrm{Ker}f \subset Y$$

Suy ra $x = z + \dfrac{f(x)}{f(y_0)} y_0 \in Y$, tức là $X = Y$. $\square$

Bài tập 1.5. *Cho $X \neq \{0\}$ là không gian vectơ thực hoặc phức. Chứng minh rằng ta có thể trang bị ít nhất một chuẩn trên X.*

Chứng minh. Gọi $B = \{e_\alpha | \alpha \in I\}$ là cơ sở Hamel của X trên $\mathbb{K}$. Lúc đó mọi $x \in X, x \neq 0$ có thể viết duy nhất dưới dạng

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_{i_j} e_{i_j}$$

trong đó $n \in \mathbb{N}, x_{i_j} \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, i_j \in I, j = \overline{1,n}$ đôi một phân biệt. Ta định nghĩa

$$\|x\| = \sum_{j=1}^{n} \left|x_{i_j}\right| \text{ và } \|x\| = 0 \text{ nếu } x = 0$$

Ta sẽ chứng minh $\|.\|$ là một chuẩn trên X. Thật vậy,

- Lấy $x \in X, x \neq 0$. Lúc đó $x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_{i_j} e_{i_j}$ trong đó $n \in \mathbb{N}, x_{i_j} \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, i_j \in I, j = \overline{1, n}$ đôi một phân biệt. Vì $x \neq 0$ nên tồn tại ít nhất một $i_j \neq 0$. Do đó, $\|x\| > 0$.

- Với mọi $x \in X$ và $\lambda \in \mathbb{K}$, nếu $x = 0$ hoặc $\lambda = 0$ thì $\lambda x = 0$, do đó $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$. Giả sử $x \neq 0, \lambda \neq 0$. Nếu $x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_{i_j} e_{i_j}$ thì $\lambda x = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda x_{i_j} e_{i_j}$. Suy ra $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.

- Lấy tùy ý $x, y \in X$. Nếu $x = 0$ hoặc $y = 0$ thì $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$. Ngược lại, nếu $x, y \neq 0$, ta xem x có biểu diễn như trên và $y = \sum\limits_{s=1}^{m} y_{t_s} e_{t_s}$ trong đó $m \in \mathbb{N}, x_{t_s} \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, t_s \in I, s = \overline{1, m}$ đôi một phân biệt.
  Đặt $C_x, C_y \subset I$ như sau
  $$C_x = \{i_j, j = \overline{1, n}\} \text{ và } C_y = \{t_s, s = \overline{1, m}\}$$
  Nếu $C_x \cap C_y = \emptyset$ thì $x + y = \sum\limits_{j=1}^{n} x_{i_j} e_{i_j} + \sum\limits_{s=1}^{m} y_{t_s} e_{t_s}$. Khi đó $\|x + y\| = \sum\limits_{j=1}^{n} |x_{i_j}| + \sum\limits_{s=1}^{m} |x_{t_s}| = \|x\| + \|y\|$.
  Bây giờ ta giả sử $C_{xy} = C_x \cap C_y \neq \emptyset$. Không mất tính tổng quát, giả sử $i_n = t_m, i_{n-1} = t_{m-1}, \ldots, i_{n-k} = t_{m-k}$ thì $C_{xy} = \{i_n, \ldots, i_{n-k}\} = \{t_m, \ldots, t_{m-k}\}$. Ta có thể biểu diễn $x + y$ như sau
  $$x + y = \sum_{j=1}^{n-k-1} x_{i_j} e_{i_j} + \sum_{s=1}^{m-k-1} y_{t_s} e_{t_s} + \left[\sum_{l=1}^{k} (x_{i_{n-l}} + y_{t_{m-l}}) e_{i_{n-l}} \right]$$
  với $(x_{i_{n-l}} + y_{t_{m-l}}) \neq 0$, nếu nó bằng 0 thì ta không viết ra.
  Nếu $x + y = 0$ thì $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, hiển nhiên. Nếu $x + y \neq 0$ thì
  $$\begin{aligned} \|x + y\| &= \sum_{j=1}^{n-k-1} |x_{i_j}| + \sum_{s=1}^{m-k-1} |y_{t_s}| + \sum_{l=1}^{k} |x_{i_{n-l}} + y_{t_{m-l}}| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n-k-1} |x_{i_j}| + \sum_{s=1}^{m-k-1} |y_{t_s}| + \sum_{l=1}^{k} (|x_{i_{n-l}}| + |y_{t_{m-l}}|) \\ &= \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

$\square$

Bài tập 1.6. *Kiểm tra các tập cho dưới đây là không gian định chuẩn .*

a) $X = \mathbb{K}^n, x = (x_1, \dots, x_n), \|x\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i|$

b) $X = c$, *các dãy số thực hoặc phức hội tụ*, $\|x\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$

c) $X = M[a,b]$, *tập gồm tất cả các hàm số bị chặn trên* $[a,b]$, $\|x\| = \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$

d) $X = C_{[a,b]}$, *các hàm số liên tục trên* $[a,b]$, $\|x\| = (\int\limits_a^b |x(t)|^2 dt)^{1/2}$

e) $X = l^1$, *tập tất cả các dãy số thực hoặc phức* $(x_n)_n$*sao cho* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty$ *và* $\|x\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$

Chứng minh.

a) Ta có với mọi $x \in X$, $\|x\| \geq 0$.
$\|x\| = 0 \Rightarrow \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i| = 0 \Rightarrow x_i = 0 \, \forall i = \overline{1,n} \Rightarrow x = 0$
$\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, ta có

$$\|\lambda x\| = \max_{i=\overline{1,n}} |\lambda x_i| = |\lambda| \max_{i=\overline{1,n}} |x_i| = |\lambda| \|x\|$$

Với mọi $x, y, z \in X$, ta có

$$\|x + y\| = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i + y_i| \leq \max_{i=\overline{1,n}} |x_i| + \max_{i=\overline{1,n}} |y_i|$$

Suy ra $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
Vậy $(X, \|.\|)$ là một không gian định chuẩn.

b) Tương tự a)

c) Tương tự.

d) Ta có $\|x\| = (\int\limits_a^b |x(t)|^2 dt)^{1/2} \geq 0$ và $\|x\| = (\int\limits_a^b |x(t)|^2 dt)^{1/2} = 0 \Rightarrow \int\limits_a^b |x(t)|^2 dt = 0$. Giả sử $x \neq 0$, tức là có (α, β) sao cho $x(t) \neq 0, \forall t \in (\alpha, \beta)$ nên $\int\limits_a^b |x(t)|^2 dt \geq \int\limits_\alpha^\beta |x(t)|^2 dt > 0$, mâu thuẫn.

Với mọi $x \in X, \lambda \in \mathbb{K}$, ta có $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.
$\forall x, y \in X$, ta có theo bất đẳng thức tích phân thì

$$(\int_a^b |x(t)+y(t)|^2 dt)^{1/2} \leq (\int_a^b |x(t)|^2 dt)^{1/2} + (\int_a^b |y(t)|^2 dt)^{1/2}$$

$\Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
Vậy $(X, \|.\|)$ là một không gian định chuẩn.

e) Ta có $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \geq 0, \forall x \in X$.
$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = 0 \Rightarrow x_n = 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0$.
Với mọi $x \in X, \lambda \in \mathbb{K}$, ta có $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.
$\forall x, y \in X$, ta có

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n|, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$$

$\Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
Vậy $(X, \|.\|)$ là một không gian định chuẩn.

□

Bài tập 1.7. *Cho $(x_n)_n, (y_n)_n$ là hai dãy Cauchy trong X. Chứng minh rằng $\alpha_n = \|x_n - y_n\|$ hội tụ.*

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh $(\alpha_n)_n$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$ thì $(\alpha_n)_n$ hội tụ. Thật vậy, với mọi $m, n \in \mathbb{N}$ ta có $|\alpha_m - \alpha_n| = |\|x_m - y_m\| - \|x_n - y_n\|| \leq \|x_m - y_m - x_n + y_n\| \leq \|x_m - x_n\| + \|y_m - y_n\|$.
Do $(x_n)_n, (y_n)_n$ là hai dãy Cauchy trong X nên khi $m, n \to \infty$ thì $\|x_m - x_n\| \to 0$ và $\|y_m - y_n\| \to 0$. Suy ra $|\alpha_m - \alpha_n| \to 0$ khi $m, n \to \infty$.

□

Bài tập 1.8. *Cho $\|.\|_1, \|.\|_2, \ldots, \|.\|_k$ là các chuẩn trên không gian định chuẩn X, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}_+^*$.*

1. *Chứng minh* $\max\{\|.\|_1, \ldots, \|.\|_k\}$ *là một chuẩn.*

2. *Chứng minh* $\sum_{i=1}^{k} \alpha_k \|.\|_k$ *là một chuẩn.*

3. $f \in \mathcal{L}(X,Y)$, Y *là không gian định chuẩn nào đó. Ta định nghĩa*

$$\begin{aligned} \|.\|_a : \ X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|f(x)\|_1 \end{aligned}$$

Chứng minh $\|.\|_a$ *là một chuẩn khi và chỉ khi* f *đơn ánh.*

Chứng minh.

1. Rõ.

2. Rõ.

3. $\|x\|_a = 0 \Leftrightarrow \|f(x)\|_1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$.
   $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \ker f = 0$. Vậy f đơn ánh.
   Các công việc còn lại xin dành cho độc giả.

$\square$

Bài tập 1.9. *Cho* $a > 1$. *Trên* $C[0,1]$ *xét các chuẩn sau* $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$, $\|f\|_1 = a\int\limits_0^1 |f(t)|\,dt$, $\forall f \in C[0,1]$. *Chứng minh* $\|f\| = \min\{\|f\|_1, \|f\|_\infty\}$ *là một chuẩn khi và chỉ khi* $a \le 1$

Chứng minh.
Nếu $a \le 1$ thì $\|f\|_1 \le \|f\|_\infty$ nên $\|f\| = \|f\|_1$, rõ ràng là một chuẩn.
Lấy $f_n(t) = t^n, \forall t \in [0,1], \forall n \ge 0$. Khi đó $\|f_0\|_1 = a, \|f_0\|_\infty = 1$, do đó $\|f_0\| = \min(1,a)$. Mặt khác $\|f_n\|_1 = \frac{a}{n+1}, \|f_n\|_\infty = 1$, do đó $\|f_n\| = \min(1, \frac{a}{n+1}), \forall n \le 1$. $\forall n$, ta có$\|f_0 + f_n\|_1 = a(1 + \frac{1}{n+1}), \|f_0 + f_n\|_\infty = 2$, do đó $\|f_0 + f_n\| = \min(2, a(1 + \frac{1}{n+1}))$. Nếu $\|.\|$ là một chuẩn thì nó thỏa bất đẳng thức tam giác, tức là

$$\min(2, a(1+\frac{1}{n+1})) \le \min(1,a) + \min(1, \frac{a}{n+1})$$

Cho $n \to \infty$ ta được

$$\min(2,a) \le \min(1,a) + \min(0,1)$$

Suy ra $\min(2,a) \le \min(1,a)$, tức là $a \le 1$.[1]

$\square$

Bài tập 1.10. *Cho* X *là một không gian định chuẩn. Tìm tất cả các không gian con của* X *chứa trong một hình cầu.*

[1] *min* của hai chuẩn chưa hẳn là chuẩn.

Chứng minh. Giả sử L là không gian con của X và $B(a,\epsilon) \subset X$ sao cho $L \subset B(a,\epsilon)$. Lấy $x \in L$ tùy ý. Khi đó $nx \in L, \forall n \in \mathbb{N}$. Vì $L \subset B(a,\epsilon)$ nên $nx \in B(a,\epsilon)$, tức là $\|nx - a\| < \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}$, từ đó $\|nx\| \leq \|nx - a\| + \|a\| < \epsilon + \|a\|$. Suy ra $\|x\| < \dfrac{\epsilon + \|a\|}{n}$. Cho $n \to \infty$ ta có $\|x\| = 0$, hay $x = 0$. Vậy $L = \{0\}$.

□

Bài tập 1.11. *Cho X là một không gian định chuẩn. Tìm tất cả các không gian con của X chứa một hình cầu.*

Chứng minh. Gọi L là không gian con của X sao cho $B(a,\epsilon) \subset L$. Rõ ràng $a \in L$. Lấy $x \in B(0,\epsilon)$, tức là $\|x\| < \epsilon$. Khi đó $a + x \in B(a,\epsilon) \subset L$. Suy ra $x \in L$, tức là $B(0,\epsilon) \subset L$.
Mặt khác $\forall x \in X, x \neq 0$ ta có $\dfrac{\epsilon x}{2\|x\|} \in B(0,\epsilon)$ nên $\dfrac{\epsilon x}{2\|x\|} \in L$. Vì L là không gian con nên $x \in L$. Do đó, $X \subset L$. Vậy $L = X$.

□

Bài tập 1.12. *Cho X là không gian định chuẩn và G là không gian con của X. Chứng minh rằng hoặc $G = X$ hoặc $\overset{\circ}{G} = \emptyset$.*

Chứng minh. Nếu $\overset{\circ}{G} = \emptyset$ thì theo bài 1.11 ta có $G = X$.

□

Bài tập 1.13. *Cho X, Y là hai không gian định chuẩn. $A : X \longrightarrow Y$ là toán tử tuyến tính liên tục, $(A_n)_n$ là dãy các toán tử tuyến tính liên tục từ X vào Y. Kí hiệu*

$$U = \{x \in X |\, A_n x \textit{ không hội tụ về } Ax\}$$

và

$$V = \{x \in X |\, (A_n x)_n \textit{ không phải là dãy Cauchy }\}$$

Chứng minh rằng U và V hoặc bằng $\emptyset$ hoặc trù mật trong X.

Chứng minh. Ta có

$$C_U = X \backslash U = \{x \in X |\, A_n x \text{ hội tụ về} Ax\}$$

Rõ ràng $X \backslash U$ là một không gian con của X. Giả sử $x_0 \in U$ và nếu $x \in C_U$ thì $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0, x + \lambda x_0 \in U$. Thật vậy, nếu ngược lại $x + \lambda x_0 \in C_U$ ta suy ra $x_0 \in C_U$, vô lý. Lúc đó $\forall x \in C_U, \forall n \in \mathbb{N}, x + \dfrac{1}{n} x_0 \in U$ và dãy $x + \dfrac{1}{n} x_0 \to x$ nên $x \in \overline{U}$, tức là $C_U \subset \overline{U}$. Do đó, $X = U \cup C_U \subset \overline{U}$. Vậy $\overline{U} = X$.
Tương tự cho V.

□

Bài tập 1.14. *Cho X là một không gian định chuẩn và $A \subset X$ sao cho $X \backslash A$ là không gian con tuyến tính của X. Chứng minh A hoặc bằng $\emptyset$ hoặc trù mật trong X.*

Chứng minh. Theo giả thiết $\overset{\circ}{X \backslash A} = \emptyset$ hoặc $X \backslash A = X$. Suy ra $A = \emptyset$ hoặc $X \backslash \overline{A} = \emptyset$, tức là $A = \emptyset$ hoặc $\overline{A} = X$. Do đó, A hoặc bằng $\emptyset$ hoặc trù mật trong X.

□

Bài tập 1.15. *Chứng minh rằng trong không gian định chuẩn X, $\overline{B(x_0, r)} = B'(x_0, r)$ và $int(B'(x_0, r)) = B(x_0, r)$.*

Chứng minh.

1. $\overline{B(x_0, r)} = B'(x_0, r)$.
   Ta có $B(x_0, r) \subset B'(x_0, r)$, do $B'(x_0, r)$ đóng nên $\overline{B(x_0, r)} \subset B'(x_0, r)$.
   Ngược lại, lấy $x \in B'(x_0, r)$ thì $\|x - x_0\| \leq r$. Ta chọn dãy $(x_n)_n$ như sau
   $$x_n = 1 - \frac{1}{n}x + \frac{1}{n}x_0,$$
   $\|x_n - x_0\| = \|1 - \frac{1}{n}x + \frac{1}{n}x_0 - x_0\| = \|(1 - \frac{1}{n})(x - x_0)\| = (1 - \frac{1}{n})\|x - x_0\| \leq \|x - x_0\| \leq r$,
   $\Rightarrow \|x_n - x_0\| \leq r$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ hay $x_n \in B(x_0, r)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ hay $(x_n)_n \subset B(x_0, r)$.
   Ta có $\|x_n - x\| = \|1 - \frac{1}{n}x + \frac{1}{n}x_0 - x\| = \|\frac{1}{n}(-x + x_0)\| = \frac{1}{n}\|(-x + x_0)\| \leq \frac{r}{n}, \forall n$. Suy ra $\|x_n - x\| \to 0, n \to \infty$
   Vậy $x \in \overline{B(x_0, r)}$ hay $\overline{B(x_0, r)} \supset B'(x_0, r)$.

2. $\text{int}(B'(x_0, r)) = B(x_0, r)$
   Ta có $B(x_0, r) \subset B'(x_0, r)$, suy ra $B(x_0, r) \subset \text{int}(B'(x_0, r))$.
   Mặt khác, với mọi $x \in \text{int}(B'(x_0, r))$ ta cần chứng minh $\|x - x_0\| < r$.
   Giả sử $\|x - x_0\| = r$. Vì $x \in \text{int}(B'(x_0, r))$ nên có $s > 0$ sao cho $B(x, s) \in \text{int}(B'(x_0, r))$. Ta lấy $x_1 = (1 + \frac{s}{2r})x - \frac{sx_0}{2r}$, lúc đó $\|x_1 - x\| = \|(1 + \frac{s}{2r})x - \frac{sx_0}{2r} - x\| = \frac{s}{2r}\|x - x_0\| = \frac{s}{2r}.r = \frac{s}{2} < s$.
   Suy ra $x_1 \in B(x, s)$ nên $x_1 \in \text{int}(B'(x_0, r))$ $(*)$.
   Hơn nữa, $\|x_1 - x_0\| = \|(1 + \frac{s}{2r})x - \frac{sx_0}{2r} - x_0\| = (1 + \frac{s}{2r})\|x - x_0\| = (1 + \frac{s}{2r})r = r + \frac{s}{2} > r$.
   $\Rightarrow x_1 \notin B'(x_0, r) \Rightarrow x_1 \notin \text{int}(B'(x_0, r))$, mâu thuẫn với $(*)$.
   Vậy $\|x - x_0\| < r$ hay $x \in B(x_0, r)$. Suy ra $\text{int}(B'(x_0, r)) = B(x_0, r)$.
   Nhận xét: Các khẳng định trên không đúng trong không gian mêtric.
   Chẳng hạn, đối với mêtric rời rạc[2] (X, d) ta có $B'(x_0, 1) = X$ và

[2]Ta nên nghĩ đến mêtric này khi tìm phản ví dụ về sự khác nhau giữa không gian định chuẩn và không gian mêtric. Đây là một trong những ví dụ chứng tỏ một mêtric chưa hẳn sinh ra một chuẩn.

$B(x_0, 1) = \{x_0\}$.
Một ví dụ khác là không gian mêtric $(\mathbb{N}, d)$ với d được định nghĩa như sau:

$$d(m,n) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } m = n \\ \dfrac{1}{1+\min(m,n)} & \text{nếu } n \neq m \end{cases}$$

Ta có $B'(0,1) \neq \overline{B(0,1)}$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} B'(0,1) &= \{n \in \mathbb{N} : d(n,0) \leq 1\} = \{n \in \mathbb{N}\} = X \\ B(0,1) &= \{n \in \mathbb{N} : d(n,0) < 1\} = \{0\} \\ \overline{B(0,1)} &= \{0\} \end{aligned}$$

□

Bài tập 1.16. *Cho $A, B \subset X$. Chứng minh rằng*

1. *A đóng, B compact thì $A + B$ đóng.*
2. *A, B compact thì $A + B$ compact.*
3. *A, B đóng mà $A + B$ không đóng.*

Chứng minh.

1. A đóng, B compact thì $A + B$ đóng.
   Lấy $(z_n)_n \subset A + B$, $z_n \to z$. Ta cần chứng minh $z \in A + B$.
   Do $(z_n)_n \subset A + B$ nên $z_n = x_n + y_n, x_n \in A, y_n \in B \forall n \in \mathbb{N}$.
   Vì $(y_n)_n \subset B$ và B compact nên có dãy con $y_{nk} \to y_0 \in B$, và do dãy con z_{nk} cũng hội tụ về z nên $x_{nk} = z_{nk} - y_{nk}$ hội tụ về $z - y_0$.
   Do A đóng nên $z - y_0 = x_0 \in A$ hay $z = x_0 + y_0 \in A + B$.
   Vậy $z_n \to z \in A + B$ nên $A + B$ là đóng.

2. A, B compact thì $A + B$ compact.
   Lấy $(z_n)_n \subset A + B$ khi đó $z_n = x_n + y_n, x_n \in A, y_n \in B \forall n \in \mathbb{N}$. Vì A, B compact nên tồn tại hai dãy con $(x_{nk} \subset (x_n)_n)$ và $y_{nl} \subset (y_n)_n$ sao cho $x_{nk} \to a_0 \in A, y_{nl} \to b_0 \in B$
   Từ hai dãy con trên ta trích ra được hai dãy con x_{nkj}, y_{nkj} sao cho $x_{nkj} \to a_0 \in A, y_{nkj} \to b_0 \in B$
   $\Rightarrow z_{nkj} = x_{nkj} + y_{nkj} \to a_0 + b_0 \in A + B$

3. A, B đóng mà $A + B$ không đóng.

$$A = \{n + \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$$
$$B = \{-n | n \in \mathbb{N}\}$$

A, B đóng và $A + B \supset \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$
nhưng $(\frac{1}{n})_{n \in nn} \subset A + B$ dần về 0 và $0 \notin A + B$
Vậy $A + B$ không đóng.

$\square$

Bài tập 1.17. *Nếu $B(x_0, r) \subset X$ và Y là không gian con của không gian định chuẩn X thỏa $B(x_0, r) \subset Y$. Chứng minh $X = Y$.*

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh $X \subset Y$. Thật vậy, $\forall x \in X$, lấy $y = \frac{r}{1+\|x\|}x + x_0$, lúc đó

$$\|y - x_0\| = \frac{r\|x\|}{1 + \|x\|} < r$$

$\Rightarrow \in B(x_0, r) \subset Y$
Mà $\frac{r}{1+\|x\|}x = y - x_0 \in Y$ do $x_0 \in B(x_0, r) \subset Y$, nên

$$\frac{1 + \|x\|}{r}(\frac{r}{1 + \|x\|}x) = \frac{1 + \|x\|}{r}(y - x_0) \in Y$$

$\Rightarrow x \in Y$ hay $X \subset Y$.
Vậy $X = Y$. $\square$

Bài tập 1.18. *Không gian định chuẩn nào ở bài 1.6 là không gian Banach.*

Chứng minh.

a) X là không gian Banach. Thật vậy, lấy $(x_n)_n$ là một dãy Cauchy trong X, ta có
$$\|x_k - x_m\| \to 0, k, m \to \infty$$
hay
$$\max_{i=\overline{1,n}} |x_k^i - x_m^i| \to 0, k, m \to \infty$$
Suy ra $|x_k^i - x_m^i| \to 0, k, m \to \infty, \forall i = \overline{1, n}$
$\Rightarrow (x_n^i)_n$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{K}$ nên $x_n^i \to x_0^i \in \mathbb{K}, \forall i = \overline{1, n}$.
Ta đặt $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$, lúc đó
$$\|x_n - x_0\| = \max_{i=\overline{1,n}} |x_n^i - x_0^i| \to 0, n \to \infty.$$
Vậy $x_n \to x_0 \in \mathbb{K}^n$.

b) X là không gian Banach. Thật vậy, lấy $(x_n)_n$ là một dãy Cauchy trong X, ta có
$$\|x_k - x_m\| \to 0, k, m \to \infty$$

hay
$$\sup_{i\in\mathbb{N}}|x_k^i - x_m^i| \to 0, k, m \to \infty$$
Suy ra $|x_k^i - x_m^i| \to 0, k, m \to \infty, \forall i \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow (x_n^i)_n$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{K}$ nên $x_n^i \to x_0^i \in \mathbb{K}, \forall i =\in \mathbb{N}$.
Đặt x_0 là dãy $(x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ta sẽ chứng minh dãy này hội tụ. Thật vậy, từ bất đẳng thức
$$|x_0^n - x_0^m| = |x_0^n - x_k^n + x_k^n - x_k^m + x_k^m - x_0^m| \le |x_0^n - x_k^n| + |x_k^n - x_k^m| + |x_k^m - x_0^m|$$
ta có $(x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{K}$ nên x_0 hội tụ.
Tiếp theo, ta sẽ chứng minh $(x_n)_n$ hội tụ về x_0 trong X.
$$\|x_n - x_0\| = \sup_{i\in\mathbb{N}}|x_n^i - x_0^i|$$
Lấy $\epsilon > 0$ bất kì, do $x_n^k \to x_n^0$ khi $k \to \infty$ nên với m đủ lớn thì $|x_n^k \to x_n^0| < \frac{\epsilon}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$ nên
$$\|x_n - x_0\| = \sup_{i\in\mathbb{N}}|x_n^i - x_0^i| \le \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$
hay $x_n \to x_0, n \to \infty$.

c) X là không gian Banach. Thật vậy, lấy $(x_n)_n$ là một dãy Cauchy trong X, ta có
$$\|x_n - x_m\| \to 0, n, m \to \infty$$
hay
$$\sup_{t\in[a,b]}|x_n(t) - x_m(t)| \to 0, k, m \to \infty$$
Suy ra $|x_n(t) - x_m(t)| \to 0, k, m \to \infty, \forall t \in [a,b]$
$\Rightarrow (x_n(t))_n$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{K}$ nên $x_n(t) \to x_0(t) \in \mathbb{K}, \forall t \in [a,b]$.

Xét
$$\begin{array}{rccc} x_0: & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & t & \longmapsto & x_0(t) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) \end{array}$$
Lúc đó x_0 là một hàm số và ta sẽ chứng minh nó bị chặn. Ta có $\|x_n - x_m\| \to 0, n, m \to \infty$.
Lấy $\epsilon = 1$, $\exists n_0 > 0$ sao cho với $n, m \ge n_0$ thì $\|x_n - x_m\| < 1 \Rightarrow \|x_{n_0} - x_m\| < 1 \Rightarrow \|x_m\| \le \|x_{n_0}\| + 1$. Vì x_{n_0} bị chặn nên $\exists K_{n_0} > 0$ sao cho $|x_{n_0}(t)| < K_{n_0} \forall t \in [a,b]$. Do đó $\|x_{n_0}\| = \sup\limits_{t\in[a,b]}|x_{n_0}(t)| \le K_{n_0}$.
Vậy $\|x_m\| = \sup\limits_{t\in[a,b]}\|x_m(t)\| \le K_{n_0} + 1, \forall m \ge n_0$.

Đặt $K = \max_{m=1,\dots,n_0-1}\{\|x_m\|, K_{n_0}+1\} < +\infty$. Lúc đó $\|x_m\| \le K, \forall m \in \mathbb{N}$. Mặt khác, $\|x_m\| = \sup_{t\in[a,b]} \|x_m(t)\| \le K, \forall m \in \mathbb{N}$, nên $|x_0(t)| = |\lim_{n\to\infty} x_n(t)| \le K, \forall t \in [a,b]$. Vậy x_0 bị chặn.
Hơn nữa, do $x_0(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)$ nên $|x_n(t) - x_0(t)| \to 0, n \to \infty$, suy ra

$$\|x_n - x_0\| = \sup_{t\in[a,b]} |x_n(t) - x_0(t)| \le \epsilon$$

với n đủ lớn, tức là $x_n \to x_0, n \to \infty$.

d) X không là không gian Banach.

e) X là không gian Banach[3]. Thật vậy, ta lấy $(x^n)_n$ là một dãy Cauchy trong X, lúc đó

$$\|x^m - x^n\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^m - x_n^k| \to 0, m, k \to \infty$$

Suy ra $\forall \epsilon > 0$, tồn tại $n_0 > 0$ sao cho với mọi $m, k \ge n_0$ thì

$$\sum_{n=1}^{s} |x_n^m - x_n^k| < \epsilon, \forall s \in \mathbb{N} (*)$$

Và ta cũng có $|x_n^m - x_n^k| \to 0, m, k \to \infty$. Lúc đó $(x_m^n)_{m\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{K}$ nên nó hội tụ, kí hiệu $x_m^0 = \lim_{n\to\infty} x_m^n$ và $x^0 = (x_m^0)_{m\in\mathbb{N}}$.

Ta sẽ chứng minh $x^n \to x^0, n \to \infty$.
Trong $(*)$ cho $m \to \infty$ ta có $\forall m \ge n_0$

$$\sum_{n=1}^{s} |x_n^m - x_n^0| \le \epsilon, \forall s \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \lim_{s\to\infty} \sum_{n=1}^{s} |x_n^m - x_n^0| \le \epsilon$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^m - x_n^0| \le \epsilon$$

Suy ra $(y^n)_n = (x^n - x^0)_n \in X$ mà $x^n \in X$ nên $x_0 \in X$. Kết hợp với

$$\|x^m - x^0\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^m - x_n^0| \le \epsilon, \forall m \ge n_0$$

[3]Sau khi xét dãy Cauchy $(x_n)_n$ ta đã tiến hành theo 3 bước.
Bước 1: Ta dự đoán giới hạn x_0 của dãy $(x_n)_n$.
Bước 2: Ta chứng minh $x \in X$.
Bước 3: Chứng minh $(x_n)_n$ hội tụ về x_0

$\Rightarrow x^m \to x^0, m \to \infty$. Ta có điều cần chứng minh.

□

Bài tập 1.19. *Cho M là một tập con của X. Chứng minh rằng*

a) Nếu M lồi thì $\overline{M}$ lồi.

b) $B'(x_0, r)$ và $B(x_0, r)$ là lồi.

Chứng minh.

a) $\forall x, y \in \overline{M}, \forall \alpha, \beta \geq 0$ thỏa $\alpha + \beta = 1$ tồn tại $(x_n)_n \subset M$ và $(y_n)_n \subset M$ sao cho $x_n \to x, y_n \to y, n \to \infty$. Lúc đó vì M lồi nên $\alpha x + \beta y \in M, \forall n$ hay $(\alpha x + \beta y)_n \subset M$ hội tụ về $\alpha x + \beta y \in \overline{M}$. Vậy $\overline{M}$ lồi

b) $B'(x_0, r)$ là lồi. Thật vậy, $\forall x, y \in B'(x_0, r)$, $\forall \lambda \in [0, 1]$ ta có

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)x - x_0\| = \|\lambda(x - x_0) + (1 - \lambda)(y - x_0)\|$$
$$\leq \lambda\|x - x_0\| + (1 - \lambda)\|y - x_0\| \leq \lambda r + (1 - \lambda)r = r$$

$\Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)x \in B'(x_0, r)$ hay $B'(x_0, r)$ lồi.
Hoàn toàn tương tự cho $B(x_0, r)$.

□

Bài tập 1.20.

1. *Cho X là không gian Banach và Y là một không gian con đóng của X. Chứng minh rằng X/Y là Banach.*

2. *Cho M là không gian con của không gian định chuẩn X sao cho M và X/M là Banach. Chứng minh rằng X Banach.*

Chứng minh.

1. X/Y là Banach. Lấy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \widetilde{x_n}$ là một chuỗi hội tụ tuyệt đối trong không gian thương X/Y. Ta cần chứng minh nó hội tụ trong X/Y. Ta có

$$\|\widetilde{x_n}\| = \inf_{x \in \widetilde{x_n}} \|x\| = \inf_{x \in Y} \|x_n + x\|$$

nên với mỗi $n \in \mathbb{N}$, tồn tại u_n sao cho

$$\|x_n + u_n\| = \|\widetilde{x_n}\| + \frac{1}{2^n}$$

Do đó

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n + u_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|\widetilde{x_n}\| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \|\widetilde{x_n}\| + 1$$

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n + u_n\|$ hội tụ tuyệt đối trong không gian Banach X nên hội tụ. Gọi x_0 là tổng của chuỗi. Khi đó

$$\lim_{n\to\infty} \|\sum_{k=1}^{n}(x_n + u_n) - x_0\|$$

và $\sum_{k=1}^{n}(x_n + u_n) - x_0$ là một phần tử của lớp tương đương $\sum_{k=1}^{n}(\widetilde{x_n} + \widetilde{u_n}) - \widetilde{x}_0 = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{x_n} - \widetilde{x}_0$ nên

$$\|\sum_{k=1}^{n} \widetilde{x_n} - \widetilde{x}_0\| = \|\sum_{k=1}^{n}(x_n + u_n) - x_0\|$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|\sum_{k=1}^{n} \widetilde{x_n} - \widetilde{x}_0\| \leq \lim_{n\to\infty} \|\sum_{k=1}^{n}(x_n + u_n) - x_0\| = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|\sum_{k=1}^{n} \widetilde{x_n} - \widetilde{x}_0\| = 0$ hay $\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{x_n} \to \widetilde{x}_0$.

Vậy không gian thương X/Y là Banach.

2. X Banach. Lấy $(x_n)_n \subset X$ là một dãy Cauchy trong X, lúc đó $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : \|x_n - x_m\| < \epsilon$. Ta có $(\overline{x}_n) \subset X/M$ nên

$$\|\overline{x}_n - \overline{x}_m\| = \inf_{x\in(\overline{x}_n - \overline{x}_m)} \|x\| \leq \|x_n - x_m\|$$

$\Rightarrow (\overline{x}_n)_n$ là dãy Cauchy trong X/M, do đó $\overline{x}_n \to \overline{x}_0 \in X/M$.
Với mỗi $n \in \mathbb{N}$ có $\alpha_n \in M$ sao cho $\|x_n - x_0 + \alpha_n\| \leq \|\overline{x}_n - \overline{x}_0\| + \frac{1}{n}$.
Suy ra

$$\|\alpha_n - \alpha_m\| \leq \|\alpha_n + x_n - x_0\| + \|x_n - x_m\| + \|\alpha_m + x_m - x_0\|$$

$$\leq \|\overline{x}_n - \overline{x}_0\| + \frac{1}{n} + \|\overline{x}_m - \overline{x}_0\| + \frac{1}{m} + \|x_n - x_m\|$$

Cho $n, m \to \infty$ ta có $\|\alpha_n - \alpha_m\| \to 0$, tức là $(\alpha_n)_n$ là dãy cơ bản trong M nên $\alpha_n \to \alpha_0$. Ta sẽ chứng minh $x_n \to x_0 + \alpha_0$. Ta có

$$\|x_n - x_0 - \alpha_0\| \leq \|\alpha_n + x_n - x_0\| + \|\alpha_n - \alpha_0\| \leq \|\overline{x}_n - \overline{x}_0\| + \frac{1}{n} + \|\alpha_n - \alpha_0\|$$

Cho $n \to \infty$ ta có $\|x_n - x_0 - \alpha_0\| \to 0$. Vậy $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 + \alpha_0$.
Vậy X là không gian Banach.

□

Nhận xét: Một ví dụ minh họa.

Cho $X = C_{[0,1]}$ và M là tập con của X các hàm số triệt tiêu tại 0. Khi đó M là không gian vectơ con của X và do đó X/M cũng là không gian vectơ. Ta định nghĩa ánh xạ $\phi : X/M \longrightarrow \mathbb{C}$ như sau $\phi([f]) = f(0), \forall [f] \in X/M$. Định nghĩa trên là hợp lý vì nếu $f \sim g$ thì $f(0) = g(0)$. Ta có ϕ tuyến tính vì $\forall s, t \in \mathbb{C}$ và $\forall f, g \in X$,

$$\begin{aligned}\phi(t[f] + s[g]) &= \phi([tf + sg]) \\ &= tf(0) + sg(0) \\ &= t\phi([f]) + s\phi([g])\end{aligned}$$

Hơn nữa,

$$\begin{aligned}\phi([f]) = \phi([g]) &\Leftrightarrow f(0) = g(0) \\ &\Leftrightarrow f \sim g \\ &\Leftrightarrow [f] = [g]\end{aligned}$$

Vậy ϕ là đơn ánh.

Với mọi $s \in \mathbb{C}$ ta luôn có $f \in X$ và $f(0) = s$ sao cho $\phi([f]) = s$. Do đó ϕ là toàn ánh. Từ đó, ϕ là đẳng cấu tuyến tính từ X/M vào $\mathbb{C}$.

Ta thấy rằng M là không gian con đóng của X với chuẩn $\|.\|_\infty$ (chuẩn max) và X/M là không gian Banach với chuẩn thương tương ứng. Ta có

$$\begin{aligned}\|[f]\| &= \inf\{\|g\|_\infty : g \in [f]\} \\ &= \inf\{\|g\|_\infty : g(0) = f(0)\} \\ &= |f(0)| \,(\text{ lấy } g(t) = f(0), \forall t \in [0,1])\end{aligned}$$

Suy ra $\|[f]\| = \|\phi([f])\|$, với mọi $[f] \in X/M$ hay ϕ bảo toàn chuẩn. Vì vậy $X/M \equiv \mathbb{C}$

Bây giờ, xét X với chuẩn $\|.\|_1$. Khi đó M không đóng trong X. Thật vậy, xét dãy

$$g_n(t) = \begin{cases} nt & \text{nếu } 0 \le t \le \frac{1}{n} \\ 1 & \text{nếu } \frac{1}{n} \le t \le 1 \end{cases}$$

Khi đó $g_n \in M$ và $g_n \to 1$ theo chuẩn $\|.\|_1$ nhưng $1 \notin M$. "Chuẩn thương" lúc này cũng không còn là chuẩn. Thật vậy, $\|[f]\| = 0, \forall [f] \in X/M$. Điều này có thể giải thích như sau, lấy $f \in X$, với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ta đặt $h_(t) = f(0)(1 - g_n(t))$ với $g_n(t)$ được xác định như trên. Khi đó $h_n(0) = f(0)$ và $\|h_n\| = \dfrac{|f(0)|}{2n}$. Do đó,

$$\inf\{\|g\|_1 |\, g(0) = f(0)\} \le \|h\|_1 \le \frac{|f(0)|}{2n}$$

Suy ra

$$\|[f]\| = \inf\{\|g\|_1 : g \in [f]\} = 0.$$

Bài tập 1.21. *Cho $f \in L^(E,\mu)$, $g \in L^q(E,\mu)$, $p,q > 0$ và $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Chứng minh rằng dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\exists c_1, c_2, c_1^2 + c_2^2 \neq 0 :$ $c_1 |f(x)|^p = c_2 |g(x)|^q$, đối với bất đẳng thức Holder về tích phân:*

$$\int_E |fg|\, d\mu \leq (\int_E |f|^p\, d\mu)^{\frac{1}{p}} (\int_E |g|^q\, d\mu)^{\frac{1}{q}}$$

Chứng minh. Trong chứng minh này ta sẽ dùng bất đẳng thức Young : $a, b \geq 0$, $p, q > 0$ và $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a^p = b^q$.

- Bất đẳng thức Holder về tích phân:
  Nếu $\int_E |f|^p\, d\mu = 0$ hoặc $\int_E |g|^q\, d\mu = 0$ thì $|f|^p$ hoặc $|g|^q$ hầu khắp nơi, suy ra vế trái cũng bằng 0 nên bất đẳng thức đúng.
  Nếu $\int_E |f|^p\, d\mu = \infty$ hoặc $\int_E |g|^q\, d\mu = \infty$ thì bất đẳng thức đúng.
  Xét $0 < \int_E |f|^p\, d\mu < \infty$ và $0 < \int_E |g|^q\, d\mu < \infty$, lúc đó ta lấy $a = \dfrac{|f|}{(\int_E |f|^p\, d\mu)^{\frac{1}{p}}}$ và $b = \dfrac{|g|}{(\int_E |g|^q\, d\mu)^{\frac{1}{q}}}$. Áp dụng bất đẳng thức Young cho a và b ta có:

$$\frac{|f|\,|g|}{(\int_E |f|^p\, d\mu)^{\frac{1}{p}} (\int_E |g|^q\, d\mu)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{|f|^p}{p\int_E |f|^p\, d\mu} + \frac{|g|^q}{q\int_E |g|^q\, d\mu}$$

  Lấy tích phân hai vế trên E ta có

$$\frac{\int_E |f|\,|g|\, d\mu}{(\int_E |f|^p\, d\mu)^{\frac{1}{p}} (\int_E |g|^q\, d\mu)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{\int_E |f|^p\, d\mu}{p\int_E |f|^p\, d\mu} + \frac{\int_E |g|^q\, d\mu}{q\int_E |g|^q\, d\mu} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

  Suy ra

$$\int_E |fg|\, d\mu \leq (\int_E |f|^p\, d\mu)^{\frac{1}{p}} (\int_E |g|^q\, d\mu)^{\frac{1}{q}}$$

- ($\Leftarrow$) Nếu tồn tại $c_1, c_2, c_1^2 + c_2^2 \neq 0 : c_1 |f(x)|^p = c_2 |g(x)|^q$ và giả sử $c_1 \neq 0$ thì $|f|^p = \frac{c_2}{c_1} |g|^q$ nên

$$\int\limits_E |fg| \, d\mu = \int\limits_E (\frac{c_2}{c_1})^{\frac{1}{p}} |g|^{1+\frac{q}{p}} \, d\mu = (\frac{c_2}{c_1})^{\frac{1}{p}} \int\limits_E |g|^{\frac{p+q}{p}} \, d\mu = (\frac{c_2}{c_1})^{\frac{1}{p}} \int\limits_E |g|^q \, d\mu$$

Mặt khác ta có

$$VP = (\int\limits_E |f|^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}} (\int\limits_E |g|^q \, d\mu)^{\frac{1}{q}} = (\int\limits_E ((\frac{c_2}{c_1})^{\frac{1}{p}} |g|^{\frac{q}{p}})^p d\mu)^{\frac{1}{p}} (\int\limits_E |g|^q \, d\mu)^{\frac{1}{q}}$$

$$= (\frac{c_2}{c_1})^{\frac{1}{p}}) (\int\limits_E |g|^q \, d\mu)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} = (\frac{c_2}{c_1})^{\frac{1}{p}} \int\limits_E |g|^q \, d\mu$$

Vậy $VT = VP$.

- ($\Rightarrow$) Áp dụng bất đẳng thức Young cho hai số a và b như trên thì dấu " $=$ " xảy ra khi $a^p = b^q$, hay

$$\frac{|f|}{\int\limits_E |f|^p \, d\mu} = \frac{|g|}{\int\limits_E |g|^q \, d\mu}$$

ta chỉ việc chọn $c_1 = \int\limits_E |g|^q \, d\mu$, $c_2 = \int\limits_E |f|^p \, d\mu$.

$\square$

Bài tập 1.22. *Cho $C_{[0,1]}$ là không gian các hàm liên tục trên $[0,1]$ với chuẩn* " max"*. Đặt*

$$\begin{array}{rccc} A: & C_{[0,1]} & \longrightarrow & C_{[0,1]} \\ & x & \longmapsto & Ax \end{array}$$

1. $(Ax)(t) = t^2 x(0)$
2. $(Ax)(t) = \varphi(t)x(t)$, $\varphi \in C_{[0,1]}$
3. $(Ax)(t) = x(0) - tx(t)$
4. $(Ax)(t) = x(t) - x(1-t)$
5. $(Ax)(t) = x(1) - tx(t)$

Chứng minh các toán tử này là tuyến tính liên tục.

Chứng minh.

1. Ta có $\forall x, y \in C_{[0,1]}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ thì

$$\begin{aligned}(A(\alpha x + \beta y))(t) &= t^2(\alpha x + \beta y)(0) = t^2(\alpha x(0) + \beta y(0)) \\ &= t^2(\alpha x(0)) + t^2(\beta y(0)) = \alpha(Ax)(t) + \beta(Ay)(t)\end{aligned}$$

   với mỗi $t \in [0,1]$. Suy ra $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$. Vậy A là tuyến tính.
   Ta chứng minh A liên tục. Ta có

$$\|Ax\| = \max_{t\in[0,1]} \left|t^2 x(0)\right| \leq \|x\|, \forall x \in C_{[0,1]}$$

   Vậy A liên tục và $\|A\| \leq 1$.
   Chọn $x_0 \equiv 1 \in C_{[0,1]}$, khi đó

$$\|Ax_0\| = \max_{t\in[0,1]} \left|t^2 x_0(0)\right| = \max_{t\in[0,1]} \left|t^2\right| = 1$$

   Mà $1 = \|Ax_0\| \leq \|A\|\|x_0\| = \|A\|$. Vậy $\|A\| = 1$.

2. Tương tự a) ta suy ra A là toán tử tuyến tính. Ta chứng minh A liên tục. Ta có

$$\|Ax\| = \max_{t\in[0,1]} |\varphi(t)x(t)| \leq K\|x\|$$

   trong đó $K = \max_{t\in[0,1]} |\varphi(t)|$. Vậy A bị chặn và $\|A\| \leq K$.

   Chọn $x_0 \equiv 1 \in C_{[0,1]}$, $\|x_0\| = 1$ khi đó

$$\|Ax_0\| = \max_{t\in[0,1]} |\varphi(t)| = K \leq \|A\|$$

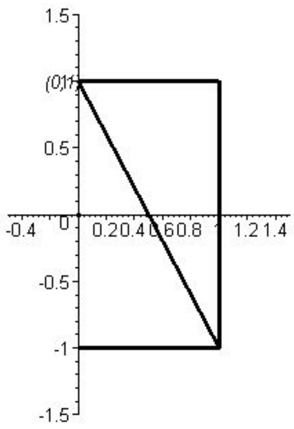
   Vậy $\|A\| = K$.

3. Tương tự a) ta suy ra A là toán tử tuyến tính. Ta chứng minh A liên tục. Ta có

$$\|Ax\| = \max_{t\in[0,1]} |x(0) - tx(t)| \leq 2\|x\|$$

   Vậy A bị chặn nên liên tục và $\|A\| \leq 2$.

   Nhận xét: Việc chọn hàm x_0 thường được tiến hành như sau:
   Trong các hàm liên tục trên $[0,1]$ ta chọn hàm $x_0(t) = at + b$.
   Ở đây ta chọn sao cho $\|x_0\| = 1$ và $\max_{t\in[0,1]} |x_0(0) - tx_0(t)| = 2$. Do đó có thể cho $x_0(0) = 1$ và $ax_0(a) = -1$ với $a \in [0,1]$.
   Với $a = 0$ thì $0 = -1$ vô lý. Do đó, $a \neq 0$. Suy ra $x_0(a) = -1/a \in [0,1]$ hay $a = 1$. Từ đó giải hệ $x_0(1) = -1$, $x_0(0) = 1$ ta có $a = -2, b = 1$.



Chọn $x_0(t) = -2t + 1$[4], lúc đó $\|x_0\| = 1$. Ta có

$$\|Ax_0\| = \max_{t\in[0,1]} |x_0(0) - tx_0(t)| \geq |x_0(0) - 1x_0(1)| = 2\|x_0\| = 2$$

Vậy $\|A\| = 2$.

4. Tương tự a) ta suy ra A là toán tử tuyến tính. Ta chứng minh A liên tục. Ta có

$$\|Ax\| = \max_{t\in[0,1]} |x(t) - x(1-t)| \leq \max_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max_{t\in[0,1]} |x(1-t)| \leq 2\|x\|$$

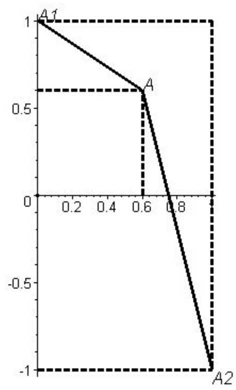
Vậy A bị chặn và $\|A\| \leq 2$.
Chọn $x_0(t) = -2t + 1$, lúc đó $\|x_0\| = 1$. Ta có

$$\|Ax_0\| = \max_{t\in[0,1]} |x_0(0) - x_0(1-t)| \geq |x_0(0) - x_0(1-0)| = 2\|x_0\| = 2$$

Vậy $\|A\| = 2$.

5. Dễ thấy, A tuyến tính, liên tục và $\|A\| \leq 2$.
Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, ta đặt

$$x_n(t) = \begin{cases} AA_1 & \text{nếu } 0 \leq t \leq \sqrt{1 - \frac{1}{2n}} \\ AA_2 & \text{nếu } \sqrt{1 - \frac{1}{2n}} < t \leq 1 \end{cases}$$



trong đó AA_1 và AA_2 là hai đường thẳng đi qua $A = \left(\sqrt{1 - \frac{1}{2n}}; \sqrt{1 - \frac{1}{2n}}\right)$, $A_1(0;1)$, $A_2(1,-1)$.

[4]Đồ thị được vẽ trên Maple 9.5

Rõ ràng $x_n \in C_{[0,1]}$ và $\|x_n\| = 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.[5]
Ta có

$$\begin{aligned}\|A\| &= \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq \|Ax_n\| = \max_{t\in[0,1]} |x_n(1) - tx_n(t)| \\ &\geq \left| x_n(1) - \sqrt{1-\frac{1}{2n}}x_n(\sqrt{1-\frac{1}{2n}}) \right| \\ &= \left| -1 - (1-\frac{1}{2n}) \right| = 2 - \frac{1}{2n}\end{aligned}$$

Cho $n \to \infty$, ta được $\|A\| \geq 2$. Vậy $\|A\| = 2$.

□

Bài tập 1.23. *Không gian định chuẩn được gọi là chặt nếu $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, x \neq 0, y \neq 0$ trở thành đẳng thức khi tồn tại $\alpha > 0$ để $y = \alpha x$. Chứng minh $L^p(E,\mu)$ là không gian định chuẩn chặt.*

Chứng minh.
($\Leftarrow$). $\forall x, y \in L^p(E,\mu)$ nếu có $\alpha > 0, y = \alpha x$ thì $\|x+y\| = \|x+\alpha x\| = (1+\alpha)\|x\| = \|x\| + \alpha\|x\| = \|x\| + \|y\|$.
($\Rightarrow$). $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ trở thành đẳng thức $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, tức là

$$(\int_E |x+y|^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}} = (\int_E |x|^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}} + (\int_E |y|^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}}$$

nên bất đẳng thức Minkowski trở thành đẳng thức

$$\begin{cases} |x+y| &= |x| + |y| \\ c_1 |x|^p &= c_2 |x+y|^{(p-1)q} = c_2 |x+y|^p \\ c_1' |y| &= c_2' |x+y|^{q(p-1)} = c_2' |x+y|^p \end{cases}$$

Suy ra x, y cùng dấu hầu khắp nơi trong E và $c_1c_2' |x|^p = c_2c_1' |y|^p$.
Vậy tồn tại $\alpha > 0$ để $\alpha y = x$ hầu khắp nơi trong E.

□

Bài tập 1.24. *Tìm một số không gian định chuẩn không chặt.*

Chứng minh.

[5] Tất nhiên còn nhiều cách đặt khác. Chẳng hạn, theo cách đặt của C.M.Q

$$x_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{nếu } 0 \leq t \leq \dfrac{n}{n+1} \\ 2(n+1)t - 2n - 1 & \text{nếu } \dfrac{n}{n+1} < t \leq 1 \end{cases}$$

Đường gấp khúc này có vẻ đẹp hơn.

1. l^∞ với chuẩn sup là không chặt, vì

$$\sup_n |x_n + y_n| = \sup_n |x_n| + \sup_n |y_n|$$

không suy ra $x_k = \alpha y_k, \forall k$ với $\alpha > 0$. Chẳng hạn, xét

$$x = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \dots) \text{ và } y = (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, \dots)$$

Ta có $\|x\| = \|y\| = 1$ và $\|x + y\| = 2$, tuy nhiên $x \neq \alpha y$.

2. Một ví dụ khác là $C[0, 1]$ với chuẩn max. Thật vậy, lấy $f(t) = t, g(t) = 1, \forall t \in [0, 1]$ ta có $\|f\| = \|g\| = 1$ và $\|f + g\| = 2$.
Rõ ràng không tồn tại $\alpha > 0$ sao cho $f(t) = \alpha g(t)$.

□

Bài tập 1.25. *Cho không gian Banach X và phiếm hàm tuyến tính liên tục[6] f khác 0. Chứng minh f là ánh xạ mở.*

Chứng minh. Ta chứng minh f là toàn ánh, $\forall y \in K$ luôn có $x \in X, f(x) = y$. Thật vậy, vì $f \neq 0$ nên tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $f(x_0) = 1$. Khi đó, $yx_0 \in X$ và $f(yx_0) = yf(x_0) = y$. Theo nguyên lý ánh xạ mở, f là toàn ánh tuyến tính liên tục từ không gian Banach X vào không gian Banach K nên nó là ánh xạ mở. □

Bài tập 1.26. *Cho X, Y là hai không gian Banach, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Giả sử có $\alpha, \beta \geq 0, \alpha < 1$, $\forall y \in Y, \exists x \in X : \|Ax - y\| \leq \alpha\|y\|, \|x\| \leq \beta\|y\|$. Chứng minh rằng khi đó $\forall y \in Y$, phương trình $Ax = y$ có nghiệm $x_0 \in X$ thỏa điều kiện $\|x_0\| \leq \dfrac{\beta}{1-\alpha}\|y\|$*

Chứng minh. Ta có $\forall y \in Y, \exists x_1 \in X : \|Ax_1 - y\| \leq \alpha\|y\|, \|x_1\| \leq \beta\|y\|$. Tương tự $\forall y \in Y, \exists x_2 \in X : \|Ax_2 - (y - Ax_1)\| \leq \alpha\|y - Ax_1\| \leq \alpha^2\|y\|, \|x_2\| \leq \beta\|y - Ax_1\| \leq \beta\alpha\|y\|$ Tiếp tục quá trình này ta có:

$$\forall y \in Y, \exists x_n \in X : \|Ax_n - (y - Ax_1 - \dots - Ax_n)\| \leq \alpha^n\|y\|, \|x_n\| \leq \beta\alpha^{n-1}\|y\|$$

Do $0 < \alpha < 1$ nên $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ hội tụ tuyệt đối trong không gian Banach X nên hội tụ. Ta gọi $x_0 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$, lúc đó

$$\|\sum_{n=1}^{k} Ax_n - y\| \leq \alpha^k\|y\|$$

[6]Nếu f chỉ là phiếm hàm tuyến tính khác 0 hoặc X không cần giả thiết Banach bài toán liệu vẫn còn đúng?

Cho $k \to \infty$, ta có $\|Ax_0 - y\| = 0$ hay $Ax_0 = y$ và

$$\|x_0\| = \|\sum_{i=1}^{\infty} x_i\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \beta\alpha^{n-1}\|y\| = \frac{\beta}{1-\alpha}\|y\|$$

□

Bài tập 1.27. *Cho không gian định chuẩn $X = C_{[0,1]}$ với chuẩn* max, $A : X \longrightarrow X$

$$(A_n x)(t) = x(t^{1+\frac{1}{t}}), n \in \mathbb{N}$$

1. *Chứng minh $A_n \in \mathcal{L}(X)$*
2. *Chứng minh $\forall x \in X, A_n x \to x$*
3. *Dãy $(A_n)_n$ có hội tụ trong $\mathcal{L}(X)$ đến toán tử đồng nhất hay không?*

Chứng minh.

1. A_n là toán tử tuyến tính: rõ.
   Ta có $\|A_n x\| = \max\limits_{t\in[0,1]} \left|x(t^{1+\frac{1}{n}})\right| \leq \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)| = \|x\|$. Vậy A_n bị chặn nên nó liên tục và $\|A\| \leq 1$.

2. Với mọi $x \in X$, x liên tục đều vì nó liên tục trên tập compact $[0,1]$.
   Do đó $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t, t' \in [0,1], |t - t'| < \delta \Rightarrow |x(t) - x(t')| < \epsilon$.
   Ta có $\left|t^{1+\frac{1}{t}} - t\right| \leq \max\limits_{t\in[0,1]} \left|t^{1+\frac{1}{n}} - t\right| = (\frac{n}{n+1})^n . \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \delta$ với n đủ lớn.
   Suy ra $\left|x(t^{1+\frac{1}{t}}) - x(t)\right| < \epsilon$ với n đủ lớn.
   $\sup\limits_{t\in[0,1]} \left|x(t^{1+\frac{1}{t}}) - x(t)\right| \leq \epsilon$.
   Hay $\|A_n x - x\| \leq \epsilon$ với n đủ lớn, $A_n x \to x, n \to \infty$.

3. $\|A_n - I\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|A_n x - x\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \max \left|x(t^{1+\frac{1}{t}}) - x(t)\right|$.
   Lấy $\epsilon = \frac{1}{2}$, chọn $x_0 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ liên tục sao cho $x_0(1/2) = 1, x_0(\frac{1}{2}^{1+\frac{1}{n}}) = 0$.
   Ta có $\|x_0\| = 1$ và

$$\|A_n - I\| \geq \|Ax_0 - x_0\| \geq \max_{t\in[0,1]} \left|x_0(t^{1+\frac{1}{t}}) - x_0(t)\right| = 1$$

   Vậy A_n không hội tụ về I khi $n \to \infty$.

□

Bài tập 1.28. *Cho X, Y là hai không gian định chuẩn thực.*

1. *Giả sử $A : X \longrightarrow Y$ là một ánh xạ thỏa mãn điều kiện $A(x+y) = Ax + Ay$, $\forall x, y \in X$ và $\sup\limits_{x \in B'(0,1)} \|Ax\| < +\infty$. Chứng minh rằng: $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

2. *Cho $B : X \longrightarrow Y$ là ánh xạ tuyến tính. $M = \{(x, Bx) | x \in X\}$ là đồ thị của B. Chứng minh rằng $B(X)$ đóng trong Y khi và chỉ khi $M + (X \times \{0\})$ đóng trong $X \times Y$.*

Chứng minh.

1. Ta có $A(0) = A(0+0) = A(0) + A(0) \Rightarrow A(0) = 0$.
   Với mọi $x \in X, m > 0, m \in \mathbb{Z}$ ta có

   $$A(mx) = A(\underbrace{x + \ldots + x}_{\text{m lần}}) = mA(x)$$

   Mặt khác

   $$A(x + (-x)) = A(x) + A(-x) = 0 \Rightarrow A(-x) = A(x)$$

   Suy ra $\forall m \in \mathbb{Z}$ thì $A(mx) = mA(x)$.

   $$A(x) = A(\underbrace{\frac{x}{m} + \ldots + \frac{x}{m}}_{\text{m lần}}) = mA(\frac{x}{m}), \forall m \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$$

   Với mọi $m \in \mathbb{Q}, m = \frac{p}{q}, (p, q) = 1$ ta có

   $$A(mx) = A(\frac{px}{q}) = pA(\frac{x}{q}) = \frac{p}{q}A(x) = mA(x).$$

   Suy ra $A(\frac{x}{m}) = \dfrac{A(x)}{m}$. Với mọi $m \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, tồn tại dãy số $(r_n)_n \subset \mathbb{Q}$ sao cho $r_n \to m, n \to \infty$. Ta sẽ chứng minh $A(mx) = mA(x)$. Thật vậy, $A(r_n x) = r_n A(x) \to mA(x)$ khi $n \to \infty$. Ta cần chứng minh $A(r_n x) \to A(mx)$ khi $n \to \infty$.
   Xét $x, \|x\| \leq 1$, nếu không ta lấy $\dfrac{x}{\|x\|}$. Lúc đó

   $$\|A(r_n x) - A(mx)\| = \|A((r_n - mx))\|$$

   $\forall \epsilon > 0, \exists k > 0$ sao cho $\dfrac{K}{k} < \epsilon$. Với n đủ lớn ta có $|r_n - m| \, \|x\| < \dfrac{1}{k}$.
   Do đó $\|k(r_n - m)x\| < 1$. Suy ra với n đủ lớn thì

   $$\|A(k(r_n - m)x)\| \leq K = \sup_{x \in B'(0,1)} \|Ax\|$$

   $$\Rightarrow \|A((r_n - m)x\| \leq \frac{K}{k} < \epsilon$$

Vậy $A(r_n x) \to A(mx)$ khi $n \to \infty$. Do tính duy nhất của giới hạn ta có $A(mx) = mA(x)$. Vậy A là ánh xạ tuyến tính.
Hơn nữa, $\forall x \in X, x \neq 0, \dfrac{x}{\|x\|} \in B'(0,1)$ nên

$$\|A(\frac{x}{\|x\|})\| \leq K = \sup_{x \in B'(0,1)} \|Ax\|$$

$$\Rightarrow \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq K \text{ hay } \|Ax\| \leq K\|x\|$$

Tại $x = 0$, kết quả trên cũng đúng.
Vậy A bị chặn.

2. Giả sử $B(X)$ đóng trong Y, ta cần chứng minh $M + (X \times \{0\})$ đóng trong $X \times Y$.
Lấy $(z_n)_n \subset M + (X \times \{0\})$ thỏa $z_n \to z_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$. Ta có

$$z_n = (x_n, Bx_n) + (x'_n, 0) = (x_n + x'_n, Bx_n)$$

Lúc đó $Bx_n \to y_0 = Bz \in B(X)$ và $z_n \to (z + x_0 - z) = (z, Bz) + (x_0 - z, 0) \in M + (X \times \{0\})$. Suy ra $(x_0, y_0) \in M + (X \times \{0\})$ hay $M + (X \times \{0\})$ đóng.

Ngược lại, nếu $M + (X \times \{0\})$ đóng trong $X \times Y$ ta cần chứng minh $B(X)$ đóng trong Y.
Lấy $(y_n)_n \subset B(X)$ và $y_n \to y, n \to \infty$ thì với mỗi $n \in \mathbb{N}$ tồn tại $x_n \in X$ sao cho $y_n = Bx_n$. Khi đó

$$(0, y_n) = (x_n, y_n) + (-x_n, 0) = (x_n, Bx_n) + (-x_n, 0) \in M + (X \times \{0\})$$

và

$$\|(0, y_n) - (0, y)\|_{X \times Y} = \|0 - 0\|_X + \|y_n - y\|_Y = \|y_n - y\|_Y \to 0, n \to \infty$$

Do $M + (X \times \{0\})$ đóng trong $X \times Y$ nên $(0, y) \in M + (X \times \{0\})$. Suy ra

$$(0, y) = (x, Bx) + (x', 0) = (x, Bx) + (-x, 0) = (0, Bx).$$

Vậy $y = Bx, x \in X$ hay $B(X)$ đóng.

□

Bài tập 1.29. *$A \in \mathcal{L}(X, Y)$ nếu và chỉ nếu A biến dãy Cauchy thành dãy Cauchy.*

Chứng minh. Ta chỉ chứng minh phần đảo. Giả sử A biến dãy Cauchy thành dãy Cauchy và A không bị chặn. Lúc đó, tồn tại dãy $(x_n)_n$ sao cho

$$\|Ax_n\| > n^2\|x_n\|, \forall n$$

Với $x_n \neq 0$, ta xây dựng dãy $(y_n)_n$ như sau

$$y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}.$$

Ta có $\|y_n\| = 1/n \to 0$ nên nó là dãy Cauchy. Mặt khác,

$$\|Ay_n\| = \frac{\|Ax_n\|}{n\|x_n\|} > \frac{n^2\|x_n\|}{n\|x_n\|} = n$$

suy ra $(Ay_n)_n$ không bị chặn và do đó, $(Ay_n)_n$ không Cauchy, mâu thuẫn với giả thiết. Vậy A phải liên tục.
Cách khác:[7] Giả sử $(x_n)_n \in X$, $x_n \to x \in X$. Xét dãy

$$u_n = \begin{cases} x_n & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ x & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

Rõ ràng $u_n \to x$, do đó nó là dãy Cauchy. Suy ra $(Ax_n)_n$ là dãy Cauchy. Theo định nghĩa dãy Cauchy ta có $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0$ ta có $\|f(u_n) - f(u_m)\| \leq \epsilon$.
Nói riêng, với $u_{2n_0+1} = x$ ta có $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ ta có $\|f(u_n) - f(x)\| \leq \epsilon$, tức là $f(u_n) \to f(x)$ khi $n \to \infty$. Khi đó dãy con của nó là $f(x_n)$ cũng dần về $f(x)$. Vậy f liên tục.

□

Bài tập 1.30. *Cho f là một phiếm hàm tuyến tính* không *liên tục trên không gian định chuẩn thực X. Chứng minh rằng với mọi $r > 0$ thì $f(B'(0,r)) = \mathbb{R}$.*

Chứng minh. Ta có $f(B'(0,r)) \subset \mathbb{R}$.

$\forall r > 0, \forall y \in \mathbb{R}$ luôn có $n \in \mathbb{N}$ để $n > \frac{|y|}{r}$. Do f không liên tục nên ta có $\sup\limits_{\|x\|=1} |f(x)| = +\infty$. Do đó có $x_n, \|x_n\| = 1$ và $|f(x_n)| > n$.

Ta có

$$z = \frac{yx_n}{|f(x_n)|}, |z| = \frac{|y|}{|f(x_n)|} < \frac{|y|}{n} < r$$

và $f(z) = y$. Suy ra $\mathbb{R} \subset f(B'(0,r))$
Vậy $\mathbb{R} = f(B'(0,r))$.

□

[7] It's a thing of rare beauty and stunning simplicity.

Bài tập 1.31. *Cho không gian định chuẩn X, $f \in X^*, f \neq 0$. Chứng minh rằng tồn tại không gian con một chiều M sao cho $X = \ker f \oplus M$.*

Chứng minh. Vì $f \neq 0$ nên tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $f(x_0) = 1$.
Với mọi $x \in X$, đặt $y = f(x)x_0 - xf(x_0)$, ta có $f(y) = 0$ hay $y \in \ker f$.
$\Rightarrow x = f(x)x_0 - y \in \langle\{x_0\}\rangle \oplus \ker f$.
Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

□

Bài tập 1.32. *Cho không gian định chuẩn X, f là phiếm hàm tuyến tính*[8] *trên X. Chứng minh rằng f liên tục khi và chỉ khi $\ker f$ đóng.*

Chứng minh. Giả sử f liên tục, khi đó $\ker f$ đóng vì nó là ảnh ngược của tập đóng $\{0\}$.
Ngược lại, giả sử $\ker f$ đóng ta cần chứng minh f liên tục. Nếu $f \equiv 0$ thì f liên tục. Nếu $f \neq 0$ và f không liên tục, ta có $\sup\limits_{\|x\|=1} |f(x)| = +\infty$. Lúc đó, với mỗi $n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in X, \|x_n\| = 1$ và $|f(x_n)| \geq n$. Hơn nữa, vì $f \neq 0$ nên có $a \in X$ sao cho $f(a) = 1$.
Xét dãy

$$y_n = a - \frac{x_n}{f(x_n)}$$

Ta có

$$f(y_n) = f(a) - \frac{f(x_n)}{f(x_n)} = 1 - 1 = 0$$

hay $(y_n)_n \subset \ker f$.
Mặt khác

$$\|\frac{x_n}{f(x_n)}\| = \frac{\|x_n\|}{|f(x_n)|} \leq \frac{\|x\|}{n} = \frac{1}{n} \to 0, n \to \infty$$

Suy ra $\dfrac{x_n}{f(x_n)} \to 0, n \to \infty$ nên $y_n \to a \notin \ker f, n \to \infty$, mâu thuẫn với tính đóng của $\ker f$. Vậy f liên tục.

□

Bài tập 1.33. *Cho không gian định chuẩn X, f là phiếm hàm tuyến tính khác 0 trên X. Chứng minh rằng nếu f không liên tục*[9] *thì $\ker f$ trù mật trong X.*

---

[8]Điều này không đúng với ánh xạ liên tục bất kì. Chẳng hạn, với $id : (C_{[0,1],\|\cdot\|_1}) \longrightarrow (C_{[0,1],\|\cdot\|_\infty})$ ta có $\ker id = \{0\}$ đóng nhưng id không liên tục vì hai chuẩn này không tương đương

[9]Nếu f là một phiếm hàm tuyến tính **không** liên tục trên không gian định chuẩn thực X ta có thể dùng kết quả $f(B'(0,r)) = \mathbb{R}$ để chứng minh $\overline{\ker f} = X$.Thật vậy, với mọi $a \in X$, tồn tại $x \in B(0,r)$ sao cho $f(a) = -f(x)$. Suy ra $a + x \in \ker f \cap (a + B(0,r))$. Vậy $\ker f$ trù mật trong X.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh $\overline{\ker f} = X$. Thật vậy, do f không liên tục tại 0 nên tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in X$ sao cho $\|x_n\| < \frac{1}{n}$ và $|f(x_n) > \epsilon|$

Với mọi $x \in X$, với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$ đặt $y_n = x - \dfrac{f(x)}{f(x_n)} x_n$ thì $y_n \in \ker f$. Khi đó,

$$\|y_n - x\| = \frac{|f(x)|}{|f(x_n)|}\|x_n\| \leq \frac{|f(x)|}{\epsilon n} \to 0, n \to \infty$$

Vậy $y_n \to x$, hay $\overline{\ker f} = X$.

Cách khác:

Vì f không liên tục nên nó không bị chặn. $\forall n \in \mathbb{N}$ tồn tại $x_n \in X$ sao cho $|f(x_n)| \leq n\|x_n\|$. Vì $X = \langle\{x_0\}\rangle \oplus \ker f$ nên $x_n = z_n - \lambda_n x_0$, trong đó $z_n \in \ker f$ và $\lambda_n \in \mathbb{C}$. Do đó $f(x_n) = -\lambda_n f(x_0)$. Suy ra $|\lambda_n|\,|f(x_0)| \geq n\|z_n - \lambda_n x_0\|$. Nhân hai vế với $\dfrac{1}{|\lambda_n|}$ (nếu $\lambda_n = 0$ thì $f(x_n) = 0$), ta được $\|x_0 - \lambda^{-1} z_n\| \leq n^{-1}\,|f(x_0)|$, cho $n \to \infty$ thì $\lambda^{-1} z_n \to x_0$. Vì vậy $x_0 \in \overline{\ker f}$, tức là $\overline{\ker f} = X$.

□

Bài tập 1.34. *Cho X, Y là hai không gian định chuẩn và $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Tính $\|A\|$, biết rằng*

$$\sup_{x,y \in B'(0,r)} \|Ax - Ay\| = 1$$

Chứng minh. Với mọi $x, y \in B'(0, r)$ ta có

$$\|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| \leq \|A\|\|x - y\| \leq \|A\|(\|x\| + \|y\|) \leq 2r\|A\|$$

nên $1 = \sup\limits_{x,y \in B'(0,r)} \|Ax - Ay\| \leq 2r\|A\|$ hay $\|A\| \geq \dfrac{1}{2r}$.

Mặt khác, ta có $\forall x \in B'(0, 1)$ thì $rx, -rx \in B'(0, r)$ nên

$$\|A(rx) - A(-rx)\| = \|A(rx - (-rx))\| = 2r\|A(x)\| \leq 1$$

suy ra $2r\|Ax\| \leq 1$ hay $\|Ax\| \leq \dfrac{1}{2r}, \forall x \in B'(0, 1)$.

Từ đó, $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq \dfrac{1}{2r}$. Vậy $\|A\| = \dfrac{1}{2r}$.

Nhận xét : Giả thiết $A : X \longrightarrow Y$ liên tục có thể suy ra từ các giả thiết khác. Thật vậy, $\forall x \in X, x \neq 0$ ta có $\dfrac{rx}{\|x\|}, \dfrac{-rx}{\|x\|} \in B'(0, r)$ ta có

$$\|A(\frac{rx}{\|x\|}) - A(\frac{-rx}{\|x\|})\| \leq \sup_{x,y \in B'(0,r)} \|Ax - Ay\| = 1$$

Do đó, $\frac{2r}{\|x\|}\|Ax\| \leq 1$.
$\Rightarrow \|Ax\| \leq \frac{1}{2r}\|x\|, \forall x \neq 0$.
Với $x = 0$, ta cũng có kết quả trên. Vậy A liên tục và $\|A\| \leq \frac{1}{2r}$.

□

Bài tập 1.35. *Cho hai không gian định chuẩn X, Y. $(x_n)_n \subset X, (A_n)_n \subset \mathcal{L}(X, Y)$ và $x_n \to x_0, A_n \to A$. Chứng minh $A_n x_n \to Ax_0$*

Chứng minh. Vì $A_n \to A$ nên $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|An\| < +\infty$.

$$\begin{aligned}\|A_n x_n - Ax_0\| &= \|A_n x_n - A_n x_0\| + \|A_n x_0 - Ax_0\| \\ &\leq \|A_n\|\|x_n - x_0\| + \|A_n - A\|\|x_0\|\end{aligned}$$

Vậy $A_n x_n \to Ax_0, n \to \infty$

□

Bài tập 1.36. *Cho X là một không gian định chuẩn. Chứng minh không tồn tại $u, v : X \longrightarrow X$ sao cho $u \circ v - v \circ u = id$.*

Chứng minh. Giả sử có u, v thỏa mãn $u \circ v - v \circ u = id$. Ta sẽ chứng minh rằng $u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u = (n+1)v^n$.
Với $n = 1$ ta có $u \circ v^2 - v^2 \circ u = 2v$. Thật vậy, $u \circ v^2 = u \circ v \circ (v) = (id + v \circ u)v = v + v \circ (uv) = v + v \circ (id + v \circ u) = v + v^2 \circ u + v = 2v + v^2 \circ u$.
Giả sử bài toán đúng với $n = k$, ta chứng minh nó đúng với $n = k+1$. Ta có

$$\begin{aligned}u \circ v^{k+2} - v^{k+2} \circ u &= (u \circ v^{k+1})v - v(v^{k+1} \circ u) \\ &= (v^{k+1} \circ u + (k+1)v^k) \circ v - v^{k+2} \circ u \\ &= v^{k+1} \circ (u \circ v) + (k+1)v^{k+1} - v^{k+2} \circ u \\ &= v^{k+1}(id + v \circ u) + (k+1)v^{k+1} - v^{k+2} \circ u \\ &= v^{k+1} + v^{k+2} \circ u + (k+1)v^{k+1} - v^{k+2} \circ u \\ &= (k+2)v^{k+1}\end{aligned}$$

Vậy $u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u = (n+1)v^n$.
Suy ra $\|(n+1)v^n\| \leq 2\|u\|\|v\|\|v^n\|, \forall n \in \mathbb{N}$ hay $(n+1)\|v^n\| \leq 2\|u\|\|v\|\|v^n\|$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Nếu $\|v^n\| \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ thì $(n+1) \leq 2\|u\|\|v\|, \forall n \in \mathbb{N}$, vô lí. Do đó, tồn tại n_0 sao cho $\|v^n\| = 0, \forall n \geq n_0$. Suy ra $v^n = 0, \forall n \geq n_0$.
Theo $u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u = (n+1)v^n$ ta được $v^{n_0-1} = 0, \ldots$ Tiếp tục quá trình này ta có $v = 0$, khi đó $id = 0$, vô lí.
Vậy không tồn tại u, v sao cho $u \circ v - v \circ u = id$.

□

Bài tập 1.37. *Cho không gian định chuẩn X, $A : X \longrightarrow X$ là toán tử tuyến tính sao cho trong X tồn tại dãy $(x_n)_n$ sao cho $\|x_n\| = 1, Ax_n \to 0$. Chứng minh A không có toán tử ngược bị chặn.*

Chứng minh. Giả sử A có toán tử ngược A^{-1} bị chặn. Khi đó

$$A^{-1}(Ax_n) = (A^{-1}A)(x_n) = Id(x_n) = x_n$$

nên

$$\|A^{-1}(Ax_n)\| = \|x_n\| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

A^{-1} bị chặn nên liên tục. Vì $Ax_n \to 0$ nên $A^{-1}(Ax_n) \to 0$. Suy ra $\|A^{-1}(Ax_n)\| = \|x_n\| = 1 \to 0$, vô lí.
Vậy A không tồn tại toán tử ngược bị chặn.

□

Bài tập 1.38. *Cho $X = C_{[0,1]}$. Trên X ta xét các chuẩn sau*

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$$

$$\|f\|_2 = (\int_0^1 |f(t)|^2\, dt)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

Chứng minh rằng

1. $\|f\|_1 \le \|f\|_2$ *và* $\|f\|_2 \le \|f\|_\infty$.
2. *Ba chuẩn trên đôi một không tương đương.*
3. *Từ đó suy ra* $(X, \|.\|_1)$ *và* $(X, \|.\|_2)$ *không Banach*[10].

Chứng minh.

1. Theo bất đẳng thức Holder ta có

$$\|f\|_1^2 = (\int_0^1 |f(t)|\, dt)^2 \le (\int_0^1 |f(t)|^2\, dt)(\int_0^1 1^2 dt) = \|f\|_2^2.$$

[10]Tổng quát: Nếu X là không gian Banach thì mọi chuẩn trên X so sánh được với chuẩn ban đầu và làm cho X là không gian Banach đều tương đương. Thật vậy, nếu X_1 là X với chuẩn mới $\|.\|_1$ thì $id : X \longrightarrow X_1$ hoặc $id : X_1 \longrightarrow X$ liên tục tương ứng với $\|.\|_1$ yếu hơn hay mạnh hơn chuẩn ban đầu. Khi đó, nó là phép đồng phôi.

và

$$\|f\|_2^2 = \int\limits_0^1 |f(t)|^2\,dt \le \|f\|_\infty$$

2. Xét $f_n(t) = t^n, t \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}$. Ta có $\|f_n\|_1 = \dfrac{1}{n+1}$, $\|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $\|f\|_\infty = 1$.
Mà
$$\frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_1} \to +\infty, \frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} \to +\infty, \frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_2} \to +\infty$$

3. Nếu $(X, \|.\|_2)$ là Banach thì $id : (X, \|.\|_\infty) \longrightarrow (X, \|.\|_2)$ là song ánh tuyến tính liên tục của hai không gian Banach. Theo nguyên lý ánh xạ mở, nó là phép đồng phôi. Do đó, $\|.\|_2$ và $\|.\|_\infty$ tương đương, mâu thuẫn.

□

Bài tập 1.39. *Cho $(X, \|.\|_1)$ và $(X, \|.\|_2)$ là hai không gian Banach. Với mọi $(x_n)_n \subset X$, nếu $\|x_n\|_1 \to 0$ thì $\|x_n\|_2 \to 0$. Chứng minh hai chuẩn này tương đương.*

Chứng minh. Xét ánh xạ

$$\begin{array}{rccc} id: & (X, \|.\|_1) & \longrightarrow & (X, \|.\|_2) \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

Ta có id là song ánh, tuyến tính, liên tục. Theo định lí Banach về ánh xạ mở id là một phép đồng phôi tuyến tính, do đó có $M, N > 0$ sao cho

$$M\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le N\|x\|_1$$

Vậy hai chuẩn này tương đương. □

Bài tập 1.40. *Cho X là không gian định chuẩn, $\|.\|_1$ và $\|.\|_2$ là hai chuẩn không tương đương trên X và có số K sao cho $\|.\|_1 \le K\|.\|_2$. Khi đó, nếu $(X, \|.\|_1)$ là Banach thì $(X, \|.\|_2)$ không Banach.*

Chứng minh. Giả sử $(X, \|.\|_2)$ không Banach. Lúc đó, id là song ánh, tuyến tính, liên tục. Theo định lí Banach về ánh xạ mở id là một phép đồng phôi tuyến tính, do đó có $M, N > 0$ sao cho

$$M\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le N\|x\|_1$$

Vậy hai chuẩn này tương đương. (Vô lý)

□

Bài tập 1.41. *Cho $X_1 = (X, \|.\|_1)$ là không gian Banach và $X_2 = (X, \|.\|_2)$ là không gian định chuẩn không Banach. Chứng minh rằng hai chuẩn này không tương đương với nhau.*

Chứng minh. Giả sử chúng tương đương với nhau. Khi đó tồn tại $c_1, c_2 > 0$ sao cho $\forall x \in X$ ta có

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1$$

Gọi $(x_n)_n \in X_2$ là dãy Cauchy. Ta có $\|x_m - x_n\|_2 \to 0, m, n \to \infty$. Kết hợp với bất đẳng thức trên ta suy ra $(x_n)_n$ là dãy Cauchy trong X_1 nên nó hội tụ đến phần tử $x \in X_1$.
Mặt khác $\|x_n - x\| < c_2\|x_n - x\|_1 \to 0, n \to \infty$ nên $\|x_n - x\|_2 \to 0, n \to \infty$. Vậy $x_n \to x, n \to \infty$, nghĩa là X_2 là không gian Banach, mâu thuẫn với giả thiết.
Vậy hai chuẩn $\|.\|_1, \|.\|_2$không tương đương. □

Bài tập 1.42. *Ví dụ về hai không gian Banach nhưng các chuẩn tương ứng không tương đương.*

Chứng minh. Cho $X = l^1$ và $Y = l^2$. Với mỗi $k \in \mathbb{N}$ ta gọi $e_k = (\delta_{km})_{m\in\mathbb{N}} \in l^1$ và f_k là các thành phần tương ứng trong l^2. Với mỗi $t \in (0, 1)$, đặt $b_t = (1, t, t^2, \ldots)$. Khi đó $\{e_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{b_t : 0 < t < 1\}$ là hệ độc lập tuyến tính trong l^1 và $\{f_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{b_t : 0 < t < 1\}$ là hệ độc lập tuyến tính trong l^2. Các hệ này có thể mở rộng thành cơ sở Hamel B_1 và B_2 tương ứng trong l^1 và l^2. Cả B_1 và B_2 đều chứa một tập con có lực lượng $2^{\aleph_0}$.

Mặt khác, $X \subset 2^{\mathbb{N}}$ và $Y \subset 2^{\mathbb{N}}$ nên ta suy ra B_1 và B_2 có lực lượng bằng $2^{\aleph}_0$. Đặc biệt có đẳng cấu φ từ B_1 vào B_2 biến e_k thành f_k, $\forall k \in \mathbb{N}$.
Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, đặt $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} e_k \in l^1$ và $b_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} f_k \in l^2$. Khi đó $\|a_n\|_1 = 1$ và $\|b_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}$.
Ta định nghĩa một chuẩn mới trên l^1 như sau

$$\|x\|_\beta = \|\varphi(x)\|_2$$

với $x \in l^1$. Đây là một chuẩn vì φ tuyến tính và đơn ánh. Ta sẽ chứng minh X Banach với chuẩn này. Thật vậy, giả sử $(x_n)_n$ là dãy Cauchy với chuẩn mới trong X. Lúc đó $(\varphi(x_n))_n$ là dãy Cauchy với chuẩn $\|.\|_2$ trong l^2. Vì l^2 là Banach nên có $y \in l^2$ sao cho $\|\varphi(x_n) - y\|_2 \to 0, n \to \infty$. Vì φ là toàn ánh nên ta có thể viết $y = \varphi(x)$ với $x \in l^1$. Ta có

$$\begin{aligned}\|\varphi(x_n) - y\|_2 &= \|\varphi(x_n) - \varphi(x)\|_2 \\ &= \|x_n - x\|_\beta\end{aligned}$$

Suy ra $\|x_n - x\| \to 0$ khi $n \to \infty$. Nói cách khác, l^1 đủ với chuẩn $\|.\|_\beta$.
Cuối cùng ta sẽ chứng minh $\|.\|_1$ và $\|.\|_\beta$ không tương đương trên $X = l^1$.

Thật vậy, ta có $\varphi(a_n) = b_n$ và do đó $\|a_n\|_\beta = \|b_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ khi $n \to \infty$.
Tuy nhiên, $\|a_n\|_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}$. □

Bài tập 1.43. *Cho không gian Banach X, $A \in \mathcal{L}(X)$. Giả sử tồn tại $C > 0$ sao cho $\forall x \in X, \|Ax\| \geq C\|x\|$. Chứng minh rằng $ImA = A(X)$ là một không gian con đóng của X.*

Chứng minh. Lấy $(y_n)_n \subset A(X)$, $y_n \to y \in X$. Ta cần chứng minh $y \in A(X)$.
Ta có $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in X$ sao cho $Ax_n = y_n$. Vì $y_n \to y$ nên nó là dãy cơ bản trong X. Do đó $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 > 0, \forall m, n \geq n_0 \Rightarrow \|y_m - y_n\| < C\epsilon$.
Theo giả thiết $\forall m, n \geq n_0$ thì

$$\begin{aligned} C\|x_m - x_n\| &\leq \|A(x_n - x_m)\| \\ C\|x_m - x_n\| &\leq \|A(x_n) - A(x_m)\| \\ \|x_m - x_n\| &\leq \frac{1}{C}\|y_m - y_n\| \\ &< \frac{1}{C}C\epsilon = \epsilon \end{aligned}$$

Suy ra $(x_n)_n$ là một dãy cơ bản trong không gian Banach X nên hội tụ về phần tử $x \in X$.
Mặt khác A liên tục nên $Ax_n \to Ax$, tức là $y_n \to Ax$. Do tính duy nhất của giới hạn nên $y = Ax$ hay $y \in A(X)$.

□

Bài tập 1.44. *Cho X là không gian định chuẩn và $f \in X^*, f \neq 0$. Đặt*

$$\alpha = \inf\{\|x\| : x \in X, f(x) = 1\}.$$

Chứng minh $\|f\| = \frac{1}{\alpha}$

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh $\|f\| \geq \frac{1}{\alpha}$ và $\|f\| \leq \frac{1}{\alpha}$.
Vì $f \neq 0$ nên $\|f\| \neq 0$. Đặt $M = \{x \in X | f(x) = 1\}$. Khi đó $\forall x \in M$, $1 = |f(x)| \leq \|f\|\|x\|$. Suy ra $\forall x \in M$, $\frac{1}{\|f\|} \leq \|x\|$ và do đó $\frac{1}{\|f\|} \leq \alpha = \inf_{x \in M} \|x\|$. Vậy $\frac{1}{\alpha} \leq \|f\|$.
Với mọi $x \in X, f(x) \neq 0$, ta đặt $y = \frac{x}{f(x)}$ thì $f(y) = 1$. Do đó $y \in M$. Lúc đó $\|y\| = \frac{\|x\|}{|f(x)|} \geq \alpha$. Suy ra $|f(x)| \leq \frac{1}{\alpha}\|x\|, \forall x \in X, f(x) \neq 0$. Từ đó $|f(x)| \leq \frac{1}{\alpha}\|x\|, \forall x \in X$. Vậy $\|f\| \leq \frac{1}{\alpha}$.

□

Bài tập 1.45. *Cho f là phiếm hàm tuyến tính liên tục khác 0 trên không gian định chuẩn X. Đặt*

$$N = \ker f = \{x \in X | f(x) = 0\}$$

Chứng minh rằng $\forall a \in X,\ d(a, N) = \dfrac{|f(a)|}{\|f\|}$.

Chứng minh. $a \in N$, rõ.
$a \notin N$, ta có $d(a, N) = \inf\limits_{x \in N} \|a - x\|$. Vì N đóng và $a \notin N$ nên $d(a, N) > 0$.
Ta có

$$\begin{aligned}
|f(a)| &= |f(a) - f(x)| \leq \|f\|\|a - x\|, \forall x \in N \\
\Rightarrow \frac{|f(a)|}{\|f\|} &\leq \|a - x\|, \forall x \in N \\
\Rightarrow \frac{|f(a)|}{\|f\|} &\leq \inf_{x \in N} \|a - x\| \\
\Rightarrow \frac{|f(a)|}{\|f\|} &\leq d(a, N)
\end{aligned}$$

Với mọi $x \in X$, $a \notin N$ đặt $y = a - \frac{f(a)}{f(x)}x$, thì $f(y) = 0 \Rightarrow y \in N$. Suy ra $a - y = \dfrac{f(a)}{f(x)}x$ và $d(a, N) \leq \|a - y\|$. Suy ra

$$\Rightarrow d(a, N) \leq \|\frac{f(a)}{f(x)}x\|$$

$$\Rightarrow d(a, N) \leq \frac{|f(a)|}{|f(x)|}\|x\|$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad |f(x)| &\leq \frac{|f(a)|}{d(a, N)}\|x\| \\
\Rightarrow \quad \|f\| &\leq \frac{|f(a)|}{d(a, N)} \\
\Rightarrow \quad \frac{|f(a)|}{\|f\|} &\geq d(a, N)
\end{aligned}$$

Vậy $d(a, N) = \dfrac{|f(a)|}{\|f\|}$. □

Bài tập 1.46. *Cho không gian định chuẩn X, $M \neq 0, M \subset X$. Đặt $\overset{\circ}{M} = \{f \in X^* : f(x) = 0, \forall x \in M\}$. Chứng minh $\overset{\circ}{M}$ là một không gian đóng của X^*.*

Chứng minh. Dễ thấy $\overset{\circ}{M}$ là một không gian con.
Ta chứng minh $\overset{\circ}{M}$ đóng. Lấy $(f_n)_n \subset \overset{\circ}{M}, f_n \to f \in X^*$ ta cần chứng minh $f \in \overset{\circ}{M}$.
Vì $f_n \to f$ nên $f_n(x) \to f(x), \forall x \in X$. Do đó $\forall x \in M$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$
Vậy $f \in \overset{\circ}{M}$ hay M đóng. □

Bài tập 1.47. *Ví dụ về không gian con của không gian vô hạn chiều nhưng không đóng.*

Chứng minh.

1. $l_0 \subset l^\infty$ là không gian con của l^∞, trong đó l_0 bao gồm các dãy số phức chỉ có hữu hạn số hạng khác 0.
   Ta có
   $$a = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots) \in l^\infty$$
   Với mỗi $n \in \mathbb{N}$ đặt
   $$x_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots) \in l_0$$
   Khi đó
   $$\|x_n - a\| = \|(0, 0, \dots, 0, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots)\| = \frac{1}{n+1} \to 0 \text{ khi } n \to \infty$$
   Mà $a \notin l_0$.

2. Xét không gian định chuẩn $C[0,1]$ với chuẩn
   $$\|x\| = \left(\sum_0^1 |f(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$
   Xét tập $S = \{f \in C[0,1] | \, f(0) = 0\} \subset C[0,1]$. Lúc đó, S là không gian con của $C[0,1]$.
   Xét $g \in C[0,1]$ sao cho $g(t) = 1, \forall t \in [0,1]$. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, xét $f_n \in S$ xác định như sau
   $$f_n(t) = \begin{cases} nt & \text{nếu } 0 \le t \le \frac{1}{n} \\ 1 & \text{nếu } \frac{1}{n} \le t \le 1 \end{cases}$$
   Lúc đó
   $$f_n(t) - g(t) = \begin{cases} nt - 1 & \text{nếu } 0 \le t \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{nếu } \frac{1}{n} \le t \le 1 \end{cases}$$

và

$$\|f_n - g\| = \left(\sum_0^{\frac{1}{n}} (nt-1)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{3n}\right)^{1/2} \to 0 \text{ khi } n \to \infty$$

Vậy $f_n \to g$, tuy nhiên $g \notin S$.

3. W là tập các đa thức trong $C[0,1]$. Rõ ràng W là không gian con của $C[0,1]$. W không đóng trong $C[0,1]$ với chuẩn max và chuẩn ở ví dụ trên. Gợi ý: Xét hàm e^x và khai triển Taylor.

4. Cho

   $A = \{f \in L^2[0,1] | \exists$ khoảng $I_f \subset [0,1], 1/2 \in I_f, f = 0$ h.k.n trên $I_f\}$

   Lấy $E_n = \{1/2 - 1/n, 1/2 + 1/n\}$ và $f_n = 1 - \chi_{E_n}$. Lúc đó $f_n = 0$ trên E_n và $1/2 \in E_n$.
   Ta có $f_n \to f = 1 \in L^2[0,1]$ vì $\|f_n - f\| = \|\chi_{E_n}\| = \sqrt{\mu(E_n)} = \sqrt{2/n} \to 0$.

□

Bài tập 1.48. *Cho X, Y là hai không gian Banach và $A : X \longrightarrow Y$ là toán tử tuyến tính sao cho với mọi dãy $x_n \to 0$ và $\forall g \in Y^*$ thì $g(Ax_n) \to 0$. Chứng minh A liên tục.*

Chứng minh. Ta chứng minh A đóng. Lấy $(x_n, Ax_n) \in X \times Y$ sao cho $(x_n, Ax_n) \to (x, y) \in X \times Y$. Ta cần chứng minh $y = Ax$. Thật vậy, nếu $y \neq Ax$, thì theo hệ quả của định lí Hahn-Banach tồn tại $g \in Y^*$ sao cho $g(Ax) \neq g(y)$.
Vì $(x_n, Ax_n) \to (x, y) \in X \times Y$ nên $x_n - x \to 0$, lúc đó theo giả thiết $g(A(x_n - x)) \to 0$ hay $g(Ax_n) \to g(Ax)$.
Ta cũng có $g(Ax_n) \to g(y)$ vì $Ax_n \to y$. Từ đó $g(Ax) = g(y)$, mâu thuẫn.
Vậy $Ax = y$ hay A là ánh xạ đóng. □

Bài tập 1.49. *Cho X là không gian định chuẩn và $M \subset X$, $\forall f \in X^*$ ta có $\sup\limits_{x \in M} |f(x)| < +\infty$. Chứng minh M là tập bị chặn trong X.*

Chứng minh. Ta có $\forall f \in X^*$,

$$\begin{aligned} &\sup_{x\in M} |f(x)| < +\infty \\ \Rightarrow &\sup_{x\in M} |x(f)| < +\infty \end{aligned}$$

Do đó, $(x)_{x \in M}$ bị chặn từng điểm trên X^*. Mặt khác X^* là không gian Banach nên $(x)_{x\in M}$ bị chặn đều, tức là tồn tại $K \in \mathbb{R}$ sao cho $\|x\| \leq K, \forall x \in M$. □

Bài tập 1.50. *Cho X là không gian định chuẩn thực và $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ là phiếm hàm tuyến tính. Chứng minh rằng f liên tục khi và chỉ khi $M = \{x \in X | f(x) \geq 1\}$ đóng trong X*

Chứng minh. $\Rightarrow$: Vì f liên tục nên $M = f^{-1}([1, +\infty))$ đóng.
$\Leftarrow$: Giả sử f không liên tục. Ta có $\sup\limits_{\|x\|=1} \|f(x)\| = +\infty$ nên $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in X, \|x_n\| = 1$ và $f(x_n) > n$.
Xét dãy $y_n = \dfrac{x_n}{n}, n \geq 1$. Lúc đó $(y_n)_n \subset M$ vì $f(y_n) = \dfrac{f(x_n)}{n} \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.
Mặt khác $\|y_n\| = \dfrac{\|x_n\|}{n} = \dfrac{1}{n} \to 0, n \to \infty$. Vì M đóng nên $0 \in M$. Suy ra $0 = f(0) \geq 1$, mâu thuẫn. Vậy f liên tục.

□

Bài tập 1.51. *Cho X là không gian định chuẩn và f là phiếm hàm tuyến tính thỏa mãn điều kiện $(x_n)_n \subset X$ hội tụ thì $(f(x_n))_n$ bị chặn. Chứng minh $f \in X^*$.*

Chứng minh. Giả sử f không liên tục, lúc đó $\sup |f(x)| = +\infty$. Suy ra với mọi $n \in \mathbb{N}$, có $x_n \in X, \|x_n\| = 1$ và $|f(x_n)| \geq n^2$
Chọn $y_n = \dfrac{1}{n} x_n$, $y_n \to 0$. Ta có

$$|f(y_n)| = \frac{|f(x_n)|}{n} \geq \frac{n^2}{n} = n$$

$\Rightarrow (f(y_n))_n$ không bị chặn, mâu thuẫn. Vậy $f \in X^*$. □

Bài tập 1.52. *Cho X là không gian Banach vô hạn chiều. Chứng minh X không thể có một cơ sở Hamel gồm một số đếm được các phần tử.*

Chứng minh. Giả sử ngược lại X có một cơ sở Hamel gồm một số đếm được các phần tử là $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ Xét $n \in \mathbb{N}$, đặt $X_n =< \{x_1, \dots, x_n\} >$. Lúc đó X_n là không gian con đóng $dim X_n = n$ và $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$.
X Banach nên nó thuộc phạm trù II, tức là tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $B(x_0, r) \subset X_{n_0}$.
Với mọi $x \in X$, $x \neq 0$, đặt $y = \frac{rx}{2\|x\|} + x_0$, ta có

$$\|y - x_0\| = \frac{r\|x\|}{2\|x\|} = \frac{r}{2} < r$$

Do đó $y \in B(x_0, r)$, tức là $y \in X_{n_0}$. Suy ra $x \in X_{n_0}$.
Từ đó $X = X_{n_0}$, vô lý. Vậy X không thể có một cơ sở gồm đếm được phần tử.

□

Bài tập 1.53. *Đặt*

$$A_n = \{f \in L^1([a,b]) | \int\limits_{[a,b]} |f(t)|^2 \, dt \leq n\}$$

1. *Chứng minh rằng A_n là đóng trong không gian $L^1([a,b])$ và $\overset{\circ}{A}_n = \emptyset$.*
2. *$L^2([a,b])$ là tập thuộc phạm trù thứ nhất trong $L^1([a,b])$*

Chứng minh.

1. Lấy dãy $(f_k)_k \subset A_n$ và $f_k \to f$, ta cần chứng minh $f \in A$. Ta có $f_k \to f$ nên $f_k \overset{\mu}{\to} f$. Khi đó tồn tại dãy con $(f_{ki})_i$ của $(f_k)_k$ sao cho $f_{ki} \overset{h.k.n}{\to} f$. Suy ra $f_{ki}^2 \overset{h.k.n}{\to} f^2$. Theo bổ đề Fatou, ta có

$$\int\limits_{[a,b]} |f(t)|^2 \, dt = \int\limits_{[a,b]} \lim_{k\to\infty} |f_k(t)|^2 \, dt = \int\limits_{[a,b]} \underline{\lim}_{k\to\infty} |f_{ki}(t)|^2 \, dt$$
$$\leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \int\limits_{[a,b]} |f_{ki}(t)|^2 \, dt \leq n$$

Vậy $f \in A_n$ nên A_n đóng.
Tiếp theo ta sẽ chứng minh $\overset{\circ}{A}_n = \emptyset$, tức là $\forall f \in A_n, \forall \epsilon > 0, \exists g \in L^1, \|f - g\| < \epsilon$ và $g \notin A_n$. Thật vậy,

$$[a,b] = [a, b-\alpha] \cup [b-\alpha, b] = E_1 \cup E_2$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \in E_1 \\ k\mathrm{sign} f(x) + f(x) & \text{nếu } x \in E_2 \end{cases}$$

trong đó $k > \frac{n}{\epsilon}, \frac{n}{k^2} < \alpha < \frac{\epsilon}{k}$.

$$\|f - g\| = \int\limits_{E_2} k \, |\mathrm{sign} f(x)| = \int\limits_{E_2} k = \alpha k < \epsilon$$

$$|g|^2 = |k\mathrm{sign} f(x) + f(x)|^2 = (|f| + k)^2$$

Ta có

$$\int\limits_{[a,b]} |g(t)|^2 \, dt \geq \int\limits_{E_2} |g(t)|^2 \, dt \geq \int\limits_{E_2} k^2 dt = \alpha k^2 > n$$

Cách 2: $\epsilon > 0$, chọn $\alpha > 0, \alpha < b - a, n\alpha < \epsilon^2$. Lúc đó $\frac{n}{\alpha} < \frac{\epsilon^2}{\alpha^2}$, chọn $k \in \mathbb{R}$ sao cho $\frac{n}{\alpha} < k^2 < \frac{\epsilon^2}{\alpha^2}$. Chọn

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \in E_1 \\ k\text{sign} f(x) & \text{nếu } x \in E_2 \end{cases}$$

Cách 3: $\forall \epsilon > 0$, chọn $\frac{\epsilon^2}{4n} < \alpha < \frac{\epsilon^2}{2n}$. Chọn

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \in [a+\alpha, b] \\ f(x) + \frac{2n}{\epsilon}\text{sign} f(x) & \text{nếu } x \in [a, a+\alpha] \end{cases}$$

2. Ta có $L^2([a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

□

Ví dụ về *ess sup*: Xét hàm $f, g : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ được định nghĩa như sau:

$$f(x) = x^2, x \in [-1,1]$$

và

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x \in [-1,1] \setminus \{0, \pm\frac{1}{3}\} \\ 3 & \text{nếu } x = 0 \\ 5 & \text{nếu } x = \pm\frac{1}{3} \end{cases}$$

Khi đó

$$\sup_{t\in[-1,1]} |g(x)| = 5 \qquad \sup_{t\in[-1,1]} |f(x)| = 1$$

Tuy nhiên

$$\text{ess} \ \sup |f(x)| = 1 = \text{ess} \ \sup |g(x)|$$

Bài tập 1.54. *Chứng minh rằng trong không gian Banach X, tổng của một không gian con đóng và một không gian con hữu hạn chiều là đóng.*

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh nếu S là không gian con đóng và $x \notin S$ thì $S + \mathbb{R}x$ đóng. Theo định lý Hahn-Banach thì tồn tại một hàm tuyến tính liên tục triệt tiêu trên S và thỏa mãn $f(x) = 1$. Bây giờ giả sử $y_n \in S + \mathbb{R}x$ và $y_n \to y$. Lúc đó $y_n = s_n + r_n x, s_n \in S, r_n \in \mathbb{R}$. Suy ra $r_n = f(y_n) \to f(y)$. Từ đó $s_n = y_n - r_n x \to y - f(y)x$, và vì S đóng nên $y - f(y)x \in S$. Vậy $y = [y - f(y)x] + f(y)x \in S + \mathbb{R}x$.
Cách khác: $S + F = p^-1(pF)$ trong đó p là phép chiếu từ không gian X

lên X/S. Vì F hữu hạn chiều nên đóng trong X/S và ảnh ngược của nó qua ánh xạ liên tục cũng đóng[11]. $\square$

Bài tập 1.55. *Tìm phản thí dụ chứng tỏ trong không gian định chuẩn tổng của hai không gian con đóng chưa chắc là một không gian con đóng.*

Chứng minh. Cách 1: Dùng 1.28
Lấy $X = l^1$.

$$\begin{array}{rccl} A: & X & \longrightarrow & X \\ & x = (x_n)_n & \longmapsto & Ax = (x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{n}, \ldots) \end{array}$$

A là toán tử tuyến tính liên tục. A không đóng nên $M + N$ không đóng.
Chọn dãy $(x_n)_n \subset l^1$ như sau:

$$\begin{aligned} x_1 &= (1, 0, \ldots) \\ x_2 &= (1, \frac{1}{2}, 0, \ldots) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \quad \vdots \\ x_n &= (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, \ldots) \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Ta có $Ax_n = (1, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}, 0, \ldots)$ và $\|Ax_n\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$. Do đó $(Ax_n)_n \subset l^1$.
Xét $y = (1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{(n+1)^2}, \ldots)$.

$$\|Ax_n - y\| = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \to 0, n \to \infty$$

Tuy nhiên, $y \notin A(X)$. Thật vậy, nếu tồn tại $x \in l^1$ sao cho $y = Ax$ thì $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, \ldots, x_n = \frac{1}{n}, \ldots$ và $\|x\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, vô lý. Cách 2: Xét $X = l^2$.
Xét X_1, X_2 là các không gian vectơ gồm tất cả các dãy số thực xác định như sau

$$X_1 = \{(y_n)_n | y_n = 0 \text{ với } n \text{ lẻ}\}$$
$$X_2 = \{(z_n)_n | z_{2n} = n z_{2n-1}\}$$

Lúc đó, $Y_1 = l^2 \cap X_1$ và $Y_2 = l^2 \cap X_2$ là hai không gian con đóng của l^2.
Mọi dãy $(x_n)_n$ của l^2 đều có thể viết duy nhất dưới dạng tổng các thành phần của X_1, X_2. Thật vậy, giả sử

[11] Xem chi tiết trong Bài tập Giải tích hàm của Nguyễn Xuân Liêm

$$\begin{aligned}\{x_1, x_2, \ldots\} &= \{0, y_1, 0, y_4, 0, \ldots\} + \{z_1, z_2, z_3, 2z_3, z_5, 3z_5, \ldots\}\\ &= \{z_1, y_2 + z_2, z_3, y_4 + 2z_3, z_5, y_6 + 3z_5, \ldots\}\end{aligned}$$

Suy ra $z_1 = x_1, y_2 = x_2 - x_1, z_3 = x_3, y_4 = x_4 - 2x_3, \ldots$. Do đó ta có sự biểu diễn duy nhất

$$\{x_1, x_2, \ldots\} = \{0, x_2 - x_1, 0, x_4 - 2x_3, 0, x_6 - 3x_5, \ldots\} + \{x_1, x_2, x_3, 2x_3, x_5, 3x_5, \ldots\}$$

$Y_1 + Y_2$ trù mật trong l^2, tức là $\overline{Y_1 + Y_2} = l^2$.
Xét dãy $\{1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \ldots\} \in l^2$ ta có

$$\{1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \ldots\} = \{0, -1, 0, -1, 0, -1, \ldots\} + \{1, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \ldots\}$$

Dãy trên không thuộc $Y_1 + Y_2$ vì

$$\{0, -1, 0, -1, 0, -1, \ldots\} \notin Y_1$$

và

$$\{1, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \ldots\} \notin Y_2$$

do chúng không thuộc l^2.
Vậy $Y_1 + Y_2$ không đóng trong l^2.
Cách 3: Cho $F : l^\infty \longrightarrow l^\infty$ được định nghĩa như sau:

$$z = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \{\frac{z_n}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$$

. Ta có: $\|F\| \le 1$ và $Fz = 0 \Rightarrow z = 0$. Do đó, F liên tục và đơn ánh. Mặt khác, với mỗi $k \in \mathbb{N}$ lấy ta gọi

$$x_k = \{1, 2, \ldots, k, k, \ldots\} \in l^\infty$$

và

$$F(x_k) = \{1, 1, \ldots, 1, \frac{k}{k+1}, \frac{k}{k+2}, \ldots\} \in F(l^\infty)$$

Xét bổ đề sau: *Cho hai không gian Banach X, Y và $F \in \mathcal{L}(X, Y)$. Khi đó F là đơn ánh và $F(X)$ là đóng nếu và chỉ nếu tồn tại $C > 0$ sao cho $\|x\| \le C\|Fx\|$ với mọi $x \in X$.*

Chứng minh.

- Giả sử F là đơn ánh và $F(X)$ đóng. $F(X)$ là không gian Banach vì nó là không gian con đóng của không gian Banach. Xét ánh xạ $F^{-1} : F(X) \longrightarrow X$. Nó là ánh xạ ngược của một đẳng cấu bị chặn giữa X và $F(X)$. Do đó, tồn tại $C > 0$ sao cho

$$\|F^{-1}y\| \le C\|y\|, \forall y \in F(X)$$

tức là F^{-1} bị chặn. Thay y bởi Fx ta có kết quả cần tìm.

- Nếu bất đẳng thức đúng thì F là đơn ánh, và nếu Fx_n là dãy Cauchy trong $F(X)$ thì $(x_n)_n$ là dãy Cauchy theo giả thiết. Lúc đó, $x_n \to x \in X$, và vì F liên tục nên $Fx_n \to Fx$. Vậy $F(X)$ là đầy đủ và do đó $F(X)$ đóng.

$\square$

Theo bổ đề này, có thể thấy rằng với k đủ lớn, không có $c > 0$ sao cho $\|x_k\| \le c\|Fx_k\|$. Do đó, $F(X)$ không đóng.
Cách 4: Xét $X = C[0,1]$ với chuẩn max và toán tử tuyến tính $F \in L(X)$ xác định như sau: $f(t) \longmapsto \int\limits_0^t f(s)ds, t \in [0,1]$. Rõ ràng, F bị chặn. Nếu ta viết $g = Ff$ thì $g(0) = 0, g'(t) = f(t)$, và $Ff = 0 \Rightarrow f(t) = 0$ trên $[0,1]$. Do đó, F là đơn ánh và

$$F(X) = \{g \in C^1[0,1] : g(0) = 0\}$$

Theo bổ đề trên thì $F(X)$ không đóng. Thật vậy, lấy dãy (f_n) được định nghĩa như sau $f_n(t) = nt^{n-1}$, ta có $f_n \in X, \|f_n\| = n$ và $\|F(f_n)\| = 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do đó, không tồn tại $C > 0$ sao cho $\|f_n\| \le C\|F(f_n)\|$ với n đủ lớn. Do đó, $F(X)$ không đóng.

$\square$

Bài tập 1.56. *Cho $f \in X = C[0,1]$, giả sử $\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n, b_n \in \mathbb{R}$ sao cho*

$$\int_0^1 (f(x) - a_n x - b_n)^4 dx < \frac{1}{n}$$

Chứng minh rằng f là hàm số bậc nhất.

Chứng minh. Dễ thấy f khả tích trên $[0,1]$. Ta định nghĩa:

$$\begin{array}{rccc} \|.\|_L : & C[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \int\limits_0^1 |f(x)|\,dx \end{array}$$

Rõ ràng, $(X, \|.\|_L)$ là một không gian định chuẩn và ta kí hiệu là $C^L_{[0,1]}$.
Đặt

$$M = \{f \in C[0,1] | f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}\}$$

Ta có M là không gian con của $C^L_{[0,1]}$ có cơ sở là $\{1, x\}$. Do đó M hữu hạn chiều và đóng.
Áp dụng bất đẳng thức Holder

$$\int_E |FG|\,d\mu \le (\int_E |F|^p\,d\mu)^{\frac{1}{p}} (\int_E |G|^q\,d\mu)^{\frac{1}{q}}$$

với $F = f(x) - a_nx - b_n$, $G = 1$, $p = 4$, $q = \frac{4}{3}$ ta có

$$\int_0^1 |f(x) - a_nx - b_n|\,dx \le [\int_0^1 (f(x) - a_nx - b_n)^4 dx]^{\frac{1}{4}} [\int_0^1 1dx]^{\frac{3}{4}} < (\frac{1}{n})^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$$

Ta có dãy hàm $(f_n(x) = a_nx + b_n)_n \subset M$ thỏa

$$\int_0^1 |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$$

tức là

$$\|f_n - f\|_L < \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$$

hay

$$f_n \to f, n \to \infty$$

Do $(f_n)_n \subset M$ và M đóng nên $f \in M$.
Vậy có $a, b \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) = ax + b, \forall x \in [0, 1]$.

$\square$

Bài tập 1.57. *Cho a, b là hai điểm trong không gian định chuẩn thực X. Kí hiệu $\delta(E) = \sup\limits_{x,x' \in E} \|x - x'\|$ là đường kính của tập $E \subset X$ và đặt*

$$B_1 = \{x \in X |\ \|x - a\| = \|x - b\| = \frac{\|a - b\|}{2}\}$$
$$B_n = \{x \in B_{n-1} |\ \|x - y\| \le \frac{\delta(B_{n-1})}{2}, \forall y \in B_{n-1}\}$$

1. *Chứng minh $\delta(B_n) \le \dfrac{\delta(B_{n-1})}{2}$ và $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \{\dfrac{a+b}{2}\}$*

2. *Nếu f là một phép đẳng cự từ không gian định chuẩn thực X lên không gian định chuẩn thực Y thì $\forall x \in X, f(x) = Ax + c$, trong đó A là phép đẳng cự tuyến tính và $c \in Y$.*

Chứng minh.

1. Ta có $B_n \subset B_{n-1}, \forall n \ge 2$. $\forall x, y \in B_n$ thì $x, y \in B_{n-1}$ và do đó $\|x - y\| \le \dfrac{\delta(B_{n-1})}{2}$. Suy ra

$$\sup_{x,y \in B_n} \|x - y\| \le \frac{\delta(B_{n-1})}{2},$$

tức là $\delta(B_n) \leq \dfrac{\delta(B_{n-1})}{2}$.
Tiếp theo ta sẽ chứng minh $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \{\dfrac{a+b}{2}\}$.
Ta có $\delta(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n) = 0$. Thật vậy, $\delta(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n) \leq \delta(B_n)$.
Hơn nữa, $\forall x, y \in B_1$ thì

$$\|x-y\| = \|-a+(a-y)\| \leq \|x-a\| + \|y-a\| = \|a-b\|$$

Suy ra $\delta(B_1) = \sup\limits_{x,y\in B_1} \|x-y\| \leq \|a-b\|$.
Theo chứng minh trên

$$\delta(B_n) \leq \frac{\delta(B_{n-1})}{2} \leq \frac{\delta(B_{n-2})}{2^2} \leq \cdots \leq \frac{\delta(B_1)}{2^{n-1}} \leq \frac{\|a-b\|}{2^{n-1}}$$

Do đó, $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(B_n) = 0$. Vậy $\delta(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n) = 0$. Suy ra $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ có không quá một phần tử. Việc còn lại là chứng minh $\dfrac{a+b}{2} \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$.
Đặt $\{a+b\} - B_n = \{a+b-x | x \in B_n\}$. Bằng quy nạp ta sẽ chứng minh rằng $\{a+b\} - B_n \subset B_n, \forall n \geq 1$.
Với $n = 1$, bài toán đúng. Thật vậy, $\forall a+b-x \in \{a+b\} - B_1$ ta có

$$\|a+b-x-a\| = \|b-x\| = \frac{1}{2}\|a-b\|$$

$$\|a+b-x-b\| = \|a-x\| = \frac{1}{2}\|a-b\|$$

nên $a+b-x \in B_1$.
Giả sử bài toán đúng với $n = k$, ta chứng minh bài toán đúng với $n = k+1$.
$\forall x \in B_{k+1}$ ta có $x \in B_k$, do đó $a+b-x \in B_k$.
$\forall y \in B_k$ ta có

$$\|a+b-x-y\| = \|x-(a+b-y)\| \leq \frac{\delta(B_k)}{2}$$

tức là $a+b-x \in B_{k+1}$. Suy ra $\{a+b\} - B_n = \{a+b-x | x \in B_n\} \subset B_n, \forall n \geq 1$.
Ta sẽ chứng minh $\dfrac{a+b}{2} \in B_n, \forall n \geq 1$ cũng bằng quy nạp.
Với $n = 1$, ta có $\dfrac{a+b}{2} \in B_1$, đúng.

Giả sử $\frac{a+b}{2} \in B_k, \forall k \geq 1$. $\forall y \in B_k$, ta có $a+b-y \in B_k$, $\frac{a+b}{2} \in B_k$ và

$$\|\frac{a+b}{2} - y\| = \frac{\|(a+b-y)-y\|}{2} \leq \frac{\delta(B_k)}{2}$$

Do đó $\frac{a+b}{2} \in B_{k+1}$.

Vậy $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \{\frac{a+b}{2}\}$.

2. $f : X \longrightarrow Y$ là một phép đẳng cự[12]. Ta định nghĩa

$$\begin{array}{rccc} A: & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & f(x) - f(0) \end{array}$$

□

Bài tập 1.58. *Cho $X = M[0,1]$ là tập hợp các hàm số xác định và bị chặn trên $[0,1]$. Với mọi $x \in X$, $\|x\| = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$*

1. *Chứng minh rằng $(X, \|.\|)$ là không gian Banach.*
2. *$Y = C_0[0,1]$ là tập các hàm số liên tục trên $[0,1]$ sao cho $x(0) = x(1) = 0$. Chứng minh rằng Y đóng trong X.*

Chứng minh.

1. Xem 1.18
2. Lấy dãy $(x_n)_n$ trong Y, $x_n \to x_0$. Vì $x_n(t)$ hội tụ đều về $x_0(t)$ trong $[0,1]$ nên x_0 liên tục trên $[0,1]$.
   Ta có
   $$x_0(0) = \lim_{n\to\infty} x_n(0) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$
   $$x_0(1) = \lim_{n\to\infty} x_n(0) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$
   Suy ra $x_0 \in Y$. Vậy Y đóng.

□

Bài tập 1.59. *Đặt $X = C[0,1]$ là không gian định chuẩn với chuẩn* max.

$$M = \{x \in X |\ x(0) = 1, 0 \leq x(t) \leq 1, \forall t \in [0,1]\}$$

1. *Chứng minh M đóng và bị chặn trong X*

[12] Xem Stephan Banach, Théorie des operations lineaires, trang 166.

2. $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int\limits_0^1 x^2(t)dt$. *Chứng minh* f *liên tục trên* M *nhưng* f *không đạt giá trị nhỏ nhất trên* M.

Chứng minh.

1. Lấy dãy $(x_n)_n$ trong M, $x_n \to x_0 \in X$. Ta có
$$x_0(0) = \lim_{n\to\infty} x_n(0) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$
Hơn nữa, $0 \le x_n(t) \le 1, \forall t \in [0,1]$ nên $0 \le \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) \le 1, \forall t \in [0,1]$.
Do đó $0 \le x_0(t) \le 1, \forall t \in [0,1]$.
Vậy $x_0 \in M$ hay M đóng.
Mặt khác, ta có với mọi $x \in M$, $\|x\| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |x(t)| = 1$ nên M bị chặn.

2. Việc chứng minh f liên tục trên M xin dành cho độc giả.
Tuy nhiên, f không đạt được giá trị nhỏ nhất. Thật vậy, chon dãy hàm $(x_n)_n \subset X$ như sau:
$$x_n(t) = \begin{cases} 1 - nt & \text{nếu } t \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{nếu } t \in (\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$
Dễ thấy $(x_n)_n \subset M$.
Với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta có
$$f(x_n) = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} (1 - nt)^2 dt = \frac{1}{3n} < \frac{1}{n}$$
Do đó, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \subset M$ sao cho $f(x_n) < 0 + \frac{1}{n}$, tức là $\inf\limits_M f = 0$. Giả sử tồn tại $x_0 \in M$ sao cho $f(x_0) = 0$. Vì $x_0(0) = 1$ nên có $\epsilon_0 > 0$ để $x_0(t) \ge \frac{1}{2}, \forall t \in [0, \epsilon_0]$. Lúc đó
$$f(x_0) = \int\limits_0^1 x_0^2(t)dt \ge \int\limits_0^1 \frac{1}{4} dt$$
Mâu thuẫn.

□

Bài tập 1.60. *Cho* X, Y *là hai không gian Banach và* $A : X \longrightarrow Y$ *là toàn ánh tuyến tính liên tục. Giả sử* $(y_n)_n \subset Y$ *thỏa mãn điều kiện* $y_n \to y_0 \in Y$. *Chứng minh rằng tồn tại* $N > 0$ *và* $(x_n)_n \subset X$ *sao cho* $x_n \to x_0, \|x_n\| \le N\|y_n\|$, *và* $Ax_n = y_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Chứng minh. Vì A là toàn ánh tuyến tính liên tục nên $A(X) = Y$ và A là ánh xạ mở. Lúc đó, $Z = A(B_X(0,1))$ là mở trong Y và có $x_0 \in X$ sao cho $A(x_0) = y_0$.
Ta có $A(0) = 0 \in Z$ nên tồn tại $r > 0$ sao cho $B'_Y(0,r) \subset Z$. Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in Y, y_n \neq 0$ ta có $\dfrac{ry_n}{\|y_n\|} \in Z$ nên tồn tại $a_n \in B_X(0,1)$ và $A(a_n) = \dfrac{ry_n}{\|y_n\|}$.
Do đó $y_n = A(\dfrac{\|y_n\|a_n}{r}) = A(x_n)$, với $x_n = \dfrac{\|y_n\|a_n}{r}$.
Mặt khác
$$\|x_n\| = \|\frac{\|y_n\|a_n}{r}\| \Rightarrow \|y_n\| = \frac{r\|x_n\|}{\|a_n\|} \geq r\|x_n\|$$
$\Rightarrow \|x_n\| \leq N\|y_n\|$ với $N = \dfrac{1}{r}$.
$y_n \to y_0 \in Y$ nên $A(x_n) \to y_0 = A(x_0) \in Y$
Hơn nữa,
$$\|x_n - x_0\| \leq K\|y_n - y_0\|$$
nên $x_n \to x_0$

$\square$

Bài tập 1.61. *Cho X là một không gian định chuẩn, M là không gian con đóng của X. Ta kí hiệu $\overset{\circ}{M} = \{f \in X^* | \, f(M) = 0\}$. Chứng minh rằng*

1. *$(X/M)^*$ đồng phôi tuyến tính với $\overset{\circ}{M}$*
2. *Nếu X phản xạ thì X/M (tương ứng, M) đồng phôi tuyến tính với $(\overset{\circ}{M})^*$ (tương ứng, $(X^*/\overset{\circ}{M})$).*

Chứng minh.

1. Xét tương ứng
$$\begin{array}{lllll} A: & \overset{\circ}{M} & \longrightarrow & (X/M)^* & & \\ & f & \longmapsto & A(f): & X/M & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & & & \tilde{x} & \longmapsto & A(f)(\tilde{x}) = f(x) \end{array}$$
A là ánh xạ tuyến tính: rõ.
Ta có
$$\|A(f)\| = \sup_{\|\tilde{x}\|=1} \|A(f)(\tilde{x})\| = \sup_{\|\tilde{x}\|=1} |f(x)| \leq \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \|f\|$$
Suy ra A liên tục.
Với mọi $f_1, f_2 \in \overset{\circ}{M}$ sao cho $A(f_1) = A(f_2)$ thì $\forall x \in X, A(f_1)(\tilde{x}) = A(f_2)(\tilde{x})$, tức là $f_1(x) = f_2(x)$ hay $f_1 = f_2$. Do đó, A là đơn ánh.

Ta sẽ chứng minh A là toàn ánh. Thật vậy, với mọi $g \in (X/M)^*$ tồn tại $f \in X*$, $f(x) = g(\tilde{x})$. Ta có $f \in \overset{\circ}{M}$ và $A(f) = g$.
Cuối cùng ta chứng minh f bảo toàn chuẩn. Với mọi $x \in X$, ta có

$$|f(x)| = |A(f)(\tilde{x})| \leq \|Af\|\|\tilde{x}\| \leq \|Af\|\|x\|$$

nên $\|f\| \leq \|Af\|$.
Mặt khác, $\|f\| \geq \|Af\|$ vì A liên tục, do đó $\|Af\| = \|f\|$.
Vậy A là một phép đồng phôi tuyến tính.

2. Xét ánh xạ

$$\begin{array}{rccccc} B: & X/M & \longrightarrow & (\overset{\circ}{M})^* & & \\ & \tilde{x} & \longmapsto & B\tilde{x}: & \overset{\circ}{M} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & & & f & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Tương tự, B là phép đồng phôi tuyến tính.

□

Bài tập 1.62. *Cho X, Y là hai không gian định chuẩn, $(A_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Chứng minh hai mệnh đề sau tương đương:*

a) $\forall x \in X, \forall y^* \in X^*$: $\sup\limits_{\alpha \in I} |y^*(A_\alpha x)| < +\infty$.

b) $\forall x \in X, \sup\limits_{\alpha \in I} \|A_\alpha x\| < +\infty$.

Chứng minh. $a) \Rightarrow b)$: $\forall x \in X, \forall y^* \in X^*$: $\sup\limits_{\alpha \in I} |y^*(A_\alpha x)| < +\infty$ nên $\sup\limits_{\alpha \in I} |(A_\alpha x)(y^*)| < +\infty$
$\Rightarrow$ $(A_\alpha x)_{\alpha \in I}$ bị chặn từng điểm trong không gian Banach X^{**} nên nó bị chặn đều, tức là $\forall x \in X, \sup\limits_{\alpha \in I} \|A_\alpha x\| < +\infty$.
$b) \Rightarrow a)$: Rõ

□

Bài tập 1.63. *Cho X là không gian định chuẩn và $N \subset X$ là một không gian con đóng. Chứng minh rằng ánh xạ $p : X \longrightarrow X/N, p(x) = [x] = x+N$ là ánh xạ mở.*

Chứng minh. Nếu $\|p(x)\| < 1$ thì theo cách xây dựng chuẩn, tồn tại $u \in X, \|u\| < 1$ sao cho $P(x) = P(u)$. Do đó p biến hình cầu đơn vị trong X thành hình cầu đơn vị trong X/N nên p mở.

□

Bài tập 1.64. *Giả sử thêm rằng $f : X \longrightarrow Y$ là toán tử bị chặn và $N \subset \ker f$ thì tồn tại duy nhất ánh xạ tuyến tính $g : X/N \longrightarrow Y$ sao cho $f = gp$*

Chứng minh. Yêu cầu bài toán tương đương với $fx = g[x]$ với mọi $x \in X$. Vì mỗi phần tử của X/N có dạng $[x]$, nên nếu g tồn tại thì duy nhất. Ta định nghĩa ánh xạ $g([x]) = f(x)$. Nếu $[x] = [u]$ thì $x - u \in N$. Khi đó theo giả thiết $f(x-u) = 0$, suy ra $f(x) = f(u)$. Điều này chứng tỏ g được định nghĩa là ánh xạ.

Việc còn lại là chứng minh g tuyến tính. Ta có $g([w]+[x]) = g[w+x] = f(w+x) = fw + fx = g[w] + g[x]$, và $g(c[x]) = g[cx] = f(cx) = cfx = cg[x]$. □

Bài tập 1.65. *Giả sử thêm rằng $N = Kerf$.Chứng minh rằng f mở nếu g có toán tử ngược bị chặn.*

Chứng minh. Nếu g có toán tử ngược bị chặn thì g mở. Vì p mở nên $f = gp$ cũng mở.
Ngược lại, nếu f mở thì tồn tại C sao cho $\forall y \in B'_Y(0,1)$ có thể được viết dưới dạng $y = fx$, trong đó $x \in X$ và $\|x\| < C$.
Mặt khác, $y = fx = gpx$ và $\|px\| \le \|x\| \le C$. Do đó, g mở. Nói riêng, g là toàn ánh từ X/N lên Y.
g đơn ánh vì $g[x] = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x \in N \Rightarrow [x] = 0$.
Vậy g là song ánh, mở nên có toán tử ngược bị chặn.

□

Bài tập 1.66. *Dùng định lí đồ thị đóng để chứng minh định lí ánh xạ mở.*

Chứng minh. Giả sử X, Y là hai không gian Banach và $f : X \longrightarrow Y$ là toàn ánh tuyến tính bị chặn. Nếu f đơn ánh thì nó có ánh xạ ngược và đồ thị của ánh xạ ngược $\{(fx, x) : x \in X\}$ đóng. (Đó là ảnh của $\{(x, fx) : x \in X\}$ dưới phép đẳng cự $X \times Y \longrightarrow Y \times X$ xác định bởi $(x, y) \longmapsto (y, x)$.)
Theo định lí đồ thị đóng ta có f^{-1} bị chặn và do đó f mở.

Trong trường hợp tổng quát, $f : X \longrightarrow Y$ chỉ là toàn ánh bị chặn. Ta viết $f = gp$ như các bài toán trên, trong đó $N = \ker f$. Vì g song ánh bị chặn nên ảnh ngược của nó bị chặn. Suy ra f mở.

□

Bài tập 1.67. *Cho X là không gian Banach, Y là không gian định chuẩn và $(A_n)_n \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Nếu với mọi $x \in X$, $(A_n x)_n$ là dãy Cauchy trong Y thì $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < +\infty$.*

Chứng minh. Với mọi $x \in X$, $(A_n x)_n$ là dãy Cauchy trong Y nên với $\epsilon = 1$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $m, n \geq n_0$ ta có $\|A_n x - A_m x\| \leq 1$. Do đó $\|A_n x - A_{n_0} x\| \leq 1, \forall n \geq n_0$. Suy ra

$$\|A_n x\| \leq \|A_n x - A_{n_0} x\| + \|A_{n_0}\| \leq \|A_{n_0}\| + 1, \forall n \geq n_0$$

Đặt

$$K = \max\{\|A_{n_0}\| + 1, \|A_1 x\|, \ldots, \|A_{n_0 - 1}\|\}$$

Ta có $\|A_n x\| \leq K, \forall n \in \mathbb{N}$, tức là $(A_n x)_n$ bị chặn điểm.
Mặt khác X là không gian Banach và $(A_n)_n \subset \mathcal{L}(X, Y)$ nên nó bị chặn đều. Vậy $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| < +\infty$. □

Bài tập 1.68. *Cho X là một không gian định chuẩn thực và $x_1, \ldots, x_n$ là n vectơ phân biệt trong X. Chứng minh rằng tồn tại $f \in X^*$ sao cho $f(x_i) \neq f(x_j), i \neq j, i, j = 1, \ldots, n$.*

Chứng minh.
Ta chứng minh bằng quy nạp theo n.
Với $n = 2$, theo định lí Hahn-Banach tồn tại $f \in X^*$ sao cho $f(x_1) = f(x_2)$.
Giả sử bài toán đúng với $n = k$, lúc đó ta giả sử

$$f(x_1) < f(x_2) < \cdots < f(x_k)$$

Chọn

$$a_1 < f(x_1) a_2 < f(x_2) < \cdots a_k < f(x_k) < a_{k+1}$$

Nếu $f(x_{k+1}) \neq f(x_i), i = 1, \ldots, k$ thì bài toán đúng với $n = k + 1$.
Nếu tồn tại $x_k \neq x_{k+1}$ sao cho $f(x_{k+1}) = f(x_k)$. Theo định lí Hahn-Banach tồn tại $g \in X^*$ sao cho $g(x_k) \neq g(x_{k+1})$.
Với mọi $\epsilon > 0$, đặt $h(x) = f(x) + \epsilon g(x) \in X^*$. Chọn ϵ_0 đủ bé sao cho

$$f(x_i) + \epsilon_0 g(x_i) \in (a_i, a_{i+1}), \forall i = 1, \ldots, k - 1$$

và $h = f + \epsilon_0 g$ là hàm cần tìm.

□

Bài tập 1.69. *Chứng minh rằng l^∞ không có cơ sở Schauder.*

Chứng minh. Ta chứng minh l^∞ không khả li. Do đó, không có cơ sở Schauder. Xét tập $A = \{(z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots)\} \subset L^\infty$, trong đó $z_i = 0$ hoặc $z_i = 1$. Ta có A là không đếm được[13]. Mặt khác, với mỗi $x, y \in A, x \neq y$, thì $\|x - y\| = 1$. Giả sử $F \subset l^\infty$, F đếm được và $\overline{F} = l^\infty$. Xét họ hình cầu $\{B(x, \frac{1}{3})\}_{x \in A}$. Khi đó, với mọi $x \in l^\infty$, $\epsilon = \frac{1}{3}$, $\exists y \in F$ sao cho $d(x, y) < \frac{1}{3}$. Suy ra $y \in B(x, \frac{1}{3})$. Do đó, F không đếm được vì $\{B(x, \frac{1}{3})\}_{x \in A}$ không đếm được, mâu thuẫn. □

[13] Xem Hàm thực và Giải tích hàm của Hoàng Tụy.

Bài tập 1.70. *Cho X là không gian định chuẩn. $(x_n)_n \in X, x_n \xrightarrow{w} x$ và $(f_n)_n \in X^*, f_n \to f$. Chứng minh $f_n(x_n) \to f(x), n \to \infty$.*

Chứng minh. Ta có

$$\|f_n(x_n) - f(x)\| \leq \|f_n(x_n) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f(x)\|$$

Vì $x_n \xrightarrow{w} x$ nên $f_n(x_n) \to f_n(x)$, tức là $\|f_n(x_n) - f_n(x)\| \to 0, n \to \infty$.
Mặt khác $f_n \to f$, suy ra $\|f_n(x) - f(x)\|, n \to \infty$.
Vậy $f_n(x_n) \to f(x), n \to \infty$.

□

Bài tập 1.71. *Cho X là không gian định chuẩn, $M \subset X^*, \overline{M} = X^*$, $x_n, x \in X$. Giả sử $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists N > 0$ sao cho $\|x_n\| \leq N$ và $\forall f \in M, f(x_n) \to f(x), n \to \infty$. Chứng minh rằng $x_n \xrightarrow{w} x$.*

Chứng minh. Vì $x_n \in X$ và $X \subset X^{**}$ nên $x(f) = f(x)$, $\forall f \in X^*$. Với mọi $f \in X^*$, ta chứng minh $x_n(f) \to x(f)$.
Với mọi $\epsilon > 0$, do $f \in \overline{M}$ nên $B(f, \epsilon) \cap M \neq \emptyset$, tức là có $g \in M$ sao cho $\|f - g\| < \epsilon$. Ta có:

$$\begin{aligned}
\|x_n(f) - x(f)\| &\leq \|x_n(f) - x_n(g)\| + \|x_n(g) - x(g)\| + \|x(g) - x(f)\| \\
&\leq \|x_n\|\|f - g\| + \|x_n(g) - x(g)\| + \|g - f\|\|x\| \\
&\leq N.\epsilon + \epsilon + \epsilon.\|x\|
\end{aligned}$$

Vậy $x_n(f) \to x(f), n \to \infty$ hay $x_n \xrightarrow{w} x$.

□

Bài tập 1.72. *Cho X là không gian Banach, $Y \subset X$ là không gian vectơ con của X và $x \in X \setminus Y$. Phần tử $y \in Y$ được gọi là minimizer nếu*

$$\|x - y\| = \inf_{z \in Y} \|x - z\|.$$

Chứng minh rằng

1. *Nếu Y hữu hạn chiều thì minimizer luôn tồn tại.*
2. *Sự tồn tại trên nói chung không duy nhất.*
3. *Nếu Y vô hạn chiều thì minimizer nói chung không tồn tại.*

Chứng minh.

1. Tập hợp $\{z \in Y : \|x - z\| \leq R\}$ là đóng và bị chặn nên compact nếu Y hữu hạn chiều. Hơn nữa, hàm khoảng cách $\|x - z\|$ liên tục nên đạt được giá trị nhỏ nhất.

2. Xét $X = \mathbb{R}^2$ với chuẩn $\|z\| = \max\{|z_1|, |z_2|\}$, không gian con $Y = \{(a,0)|a \in \mathbb{R}\}$ và $x = (0,1)$. Lúc đó mọi điểm của đoạn thẳng $\{(a,0)|a \in [-1,1]\}$đều là minimizer.

3. Xét

$$X = C_{[-1,1]}, \quad Y = \{y \in X| \int_{-1}^{0} y(t)dt = \int_{0}^{1} y(t)dt = 0\},$$

và $x \in X$ là hàm số sao cho

$$\int_{-1}^{0} x(t)dt = -1, \quad \int_{0}^{1} x(t)dt = 1.$$

Vì $\int_{-1}^{0} x(t)dt = -1$, $\int_{-1}^{0} y(t)dt = 0$ nên

$$\inf_{t\in[-1,0]} (x(t) - y(t)) \leq -1,$$

do tính liên tục, đẳng thức chỉ xảy ra khi $y(t) = x(t)+1, \forall t \in [-1,0]$. Tương tự, $\int_{0}^{1} y(t)dt = 0\}$ và $\int_{0}^{1} x(t)dt = 1$ suy ra

$$\sup_{t\in[0,1]} (x(t) - y(t)) \geq 1$$

và đẳng thức xảy ra chỉ nếu $y(t) = x(t) - 1, \forall t \in [0,1]$. Ta suy ra $d(x,Y) \geq 1$ và không có $y \in Y$ sao cho $\|x - y\| = 1$, bởi vì nếu có thì $y(0) = x(0) - 1$và $y(0) = x(0) + 1$, mâu thuẫn.
Tuy nhiên, ta có thể định nghĩa y như sau: $y(t) = x(t) + 1$ nếu $x \in [-1,0)$, $y(t) = x(t) - 1$ nếu $x \in (0,1]$, và thay đổi y trong một lân cận nhỏ của 0 để y liên tục. Từ đó ta có $\|x-y\| = \inf_{z\in Y} \|x-z\| = 1$.

□

Bài tập 1.73. *Cho X, Y là hai không gian định chuẩn trong đó $X \neq \{0\}$. Chứng minh rằng nếu $\mathcal{L}(X,Y)$ là không gian Banach thì Y là không gian Banach*[14].

Chứng minh. Lấy $x_0 \in X$ sao cho $\|x_0\| = 1$. Theo định lí Hahn-Banach, tồn tại $f \in X^*$ sao cho $\|f\| = 1$ và $f(x_0) = \|x_0\| = 1$. Gọi $(y_n)_n$ là dãy

[14]Đây là bài hay nhất của tài liệu này. Ta có kết quả sau: Nếu $X \neq \{0\}$ thì không gian định chuẩn $\mathcal{L}(X,Y)$ là Banach nếu và chỉ nếu Y là Banach.

Cauchy trong Y. Ta định nghĩa họ toán tử A_n như sau $A_n : X \longrightarrow Y$, $A_n(x) = f(x)y_n$. Khi đó A_n là họ toán tử tuyến tính liên tục. Mặt khác, với mọi $m, n \in \mathbb{N}$ ta có

$$\|A_n - A_m\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)(y_n - y_m)\| = \|y_n - y_m\| \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| = \|y_n - y_m\|$$

tức là $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ là một dãy Cauchy. Vì $\mathcal{L}(X, Y)$ là không gian Banach nên tồn tại $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ sao cho $A_n \to A$. Đặt $A(x_0) = y_0$. Khi đó

$$\begin{aligned} \|y_n - y_0\| &= \|A_n(x_0) - A(x_0)\| = \|(A_n - A)(x_0)\| \\ &\leq \|A_n - A\| \|x_0\| = \|A_n - A\| \to 0 \end{aligned}$$

Do đó, $y_n \to y_0$ trong Y. Vậy Y là không gian Banach.

$\square$

We learn by doing. We learn mathematics by doing problems.

2 Không gian Hilbert

Bài tập 2.1. *Một chứng minh khác cho bất đẳng thức Cauchy-Schwarz* $|\langle u,v\rangle| \le \|u\|\|v\|$ *trong đó* $u, v \neq 0$ *trên không gian tiền Hilbert thực.*

Chứng minh. Xét

$$x_1 = \frac{u}{\|u\|} + \frac{v}{\|v\|} \text{ và } x_2 = \frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|}$$

Ta có $\langle x_i, x_i\rangle \ge 0, i = 1,2$, khai triển ra ta được $\langle u,v\rangle \le \|u\|\|v\|$ và $\langle u,v\rangle \ge -\|u\|\|v\|$. Suy ra điều cần chứng minh. □

Cauchy-Schwarz

Bài tập 2.2. *Một số không gian không thỏa đẳng thức hình bình hành.*

Chứng minh.

1. Xét $l^p, 1 \le p \neq 2 < \infty$. Chọn

$$x = (-1,-1,0,0,0,\dots) \text{ và } y = (-1,1,0,0,\dots) \in l^p$$

Ta có

$$\|x\| = \|y\| = 2^{\frac{1}{p}}$$

và

$$\|x+y\| = \|x-y\| = 2$$

Điều này không xảy ra với l^2. Với l^∞ thì sao?

2. Xét $C[a,b]$ với chuẩn max. Chọn

$$f(t) = 1 \text{ và } g(t) = \frac{t-a}{b-a}, \forall t \in [a,b].$$

Ta có

$$\|f\| = \|g\| = 1$$

và

$$\|f-g\| = 1 \text{ và } \|f+g\| = 2$$

Suy ra

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 5, \quad 2(\|f\| + \|g\|) = 4.$$

□

Bài tập 2.3. *Cho $1 \le p < \infty$. Chứng minh $(l^p, \|.\|)$ là không gian Hilbert khi và chỉ khi $p = 2$.*

Chứng minh. Rõ ràng, với $l^2, \|.\|_2$ là không gian Hilbert ứng với $p = 2$. Bây giờ giả sử $1 \le p < \infty$, l^p là không gian Hilbert. Với $k, t \in \mathbb{N}$ và $k \neq t$ ta xét $e_k, e_t \in l^p$. Vì nó là không gian Hilbert nên thỏa đẳng thức hình bình hành

$$\|e_k + e_t\|_p^2 + \|e_k - e_t\|_p^2 = 2(\|e_k\|_p^2 + \|e_t\|_p^2),$$

tức là $2^{\frac{1}{p}} + 2^{\frac{1}{p}} = 2^2$, $2^{1+\frac{2}{p}} = 2^2$, hay $p = 2$. □

Bài tập 2.4. *$L^p[-1,1], 1 \le p < \infty$ với $\|.\|_p$ là không gian Hilbert khi $p = 2$.*

Chứng minh. Xét $f(x) = 1 + x$ và $g(x) = 1 - x \in L^p[-1,1]$. Ta có

$$\|f\|_p^p = \int_{-1}^{1} |f(x)|^p\, dx = \int_{-1}^{1} (1+x)^p dx = \frac{2^{p+1}}{p+1}$$

và

$$\|g\|_p^p = \int_{-1}^{1} (1-x)^p dx = \frac{2^{p+1}}{p+1}$$

Mặt khác

$$\|f+g\|_p^p = \int_{-1}^{1} [(1+x) + (1-x)]^p dx = \int_{-1}^{1} 2^p dx = 2^{p+1}$$

và

$$\|f-g\|_p^p = 2^p \int_{-1}^{1} |x|^p = 2^{p+1} \int_{0}^{1} x^p dx = \frac{2^{p+1}}{p+1}$$

Đẳng thức hình bình hành thỏa mãn khi và chỉ khi

$$(p+1)^{\frac{2}{p}} - 3 = 0$$

$p = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình trên.
Phần còn lại xin dành cho độc giả.

□

Bài tập 2.5. *Cho $1 \le p < \infty$ và $A \subset \mathbb{R}^n$ là tập đo được Lebesgue, $\lambda(A) > 0$trong đó λ là độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}^n$. Chứng minh $(L^p(A), \|.\|_p)$ là không gian Hilbert khi và chỉ khi $p = 2$.*

Chứng minh. Theo tính chất của độ đo Lebesgue, ta có thể tìm các tập đo được Lebesgue $B, C \subset A$ sao cho $B \cap C = \emptyset$ và $\lambda(B) = \lambda(C) = \dfrac{\lambda(A)}{2}$. Nếu $L^p(A)$ là không gian Hilbert thì nó thỏa mãn đẳng thức hình bình hành. Ta có

$$\|\chi_B + \chi_C\|_p^2 + \|\chi_B - \chi_C\|_p^2 = 2(\|\chi_B\|_p^2 + \|\chi_C\|_p^2)$$

Suy ra

$$(\lambda(A))^{2/p} + (\lambda(A))^{2/p} = 2\left((\lambda(A)/2)^{2/p} + (\lambda(A)/2)^{2/p}\right).$$

Vì $\lambda(A) > 0$ nên $2 = 2^{2/p}$, tức là $p = 2$.
Ngược lại, với $p = 2$ thì $(L^p(A), \|.\|_p)$ là không gian Hilbert.

□

Bài tập 2.6. *Cho (Ω, Σ, μ) là không gian độ đo với ít nhất hai tập có độ đo dương rời nhau. Chứng minh rằng $L^p(\Omega, \mu), 1 \le p < \infty$ sinh ra một tích vô hướng khi và chỉ khi $p = 2$*

Chứng minh. Đặt $\Omega = A_1 \cup A_2$, trong đó $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $\mu(A_1), \mu(A_2) > 0$. Với $i = 1, 2$ chọn $f_i \in L^p(\Omega)$ sao cho $\|f_i\|_p = 1$ và supp $(f_i) \subset A_i$.
Khi đó

$$\|f_1 \pm f_2\|_p^p = \int\limits_{A_1} |f_1 \pm f_2|^p + \int\limits_{A_2} |f_1 \pm f_2|^p = \|f_1\|_p^p + \|f_2\|_p^p$$

Vì vậy với $\lambda_i > 0$, ta có

$$\|\lambda_1 f_1 \pm \lambda_2 f_2\|_p^2 = \left(\|\lambda_1 f_1\|_p^p + \|\lambda_2 f_2\|_p^p\right)^{\frac{2}{p}} = (\lambda_1^p + \lambda_2^p)^{\frac{2}{p}},$$

trong đó $\|\lambda_1 f_1\|_p^2 + \|\lambda_2 f_2\|_p^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$. Nếu $\|.\|_p$ thỏa mãn đẳng thức hình bình hành thì

$$(\lambda_1^p + \lambda_2^p)^{\frac{2}{p}} + (\lambda_1^p + \lambda_2^p)^{\frac{2}{p}} = 2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2),$$

tức là $(\lambda_1^p + \lambda_2^p)^{\frac{2}{p}} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$ với mọi $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Đẳng thức này chỉ đúng với $p = 2$.

□

Bài tập 2.7. *Chứng minh rằng trong không gian tiền Hilbert H, $x, y \in H$ trực giao*[15] *với nhau khi và chỉ khi $\|\lambda x\|^2 + \|\mu y\|^2 = \|\lambda x + \mu y\|^2$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$.*

Chứng minh. ($\Rightarrow$:) Giả sử $x, y \in H$, $x \perp y$. Ta có

$$\begin{aligned}
\|\lambda x + \mu y\|^2 &= \langle \lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y \rangle \\
&= \langle \lambda x, \lambda x + \mu y \rangle + \langle \mu y, \lambda x + \mu y \rangle \\
&= \langle \lambda x, \lambda x \rangle + \langle \lambda x, \mu y \rangle + \langle \mu y, \lambda x \rangle + \langle \mu y, \mu y \rangle \\
&= \langle \lambda x, \lambda x \rangle + \lambda \overline{\mu} \langle x, y \rangle + \mu \overline{\lambda} \langle y, x \rangle + \langle \mu y, \mu y \rangle \\
&= \|\lambda x\|^2 + \|\mu y\|^2
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$:) Giả sử x, y thỏa mãn

$$\|\lambda x\|^2 + \|\mu y\|^2 = \|\lambda x + \mu y\|^2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

Khi đó $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ thì

$$\lambda \overline{\mu} \langle x, y \rangle + \mu \overline{\lambda} \langle y, x \rangle$$

hay

$$\lambda \overline{\mu} \langle x, y \rangle + \mu \overline{\lambda} \overline{\langle x, y \rangle}$$

Chọn $\lambda = \mu = 1$, ta có $2\mathrm{Re} \langle x, y \rangle = 0$, tức là $Re \langle x, y \rangle = 0$
Chọn $\lambda = 1, \mu = i$, thì $2\mathrm{Im} \langle x, y \rangle = 0$, tức là $\mathrm{Im} \langle x, y \rangle = 0$.
Vậy $\langle x, y \rangle = 0$ hay $x \perp y$. □

Bài tập 2.8. *Cho H là không gian tiền Hilbert và $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset H$, $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng*

$$\sum_{(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{\pm 1\}^n} \left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i \right\|^2 = 2^n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{\pm 1\}^n} \left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i \right\|^2 &= \sum_{(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{\pm 1\}^n} \sum_{i,j=1}^{n} \epsilon_i \epsilon_j \langle x_i, x_j \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle x_i, x_j \rangle \sum_{(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{\pm 1\}^n} \epsilon_i \epsilon_j
\end{aligned}$$

Với $i = j$, ta có $\sum\limits_{(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{\pm 1\}^n} \epsilon_i \epsilon_j = 2^n$. Với $i \neq j$, $\sum\limits_{(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{\pm 1\}^n} \epsilon_i \epsilon_j = 0$ vì trong tổng này có 2^{n-1} thành phần bằng 1 và 2^{n-1} thành phần bằng -1.

[15] Trong không gian Hilbert phức, $x \perp y$ khi và chỉ khi $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$ và $\|x + iy\| = \|x - iy\|$.

Vì vậy

$$\sum_{(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)\in\{\pm 1\}^n} \left\|\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i\right\|^2 = 2^n \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x_i\rangle = 2^n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

□

Bài tập 2.9. *Cho* $(x_n)_n, (y_n)_n \subset B'(0,1)$ *trong không gian tiền Hilbert* H *và* $\lim\limits_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle = 1$.

1. *Chứng minh* $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|y_n\| = 1$

2. *Chứng minh* $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$

Chứng minh.

1. Ta có
$$1 = \langle x_n, y_n\rangle \le \|x_n\|\|y_n\| \le \|x_n\| \le 1$$
$$1 = \langle x_n, y_n\rangle \le \|x_n\|\|y_n\| \le \|y_n\| \le 1$$
Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|y_n\| = 1$.

2. Ta có
$$\begin{aligned}\|x_n - y_n\|^2 &= \langle x_n - y_n, x_n - y_n\rangle \\ &= \langle x_n, x_n\rangle - \langle x_n, y_n\rangle - \langle y_n, x_n\rangle + \langle y_n, y_n\rangle \\ &= \|x_n\|^2 + \|y_n\|^2 - \langle x_n, y_n\rangle - \overline{\langle x_n, y_n\rangle}\end{aligned}$$
Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$.

□

Bài tập 2.10. *Cho* H *là không gian Hilbert,* $A : H \to H$ *tuyến tính thỏa mãn* $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle, \forall x, y \in H$. *Chứng minh* A *liên tục.*

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh A là ánh xạ đóng. Thật vậy, gọi $(x_n, Ax_n) \subset G_A$ và $(x_n, Ax_n) \to (x_0, y_0)$, ta cần chứng minh $y_0 = Ax_0$.
Với mọi $y \in H$ ta có

$$\begin{aligned}\langle Ax_0, y\rangle = \langle x_0, Ay\rangle &= \left\langle \lim_{n\to\infty} x_n, Ay\right\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle x_n, Ay\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Ax_n, y\rangle \\ &= \left\langle \lim_{n\to\infty} Ax_n, y\right\rangle = \langle y_0, y\rangle\end{aligned}$$

Suy ra $\langle Ax_0 - y_0, y\rangle = 0, \forall y \in H$. Với $y = Ax_0 - y_0$ thì $\langle Ax_0 - y_0, Ax_0 - y_0\rangle = 0$. Khi đó, $Ax_0 = y_0 = 0$ hay $Ax_0 = y_0$.
Vậy A là toán tử đóng trong không gian Banach H và do đó, A liên tục. □

Bài tập 2.11. *Cho không gian Hilbert H và tập M thỏa $M \subset H, M \neq \emptyset$. Chứng minh rằng*

1. $M \subset \overline{M} \subset (M^{\perp})^{\perp}$
2. *Nếu M là không gian con của H thì $(M^{\perp})^{\perp} = \overline{M}$.*

Chứng minh.

1. $M \subset \overline{M}$: rõ.
   $\overline{M} \subset (M^{\perp})^{\perp}$: Lấy $x \in \overline{M}$, khi đó tồn tại $(x_n)_n \in M$ sao cho $x_n \to x, n \to \infty$.
   Với mọi $y \in M^{\perp}$ ta có
   $$\langle x, y\rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} x_n, y\right\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$
   Vậy $x \in (M^{\perp})^{\perp}$.

2. Theo câu a) ta có $\overline{M} \subset (M^{\perp})^{\perp}$. Bây giờ ta chứng minh $(M^{\perp})^{\perp} \subset \overline{M}$.
   Thật vậy, $H = \overline{M}^{\perp} \oplus \overline{M} = M^{\perp} \oplus \overline{M}$ nên với mọi $x \in (M^{\perp})^{\perp}$ được biểu diễn duy nhất dưới dạng $x = y + z$, trong đó $y \in M^{\perp}, z \in \overline{M} \subset (M^{\perp})^{\perp}$. Suy ra $y = x - z \in (M^{\perp})^{\perp}$.
   Vậy $y \in (M^{\perp})^{\perp} \cup M^{\perp}$ nên $y = 0$. Từ đó $x = z \in \overline{M}$, tức là $(M^{\perp})^{\perp} \subset \overline{M}$.

□

Bài tập 2.12. *Cho không gian Hilbert H, $f \in H^*$, $f \neq 0$. Chứng minh $M^{\perp}$ là không gian con một chiều của H, trong đó $M = \ker f$*

Chứng minh. Vì $f \neq 0$ nên tồn tại $x_0 \in M^{\perp}$ sao cho $f(x_0) = 1$. Ta sẽ chứng minh $M^{\perp} = \langle\{x_0\}\rangle$.
Với mọi $x \in M^{\perp}$, $x \neq 0$, $f(x) = \alpha \neq 0$ nên $f(x) = \alpha f(x_0)$. Suy ra $f(x - \alpha x_0) = 0$ hay $x - \alpha x_0 \in M$.
Mặt khác, vì $x, x_0 \in M^{\perp}$ nên $x - \alpha x_0 \in M^{\perp}$. Khi đó $\langle x - \alpha x_0, x - \alpha x_0\rangle = 0$ nên $x - \alpha x_0 = 0$ hay $x = \alpha x_0$.
Vậy $M^{\perp} = \langle\{x_0\}\rangle$. □

Bài tập 2.13. *Cho $E = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ là hệ trực chuẩn trong không gian Hilbert H. Chứng minh E là tập đóng bị chặn nhưng không compact. Suy ra H không compact địa phương.*

Chứng minh. Ta có $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B'(0,1)$ nên nó bị chặn.
Lấy dãy $(x_n)_n \subset E$, $x_n \to x$. Lúc đó $(x_n)_n$ là dãy dừng, tức là tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $a_n = a_{n_0}, \forall n \geq n_0$. Suy ra $a \in E$ nên E đóng.
Mặt khác, $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}, \forall m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$ nên mọi dãy $(x_n)_n \subset E$ không có dãy con nào hội tụ. Vậy E không compact nên $B'(0,1)$ không compact và do đó H không compact địa phương.

□

Bài tập 2.14. *Gọi $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ là cơ sở trực chuẩn trong không gian Hilbert H, $P_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x, e_n\rangle e_n$, $x \in H, n = 1, 2, \dots$ là dãy phép chiếu trực giao. Chứng minh $\{P_N\}$ hội tụ điểm đến ánh xạ đồng nhất I của H nhưng không hội tụ theo chuẩn đến I*

Chứng minh. Vì $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ là cơ sở trực chuẩn trong không gian Hilbert H nên $\forall x \in H$, $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$. Khi đó,

$$\|P_n(x) - I(x)\|^2 = \|\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i - \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i\|^2$$
$$= \|\sum_{i=n+1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2$$

Mặt khác

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2$$

nên

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2 \to 0, n \to \infty$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} \|P_n(x) - I(x)\|^2 = 0$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} \|P_n(x) - I(x)\| = 0$.
Vậy $P_n(x) \to I(x), n \to \infty$.
Giả sử $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ theo chuẩn đến I khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} \|P_n - I\| = 0$, nên tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\|P_{n_0} - I\| < 1$.
Chọn $x = e_{n+1}$, ta có

$$\|(P_{n_0} - I)e_{n_0+1}\| \le \|P_n - I\|\|e_{n_0+1}\| < 1$$

Tuy nhiên

$$\|(P_{n_0} - I)e_{n_0+1}\| = \|P_{n_0}(e_{n_0+1}) - e_{n_0+1}\| = \|e_{n_0+1}\| = 1$$

Vậy $1 < 1$, vô lý. □

Bài tập 2.15. *Cho $E = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ là hệ trực chuẩn trong không gian Hilbert H, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy số bị chặn. Chứng minh rằng*

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n$ *hội tụ với mọi* $x \in H$

2. $Ax = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n$ *là toán tử tuyến tính liên tục. Tính* $\|A\|$.

Chứng minh.

1. Ta có
$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_n \langle x, e_n\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle x, e_n\rangle|^2$$
$(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy số bị chặn nên tồn tại $K > 0$ sao cho $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| \le K$. Khi đó,
$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_n \langle x, e_n\rangle|^2 \le K^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \le K^2\|x\|^2 < +\infty$$
Vậy $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_n \langle x, e_n\rangle|^2$ hội tụ nên $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n$ hội tụ.

2. $Ax = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n$ là toán tử tuyến tính. Thật vậy,
$$\begin{aligned} A(\alpha x + \beta y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n \langle \alpha x + \beta y, e_n\rangle e_n \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(\langle \alpha x, e_n\rangle + \langle \beta y, e_n\rangle)e_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(\alpha x + \beta y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(\alpha \langle x, e_n\rangle + \beta \langle y, e_n\rangle)e_n \\ &= \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n + \beta \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n \langle y, e_n\rangle)e_n \\ &= \alpha Ax + \beta Ay \end{aligned}$$
Mặt khác
$$\|Ax\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_n \langle x, e_n\rangle|^2 \le K^2\|x\|^2$$
nên $\|Ax\| \le K\|x\|$. Vậy A liên tục và $\|A\| \le K$.

□

Bài tập 2.16. *Cho x, y, u, v là bốn vectơ trong không gian tiền Hilbert H. Chứng minh rằng* [16]
$$\|x - u\|\|y - v\| \le \|x - y\|\|u - v\| + \|y - u\|\|x - v\|$$

[16] Bất đẳng thức Ptolémée

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh $\forall x, y \in H, x, y \neq 0$ thì

$$\|\frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2}\|^2 = \frac{\|x-y\|^2}{\|x\|^2\|y\|^2}$$

Ta xét hai trường hợp:

- $x = 0$: bất đẳng thức trở thành

$$\|u\|\|y-v\| \leq \|y\|\|u-v\| + \|y-u\|\|v\|$$

  Ta có

$$\|\frac{y}{\|y\|^2} - \frac{v}{\|v\|^2}\| \leq \|\frac{y}{\|y\|^2} - \frac{u}{\|u\|^2}\| + \|\frac{u}{\|u\|^2} - \frac{v}{\|v\|^2}\|$$

  Suy ra

$$\frac{\|y-v\|}{\|y\|\|v\|} \leq \frac{\|y-u\|}{\|y\|\|u\|} + \frac{\|u-v\|}{\|u\|\|v\|}$$

  Vậy $\|u\|\|y-v\| \leq \|y\|\|u-v\| + \|y-u\|\|v\|$.

- $x \neq 0$: Ta đặt $a = x - u, b = x - y, c = x - v$. Khi đó bất đẳng thức trở về trường hợp trên

□

Bài tập 2.17. *Cho M, N là hai không gian con đóng của không gian Hilbert H sao cho $M \perp N$. Chứng minh $M + N$ cũng là một không gian con đóng của H*

Chứng minh. Ta có $\forall x \in M + N, x = y + z$ trong đó $y \in M, z \in N$. Biểu diễn này là duy nhất vì nếu có $y' \in M, z' \in N$ sao cho $x = y' + z'$, lúc đó $y - y' = z - z' \in M \cap N = \{0\}$. Suy ra $y' = y$ và $z' = z$.
Lấy $(z_n)_n \subset M + N, z_n \to z_0, n \to \infty$. Ta cần chứng minh $z_0 \in M + N$. Ta có $z_n = x_n + y_n$, $x_n \in M, y_n \in N, \forall n \in \mathbb{N}$.
Mặt khác

$$\begin{aligned}\|z_n - z_m\|^2 &= \|x_n + y_n - x_m - y_m\|^2 \\ &= \|x_n\|^2 + \|y_n - y_m\|^2\end{aligned}$$

Suy ra $(x_n)_n, (y_n)_n$ là dãy Cauchy vì $\|x_n - x_m\| \leq \|z_n - z_m\| \to 0$ và $\|y_n - y_m\| \leq \|z_n - z_m\| \to 0$ khi $m, n \to \infty$.
Vì M, N đóng trong không gian Banach nên M, N Banach và do đó $x_n \to x_0 \in M, y_n \to y_0 \in N, n \to \infty$.
Vậy $z_n \to x_0 + y_0 = z_0 \in M + N$, tức là $M + N$ là không gian con đóng.

□

Bài tập 2.18. *Cho H là không gian Hilbert và $P \in \mathcal{L}(H)$ sao cho $P^2 = P$ và $\|P\| \leq 1$. Chứng minh rằng P là một toán tử chiếu.*[17].

Chứng minh. Đặt $M = P(H)$ và $N = \ker P$. Khi đó, M là không gian con đóng và $x \in M$ tương đương với $x = Px$. N cũng là không gian con đóng vì tính liên tục của P. Trong phân tích $x = Px + (I - P)(x)$, ta có $Px \in M$ và $(I - P)(x) \in N$ do $P(I - P) = p - P^2 = 0$.
Vì vậy ta sẽ chứng minh $M^{\perp} = N$. Với mọi $x \in H$, $y = Px - x \in N$ vì $P^2 = P$. Do đó, nếu $x \in N \perp$ thì $Px = x + y$ với $\langle x, y\rangle = 0$. Suy ra $\|x\|^2 \geq \|Px\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ và do đó $y = 0$. Như thế $x \in N^{\perp}$ thì $Px = x$ hay $N^{\perp} \subset M$. Ngược lại, $\forall z \in M, z = Pz$. Vì $H = N \oplus N^{\perp}$ nên giả sử $z = x + y$, trong đó $y \in N, x \in N^{\perp}$. Suy ra $z = Pz = Px + Py = Px = x \in N^{\perp}$. Điều này chứng tỏ $M \subset N^{\perp}$. Vậy $M = N^{\perp}$. Vì $(N^{\perp})^{\perp} = N$ nên $M^{\perp} = N$.

□

Bài tập 2.19. *Cho H là không gian Hilbert với hệ trực chuẩn $(x_n)_n$. Chứng minh $(x_n)_n$ hội tụ yếu tới 0.*

Chứng minh. Xét $x^* \in H^*$. Khi đó, theo định lí Riesz, tồn tại duy nhất $x \in H$ sao cho $x^*(y) = \langle y, x\rangle$, $\forall y \in H$. Với mỗi $x \in H$, theo bất đẳng thức Bessel, ta có $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ và do đó $\lim\limits_{n\to\infty} \langle x_n, x\rangle = 0$, tức là $\lim\limits_{n\to\infty} x^*(x_n) = 0$ □

Bài tập 2.20. *Cho H là không gian Hilbert và $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một cơ sở trực chuẩn, $x^* : H \longrightarrow \mathbb{K}$ là phiếm hàm tuyến tính liên tục. Chứng minh rằng $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{x^*(e_n)} e_n$ là phần tử duy nhất trong H thỏa mãn $x^*(x) = \langle x, y\rangle$, $\forall y \in H$ và $\|x^*\| = \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x^*(e_n)|^2}$.*

Chứng minh. Theo định lí Riesz, tồn tại duy nhất $y \in H$ sao cho $x^*(x) = \langle x, y\rangle$, $\forall x \in H$. Nói riêng, $x^*(e_n) = \langle e_n, y\rangle$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Vì $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là cơ sở trực chuẩn nên $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle y, e_n\rangle\, e_n$, do đó $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{x^*(e_n)} e_n$.

Vì $\|x^*\| = y$ và $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là cơ sở trực chuẩn nên ta có $\|x^*\| = \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x^*(e_n)|^2}$.

□

Bài tập 2.21. *Cho A là toán tử tuyến tính liên tục trong không gian Hilbert H. Chứng minh rằng A là tự liên hợp khi và chỉ khi $\|x + iAx\|^2 = \|x\|^2 + \|Ax\|^2$.*

[17]Xem *Yosida, Functional Analysis, Theorem 3, trang 84*

Chứng minh.

i) Vì A là tự liên hợp nên $A = A^*$. Suy ra $\langle Ax, x\rangle = \langle x, A^*x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle}$, với mọi $x \in H$, tức là $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$, $\forall x \in H$. Do đó,

$$\begin{aligned}\|x + iAx\|^2 &= \langle x + iAx, x + iAx\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + i\langle Ax, x\rangle + \langle x, iAx\rangle + \langle iAx, iAx\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|Ax\|^2, \forall x \in H.\end{aligned}$$

ii) Ngược lại, nếu $\|x + iAx\|^2 = \|x\|^2 + \|Ax\|^2$ thì $\langle Ax, x\rangle - \langle x, Ax\rangle = 0$. Do đó, $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$. Vậy A tự liên hợp.

$\square$

"Life is good for only two things, discovering mathematics and teaching mathematics"- Siméon Poisson

3 Toán tử compact và phổ của toán tử compact

Bài tập 3.1. *Cho $X = X_1 \oplus X_2$, $A \in \mathcal{L}(H)$ sao cho $A(X_1) \subset X_2$ và $A(X_2) \subset X_1$. Chứng minh nếu λ là giá trị riêng của A thì $-\lambda$ cũng là giá trị riêng của A.*

Chứng minh. Vì λ là giá trị riêng của A nên tồn tại $x \neq 0$ sao cho $Ax = \lambda x$. Khi đó, $x = x_1 + x_2$, trong đó $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$. Ta có $A(x_1 + x_2) = \lambda(x_1 + x_2)$, hay $Ax_1 - \lambda x_2 = Ax_2 - \lambda x_1$. Theo giả thiết thì $Ax_1 - \lambda x_2 = Ax_2 - \lambda x_1 = 0 \in X_1 \cap X_2$.
Đặt $y = x_1 - x_2$[18]. Ta có $y \neq 0$, vì nếu ngược lại thì $x_1 = x_2 = 0$, tức là $x = 0$, vô lý. Lúc đó, $A(y) = A(x_1 - x_2) = -\lambda y$, và do đó $-\lambda$ cũng là giá trị riêng của A. □

Bài tập 3.2. *Cho H là không gian Hilbert , $A \in \mathcal{L}(H)$, $A = A^*$, $\lambda \in \mathbb{C}$.*

1. *Nếu $H \neq \overline{R(A_\lambda)}$ thì λ là giá trị riêng của A.*
2. *Nếu $H = \overline{R(A_\lambda)}$ và $H \neq R(A_\lambda)$ thì $\lambda \in \sigma(A)$ nhưng không phải là giá trị riêng của A.*
3. *Nếu $H = R(A_\lambda)$ thì λ là giá trị chính quy của A.*

Chứng minh. Ta có $H = N(A^*_\lambda) \oplus \overline{R(A_\lambda)}$.

1. Nếu $H \neq \overline{R(A_\lambda)}$ thì A_λ không là toàn ánh, do đó không song ánh. Suy ra $\lambda \in \sigma(A)$.
   Vì $A = A^*$ nên $\lambda \in \mathbb{R}$. Ta có $(A - \lambda I)^* = A^* - \overline{\lambda} I^* = A - \lambda I$. Từ $H \neq \overline{R(A_\lambda)}$ ta có $N(A_\lambda) = N(A^*_\lambda) \neq \{0\}$. Vậy λ là giá trị riêng.
2. Vì $H \neq R(A_\lambda)$ nên A_λ không khả nghịch nên $\lambda \in \sigma(A)$, và kết hợp với $A = A^*$ ta có $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $H = \overline{R(A_\lambda)}$ nên $N(A^*_\lambda) = \{0\} = N(A_\lambda)$. Vậy $\lambda \in \sigma(A)$ nhưng không là giá trị riêng của A.
3. $A = A^*$ nên $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. Do đó, nếu $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ thì λ là giá trị chính quy. Xét $\lambda \in \mathbb{R}$. Vì $H = R(A_\lambda)$ nên A_λ là toàn ánh. Mặt khác, $N(A^*_\lambda) = \{0\} = N(A_\lambda)$ nên A_λ là đơn ánh. Vậy A_λ là song ánh, tức là λ là giá trị chính quy.

[18] C.M.Q

□

Bài tập 3.3. *Cho A là toán tử tự liên hiệp, $A \circ A^*$ là toán tử compact trong không gian Hilbert H. Chứng minh A là toán tử compact.*

Chứng minh. Gọi B là hình cầu đóng đơn vị. Vì $A \circ A^*$ là toán tử compact nên $A(A^*(B))$ là tập compact tương đối. Gọi $(x_n)_n$ là dãy các phần tử thuộc B. Khi đó dãy $A(A^*(x_n))$ có một dãy con $A(A^*(x_{nk}))$ hội tụ trong H và do đó $A(A^*(x_{nk}))$ là dãy Cauchy. Ta có

$$\begin{aligned}\|A^*(x_{nk}) - A^*(x_{mk})\| &= \langle A^*(x_{nk} - x_{mk}), A^*(x_{nk} - x_{mk})\rangle \\ &= \langle x_{nk} - x_{mk}, A(A^*(x_{nk} - x_{mk}))\rangle \\ &\leq \|x_{nk} - x_{mk}\| \|A(A^*(x_{nk} - x_{mk}))\| \\ &\leq 2\|A(A^*(x_{nk} - x_{mk}))\| \to 0.\end{aligned}$$

Suy ra $A^*(x_{nk})$ là dãy Cauchy trong H. Vì H là không gian Hilbert nên $A^*(x_{nk})$ hội tụ. Vậy A^* là toán tử compact, từ đó A cũng compact. □

Bài tập 3.4. *Cho A là toán tử tự liên hợp trong không gian Hilbert H và A^m là toán tử compact với m là số nguyên dương nào đó. Chứng minh A là toán tử compact.*

Chứng minh. Vì A là toán tử tự liên hợp nên $A^2 = A \circ A^*$. Ta sẽ chứng minh A^2 compact[19], từ đó suy ra A compact.
Vì A^m là compact nên $A^{2^m} \circ A^{2^m - m}$ là compact. Vì A^{2^m-1} là tự liên hiệp và $(A^{2^m-1})^2 = A^{2^m}$ nên A^{2^m-1} là toán tử compact. Tương tự, A^{2^m-2} là toán tử compact. Tiếp tục quá trình này ta suy ra A^2 là toán tử compact. □

Bài tập 3.5. *Cho $X = C_{[0,1]}$ là không gian định chuẩn với chuẩn* max *và $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ xác định bởi công thức:*

(i) $(Ax)(t) = x(0) + tx(1)$

(ii) $(Bx)(t) = \int\limits_0^1 e^{ts}x(s)ds$, *với mọi* $x \in X, t \in [0,1]$.

1. *Chứng minh A, B là toán tử compact trong X.*

2. *Đặt $v = I - B$ với $I = id_X$ là toán tử đồng nhất. Chứng minh rằng nếu E là tập compact trong X thì $v^{-1}(E) \cap B'_X(0,1)$ là tập compact trong X.*

Chứng minh.

[19] Ta cũng có thể chứng minh A^{m-1} compact theo cách tương tự bài 3.3

1. Ta có $|Ax(t)| = |x(0) + tx(1)| \leq 2\|x\|$. Do đó, $\|Ax\| \leq 2\|x\|$, hay $A(B(0,1))$ bị chặn. Hơn nữa, với mọi $t_1, t_2 \in [0,1]$, với mọi $x \in B(0,1)$

$$|Ax(t_1) - Ax(t_2)| = |(t_1 - t_2)x(1)| \leq |t_1 - t_2| \, \|x\| \leq |t_1 - t_2|$$

Suy ra $A(B(0,1))$ là đồng liên tục đều. Theo định lí Arzela-Ascoli ta có $A(B(0,1))$ là tập compact tương đối. Vậy A là compact.
Tương tự, B cũng compact.

2. Ta có $x \in v^{-1}(E) \cap B'_X(0,1) \Leftrightarrow \begin{cases} v(x) \in E \\ x \in B'(0,1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in B'(0,1) \\ (I-B)(x) \in E \end{cases}$.
Từ đó $x - Ax \in E$ hay $x \in Bx + E \subset B(B'(0,1)) + E$. Vậy $v^{-1}(E) \cap B'_X(0,1) \subset \overline{B(B'(0,1))} + E$. Mặt khác, vì $\overline{B(B'(0,1))} + E$ là tập compact và $v^{-1}(E) \cap B'_X(0,1)$ là tập đóng nên $v^{-1}(E) \cap B'_X(0,1)$ là compact.

□

Bài tập 3.6. *Cho toán tử tuyến tính*

$$\begin{array}{llcl} A: & l^2 & \longrightarrow & l^2 \\ & x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) & \longmapsto & (x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{2^{n-1}}, \ldots) \end{array}$$

Chứng minh A là toán tử compact.

Chứng minh. Xét toán tử $A_n x = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{2^{n-1}}, 0, \ldots\right)$. Vì A_n là toán tử hữu hạn chiều nên mọi tập $M \subset l^2$ bị chặn, tập $A_n(M)$ bị chặn trong không gian hữu hạn chiều $A_n(l^2)$, do đó $A_n(M)$ compact tương đối. Vậy A_n là toán tử compact.
Mặt khác,

$$\|A_n x - Ax\| = \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} \left|\frac{x_i}{2^{i-1}}\right|^2} \leq \frac{1}{2^n} \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^2} \leq \frac{1}{2^n}\|x\|,$$

Từ đó $\|A_n - A\| \to 0$ khi $n \to \infty$. Suy ra A là toán tử compact, do không gian các toán tử compact từ không gian Banach X vào không gian Banach Y là không gian con đóng.

□

Bài tập 3.7. *Toán tử A là compact trong không gian Hilbert H khi và chỉ khi A biến mỗi dãy hội tụ yếu thành dãy hội tụ mạnh.*

Chứng minh. $\Longrightarrow$: Giả sử A là toán tử compact và $(x_n)_n \subset H$sao cho x_n hội tụ yếu về x_0. Khi đó dãy $(x_n)_n$ bị chặn và do đó $(Ax_n)_n$ là compact tương đối. Hơn nữa, Ax_n hội tụ yếu về Ax_0 nên Ax_n hội tụ về Ax_0.

$\Longleftarrow$: Giả sử A biến dãy hội tụ yếu thành dãy hội tụ mạnh và M là tập bị chặn trong H. Ta có M là tập compact tương đối yếu. Lấy dãy $(Ax_n)_n \subset A(M)$ bất kì, ta lấy ra một dãy con (x_{n_k}) hội tụ yếu về x_0. Lúc đó Ax_{n_k} hội tụ về Ax_0, do đó $A(M)$ là compact tương đối, hay A là toán tử compact. $\square$

Bài tập 3.8. *Trên tập compact tương đối M, hội tụ mạnh và hội tụ yếu trùng nhau.*

Chứng minh. Giả sử tồn tại dãy $(x_n)_n \subset M$ hội tụ yếu đến x_0 nhưng không hội tụ mạnh. Khi đó $(x_n)_n$ không hội tụ đến x_0, tức là tồn tại $\epsilon > 0$ và dãy con x_{nk} sao cho $\|x_{nk} - x_0\| \geq \epsilon$ với mọi $k \in \mathbb{N}$.
Vì $x_{nk} \subset M$ nên có dãy con $x_{n_{k}i}$ hội tụ mạnh hội tụ đến a, rõ ràng $a = x_0$ vì $x_{n_{k}i}$ hội tụ yếu đến x_0. Suy ra $\epsilon \leq \|x_{n_{k}i} - x_0\| \to 0$, vô lý.

$\square$

Bài tập 3.9. *Toán tử compact trong không gian vô hạn chiều không có toán tử nghịch đảo liên tục.*

Chứng minh. Giả sử A là toán tử compact trong không gian vô hạn chiều X. Nếu A^{-1} liên tục thì $Id = A \circ A^{-1}$ là compact. Mặt khác, toán tử đơn vị trong không gian vô hạn chiều không compact. Vậy nếu A^{-1} tồn tại thì không liên tục. $\square$

Bài tập 3.10. *Cho H là không gian Hilbert . Giả sử $(T_n)_n$ là một dãy trong $\mathcal{L}(H)$ và $T \in \mathcal{L}(H)$ và S là một toán tử compact trong H. Nếu $\forall x \in H, T_n x \to Tx$, $n \to \infty$ trong H thì $T_n S \to TS$ trong $\mathcal{L}(H)$ khi $n \to \infty$.*

Chứng minh. Giả sử $T_n S - TS$ không hội tụ về 0 trong $\mathcal{L}(H)$. Lúc đó, tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho[20]

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N, \exists x_n \in H, \text{ với } \|x_n\| = 1 \text{ và } \|(T_n S - TS)x_n\| > \epsilon.$$

Do đó, ta có thể xây dựng dãy $(x_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ trong H thỏa $\|x_{nk}\| = 1$ và $\|(T_{nk}S - TS)x_{nk}\| > \epsilon$.
Vì dãy $(x_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ bị chặn trong H và S là compact nên tồn tại dãy con $(Sx_{nk_l})_{l\in\mathbb{N}}$ của dãy $(Sx_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ hội tụ về y. Khi đó

$$\begin{aligned}\epsilon < \|(T_{nk_l}S - TS)x_{nk_l}\| &= \|(T_{nk_l} - T)y + (T_{nk_l} - T)(Sx_{nk_l} - y)\| \\ &\leq \|T_{nk_l}y - Ty\| + \|T_{nk_l} - T\|\|(Sx_{nk_l} - y)\|.\end{aligned}$$

[20] Ta phủ định mệnh đề

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ sao cho } \forall n > N, \forall x \in H \text{ thỏa } \|x\| = 1, \|(T_n S - TS)x\| \leq \epsilon.$$

Theo nguyên lí bị chặn đều, ta có $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$. Ta có thể chọn $L \in \mathbb{N}$ đủ lớn sao cho khi $l > L$ thì

$$\|T_{nk_l}y - Ty\| < \frac{\epsilon}{2} \text{ và } \|(Sx_{nk_l} - y)\| < \frac{\epsilon}{2(M + \|T\|)}.$$

Từ đó suy ra $\epsilon < \epsilon$, mâu thuẫn. □

TÀI LIỆU THAM KHẢO

`Sách là thầy của các thầy.`

[1] Nguyễn Hoàng. *Bài giảng Giải tích hàm*, 2008

[2] Kosaku Yosida. *Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1980.

[3] Phan Đức Chính. *Giải tích hàm*, Tập 1, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, 1978.

[4] Walter Rudin. *Functional Analysis*, Mc Graw-Hill, 1991.

[5] Nguyễn Xuân Liêm. *Bài tập Giải tích hàm*, NXB Giáo dục, 2004.

[6] S.Ponussamy. *Foundations of Functional Analysis*, Alpha Science, 2002.

[7] Stephan Banach. Théorie des operations lineaires, Warszawa, 1932.

[8] N. Dunford, J.T. Schwartz. *Operator Theory I,II. Wiley*, 1988.