미적분학 개념 정리

Project Eclipse (손량 X 임지안)

1 수열의 극한

1.1 역수 정리

수렴하는 수열 a_n과 무한대로 발산하는 수열[1] b_n에 대해 다음이 성립한다.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

정말 별 거 없어 보이지만, 서술형 극한 문제를 풀 때 'b_n으로 나눠도 되나?' 하는 의문이 들 때 상당히 유용한 정리이다.

1.2 수열의 일반항과 부분합의 관계

등차수열의 부분합 S_n의 최고차항이 an^2일 때, 일반항의 최고차항, 즉 n차항은 $2an$이다. 예를 들어, 어떤 등차수열 $\{a_n\}$의 부분합 S_n이 다음과 같다고 하자.

$$S_n = 4n^2 - n$$

이때 a_n의 최고차항은 $8n$이고, $S_1 = a_1$임을 이용하면 일반항을 구할 수 있다.

$$a_n = 8n - 5$$

이를 다르게 해석하면, 수열 a_n 일반항의 최고차항은 부분합 S_n의 최고차항을 n에 대해 미분한 것이라고 할 수 있다. 이는 a_n이 n차일 때 일반적으로 성립한다.

1.3 수열의 닫힌 연산

어떤 집합에서의 연산을 수행한 결과가 언제나 그 집합에 존재하면, 집합은 그 연산에 대해 닫혀 있다고 한다. 예를 들어, 정수 집합은 덧셈과 곱셈에 대해 닫혀 있다고 할 수 있다. 정수 두 개를 더하거나 곱해도 여전히 정수이기 때문이다. 여기에서는 수열에 대해 닫힌 연산을 살펴볼 것이다.

1.3.1 등차수열의 경우

연산	닫힘 여부	공차
덧셈: $c_n = a_n + b_n$	닫혀 있음	$d_1 + d_2$
뺄셈: $c_n = a_n - b_n$	닫혀 있음	$d_1 - d_2$
상수배: $c_n = ka_n$	닫혀 있음	kd_1
합성: $c_n = a_{b_n}$	닫혀 있음	$d_1 d_2$

표에 있는 두 등차수열 a_n과 b_n은 다음과 같이 정의된다.

$$a_n := d_1 n + p_1,\ b_n := d_2 n + p_2$$

또한, 상수배는 수업 시간에는 다루지 않았지만 논의의 완결성을 위해서 추가하였다. 상수배 조건까지 이용하면, 다음과 같이 등차수열을 일차결합해도 여전히 등차수열이다.[2]

$$c_n = ka_n + la_n$$

이때 수열의 공비는 $kd_1 + ld_2$이다.

1.3.2 등비수열의 경우

[1] 정확히는, "절댓값이 무한대로 발산하는 수열"이다.

[2] 또한, 상수배를 추가하면 뺄셈을 굳이 다룰 필요가 사실 없어진다. 뺄셈도 일차결합으로 해석할 수 있기 때문이다.

연산	닫힘 여부	공비
덧셈, 뺄셈: $c_n = a_n \pm b_n$	제한적	r_1
상수배: $c_n = ka_n$	닫혀 있음	r_1
곱셈: $c_n = a_n b_n$	닫혀 있음	$r_1 r_2$
나눗셈: $c_n = a_n \div b_n$	닫혀 있음	r_1/r_2
역수: $c_n = {a_n}^{-1}$	닫혀 있음	${r_1}^{-1}$
등차수열 합성: $c_n = a_{pn+q}$	닫혀 있음	${r_1}^p$

표에 있는 두 등비수열 a_n과 b_n은 다음과 같이 정의한다.

$$a_n := a{r_1}^{n-1},\ b_n := b{r_2}^{n-1}$$

덧셈과 뺄셈은 공비가 같을 때만 닫혀 있다. 여기에서도 상수배를 추가했고, 공비가 같을 때에 한해 선형결합을 해도 여전히 등비수열이다.

$$c_n = ka_n + la_n$$

이때 수열의 공비는 r_1이다.

1.4 기우수열

기우수열이란, $1, 2, 1, 3, 1, 4, \cdots$처럼 홀수 항과 짝수 항의 규칙이 다른 수열을 의미한다. a_n과 a_{n+1}과 같이 이웃한 두 항 간의 관계식이 주어지는 수열이라면 기우수열인지 의심해 볼 필요성이 있다.

기우수열이나 기우수열의 합을 다룰 때는 각각의 규칙으로 쪼개서는 안 되며, 오히려 다음과 같이 2개의 항을 모아 더하는 것이 편리하다.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$$

기우수열의 자매품으로는 3번째, 4번째, 혹은 m번째 항마다 같은 규칙이 적용되는 '주기수열'이 있다. 주기수열 역시 각각의 항으로 나누어 생각하지 말고, 다음과 같이 묶어서 더해야 한다.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{kn-k+1} + a_{kn-k+2} + \cdots + a_{kn})$$

1.5 $a_{n+1} = pa_n + q$의 점화식

공식적으로 점화식은 교육과정에서 사라졌지만, 이 점화식만큼은 유일하게 남아 문제로 출제될 가능성이 있다. '공식'적 풀이는 귀납적 추론[3]을 이용하는 것이지만, 현실적으로 시험 상황에서 이렇게 풀기는 쉽지 않다. 따라서 이런 점화식을 보게 된다면, 다음 풀이를 익혀두도록 하자.

점화식 $a_{n+1} = pa_n + q$를 다음과 같이 변형해 보자.

$$a_{n+1} - \frac{q}{1-p} = p \times (a_n - \frac{q}{1-p})$$

새로운 수열 $\{a_n - \frac{q}{1-p}\}$는 공비가 p인 등비수열이다. 따라서 a_n의 수렴조건은 $|p| < 1$임을 알 수 있다.

다시 말해, 문제에서 $|p| < 1$인 점화식을 준다면 이 수열이 수렴한다는 사실을 알 수 있다. 이때 a_n의 수렴값을 α라 하면, a_{n+1}도 α로 수렴하기 때문에[4] $\alpha = p\alpha + q$라는 식을 세울 수 있다. 따라서 α는 $\frac{q}{1-p}$임을 쉽게 구할 수 있다.

1.6 등차수열의 합을 나타내는 여러 가지 방법

등차수열의 합은 (개수) $\times$ (등차중항)라는 관점에서 보았을 때, 다음과 같이 나타낼 수도 있다. ($a_n := d(n-1) + a$라고 두었다.)

$$\begin{aligned} S_n =& n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \\ =& n\left(\frac{a + \{d(n-1) + a\}}{2}\right) = n\left(\frac{2a + (n-1)d}{2}\right) \end{aligned}$$

[3] "숫자 찍어서 맞히기"라고 읽으면 된다.
[4] 수열에서 유한 개의 항을 제거하더라도 극한은 변하지 않는다. 그리고 수열 a_{n+1}은 수열 a_n에서 첫 항을 제거한 것이다.

1.7 등비수열의 곱

등차수열의 합을 (개수) $\times$ (등차중항)으로 나타낸다는 아이디어를 그대로 이용해 보자. a_n이 등비수열이라면, 다음과 같이 합을 나타낼 수 있다.

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k = (\text{등비중항})^n = (\sqrt{a_1 a_n})^n$$

등차수열의 부분합에서 일반항을 구하듯이 등비수열의 "부분곱"에서 일반항을 구할 수도 있다. 물론 등차수열처럼 $n \geq 2$라는 조건이 붙는다.

$$a_n = \frac{p_n}{p_{n-1}}$$

1.8 소거되는 합 (Telescoping sum)

다음과 같은 형태의 합은 처음과 나중 항만 남는다. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$인 경우 남은 항들 중 뒤쪽에 있는 것은 무시 가능하다.

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = (a_1 - \cancel{a_2}) + (\cancel{a_2} - \cancel{a_3}) + \cdots + (\cancel{a_n} - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

이러한 형태의 소거형은 주로 부분 분수나, $(-1)^n$과 같은 계수가 붙어서 부호가 번갈아 가며 나오는 기우수열의 합에서 유용하다.

1.8.1 2칸 Telescoping 구분

다음 두 급수는 형태가 상당히 비슷하다. 그러나 하나는 첫 항만 살아남고, 다른 하나는 2개의 항이 살아남는다. 왜일까?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = (\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{3}}) + (\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}}) + (\cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{7}}) + \cdots = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} = (\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{3}}) + (\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}}) + (\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}}) + \cdots = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

두 번째 급수는 1항과 3항, 2항과 4항, 3항과 5항· 이렇게 한 칸 건너의 항과 소거가 일어나는 "2칸 Telescoping" 급수이다. 그러나 첫 급수는 한 칸씩 건너뛰지 않고, 인접한 항끼리 바로 소거가 일어난다. 즉, 숫자만 $2n$일 뿐, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$과 같은 "1칸 텔레스코핑" 급수라는 것이다. 이처럼 소거되는 합 문제를 풀 때는 앞에 몇 개의 항이 남는지 꼭 검토하도록 하자.

1.8.2 소거되는 곱

소거되는 합과 마찬가지로 소거되는 곱도 존재한다.

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{a_1}{\cancel{a_2}} \times \frac{\cancel{a_2}}{\cancel{a_3}} \times \cdots \times \frac{\cancel{a_n}}{a_{n+1}} = \frac{a_1}{a_{n+1}}$$

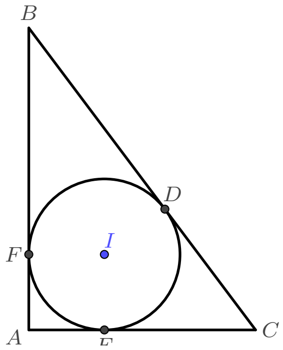
가끔 이러한 소거되는 곱이 자연상수 e가 결과로 나오는 극한을 계산할 때 사용되기도 한다.

1.9 직각삼각형의 내접원

직각삼각형의 내접원의 반지름 구하기는 극한 문제에서 가장 자주 등장하는 평면도형의 성질 중 하나이다. 세 변의 길이가 a, b, c이고, 빗변의 길이가 a인 직각삼각형의 내접원의 반지름을 구하는 공식은 다음과 같이 2가지가 있다.

$$\begin{aligned} r &= \frac{b+c-a}{2} && \text{(길이 이용)} \\ &= \frac{bc}{a+b+c} && \text{(넓이 이용)} \end{aligned}$$

1.9.1 증명



왼쪽 그림에서, 식에 나온 문자들을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$a = \overline{BD} + \overline{DC},\ b = \overline{AE} + \overline{EC},\ c = \overline{BF} + \overline{FA}$$

이때, 직각삼각형이므로 $\overline{FI} \mathbin{/\!/} \overline{AE}$, $\overline{EI} \mathbin{/\!/} \overline{AF}$이고, 여기서 내접원의 반지름을 계산해 길이를 이용한 공식을 유도할 수 있다.

$$r = \overline{FI} = \frac{\overline{FA} + \overline{AE}}{2} = \frac{(\overline{BF} + \overline{FA}) + (\overline{AE} + \overline{EC}) - (\overline{BD} + \overline{DC})}{2}$$
$$= \frac{b + c - a}{2}$$

넓이를 이용한 공식은 중학교 때 배운[5] 내심 관련 공식에서 알 수 있다.

$$S = \frac{r}{2}(a + b + c)$$

1.10 구간함수에서의 연속

함수 $f(x)$가 다음과 같은 형태이고, g와 h가 실수 전체에서 정의역에서 연속이라고 가정하자.[6]

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & (x < a) \\ h(x) & (x \geq a) \end{cases}$$

이때 f가 정의역에서 연속이기 위해서는 다음이 성립해야 한다.

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = f(a) \tag{1}$$

여기에서, 초기에 한 가정을 이용하면 극한값을 바로 계산할 수 있다.

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a-} g(x) = g(a)$$

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} h(x) = h(a)$$

따라서 (1)의 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$g(a) = h(a) = f(a)$$

결론적으로, 구간함수가 연속인지 판별하려면 "경계"만 보면 된다고 할 수 있다.[7]

1.11 불연속점의 종류

어떤 함수가 $f(x)$가 $x = a$에서 불연속일 때, 다음과 같은 종류들이 존재한다.[8] 이들 중 Removable[9]과 Jump는

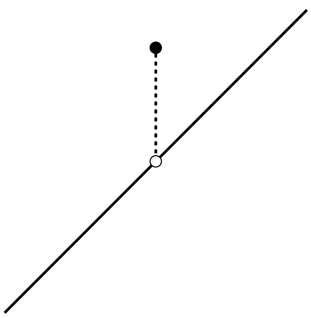


Figure 1: Removable

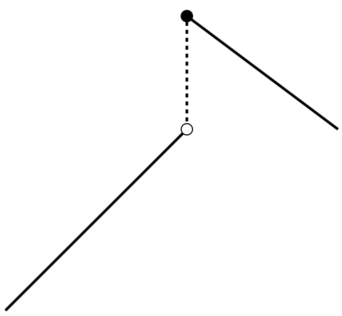


Figure 2: Jump

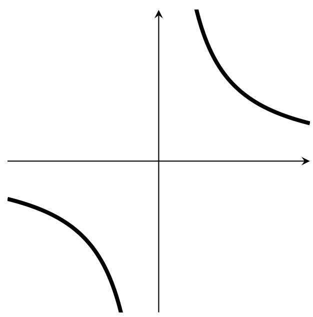


Figure 3: 발산

제1종 불연속점, 발산과 무한진동은 제2종 불연속점으로 분류한다.

[5]"이미 잊어버린" 이라고 읽으면 된다.
[6]물론 실수 전체가 아니여도 구간함수에서 자신이 주어지는 범위에서만 연속이여도 상관은 없다.
[7]수학에서는 이 "경계"가 중요하다고 선생님께서 말하신 것을 기억할 것이다.
[8]사실 여기에서 무한진동이 빠졌는데, 적절한 예를 찾기 어려웠다.
[9]RM(아이돌이 아니라 파일삭제 명령어)라고 부르기도 한다.

1.12 곱함수의 연속

$x = a$에서 $f(x)$는 연속이고, $g(x)$는 제1종 불연속점을 가진다고 하자. 좌극한과 우극한이 존재하므로 다음과 같이 놓을 수 있을 것이다.

$$\lim_{x\to a-} g(x) = l,\ \lim_{x\to a+} g(x) = r$$

여기에서, $f(x)g(x)$가 $x = a$에서 연속이기 위해서는 $f(a) = 0$이어야 한다.

1.13 제곱근

n이 무한대로 갈 때, $\sqrt{an^2 + bn + c}$ 꼴의 식에서 일반적으로 c를 어떤 숫자로 바꾸든 극한값에 영향이 가지 않는다. 무슨 말인지 감이 잘 안 온다면, 다음 예제를 통해 알아보자.

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n+3}-\sqrt{n^2+2n-6}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n+4}-\sqrt{n^2+2n+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}((n+2)-(n+1))=1\end{aligned}$$

원래대로라면, 이 극한을 계산하기 위해서는 복잡한 유리화 과정을 거쳐야 한다. 그러나 상수항을 몇 번 만지더라도 극한값에 영향이 가지는 않기 때문에, 위와 같이 손쉽게 풀 수도 된다.

1.14 도형의 극한 문제를 푸는 방법

개수	길이의 합	넓이의 합
1개	$\frac{a}{1-r}$	$\frac{a}{1-r^2}$
m개	$\frac{a}{1-mr}$	$\frac{a}{1-mr^2}$

도형의 극한 문제는 99% 확률로 닮음을 활용한 등비급수 계산이다.[10] 이런 유형의 문제를 풀 때는 지금까지 배웠던 평면도형의 성질을 이용하여 '초항'과 '닮음비'를 구하면 된다. 그리고 구하고자 하는 합이 길이의 합인지 혹은 넓이의 합인지, 다음 그림에서 생기는 닮은 도형의 개수가 1개인지, 여러 개 (m개)인지에 따라 표에 나온 공식대로 적절히 대입하면 된다.

2 미분

2.1 극한의 기본 성질: "미리 보내기" (Revisited)

미분 단원에서 다루는 초월함수의 극한에서 볼 수 있는 형태로 다음과 같은 것이 있다.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)}{h(x)},\ \lim_{x\to a} f(x) = L$$

이때, 다음과 같은 식은 매우 제한적인 경우에만 성립한다.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)}{h(x)} = \frac{L+\lim_{x\to a} g(x)}{\lim_{x\to a} h(x)}$$

경우를 잘 나누어서 어떤 경우에 가능한지 보자.

2.1.1 $\lim_{x\to a} h(x) = \infty$ 경우

"노잼인 경우"이다. 다음과 같이 나눌 수 있다.

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to a} g(x) = M \longrightarrow \frac{C}{\infty}\text{꼴이므로 } 0\\&\lim_{x\to a} g(x) = \infty \longrightarrow \frac{\infty}{\infty}\text{꼴, 계산해 봐야 함}\end{aligned}$$

[10] 99%라고 한 것은 무조건 그렇지는 않기 때문이다. 이를테면 등비급수가 아니라 Telescoping sum일수도 있다. 물론 그런 문제를 본적이 없긴 하지만...

2.1.2 $\lim_{x\to a} h(x) = 0$ 경우

"짜증나는 경우"이다. 다음과 같이 나눌 수 있다.

$$\lim_{x\to a} g(x) \neq -L \longrightarrow \frac{C}{0}\text{꼴이므로 }\infty$$
$$\lim_{x\to a} g(x) = -L = 0 \longrightarrow 0\text{인수 개수 비교}$$
$$\lim_{x\to a} g(x) = -L \neq 0 \longrightarrow \text{쪼갤 수 없음}$$

0인수의 개수를 비교할 때, f의 0인수가 h 0인수 개수 이상이면 쪼개도 되고, 그렇지 않으면 쪼개면 안 된다. 여기 0인수라는 것은 $x = a$를 대입할 때 0이 되는 인수의 개수를 의미한다.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)^2(x-b)}{(x-a)}$$

예를 들어 위 식에서 분자인 $f(x)$의 0인수 개수는 2개이고, 분모인 $g(x)$의 0인수 개수는 1개이다.

2.1.3 $\lim_{x\to a} h(x) = N$ 경우

또 다른 "노잼인 경우"이다. 다음과 같이 극한값을 계산하면 된다.

$$\frac{L + \lim_{x\to a} g(x)}{N}$$

2.2 테일러 급수를 이용한 극한 계산

미적분 단원에서 다루는 몇 가지 함수들은 다음과 같이 거듭제곱급수로 나타낼 수 있다.[11]

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$
$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$$
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$
$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

$x = 0$ 근처에서는 고차항들이 0에 빠르게 수렴함을 이용하면 다음과 같은 근사가 가능하다.

$$\sin x \approx x,\ \tan x \approx x,\ e^x \approx 1 + x,\ \ln(1+x) \approx x$$

이러한 근사는 초월함수의 극한 식과 잘 일치한다.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x},\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

이러한 근사를 사용할 때, 주의해야 하는 경우들이 있다. 이러한 경우는 함수들의 성질을 이용해 우선 수렴하는 꼴로 만들어서 계산해야 한다.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{x^2} \neq \lim_{x\to 0} \frac{x - x}{x^2} = 0 \qquad \text{(틀린 풀이)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} = -1 \qquad \text{(맞는 풀이)}$$

로그함수 말고 지수함수로도 이러한 예가 충분히 가능하다. 언제 근사를 써도 되는지는 "미리 보내기"에서 설명하는 내용을 참고하자.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x} \neq \lim_{x\to 0} \frac{(1+x) + (1-x) - 2}{x^2} = 0 \qquad \text{(틀린 풀이)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{x^2 e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x}\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^2 = 1 \qquad \text{(맞는 풀이)}$$

[11] 마지막 ln의 거듭제곱급수 빼고는 수렴반경이 무한이다. 물론 여기에서는 0으로 가는 극한만 다루므로 상관은 없다.

2.3 곱함수의 연속 (Revisited)

$x = a$에서 $f(x)$는 연속이고, $g(x)$는 제2종 불연속점을 갖는다고 하자. 일반성을 잃지 않고[12], 다음을 가정하자.

$$\lim_{x\to a-} g(x) = l,\ \lim_{x\to a+} g(x) = \infty$$

이때 두 함수의 곱 $f(x)g(x)$가 연속이기 위해서는 $f(a) = 0$일 뿐만 아니라, 다음 $0 \times \infty$꼴 극한 식이 성립해야 한다.

$$\lim_{x\to a+} f(x)g(x) = 0$$

$\lim_{x\to a+} g(x) = \infty$는 $g(x)$의 분모에 0인수가 존재하기 때문에 생긴다고 해석하면, $f(x)$의 0인수 개수가 $g(x)$의 분모에 있는것보다 많아야 함을 알 수 있다. 예를 들어, 다음과 같이 $g(x)$를 정의하면

$$g(x) := \begin{cases} 0 & (x \le a) \\ \dfrac{b}{(x-a)^2} & (x > a) \end{cases}$$

$f(x)g(x)$가 $x = a$에서 연속이기 위해 $f(x)$가 $(x-a)$를 인수로 2개보다 많이 가져야 한다. 만약 $f(x)$와 $g(x)$가 다항함수가 아니여서 인수를 따지기 어려운 경우, 테일러 급수를 이용한 근사를 적절히 사용하여 다항식으로 바꾸어 주면 된다.

2.4 로피탈 정리

함수 $f(x)$, $g(x)$가 둘 다 미분가능하고, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ 또는 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 부정형이라면 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

특히 분자와 분모의 인수분해가 가능한 경우, 0을 만드는 요소들을 제외한 나머지에 대해 "미리 보내기"를 수행하고 나서 로피탈 정리를 적용할 수 있다.

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x^2+5)\ln x}{x^2+x-2} = \frac{6}{3} \times \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 2 \times \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 2$$

2.5 대칭미분가능성

함수 $f(x)$에 대해 다음 극한이 존재하면, "$x = a$에서 $f(x)$가 대칭미분 가능하다"라고 말한다.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

이 극한은 경우를 나누어 다음과 같이 해석할 수 있다.

2.5.1 $f'(a)$ 존재하는 경우

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{2h} + \frac{f(a) - f(a-h)}{2h} \right) = \frac{1}{2}(\text{우미분계수} + \text{좌미분계수}) = f'(a)$$

따라서 $f(x)$가 $x = a$에서 미분가능하다면, 이 식은 미분계수와 같게 된다. 그러나 $f(x)$가 미분불가능인데 이 극한이 존재하는 경우도 있으며, 그 때 대칭미분계수의 의미도 달라지게 된다.

2.5.2 $x = a$에서 $f(x)$가 첨점인 경우 (연속이지만 미분불가능한 경우)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{2h} + \frac{f(a) - f(a-h)}{2h} = \frac{(\text{우미분계수}) + (\text{좌미분계수})}{2}$$

[12] 다른 경우에도 비슷한 방법으로 증명 가능하다.

2.5.3 $x = a$에서 $f(x)$가 제1종 불연속 (Removable)인 경우

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$라고 정의하면, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - \alpha}{2h} + \frac{f(a-h) - \alpha}{2h}$$

따라서 이 지점에서 접선의 기울기와 유사하다.

2.5.4 $x = a$에서 $f(x)$가 제2종 불연속 (Jump)인 경우

$f(x)$가 제2종 불연속인 경우, 이 지점의 좌미분계수 또는 우미분계수 중 하나 이상은 $\pm\infty$ 이므로 대칭미분계수가 존재하지 않는다.

2.5.5 접선의 기울기가 ∞가 되는 경우

이 경우 역시 대칭미분계수가 무한이 되어 존재하지 않는다.