8장 1절 연습문제 풀이

Project Eclipse (19092 손량)

1 쓸데없는 이야기: 라플라스 전개

예전 문제풀이에서도 다뤘지만, 벡터곱을 할 때 행렬식을 구할 일이 많으므로 잠깐 소개한다.[1][2] 탐구문제에도 있었고, 이충훈 선생님께서 기하 시간에 외적을 구할 때에도 잠깐 보여 주셨지만 라플라스 전개는 행렬식을 쉽게[3] 계산하는 방법이다. 다음 행렬의 행렬식을 한 번 라플라스 전개로 계산해 보자.[4]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

행/열 정하기 우선 주어진 행렬에서 열이나 행을 하나 정해야 한다. 여기에서는 그냥 첫 번째 열을 고르자. 어떤 행이나 열을 고르든 계산의 결과는 같다.[5]

행렬 분해하기 앞서 고른 행이나 열의 각각의 항에 대해, 각각의 항들을 지나는 열과 행을 지우고, 남은 항들로 새로운 행렬을 만든다. n차 정사각행렬이라면, $n-1$차 정사각행렬이 n개 만들어질 것이다. 여기서 예로 든 정사각행렬로 보면, 파란색으로 되어 있는 항을 기준으로 분해할 때를 보면 다음과 같다. 빨간색으로 표시된 항들은 분해 과정에서 없어지는 항들이다.

$$\begin{pmatrix} \color{blue}{1} & \color{red}{2} & \color{red}{3} \\ \color{red}{4} & 5 & 6 \\ \color{red}{7} & 8 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \color{red}{1} & 2 & 3 \\ \color{blue}{4} & \color{red}{5} & \color{red}{6} \\ \color{red}{7} & 8 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \color{red}{1} & 2 & 3 \\ \color{red}{4} & 5 & 6 \\ \color{blue}{7} & \color{red}{8} & \color{red}{9} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

행렬식 나눠서 계산하기 분해된 각각의 행렬의 행렬식을 구하고, 행렬을 분해할 때 기준으로 잡은 항을 곱해준다.

$$1 \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = -3, 4 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = -24, 7 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = -21$$

부호 붙여서 결과값 내기 이제 각각의 결과값에 부호를 붙여서 더하면 된다. 기준으로 잡은 항이 (i, j)항일 때, 앞서 구한 행렬식의 값들에 $(-1)^{i+j}$를 곱해준다. 이제 행렬식의 값을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} &= 1 \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 4 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + 7 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \\ &= -3 + 24 - 21 = 0 \end{aligned}$$

[1] 이미 알고 있거나, 이런 걸 볼때 그저 지건이 마렵다면 연습문제 풀이로 넘어가면 된다.
[2] 사실 새로 치기 귀찮아서 예전에 쓴 TeX 코드 복붙했다.
[3] 물론 쉽다는 것은 계산하는 순서가 덜 헷갈린다는 거지, 실제로 하는 곱셈의 횟수는 그냥 구할 때하고 비슷하다.
[4] 이게 왜 가능한지는 증명을 참고하자.
[5] 이것은 숫자로만 이루어진 '일반적인' 행렬의 경우만 그렇고, 벡터곱을 구할 때 사용하는 행렬의 경우 무조건 단위벡터 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$가 포함된 행을 골라야 한다.

2 연습문제 풀이

2.1 3번: 직선 구하기

우선 방향벡터를 구하자.

$$(1,2,3) \times (-3,-2,4) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix} = (14,13,4)$$

직선을 $X(t)$라고 놓으면[6], 다음과 같이 답을 구할 수 있다.

$$X(t) = t(14,13,4) + (2,1,-5)$$

2.2 8번: 벡터곱과 일차독립

일차독립이 기억 안나는 사람들도 있을텐데, 참고로 이 문제에서 일차독립을 다르게 말하면 방정식

$$t\mathbf{a} + u\mathbf{b} = \mathbf{0}$$

에서 자명하지 않은 해가 존재하지 않는다는 뜻이다. 즉, $t = u = 0$ 이외에는 해가 존재하지 않는다는 것이다.

2.2.1 (선형독립) $\longrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ 증명하기

귀류법을 써보자. $t = \alpha$, $u = \beta$라는 자명하지 않은 해가 존재하고, 그러면서 벡터곱을 한 결과가 영벡터가 아니였다고 해 보자. 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

α와 β 모두 0이 아닌 경우 이 경우 $\mathbf{a} = -\beta\mathbf{b}/\alpha$이므로, 벡터곱을 계산하면

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{b} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

α와 β 둘 중 하나가 0인 경우 간단하다. $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$ 둘 중 하나가 영벡터라는 뜻이므로 벡터곱을 하면 $\mathbf{0}$이 나온다. 이로써 처음에 한 가정이 모순임을 알 수 있고, 원하는 결과를 얻는다.

2.2.2 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0} \longrightarrow$ (선형독립) 증명하기

대우를 취하면 (선형독립이 아님) $\longrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$인데, 이는 앞서 귀류법으로 증명한 것과 유사하므로 생략한다.

2.3 9번: 그냥 계산하기 싫은 문제

처음에 문제들을 보고 무식하게 계산하기는 싫다는 생각이 들었다. 계산하는 것을 최대한 미루기 위해 일단 명제들 간의 관계들을 살펴보았다. 우선, (a)와 (b)는 거의 같은 식이다. 식 (a)에서,

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

외적의 순서를 바꾸고 $\mathbf{a}$를 $\mathbf{c}$로, $\mathbf{b}$를 $\mathbf{a}$로, $\mathbf{c}$를 $\mathbf{b}$로 바꾸면 식 (b)를 얻는다.

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$$

그리고 (c)에서 좌변을 외적의 성질을 이용하여 변형하면 식 (a)를 이용할 수 있고, (a)가 참이면 (c)도 참임을 알 수 있다.

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})) = \mathbf{a} \cdot ((\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

(d)도 (a)를 세 번 사용하면 된다.

$$\begin{aligned} &\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ &= ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}) + ((\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}) + ((\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

[6]배웠으니까 직선도 곡선이지? 라는 생각을 지금쯤 하고 있을 것이다.

따라서 (a)만 증명하면 됨을 알 수 있다. 무식하게 계산하는건 정말 할 것이 못 되기 때문에, 기하학적 의미를 생각해 보자. $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$는 $\mathbf{b}$와 $\mathbf{c}$ 모두에 대해 수직이고, $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$는 $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$에 대해 수직이므로 $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$와 같은 평면에 존재한다. 이 때문에 우변에 나온 것처럼 $\mathbf{b}$와 $\mathbf{c}$의 선형결합으로 쓸 수 있는 것처럼 쓸 수 있는 것이다. 여기에서, 서로 수직이고, 다음 관계를 만족하는 벡터 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$를 생각해 보자.

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\ \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\ \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$$

여기에서 $\mathbf{b}=b\mathbf{i}$, $\mathbf{c}=c_x\mathbf{i}+c_y\mathbf{j}$, $\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$라고 가정하자.[7] 이제 직접 계산하는 것이 생각만큼 복잡하지 않을 것이다. 우선 $\mathbf{b}$와 $\mathbf{c}$의 벡터곱은 다음과 같다.[8]

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c}=b_x\mathbf{i}\times(c_x\mathbf{i}+c_y\mathbf{j})=b_xc_y(\mathbf{i}\times\mathbf{j})=b_xc_y\mathbf{k}$$

전체 식은 다음과 같이 구할 수 있고, 원하는 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})&=a_xb_xc_y(\mathbf{i}\times\mathbf{k})+a_yb_xc_y(\mathbf{j}\times\mathbf{k})=-a_xb_xc_y\mathbf{j}+a_yb_xc_y\mathbf{i}\\&=-a_xb_xc_x\mathbf{i}-a_xb_xc_y\mathbf{j}+a_xb_xc_x\mathbf{i}+a_yb_xc_y\mathbf{i}\\&=-a_xb_x(c_x\mathbf{i}+c_y\mathbf{j})+(a_xc_x+a_yc_y)b_x\mathbf{i}\\&=-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}\end{aligned}$$

2.4 13번: 정사영과 넓이

$\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$를 정사영하여 벡터 $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$을 얻었고, $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$가 이루는 평면의 법선벡터를 $\mathbf{n}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, 정사영한 평면의 법선벡터를 $\mathbf{n}'=\mathbf{a}'\times\mathbf{b}'$이라고 하자. 정사영한 평행사변형의 넓이는 외적을 이용하여 간단히 구할 수 있다.

$$S'=|\mathbf{a}'\times\mathbf{b}'|=|\mathbf{n}'|$$

한편, $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}'+\alpha\mathbf{n}',\ \mathbf{b}=\mathbf{b}'+\beta\mathbf{n}'$$

이를 이용하여 $\mathbf{n}$을 나타내면

$$\begin{aligned}\mathbf{n}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}&=\left(\mathbf{a}'+\alpha\mathbf{n}'\right)\times\left(\mathbf{b}'+\beta\mathbf{n}'\right)\\&=\mathbf{a}'\times\mathbf{b}'+\beta\mathbf{a}'\times\mathbf{n}'+\alpha\mathbf{b}'\times\mathbf{n}'\\&=\mathbf{n}'+\beta\mathbf{n}'\times\mathbf{a}'+\alpha\mathbf{n}'\times\mathbf{b}'\end{aligned}$$

복잡해 보이지만 여기에서 $\mathbf{n}$과 $\mathbf{n}'$을 내적하면, $\mathbf{n}'$과 벡터곱한 항들은 모두 사라지므로 다음과 같다.

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'=|\mathbf{n}|\,|\mathbf{n}'|\cos\theta=|\mathbf{n}'|^2,\ \cos\theta=\frac{|\mathbf{n}'|}{|\mathbf{n}|}=\frac{|\mathbf{a}'\times\mathbf{b}'|}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}$$

이로써 원하는 결과를 얻는다.

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\cos\theta=|\mathbf{a}'\times\mathbf{b}'|$$

2.5 21번: 평행육면체의 부피와 행렬식

평행육면체의 밑면 넓이가 $|\mathbf{x}\times\mathbf{y}|$일 때, 밑면의 법선벡터는 $\mathbf{n}=\mathbf{x}\times\mathbf{y}$이다. 높이는 $\mathbf{z}$의 $\mathbf{n}$방향 성분이므로, 다음과 같다.

$$\left|\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{z}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n}\right|=\left|\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{z}}{|\mathbf{n}|}\right|=\left|\frac{(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\cdot\mathbf{z}}{|\mathbf{x}\times\mathbf{y}|}\right|$$

따라서 부피를 구하면

$$V=|\mathbf{x}\times\mathbf{y}|\left|\frac{(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\cdot\mathbf{z}}{|\mathbf{x}\times\mathbf{y}|}\right|=|(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\cdot\mathbf{z}|=|\det(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})|$$

[7] 눈치챘겠지만 이 풀이 방법에서는 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$에 대해 좌표계를 정의하고 이를 이용하여 계산을 편리하게 한다. 임의로 좌표계를 만들어서 증명하는 것이 불편하다면 그람-슈미트 방법으로 주어진 벡터에서 기저를 뽑아내서 증명할 수도 있을 것이다.

[8] 책의 각주에서 $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$가 표준단위벡터인 경우만 증명해도 된다고 한 것은 여기에서 중복된 성분들이 벡터곱하면서 사라지기 때문일 것이다.

2.6 23번: 선형사상과 평행육면체의 부피

L_A를 보고 기억이 나지 않았을 수도 있는데, 이는 행렬 A에서 얻은 선형사상을 의미한다. 따라서 주어진 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathrm{Vol}(L_A(\mathbf{x}), L_A(\mathbf{y}), L_A(\mathbf{z})) = \mathrm{Vol}(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}, A\mathbf{z}) = \left|\det(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}, A\mathbf{z})\right|$$

여기에서, 이미 알고 있는[9] 행렬식의 성질 $\det AB = (\det A)(\det B)$를 이용하려면 다음이 성립함을 증명해야 한다.

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (A\mathbf{x}, A\mathbf{y}, A\mathbf{z})$$

첫 번째 행렬의 행과 두 번째 행렬의 열을 각각 내적함을 생각하면 쉽게 알 수 있다. 그래도 의심가면 한번 해 보자.[10]

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = (A\mathbf{x}, A\mathbf{y}, A\mathbf{z})$$

위 관계가 성립함을 알면, 간단하게 행렬식의 성질을 이용하여 원하는 결과를 얻는다.

$$\left|\det(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}, A\mathbf{z})\right| = \left|\det A(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})\right| = \left|(\det A)(\det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}))\right| = \left|\det A\right| \mathrm{Vol}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$

[9] '기억이 잘 나지 않는' 이라고 읽으면 된다.

[10] 편의상 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$과 같이 문자를 잡았다.