곡선의 길이 연습문제 풀이

Project Eclipse (손량)

Last compiled on Wednesday 2nd December, 2020

1 그냥 적분

주어진 곡선을 한번 미분하고 속력을 구하면 다음과 같다.

$$X'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1),\ |X'(t)| = \sqrt{t^2+2}$$

적분식을 세우면 다음과 같다.

$$\int_0^{\sqrt{2}\sinh a} \sqrt{t^2+2}\, dt \tag{1}$$

선생님께서는 그냥 울프람에 돌리거나 적분표를 보라고 하셨지만, 하라는 대로만 하면 재미없기 때문에 한번 적분을 해 보자.[1] $t = \sqrt{2}\sinh u$라고 치환한다고 하자. 이때 다음이 성립한다.

$$\frac{dt}{du} = \sqrt{2}\cosh u,\ dt = \sqrt{2}\cosh u\, du$$

따라서 (1)의 식은 다음과 같이 적을 수 있다.

$$\int_0^a \sqrt{2\sinh^2 u + 2} \cdot \sqrt{2}\cosh u\, du \tag{2}$$

기억이 잘 안나지만 1학기 때 다음이 성립함을 배웠다.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

따라서 (2)의 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_0^a 2\cosh^2 u\, du \tag{3}$$

$\cosh x$의 정의를 떠올려 보면

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

이를 이용하면 (3)의 적분은 쉽게 해결된다.

$$\begin{aligned} 2\int_0^a \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 du =& \frac{1}{2}\int_0^a \left(e^{2u} + 2 + e^{-2u}\right) du \\ =& \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2u} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2u}\right]_0^a \\ =& \frac{e^{2a} + 4a - e^{-2a}}{4} \end{aligned}$$

[1] 물론 명분은 없다. 고등 미적분에 나올만한 적분도 아니기 때문이다. 명분 없는 수학이 싫으면 울프람에 넣어보고 2번으로 넘어가자.

2 포물선의 길이

수업시간에 이미 한 관계로 그냥 넘어간다.

3 아스트로이드의 길이

$y \geq 0$인 부분의 곡선은 다음과 같고,

$$X(t) = (t^3, (1-t^2)^{\frac{3}{2}})$$

$y \leq 0$인 부분의 곡선은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Y(t) = (t^3, -(1-t^2)^{\frac{3}{2}})$$

$-1 \leq t \leq 1$에서 $X(t)$와 $Y(t)$는 길이가 같으므로, $X(t)$의 길이를 구하고 2배하면 된다. 미분을 하고 속력을 구하면 다음과 같다.

$$X'(t) = \left(3t^2, \frac{3}{2}(1-t^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (-2t)\right) = (3t^2, -3t\sqrt{1-t^2}), \ |X'(t)| = \sqrt{9t^4 + 9t^2(1-t^2)} = \sqrt{9t^2} = |3t|$$

적분을 하면[2]

$$2\int_{-1}^{1} |3t|\, dt = 6$$

원하는 길이를 구한다. 이제 원의 지름 비율을 구해야 하는데, 이 문제를 '정석적으로' 극좌표계를 통해 풀었다면 쉽게 나왔겠지만, 애석하게도 직교좌표를 기준으로 풀었기 때문에 다르게 구해야 한다. 말만 이렇지 실제로는 간단하다. 곡선은 점 $1, 0)$을 지나고, 그림에서 보면 알듯 이를 통해 큰 원의 반지름이 1임을 알 수 있다. 또한 곡선에서 원점과 가장 가까운 점은 직선 $y = x$ 위에 있는데, 이 점의 좌표는 $(1/2\sqrt{2}, 1/2\sqrt{2})$이다. 이 점과 원점의 거리는 $1/2$이고, 이는 큰 원의 반지름에서 작은 원의 지름을 뺀 값과 같다. 즉 작은 원의 반지름은 $1/4$이다. 구하는 비는 $4:1$. 그림에 나온 곡선은 아스트로이드라고 불리는데, 이는 곡선의 모양이 일반적인 사람이 생각하는[3] 별의 모양과 비슷해서인듯 하다.

4 곡선의 길이와 별 상관없는 풀이

곡선의 길이를 다루는 부분의 연습문제라 곡선의 길이를 구하는 방법으로 문제를 풀려고 시도했지만, 그렇게 하지 못했고 그냥 '중학교 수준'의 수학으로 문제를 풀이하였다. 우선 자를 때의 몇 가지 가정이 필요한데, 사인곡선 형태의 모양이 자른 결과로 나오려면 자르는 평면이 원기둥의 밑면 둘 중 하나만 지나야 한다. 그렇지 않으면 타원이 나오기 때문이다. 이러한 가정 하에, 평면이 지나간 밑면의 점들을 그림과 같이 잡자.

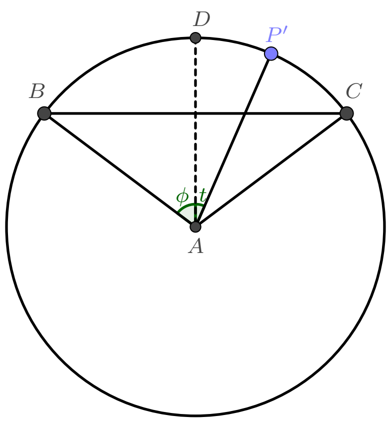

Figure 1: 밑면

[2]말만 적분이지 삼각형 넓이 구하기이다.
[3]물리학을 조금이라도 아는 사람은 별이 구형일 수밖에 없다고 주장하겠지만, 수학자들이 이미 이름을 정해버렸다...

Figure 1에서는 $\overline{BC}$를 평면과 밑면의 교선으로 두었고, A를 원의 중심으로 두었다. 또한 호 BC를 이등분하는 점은 D로 잡았고, 호의 중심각의 반을 ϕ로 잡았다. 또한, 매개화를 위해 $\overline{AD}$와 t의 각도를 이루는 점 P'을 잡았다. P'에서 $\overline{AD}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면, 원기둥의 밑면 반지름이 1일때 다음과 같다.

$$\overline{AH} = \cos t$$

잘려나온 종이를 Figure 2에서처럼 좌표평면에 둘 수 있다. 단면이 밑면과 이루는 각을 θ라고 하자. 이때 P의 좌표는 $(t, \tan\theta\cos t)$로 나타낼 수 있으므로, 사인곡선임이 증명된다.

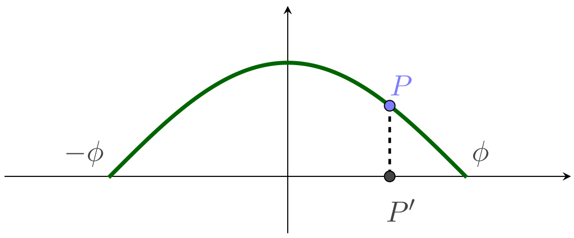

Figure 2: 사인곡선

5 토리첼리의 정리

곡선을 한번 미분하면 속도벡터를 얻는다.

$$X'(\theta) = r_0 e^{k\theta}(k\cos\theta - \sin\theta, k\sin\theta + \cos\theta)$$

S는 곡선 위의 점 T에서 그은 접선 위에 있고, $\overrightarrow{OT}$와 $\overrightarrow{OS}$는 수직이므로 적절한 s에 대해 다음이 성립한다.

$$\overrightarrow{OT} \cdot \overrightarrow{OS} = X(\theta) \cdot (X(\theta) + sX'(\theta)) = 0 \tag{4}$$

(4)의 식은 직접 대입하여 다음과 같이 쓸수도 있다. 스칼라는 내적 결과에 영향을 주지 않으므로 계산을 간단하게 하기 위해 미리 제외하고 계산했다.

$$\begin{aligned}
&(\cos\theta, \sin\theta) \cdot ((\cos\theta, \sin\theta) + s(k\cos\theta - \sin\theta, k\sin\theta + \cos\theta)) \\
&= 1 + (\cos\theta, \sin\theta) \cdot s(k\cos\theta - \sin\theta, k\sin\theta + \cos\theta) \\
&= 1 + sk\cos^2\theta - s\cos\theta\sin\theta + sk\sin^2\theta + s\sin\theta\cos\theta \\
&= 1 + sk = 0
\end{aligned}$$

즉, $\overrightarrow{OS} = X(\theta) - k^{-1}X'(\theta)$임을 알 수 있다. $\overline{TS}$를 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\overline{TS} &= \left| 2r_0 e^{k\theta}(\cos\theta, \sin\theta) - k^{-1} r_0 e^{k\theta}(k\cos\theta - \sin\theta, k\sin\theta + \cos\theta) \right| \\
&= \left| 2r_0 e^{k\theta}(\cos\theta, \sin\theta) - r_0 e^{k\theta}(\cos\theta - k^{-1}\sin\theta, \sin\theta + k^{-1}\cos\theta) \right| \\
&= \left| r_0 e^{k\theta}(\cos\theta, \sin\theta) - r_0 e^{k\theta}(-k^{-1}\sin\theta, k^{-1}\cos\theta) \right| \\
&= r_0 e^{k\theta} \left| (\cos\theta + k^{-1}\sin\theta, \sin\theta - k^{-1}\cos\theta) \right| \\
&= r_0 e^{k\theta} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}}
\end{aligned}$$

한편, 곡선의 길이는 다음과 같이 구할 수 있고, $\overline{TS}$와 같음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\int_x^\theta \sqrt{r(\phi)^2+r'(\phi)^2}\,d\phi &= \lim_{x\to-\infty}\int_x^\theta \sqrt{{r_0}^2e^{2k\phi}+k^2{r_0}^2e^{2k\phi}}\,d\phi \\ &= r_0\sqrt{1+k^2}\lim_{x\to-\infty}\int_x^\theta e^{k\phi}\,d\phi \\ &= r_0\sqrt{1+k^2}\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{k}e^{k\phi}\right]_x^\theta \\ &= r_0e^{k\theta}\frac{\sqrt{1+k^2}}{k} = r_0e^{k\theta}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\end{aligned}$$

또한, 정의에 따라 $\overline{OT}$의 길이는 $r_0e^{k\theta}$이므로 곡선의 길이와 상수 배 차이남을 알 수 있다. 이 문제에서는 아르키메데스 나선이 등각곡선임도 증명된다. 즉, θ에 상관없이 $\overrightarrow{OT}$와 $\overrightarrow{TS}$의 사잇각이 일정하다는 것이다.

6 아르키메데스 와선의 길이

수업시간에 이미 한 관계로 그냥 넘어간다.

7 하위헌스의 시계

문제를 풀기 전에 우선 몇가지 가정을 할 것이다. 우선 시계 양옆에 있는 사이클로이드는 원래 곡선의 절반을 자른 것이고 (즉, $0 \le t \le \pi$이다.), 실의 길이는 4라는 것이다. 실이 고정된 지점의 좌표를 원점으로 놓고, 시계의 오른쪽 부분의 사이클로이드를 다음과 같이 정의하자.

$$X(t) = (t - \sin t, \cos t - 1)$$

사이클로이드의 속력을 구하는 과정은 책에도 설명되어 있으니 생략한다.

$$|X'(t)| = \left|2\sin\frac{t}{2}\right| = 2\sin\frac{t}{2}$$

추가 그리는 궤적의 오른쪽 부분을 매개화된 곡선 $Y(t)$로 나타낸다고 하자. 실이 원점부터 $X(t)$까지 사이클로이드와 맞닿아 있다고 하면, 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Y(t) = X(t) + X'(t)\int_0^t |X'(t)|\,dt$$

대입을 해 보면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\begin{aligned}Y(t) &= (t-\sin t, \cos t - 1) + \frac{(1-\cos t, -\sin t)}{2\sin\frac{t}{2}}\cdot 4\cos\frac{t}{2} \\ &= (t-\sin t, \cos t - 1) + \frac{(2\sin^2\frac{t}{2}, -\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2})}{2\sin\frac{t}{2}}\cdot 4\cos\frac{t}{2} \\ &= (t-\sin t, \cos t - 1) + 4\cos\frac{t}{2}\left(\sin\frac{t}{2}, -\cos\frac{t}{2}\right) \\ &= (t-\sin t, \cos t - 1) + (2\sin t, -2\cos t - 2) \\ &= (t+\sin t, -\cos t - 3) \\ &= (\tau-\pi-\sin\tau, \cos\tau - 3) = (\tau - \sin\tau, \cos\tau - 1) - (\pi, -2)\end{aligned}$$

마지막 식에서 $\tau = \pi + t$로 잡았다. 궤적은 좌우 대칭이므로 원하는 결론을 얻는다.

8 극좌표계의 곡선 길이 구하기

$$\begin{aligned}\int_1^2 \sqrt{9\theta^4+36\theta^2}\,d\theta &= 3\int_1^2 \theta\sqrt{\theta^2+4}\,d\theta \\ &= 3\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{2}} t^2\,dt = \left[t^3\right]_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{2}} = 16\sqrt{2}-25\sqrt{5} \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\int_1^2 \sqrt{e^{-8\theta}+16e^{-8\theta}}\,d\theta &= \sqrt{17}\int_1^2 e^{-4\theta}\,d\theta = \sqrt{17}\left[-\frac{1}{4}e^{-4\theta}\right]_1^2 \\ &= \sqrt{17}\left(-\frac{1}{4}e^{-8}+\frac{1}{4}e^{-4}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{4}{\theta^2}+\frac{4}{\theta^4}}\,d\theta &= 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\theta^2+1}}{\theta^2}\,d\theta \\ &= 2\left[-\log\left(\sqrt{1+\theta^2}-\theta\right)-\frac{\sqrt{1+\theta^2}}{\theta}\right]_1^{\sqrt{3}}\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sqrt{\sin^4\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta &= \int_0^\pi \sin\frac{\theta}{2}\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta \\ &= \int_0^\pi \sin\frac{\theta}{2}\,d\theta = \left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^\pi = 2\end{aligned}$$

(5)에서 $t=\sqrt{\theta^2+4}$라고 치환했다. (6)에서 한 적분은 적분표에 나와있다.

9 로그의 길이

곡선을 다음과 같이 놓자.

$$X(t) = (t, \log t) \qquad a \le t \le b$$

미분을 한번 해서 속도와 속력을 구하면 다음과 같다.

$$X'(t) = \left(1, \frac{1}{t}\right),\ |X'(t)| = \sqrt{1+\frac{1}{t^2}}$$

늘 하듯 적분식을 세우면 다음과 같다.

$$\int_a^b \sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\,dt = \int_a^b \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\,dt \tag{7}$$

그냥 적분표를 보고 싶은 생각도 들지만, 한번 적분해보자.[4] $t=\tan u$로 치환하고, $\alpha=\arctan a$, $\beta=\arctan b$라고 두면 (7)의 식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{1+\tan^2 u}}{\tan u}\cdot\sec^2 u\,du &= \int_\alpha^\beta \frac{\sec u}{\tan u}\cdot\sec^2 u\,du \\ &= \int_\alpha^\beta \csc u\sec^2 u\,du \\ &= \int_\alpha^\beta (\csc u+\sec u\tan u)\,du \\ &= [\sec u]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta \csc u\,du \\ &= [\sec u]_\alpha^\beta + [-\log|\csc u+\cot u|]_\alpha^\beta\end{aligned} \tag{8}$$

[4]이 적분은 고등학교 미적분에도 나올만 하기 때문에 명분은 있다.

(8)에서 $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$라는 관계를 사용했다. 따라서 구하는 길이는 다음과 같다.

$$\left(\sqrt{b^2+1} - \log\left|\frac{\sqrt{b^2+1}+1}{b}\right|\right) - \left(\sqrt{a^2+1} - \log\left|\frac{\sqrt{a^2+1}+1}{a}\right|\right)$$