

## Описание вычислений и их реализации

### movecalc.dll

Рассмотрю движение тонкого кольца по шероховатой поверхности в ее плоскости. Введу его параметры:  $r$  – радиус кольца,  $m$  – масса кольца,  $\vec{V}$  – скорость кольца,  $\vec{\omega}$  – угловая скорость кольца. Введу остальные параметры системы:  $\mu$  – коэффициент трения стола,  $g$  – ускорение свободного падения.

Введу правую декартову систему координат  $Oxyz$ . Тогда, выражения скорость и угловое ускорение определяется как:

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

Запишу закон изменения количества движения и закон изменения момента количества движения:

$$m\dot{\vec{V}} = -\mu g \iint_S \rho \cdot \frac{\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}}{|\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}|} dS, \quad I\dot{\vec{\omega}} = -\mu g \iint_S \rho \vec{r} \times \frac{\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}}{|\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}|} dS$$

, где  $\rho = m/S$  – поверхностная плотность кольца. Возьму векторные произведения:

$$\begin{aligned} \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r} &= \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ r_x & r_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} V_x - \omega r_y \\ V_y + \omega r_x \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{r} \times (\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & 0 \\ V_x - \omega r_y & V_y + \omega r_x & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x(V_y + \omega r_x) - r_y(V_x - \omega r_y) \end{pmatrix} \\ |\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}| &= \sqrt{(V_x - \omega r_y)^2 + (V_y + \omega r_x)^2} \end{aligned}$$

Так как кольцо тонкое, то перейду от интеграла по площади к интегралу по углу, который отсчитывается от вертикали. Тогда  $r_x = r \cos \alpha$ ,  $r_y = r \sin \alpha$ . Тогда, для компонент скоростей :

$$\dot{V}_x = -\mu \frac{g}{s} \cdot 2\pi h \int_0^{2\pi} \frac{V_x - \omega r \sin \alpha}{\sqrt{(V_x - \omega r \sin \alpha)^2 + (V_y + \omega r \cos \alpha)^2}} d\alpha \quad (1)$$

$$\dot{V}_y = -\mu \frac{g}{s} \cdot 2\pi h \int_0^{2\pi} \frac{V_y + \omega r \cos \alpha}{\sqrt{(V_x - \omega r \sin \alpha)^2 + (V_y + \omega r \cos \alpha)^2}} d\alpha \quad (2)$$

$$\dot{\omega} = -\mu \frac{g}{sr^2} \cdot 2\pi h \int_0^{2\pi} \frac{r \cos \alpha (V_y + \omega r \cos \alpha) - r \sin \alpha (V_x - \omega r \sin \alpha)}{\sqrt{(V_x - \omega r \sin \alpha)^2 + (V_y + \omega r \cos \alpha)^2}} d\alpha \quad (3)$$

Зная компоненты ускорения и угловое ускорение получу значения координат и угла поворота через малый момент времени  $dt$ . Для того чтобы траектория движения была гладкой необходимо, чтобы скорость имела только разрывы первого рода. Тогда, буду искать движение

кольца в виде равноускоренного движения, где через  $dt$  ускорения меняются, а их значения определяются выражениями 1 – 3.

Тогда, скорости кольца к через  $dt$ :

$$V_x = V_{x0} + \dot{V}_x dt, \quad V_y = V_{y0} + \dot{V}_y dt, \quad \omega = \omega_0 + \dot{\omega} dt,$$

И координаты кольца через  $dt$ :

$$x = x_0 + V_{x0} dt + \dot{V}_x \frac{dt^2}{2}, \quad y = y_0 + V_{y0} dt + \dot{V}_y \frac{dt^2}{2},$$

## Реализация movecalc.dll

- Реализацию интегрирования я взял из библиотеки `<gsl/gsl_integration.h>`. Я выбрал функцию `gsl_integration_qags`, ее описание:

This function applies the Gauss-Kronrod 21-point integration rule adaptively until an estimate of the integral of  $f$  over  $(a,b)$  is achieved within the desired absolute and relative error limits, `epsabs` and `epsrel`. The results are extrapolated using the epsilon-algorithm, which accelerates the convergence of the integral in the presence of discontinuities and integrable singularities. The function returns the final approximation from the extrapolation, `result`, and an estimate of the absolute error, `abserr`. The subintervals and their results are stored in the memory provided by `workspace`. The maximum number of subintervals is given by `limit`, which may not exceed the allocated size of the workspace.

- При переходе значения скорости через ноль, что часто должно сопровождаться полной остановкой тела, из-за предложенного метода получения скорости, ее значение начинает колебаться в окрестности нуля, но никогда не попадает в него. Поэтому, если исходная скорость и полученная отличаются знаками, то полученная скорость заменяется нулем. при этом, если угловая скорость стала нулем, то изменить это значение может только удар о стену, но не поступательное движение.
- Для увеличения скорости вычислений, они ведутся параллельно, в трех потоках.