5-6. 함수 step C 풀이

PROJECT
Eclipse

1번 가능한 함수의 개수는 n^n개이고, 상수함수의 개수는 n개이므로 $f(n) = n^n - n$이다. 또한, 모든 일대일 대응의 개수는 $n!$이고, x_1이 y_3과 대응되는 경우의 수는 $(n-1)!$이므로 $g(n) = n! - (n-1)!$이다. 따라서 $f(4) + g(5) = (4^4 - 4) + (5! - 4!) = 348$이다.

2번 이 문제는 엄밀하게 가면 정말 어려운 문제이다. ~~사실 나는 이문제를 제대로 할 자신이 없다. 궁금한 점이 생기면 주변의 수학 윌클들께 물어보자.~~

문제에서 나왔듯 함수 $f : X \longrightarrow X$는 다음 조건을 만족한다.

$$f(\frac{a+b}{2}) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

이 식은 함수의 볼록/오목과 관련이 있다. 아마 여러 문제집들이 이 성질을 다룰 텐데, 아무 함수에서 두 점을 찍어서 두 점의 중점 y좌표값이 실제 함수값보다 작으면

$$f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

이 함수는 볼록이고, 부등호가 반대가 되면

$$f(\frac{a+b}{2}) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

이 함수는 오목이라고 한다. 문제의 조건을 보면 함수가 볼록도, 오목도 아닌 직선임을 알 수 있고, $f(1) = f(2) = 5$이므로 $f(x) = 5$, 치역의 원소 개수는 1이다.

라고 푸는 문제이지만, 아무리 봐도 저 함수의 오목/볼록 조건은 약간 찜찜한 것 같다. 명제 단원에 많이 나오는 ㄱ, ㄴ, ㄷ고르는 문제의 반대 보기처럼, 잘 하면 뚝배기를 깰 수 있을 것처럼 보인다. ~~응 너만 그래~~

지금부터는 고1 수학의 범위를 넘어갈 수도 있고, 시험에 거의 100% 쓸데 없는 내용입니다. 수학을 싫어하시거나, 굳이 깊게 들어가는 것을 노잼이라고 생각하시는 분들은 3번 풀이로 넘어가셔도 됩니다. 물론 저는 이런 걸 매우 좋아하긴 하지만요.

사실 어떤 함수가 볼록이려면 다음과 같은 조건을 만족해야 한다. (t는 0 이상 1 이하의 실수)

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

자, 그럼 앞서 말한 볼록 함수의 조건

$$f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

이 만족될 때, $f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$임을 증명하면 된다. 모든 유리수에 대해 증명하는 것은 간단하다. 위의 식이

$$f(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k}) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_k)}{k}$$

와 같음을 보이면 된다. (k는 2 이상의 임의의 양의 정수) 여기서는 코시의 귀납법이라고 불리는 방법을 사용하겠다.

$k = 2^n$인 경우 매우 자명하게 증명할 수 있다. 2^n개의 항들을 같은 크기의 2조각으로 분할하는 것을 반복하면 된다.

$2^{k-1} < k \leq 2^k$일 때 $\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_3}{k}$라고 하면,

$$f(\bar{x}) = f(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k+\bar{x}+\cdots+\bar{x}}{2^n}) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)+(2^n-k)f(\bar{x})}{2^n}$$

여기서 $kf(\bar{x}) \leq f(x_1)+\cdots+f(x_k)$임을 알 수 있다.

그렇다면, 모든 실수에 대해 성립하는지는 어떻게 알 수 있을까? ~~월 6, 7교시 수학을 수강하는 친구들은 내가 이걸 증명하려다 망한 것을 보았을 것이다.~~ 사실, 이 질문에 대한 답은 단순하다. 위의 조건은 f가 연속이라는 가정이 숨어 있다. 모든 유리수에 대해 성립하므로, 연속성에 의해 모든 실수에 대해서도 성립하는 것이다. 고1 수준에서는 불연속인 함수를 다룰 일이 거의 없고, 다룬다 하더라도 오목/볼록을 따지지는 않으므로 이러한 가정이 보이지 않았던 것 뿐이다.

3번

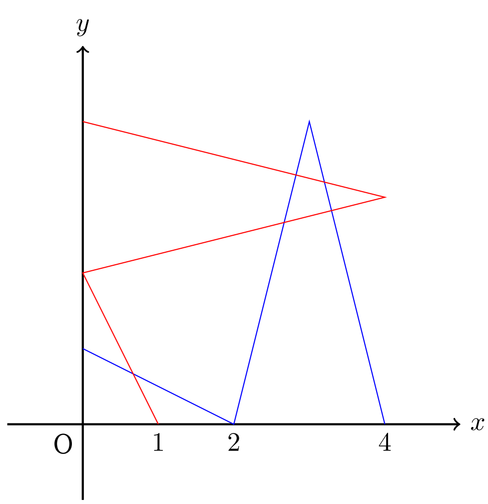
보기 ㄱ f, g가 모두 항등함수이면 성립함은 당연하다.

보기 ㄴ f와 g가 역함수 관계일 수도 있다.

보기 ㄷ f와 g가 모두 일대일대응이어도 상관 없다.

따라서 참인 것은 ㄱ, 따라서 정답은 $\underline{1}$이다.

4번 $y = f(x)$일 때, $f(y) = x$이므로 $f(f(x)) = x$의 서로 다른 실근 개수는 $y = f(x)$와 $x = f(y)$의 교점 개수와 같다.



그림에서 볼 수 있듯 두 그래프의 교점은 5개이고, 따라서 정답은 $\underline{5}$이다.

5번 그래프를 통해 $g(x) = -x+1$임을 알 수 있다. 역함수를 구하면 $g^{-1}(x) = -x+1$이고, 따라서 $y = (g^{-1} \circ f)(x) = -f(x)+1$를 그래프로 그리면 다음과 같다.