

8장 1절 연습문제 풀이

Project Eclipse (19092 손량)

1 쓸데없는 이야기: 라플라스 전개

예전 문제풀이에서도 다뤘지만, 벡터곱을 할 때 행렬식을 구할 일이 많으므로 잠깐 소개한다.¹² 탐구문제에도 있었고, 이충훈 선생님께서 기하 시간에 외적을 구할 때에도 잠깐 보여 주셨지만 라플라스 전개는 행렬식을 쉽게³ 계산하는 방법이다. 다음 행렬의 행렬식을 한 번 라플라스 전개로 계산해 보자.⁴

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

행/열 정하기 우선 주어진 행렬에서 열이나 행을 하나 정해야 한다. 여기에서는 그냥 첫 번째 열을 고르자. 어떤 행이나 열을 고르든 계산의 결과는 같다.⁵

행렬 분해하기 앞서 고른 행이나 열의 각각의 항에 대해, 각각의 항들을 지나는 열과 행을 지우고, 남은 항들로 새로운 행렬을 만든다. n 차 정사각행렬이라면, $n - 1$ 차 정사각행렬이 n 개 만들어질 것이다. 여기서 예로 든 정사각행렬로 보면, 파란색으로 되어 있는 항을 기준으로 분해할 때를 보면 다음과 같다. 빨간색으로 표시된 항들은 분해 과정에서 없어지는 항들이다.

$$\begin{pmatrix} \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{2} & \textcolor{red}{3} \\ \textcolor{blue}{4} & 5 & 6 \\ \textcolor{blue}{7} & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \textcolor{red}{1} & 2 & 3 \\ \textcolor{blue}{4} & \textcolor{red}{5} & \textcolor{red}{6} \\ \textcolor{blue}{7} & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \textcolor{red}{1} & 2 & 3 \\ \textcolor{blue}{4} & 5 & 6 \\ \textcolor{blue}{7} & \textcolor{red}{8} & \textcolor{red}{9} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

행렬식 나눠서 계산하기 분해된 각각의 행렬의 행렬식을 구하고, 행렬을 분해할 때 기준으로 잡은 항을 곱해준다.

$$1 \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = -3, 4 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = -24, 7 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = -21$$

부호 붙여서 결과값 내기 이제 각각의 결과값에 부호를 붙여서 더하면 된다. 기준으로 잡은 항이 (i, j) 항일 때, 앞서 구한 행렬식의 값들에 $(-1)^{i+j}$ 를 곱해준다. 이제 행렬식의 값을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} &= 1 \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 4 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + 7 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \\ &= -3 + 24 - 21 = 0 \end{aligned}$$

¹이미 알고 있거나, 이런 걸 볼때 그저 지건이 마렵다면 연습문제 풀이로 넘어가면 된다.

²사실 새로 치기 귀찮아서 예전에 쓴 TeX 코드 복붙했다.

³물론 쉽다는 것은 계산하는 순서가 덜 헷갈린다는 거지, 실제로 하는 곱셈의 횟수는 그냥 구할 때하고 비슷하다.

⁴이게 왜 가능한지는 [증명](#)을 참고하자.

⁵이것은 숫자로만 이루어진 ‘일반적인’ 행렬의 경우만 그렇고, 벡터곱을 구할 때 사용하는 행렬의 경우 무조건 단위벡터 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 가 포함된 행을 골라야 한다.

2 연습문제 풀이

2.1 3번: 직선 구하기

우선 방향벡터를 구하자.

$$(1, 2, 3) \times (-3, -2, 4) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix} = (14, -13, 4)$$

직선을 $X(t)$ 라고 놓으면⁶, 다음과 같이 답을 구할 수 있다.

$$X(t) = t(14, -13, 4) + (2, 1, -5)$$

2.2 8번: 벡터곱과 일차독립

일차독립이 기억 안나는 사람들도 있을텐데, 참고로 이 문제에서 일차독립을 다르게 말하면 방정식

$$t\mathbf{a} + u\mathbf{b} = \mathbf{0}$$

에서 자명하지 않은 해가 존재하지 않는다는 뜻이다. 즉, $t = u = 0$ 이외에는 해가 존재하지 않는다는 것이다.

2.2.1 (선형독립) $\rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ 증명하기

귀류법을 써보자. $t = \alpha$, $u = \beta$ 라는 자명하지 않은 해가 존재하고, 그러면서 벡터곱을 한 결과가 영벡터가 아니었다고 해 보자. 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

α 와 β 모두 0이 아닌 경우 이 경우 $\mathbf{a} = -\beta\mathbf{b}/\alpha$ 이므로, 벡터곱을 계산하면

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{b} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

α 와 β 둘 중 하나가 0인 경우 간단하다. \mathbf{a} 와 \mathbf{b} 둘 중 하나가 영벡터라는 뜻이므로 벡터곱을 하면 0이 나온다. 이로써 처음에 한 가정이 모순임을 알 수 있고, 원하는 결과를 얻는다.

2.2.2 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0} \rightarrow$ (선형독립) 증명하기

대우를 취하면 (선형독립이 아님) $\rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ 인데, 이는 앞서 귀류법으로 증명한 것과 유사하므로 생각한다.

2.3 9번: 그냥 계산하기 싫은 문제

처음에 문제들을 보고 무식하게 계산하기는 싫다는 생각이 들었다. 계산하는 것을 최대한 미루기 위해 일단 명제들 간의 관계들을 살펴보았다. 우선, (a)와 (b)는 거의 같은 식이다. 식 (a)에서,

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

외적의 순서를 바꾸고 \mathbf{a} 를 \mathbf{c} 로, \mathbf{b} 를 \mathbf{a} 로, \mathbf{c} 를 \mathbf{b} 로 바꾸면 식 (b)를 얻는다.

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$$

그리고 (c)에서 좌변을 외적의 성질을 이용하여 변형하면 식 (a)를 이용할 수 있고, (a)가 참이면 (c)도 참임을 알 수 있다.

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})) = \mathbf{a} \cdot ((\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

(d)도 (a)를 세 번 사용하면 된다.

$$\begin{aligned} & \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ &= ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}) + ((\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}) + ((\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

⁶배웠으니까 직선도 곡선이지? 라는 생각을 지금쯤 하고 있을 것이다.

따라서 (a)만 증명하면 됨을 알 수 있다. 무식하게 계산하는건 정말 할 것이 못 되기 때문에, 기하학적 의미를 생각해 보자. $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ 는 \mathbf{b} 와 \mathbf{c} 모두에 대해 수직이고, $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ 는 $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ 에 대해 수직이므로 \mathbf{b} , \mathbf{c} 와 같은 평면에 존재한다. 이 때문에 우변에 나온 것처럼 \mathbf{b} 와 \mathbf{c} 의 선형결합으로 쓸 수 있는 것처럼 쓸 수 있는 것이다. 여기에서, 서로 수직이고, 다음 관계를 만족하는 벡터 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 를 생각해 보자.

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

여기에서 $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j}$, $\mathbf{c} = c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j}$, $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ 라고 가정하자.⁷ 이제 직접 계산하는 것이 생각만큼 복잡하지 않을 것이다. 우선 \mathbf{b} 와 \mathbf{c} 의 벡터곱은 다음과 같다.⁸

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = b_x \mathbf{i} \times (c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j}) = b_x c_y (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = b_x c_y \mathbf{k}$$

전체 식은 다음과 같이 구할 수 있고, 원하는 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= a_x b_x c_y (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + a_y b_x c_y (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) = -a_x b_x c_y \mathbf{j} + a_y b_x c_y \mathbf{i} \\ &= -a_x b_x c_x \mathbf{i} - a_x b_x c_y \mathbf{j} + a_x b_x c_x \mathbf{i} + a_y b_x c_y \mathbf{i} \\ &= -a_x b_x (c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j}) + (a_x c_x + a_y c_y) b_x \mathbf{i} \\ &= -(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \end{aligned}$$

2.4 13번: 정사영과 넓이

\mathbf{a} 와 \mathbf{b} 를 정사영하여 벡터 \mathbf{a}' , \mathbf{b}' 을 얻었고, \mathbf{a} 와 \mathbf{b} 가 이루는 평면의 법선벡터를 $\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, 정사영한 평면의 법선벡터를 $\mathbf{n}' = \mathbf{a}' \times \mathbf{b}'$ 이라고 하자. 정사영한 평행사변형의 넓이는 외적을 이용하여 간단히 구할 수 있다.

$$S' = |\mathbf{a}' \times \mathbf{b}'| = |\mathbf{n}'|$$

한편, \mathbf{a} 와 \mathbf{b} 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \alpha \mathbf{n}', \mathbf{b} = \mathbf{b}' + \beta \mathbf{n}'$$

이를 이용하여 \mathbf{n} 을 나타내면

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (\mathbf{a}' + \alpha \mathbf{n}') \times (\mathbf{b}' + \beta \mathbf{n}') \\ &= \mathbf{a}' \times \mathbf{b}' + \beta \mathbf{a}' \times \mathbf{n}' + \alpha \mathbf{b}' \times \mathbf{n}' \\ &= \mathbf{n}' + \beta \mathbf{n}' \times \mathbf{a}' + \alpha \mathbf{n}' \times \mathbf{b}' \end{aligned}$$

복잡해 보이지만 여기에서 \mathbf{n} 과 \mathbf{n}' 을 내적하면, \mathbf{n}' 과 벡터곱한 항들은 모두 사라지므로 다음과 같다.

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = |\mathbf{n}| |\mathbf{n}'| \cos \theta = |\mathbf{n}'|^2, \cos \theta = \frac{|\mathbf{n}'|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|\mathbf{a}' \times \mathbf{b}'|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$$

이로써 원하는 결과를 얻는다.

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cos \theta = |\mathbf{a}' \times \mathbf{b}'|$$

2.5 21번: 평행육면체의 부피와 행렬식

평행육면체의 밑면 넓이가 $|\mathbf{x} \times \mathbf{y}|$ 일 때, 밑면의 법선벡터는 $\mathbf{n} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ 이다. 높이는 \mathbf{z} 의 \mathbf{n} 방향 성분이므로, 다음과 같다.

$$\left| \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{z}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n} \right| = \left| \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{z}}{|\mathbf{n}|} \right| = \left| \frac{(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}}{|\mathbf{x} \times \mathbf{y}|} \right|$$

따라서 부피를 구하면

$$V = |\mathbf{x} \times \mathbf{y}| \left| \frac{(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}}{|\mathbf{x} \times \mathbf{y}|} \right| = |(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}| = |\det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})|$$

⁷ 눈치챘겠지만 이 풀이 방법에서는 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 에 대해 좌표계를 정의하고 이를 이용하여 계산을 편리하게 한다. 임의로 좌표계를 만들어서 증명하는 것이 불편하다면 그람-슈미트 방법으로 주어진 벡터에서 기저를 뽑아내서 증명할 수도 있을 것이다.

⁸ 책의 각주에서 \mathbf{b}, \mathbf{c} 가 표준단위벡터인 경우만 증명해도 된다고 한 것은 여기에서 중복된 성분들이 벡터곱하면서 사라지기 때문일 것이다.

2.6 23번: 선형사상과 평행육면체의 부피

L_A 를 보고 기억이 나지 않았을 수도 있는데, 이는 행렬 A 에서 얻은 선형사상을 의미한다. 따라서 주어진 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\text{Vol}(L_A(\mathbf{x}), L_A(\mathbf{y}), L_A(\mathbf{z})) = \text{Vol}(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}, A\mathbf{z}) = |\det(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}, A\mathbf{z})|$$

여기에서, 이미 알고 있는⁹ 행렬식의 성질 $\det AB = (\det A)(\det B)$ 를 이용하려면 다음이 성립함을 증명해야 한다.

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (A\mathbf{x}, A\mathbf{y}, A\mathbf{z})$$

첫 번째 행렬의 행과 두 번째 행렬의 열을 각각 내적함을 생각하면 쉽게 알 수 있다. 그래도 의심가면 한번 해 보자.¹⁰

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = (A\mathbf{x}, A\mathbf{y}, A\mathbf{z})$$

위 관계가 성립함을 알면, 간단하게 행렬식의 성질을 이용하여 원하는 결과를 얻는다.

$$|\det(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}, A\mathbf{z})| = |\det A(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})| = |(\det A)(\det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}))| = |\det A| \text{Vol}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$

⁹‘기억이 잘 나지 않는’이라고 읽으면 된다.

¹⁰편의상 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ 과 같이 문자를 잡았다.