SISTEM PERSAMAAN LINEAR

BAB 1

Dr. Abdul Wahid Surhim

POKOK BAHASAN

1.1 Pengantar Sistem Persamaan Linear (SPL)

1.2 Eliminasi GAUSS-JORDAN

1.3 Matriks dan operasi matriks

1.4 Aritmatika Matriks, Matriks Balikan

1.5 Matriks Elementer, Cara Mencari Matriks Balikan

1.6 Jenis-jenis matriks

Rujukan: Anton, H. and Rores, C. (2005). *Elementary Linear Algebra, Ninth Edition. John Wiley & Sons, Inc.*

PENGANTAR

- Informasi sains dan matematika sering ditampilkan dalam bentuk baris dan kolom yang disebut dengan MATRIKS
- Matriks sering berupa TABEL data-data numerik yang
  - muncul dari observasi fisik
  - terjadi pada berbagai konteks matematika
- Contoh: Menyelesaikan persamaan berikut

$$5x + y = 3$$

$$2x - y = 4$$

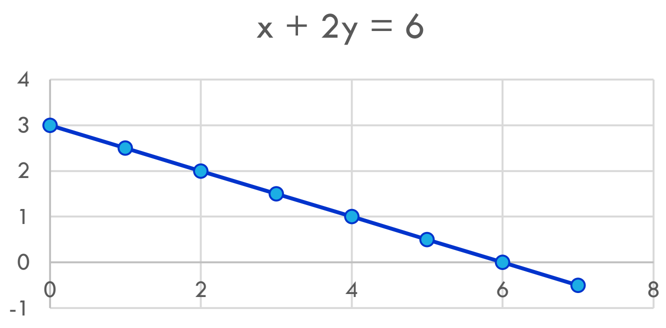
Semua informasi tentang solusinya diterjemahkan dalam matriks

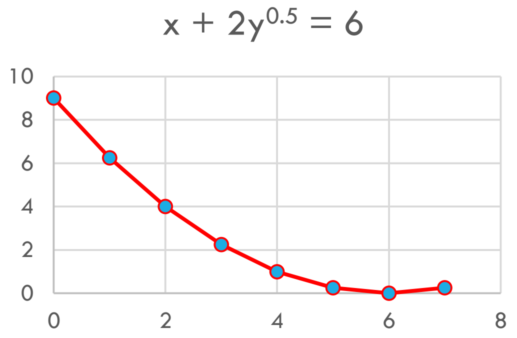
$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Solusi diperoleh dengan melakukan OPERASI MATRIKS YANG TEPAT

1.1 PENGANTAR SISTEM PERSAMAAN LINEAR (SPL)

LINEAR	NON LINEAR
• SEMUA VARIABEL dalam persamaan memiliki PANGKAT = 1	• ADA VARIABEL dalam persamaan memiliki PANGKAT ≠ 1
$x + 2y = 6$	$x + 2y^{0.5} = 6$
$y = ½\ x + 3z$	$y = ½\ x + 3zx$
• Jika digambarkan dalam suatu bidang bentuknya GARIS LURUS	• Jika digambarkan dalam suatu bidang bentuknya BUKAN GARIS LURUS





SISTEM LINEAR

- Kumpulan persamaan linear dengan variabel x_1, x_2, … x_n disebut **SISTEM PERSAMAAN LINEAR** atau **SISTEM LINEAR**
- Urutan angka s_1, s_2, … s_n disebut **SOLUSI** dari sistem linear tersebut jika $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, … $x_n = s_n$ adalah solusi untuk **setiap persamaan** dalam sistem tersebut

CONTOH 1

$$4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1$$
$$3x_1 + x_2 + 9x_3 = -4$$

Solusinya adalah

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -1$$

karena cocok untuk dua persamaan di atas

Bukan

$$x_1 = 1,\ x_2 = 8,\ x_3 = 1$$

karena **HANYA** cocok untuk persamaan pertama saja

KONSISTEN DAN INKONSISTEN

- **KONSISTEN**: jika ada paling tidak satu solusi dalam sistem
- **INKONSISTEN**: sistem yang tidak memiliki solusi, karena persamaan linear yang ada dalam sistem sebenarnya ekuivalen
- Contoh

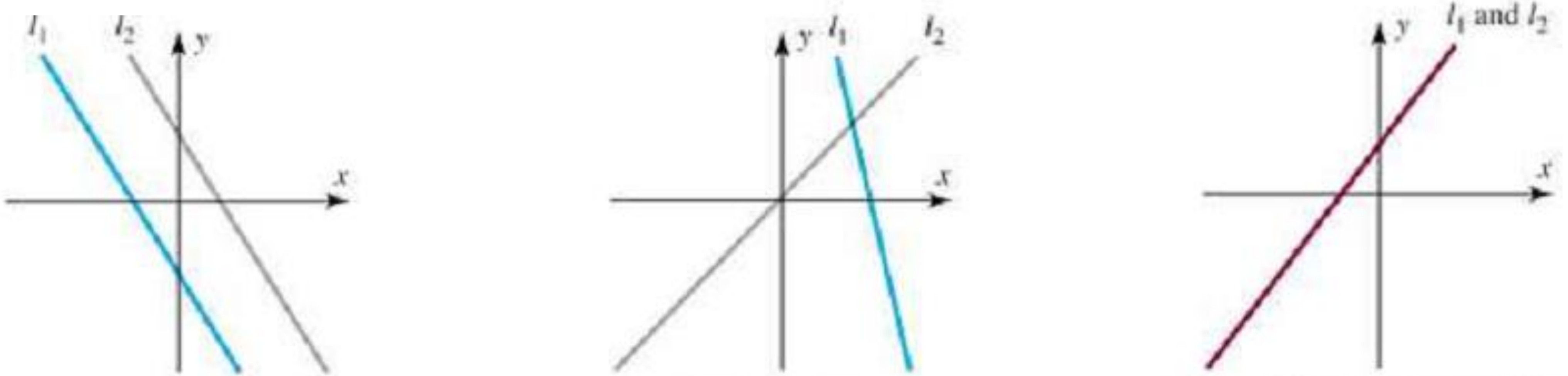
$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 2x + 2y &= 6 \end{aligned}$$

- Persamaan kedua adalah 2 kali persamaan persamaan dengan hasil yang berbeda
- Jadi, sebenarnya persamaannya adalah

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$

INKONSISTEN, tidak ada solusinya

3 KEMUNGKIN SPL



(a) No solution (b) One solution (c) Infinitely many solutions

AUGMENTED MATRICES

SPL

AUGMENTED MATRIX (matrix dari koefisien SPL, *a*, beserta hasilnya, *b*)

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

METODE DASAR SOLUSI SPL

TAHAPAN SOLUSI dari SPL adalah

1. Perkalian BARIS dengan konstanta yang bukan nol
2. Pertukaran dua baris
3. Penambahan perkalian satu baris ke baris lainnya

TUJUANNYA: merubah matriks awal ke matriks solusi

$$\begin{array}{r} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Eliminasi x baris 2: baris 1 kali -2 tambahkan ke baris 2

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Eliminasi x baris 3: baris 1 kali -3 tambahkan ke baris 3

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Koefisien y baris 2 dibuat = 1: kalikan 1/2

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Eliminasi y baris 3: baris 2 kali -3 tambahkan ke baris 3

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ -\tfrac{1}{2}z &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Koefisien z baris 3 dibuat = 1: kalikan dengan -2

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Eliminasi y baris 1: baris 2 kali -1 tambahkan ke baris 1

$$\begin{aligned} x + \tfrac{11}{2}z &= \tfrac{35}{2} \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Eliminasi z baris 1 dan 2: baris 3 kali -11/2 tambahkan ke baris 1 dan baris 3 kali 7/2 tambahkan ke baris 2

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

1.2 ELIMINASI GAUSS-JORDAN

Matrik solusi pada SPL:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

disebut **BENTUK ESELON-BARIS TERREDUKSI** (*reduced row-echelon form*)

Untuk membentuk matrik seperti itu, sebuah matrik harus memiliki sifat-sifat sebagai berikut:

1. Jika sebuah baris tidak berisi nol seluruhnya, maka angka bukan nol pertama di baris tersebut adalah 1. Ini disebut LEADING 1
2. Jika ada sembarang baris yang berisi nol seluruhnya, maka dikelompokkan bersama pada bagian bawah matrik
3. Jika ada dua baris berurutan yang tidak berisi nol seluruhnya, maka leading 1 baris lebih rendah terletak di sebelah kanan leading 1 baris atasnya
4. Setiap kolom yang berisi leading 1 memiliki nol di baris lain di kolom tersebut

- **Setiap matrik yang memiliki TIGA SIFAT PERTAMA disebut BENTUK ESELON-BARIS**
- **Karena itu, matrik BEBT pasti BEB, tapi tidak sebaliknya:**
  - **BEBT berisi NOL di bawah dan di atas leading 1**
  - **BEB berisi NOL di bawah leading 1, tapi bukan nol di atasnya**

CONTOH 2 BEBT DAN BEB

Matrik BEBT

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

Matrik BEB

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

CONTOH 3 SOLUSI 4 SPL

Augmented matrices berikut dicari solusinya menggunakan operasi baris sehingga menjadi matrik BEBT

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

SOLUSI

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 \quad\quad &= 5 \\ x_2 \quad &= -2 \\ x_3 &= 4 \end{aligned}$

$$\boxed{x_1 = 5,\ x_2 = -2,\ x_3 = 4}$$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$ $\Rightarrow$ TIDAK ADA SOLUSI

SOLUSI

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad +4x_4 &= -1 \\ x_2 \qquad +2x_4 &= 6 \\ x_3 + 3x_4 &= 2 \end{aligned}$

3 persamaan dengan 4 anu

- Karena x_1, x_2, dan x_3 adalah leading 1, maka disebut LEADING VARIABLE atau **PIVOT**
- Non-leading variable (x_4) disebut dengan **FREE VARIABLE** (variabel bebas)
- Ubah ke bentuk pivot sebagai fungsi variabel bebas (x_4):

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 - 4x_4 \\ x_2 &= 6 - 2x_4 \\ x_3 &= 2 - 3x_4 \end{aligned}$$

- x_4 dapat ditandai dengan sembarang nilai, sebut saja t, maka solusinya:

$$x_1 = -1 - 4t, \qquad x_2 = 6 - 2t, \qquad x_3 = 2 - 3t, \qquad x_4 = t$$

SOLUSI

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ⇒

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 \qquad\qquad\qquad + 4x_5 &= -2 \\ x_3 \qquad + 3x_5 &= 1 \\ x_4 + 5x_5 &= 2 \end{aligned}$$

3 persamaan dengan 5 anu

- Ubah ke bentuk pivot sebagai fungsi variabel bebas (x_4):

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 - 6x_2 - 4x_5 \\ x_3 &= 1 - 3x_5 \\ x_4 &= 2 - 5x_5 \end{aligned}$$

- x_2 dan x_5 dapat ditandai dengan sembarang nilai, sebut saja s dan t, maka solusinya:

$$x_1 = -2 - 6s - 4t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = 1 - 3t, \quad x_4 = 2 - 5t, \quad x_5 = t$$

METODE ELIMINASI

- Metode eliminasi **GAUSS** adalah 5 TAHAPAN, **hasilnya BEB**
- **JORDAN** menambahkan tahapan ke-6, **hasilnya BEBT**
- Jadi, Metode Eliminasi Gauss-Jordan menjadi 6 tahapan

ILUSTRASI

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

TAHAP 1. Tempatkan kolom paling kiri yang tidak berisi nol seluruhnya

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

↑ Leftmost nonzero column

TAHAP 2. Tukarkan baris atas dengan baris lainnya, jika diperlukan, untuk membawa elemen bukan nol ke atas kolom yang ditemukan pada Tahap 1

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

← The first and second rows in the preceding matrix were interchanged.

TAHAP 3. Jika elemen pada baris atas adalah *a*, maka kalikan dengan 1/*a* untuk mendapatkan leading 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{The first row of the preceding matrix was multiplied by } \tfrac{1}{2}.$$

TAHAP 4. Tambahkan perkalian yang tepat pada baris atas ke baris di bawahnya agar elemen-lemen di bawah leading 1 sama dengan nol

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \quad \leftarrow -2 \text{ times the first row of the preceding matrix was added to the third row.}$$

TAHAP 5. TUTUP baris atas dan lakukan Tahap 1 untuk submatrik sisanya sehingga menadapatkan BEB

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

Leftmost nonzero column in the submatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

← The first row in the submatrix was multiplied by $-\frac{1}{2}$ to introduce a leading 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

← -5 times the first row of the submatrix was added to the second row of the submatrix to introduce a zero below the leading 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

← The top row in the submatrix was covered, and we returned again to Step 1.

Leftmost nonzero column in the new submatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

← The first (and only) row in the new submatrix was multiplied by 2 to introduce a leading 1.

TAHAP 6. Memulai dengan baris bukan nol yang terakhir, lakukan perkalian yang sesuai tiap baris ke baris di atasnya sehingga semua elemen di atas leading 1 bernilai nol

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \tfrac{7}{2} \text{ times the third row of the preceding matrix was added to the second row.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \leftarrow -6 \text{ times the third row was added to the first row.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \leftarrow 5 \text{ times the second row was added to the first row.}$$

CONTOH 4

Selesaikan SPL berikut dengan Eliminasi Gauss-Jordan

$$\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 \quad\quad\quad + 2x_5 \quad\quad\quad &= 0 \\
2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\
5x_3 + 10x_4 \quad\quad + 15x_6 &= 5 \\
2x_1 + 6x_2 \quad\quad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6
\end{aligned}$$

SOLUSI: Augmented matrix-nya adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\
0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\
2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6
\end{bmatrix}
\xrightarrow[\text{-2B1+B4}]{\text{-2B1+B2}}
\begin{bmatrix}
1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\
0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\
0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6
\end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{\text{-1B2} \quad \text{-5B2+B3}}
\begin{bmatrix}
1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2
\end{bmatrix}
\xrightarrow[\text{B3}\leftrightarrow\text{B4}]{\text{B4/6}}
\begin{bmatrix}
1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{\text{-3B3+B2} \quad \text{2B2+B1}}
\begin{bmatrix}
1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + 4x_4 + 2x_5 &= 0 \\
x_3 + 2x_4 &= 0 \\
x_6 &= \frac{1}{3}
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\
x_3 &= -2x_4 \\
x_6 &= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \frac{1}{3}}
$$

SUBSTITUSI-BALIK (BACK-SUBSTITUTION)

- Hasil Eliminasi Gauss bisa tidak dilanjutkan ke Eliminasi Jordan, tetapi dilanjutkan dengan SUBSTITUSI BALIK

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad + 2x_5 \qquad &= 0 \\ x_3 + 2x_4 \qquad + 3x_6 &= 1 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 + 2x_3 - 2x_5 \\ x_3 &= 1 - 2x_4 - 3x_6 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 + 2x_3 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \frac{1}{3}}$$

CATATAN: Sembarang nilai dari variabel bebas *r, s*, dan *t* disebut paramater

SISTEM LINEAR HOMOGEN

- SPL disebut HOMOGEN jika semua konstantanya (hasil persamaannya) adalah NOL

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}$$

- Setiap SPL Homogen adalah konsisten, karena sistem tersebut memiliki $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, …, $x_n = 0$ sebagai sebuah solusi
- Solusi ini disebut **SOLUSI TRIVIAL**; jika ada solusi lain, maka disebut **SOLUSI NONTRIVIAL**

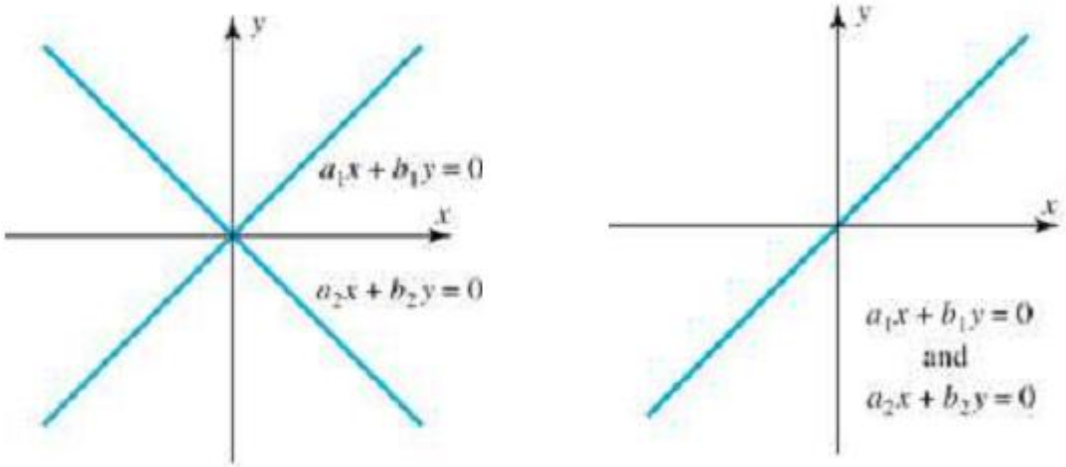
DUA KEMUNGKINAN SOLUSI

Karena SPL Homogen selalu memiliki solusi trivial, maka hanya ada dua kemungkinan solusinya

1. Sistem tersebut hanya memiliki solusi trivial
2. Sistem tersebut memiliki tak terbatas solusi tambahan di samping solusi trivialnya

Contoh:

$$a_1x + b_1y = 0 \qquad (a_1, b_1 \text{ not both zero})$$
$$a_2x + b_2y = 0 \qquad (a_2, b_2 \text{ not both zero})$$



(a) Only the trivial solution

(b) Infinitely many solutions

CONTOH

$$\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 - x_3 \phantom{{}-3x_4} + x_5 &= 0\\
-x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0\\
x_1 + x_2 - 2x_3 \phantom{{}-3x_4} - x_5 &= 0\\
x_3 + x_4 + x_5 &= 0
\end{aligned}
\;\Rightarrow\;
\begin{bmatrix}
2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\
-1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0\\
1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\;\Rightarrow\;
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3+x_4} + x_5 &= 0\\
x_3 \phantom{{}+x_4} + x_5 &= 0\\
x_4 &= 0
\end{aligned}
\;\Rightarrow\;
\begin{aligned}
x_1 &= -x_2 - x_5\\
x_3 &= -x_5\\
x_4 &= 0
\end{aligned}$$

$$x_1 = -s - t, \qquad x_2 = s, \qquad x_3 = -t, \qquad x_4 = 0, \qquad x_5 = t$$

Solusi trivial didapat jika s = 0 dan t = 0

DUA CATATAN PENTING

1. Tidak satupun dari tiga operasi baris elementer mengubah kolom akhir dari nol di matriks yang diperbesar, sehingga sistem persamaan sesuai dengan bentuk eselon baris tereduksi dari matriks yang diperbesar juga harus menjadi sistem homogen [lihat sistem 2].
2. Tergantung pada apakah bentuk eselon baris tereduksi dari matriks yang diperbesar mempunyai nol baris, jumlah persamaan dalam sistem berkurang sama atau kurang dari jumlah persamaan dalam sistem yang asli [membandingkan sistem 1 dan 2] .

DUA CATATAN PENTING

Jadi, jika sistem homogen diberikan memiliki persamaan *m* pada *n* anu dengan $m<n$, dan jika ada *r* non nol baris dalam bentuk eselon baris tereduksi dari matriks yang diperbesar, kita akan memiliki $r<n$. Oleh karena itu sistem persamaan sesuai dengan bentuk eselon baris tereduksi dari matriks yang diperbesar akan memiliki bentuk

$$\begin{array}{lllll}
\cdots x_{k_1} & & & & +\sum(\,)=0 \\
 & \cdots x_{k_2} & & & +\sum(\,)=0 \\
 & & \cdots\ddots & & \vdots \\
 & & & x_{k_r} & +\sum(\,)=0
\end{array}$$

Sehingga solusinya

$$\begin{aligned}
x_{k_1} &= -\sum(\,) \\
x_{k_2} &= -\sum(\,) \\
&\vdots \\
x_{k_r} &= -\sum(\,)
\end{aligned}$$

TEOREM 1.2.1

Sebuah sistem homogen dari persamaan linear dengan anu lebih banyak dari persamaannya akan memiliki tak terhingga banyaknya solusi.

1.3 MATRIKS DAN OPERASI MATRIKS

Matriks adalah susunan persegi panjang dari bilangan. Bilangan-bilangan dalam matriks disebut dengan ENTRI (ELEMEN)

Notasi matriks dengan huruf capital, sedang entrinya dengan huruf kecil

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Baris pertama

Unsur / entri /elemen ke-*mn*

(baris *m* kolom *n*)

Kolom kedua

$[a_{ij}]_{m\,x\,n}$ atau $[a_{ij}]$

Entri matriksnya dapat dinyatakan

$$(A)_{ij} = a_{ij}$$

MATRIKS BUJUR SANGKAR (PERSEGI)

Matriks yang jumlah baris dan jumlah kolomnya adalah sama (n x n)

Contoh :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Unsur diagonal

OPERASI PADA MATRIKS

1. Persamaan
2. Penjumlahan dan Pengurangan
3. Perkalian Skalar
4. Mengalikan Matriks
5. Menentukan Apakah Sebuah Produk Terdefinisi
6. Matriks yang Dipartisi
7. Produk Matriks sebagai Kombinasi Linear
8. Bentuk Matriks dari SPL
9. Matriks Mendefinisikan Fungsi
10. Transpose Matriks
11. Menemukan (*Tracing*) Sebuah Matriks

PERSAMAAN, PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN

PERSAMAAN

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & x \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika x = 5, maka A = B

A dan C tidak sama karena berbeda ukuran matriksnya

PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad A - B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -5 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 11 & -5 \end{bmatrix}$$

A + C, B + C, A – C, B – C tidak didefinisikan karena berbeda ukuran

PERKALIAN SKALAR

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad (-1)B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{3}C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Secara praktis (-1)*B* dapat dinyatakan dengan –*B*

KOMBINASI LINEAR-nya:

$$2A - B + \tfrac{1}{3}C = 2A + (-1)B + \tfrac{1}{3}C$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

MENGALIKAN MATRIKS

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \boxed{26} & \square \end{bmatrix}$$

$$(2 \cdot 4) + (6 \cdot 3) + (0 \cdot 5) = 26$$

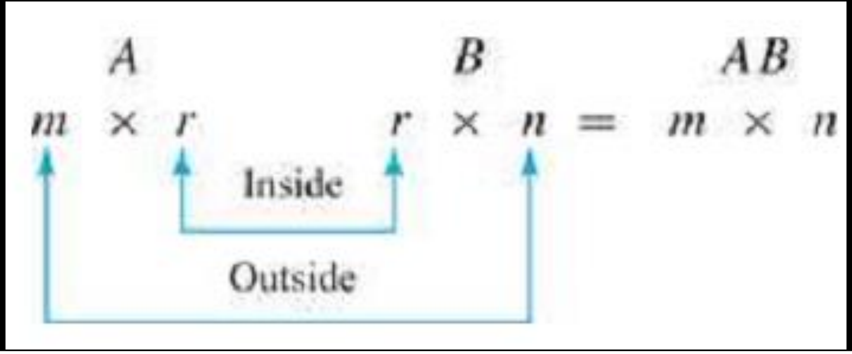
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \boxed{13} \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

$$(1 \cdot 3) + (2 \cdot 1) + (4 \cdot 2) = 13$$

$$\begin{aligned}
(1 \cdot 4) + (2 \cdot 0) + (4 \cdot 2) &= 12 \\
(1 \cdot 1) - (2 \cdot 1) + (4 \cdot 7) &= 27 \\
(1 \cdot 4) + (2 \cdot 3) + (4 \cdot 5) &= 30 \\
(2 \cdot 4) + (6 \cdot 0) + (0 \cdot 2) &= 8 \\
(2 \cdot 1) - (6 \cdot 1) + (0 \cdot 7) &= -4 \\
(2 \cdot 3) + (6 \cdot 1) + (0 \cdot 2) &= 12
\end{aligned}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

SYARAT PERKALIAN MATRIKS: inside-nya harus SAMA



MENENTUKAN APAKAH SEBUAH PRODUK TERDEFINISI

A	B	C
3×4	4×7	7×3

Perkalian matriks:

- TERDEFINISIKAN
  - AB terdefinisikan dengan 3 x 7
  - BC terdefinisikan dengan 4 x 3
  - CA terdefinisikan dengan 7 x 3
- TAK TERDEFINISIKAN: BA, CB, dan AC, karena ukuran dalamnya tidak sama

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rj} & \cdots & b_{rn} \end{bmatrix}$$

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}$$

MATRIKS YANG DIPARTISI

Matriks dapat dipartisi menjadi beberapa bagian submatriks:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3 \quad \mathbf{c}_4]$$

PRODUK MATRIKS SEBAGAI KOMBINASI LINEAR

Baris dan kolom matriks menyediakan cara lain dalam perkalian matriks:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x}=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}+\cdots+x_n\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix}=4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}+0\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}+7\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 30 \\ 26 \end{bmatrix}=4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}+3\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}+5\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 12 \end{bmatrix}=3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

BENTUK MATRIKS DARI SPL

Sebuah SPL dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &+ a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 &+ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 &+ a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned}$$

Dapat dibentuk kedalam matriks:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

MATRIKS MENDEFINISIKAN FUNGSI

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Produk $y = Ax$ adalah

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix}$$

Jika B: $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Maka $y = Bx$ adalah

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}$$

TRANSPOSE MATRIKS

Notasinya adalah A^T, hasilnya adalah baris matriks A menjadi kolom matriks A^T, dan kolom matriks A menjadi baris matriks A^T

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad D = [4]$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix}, \qquad B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \qquad C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad D^T = [4]$$

MENEMUKAN SEBUAH MATRIKS

Notasinya adalah *tr(A)*, hasilnya adalah JUMLAH seluruh diagonal utama matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -8 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} \qquad \operatorname{tr}(B) = -1 + 5 + 7 + 0 = 11$$

1.4 ARITMATIKA MATRIKS, MATRIKS BALIKAN

SIFAT-SIFAT ARITMATIKA MATRIKS

(a) $A + B = B + A$ (Commutative law for addition)

(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (Associative law for addition)

(c) $A(BC) = (AB)C$ (Associative law for multiplication)

(d) $A(B + C) = AB + AC$ (Left distributive law)

(e) $(B + C)A = BA + CA$ (Right distributive law)

(f) $A(B - C) = AB - AC$

(g) $(B - C)A = BA - CA$

(h) $a(B + C) = aB + aC$

(i) $a(B - C) = aB - aC$

(j) $(a + b)C = aC + bC$

(k) $(a - b)C = aC - bC$

(l) $a(bC) = (ab)C$

(m) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

CONTOH: ASOSIATIF UNTUK PERKALIAN

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad BC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

MATRIKS KHUSUS: MATRIKS NOL

Matriks NOL:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Notasinya adalah **0:**

$$\mathbf{A + 0 = 0 + A = A}$$

$$\boldsymbol{a + 0 = 0 + a = a}$$

Hukum PEMBATALAN:

- Jika $ab = ac$ dan a $\neq$ 0, maka b = c (membatalkan a dari persamaan)
- Jika $ad = 0$, maka paling tidak satu faktor di ruas kiri adalah 0

Hukum ini tidak berlaku secara umum dalam aritmatika matriks

CONTOH

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = AC = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad AD = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Apakah hokum pembatalan berlaku pada matriks-matriks di atas?

Tidak, meski A ≠ 0, tetapi B ≠ C dan meski AD = 0, tetapi salah satu dari A atau D tidak ada yang 0

SIFAT-SIFAT MATRIKS NOL

(a) $A + 0 = 0 + A = A$

(b) $A - A = 0$

(c) $\mathbf{0} - A = -A$

(d) $A0 = 0;\ 0A = 0$

MATRIKS KHUSUS: MATRIK IDENTITAS (I)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Dinotasikan dengan I. Matriks I selalu matriks bujur sangkar atau ditulis I_n

Jika ada matriks $A_{m \times n}$, maka $AI_n = A$ dan $I_mA = A$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$I_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$$

$$AI_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$$

TEOREMA 1.4.3

Jika R adalah matriks BEBT dari matriks $A_{n \times n}$, maka R juka memiliki sebuah baris nol, dan R adalah I_n

MATRIKS BALIK

DEFINISI: Jika A matriks bujur sangkar, dan B juga matriks dengan ukuran yang sama, lalu ditemukan bahwa *AB* = *BA* = *I*, maka A dikatakan DAPAT DIBALIKKAN dan B disebut MATRIKS BALIK DARI A. Jika tidak ditemukan matriks B yang demikian, maka matriks A disebut SINGULAR

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{is an inverse of} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$ adalah matriks singular

Jika kolom ketiga dikalikan dengan:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

TEOREMA 1.4.4, 1.4.5 DAN 1.4.6

TEOREMA 1.4.4

Jika B dan C keduanya matriks balik dari A, maka B = C

TEOREMA 1.4.5

The matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

is invertible if $ad - bc \neq 0$, in which case the inverse is given by the formula

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

TEOREMA 1.4.6

If A and B are invertible matrices of the same size, then AB is invertible and

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

CONTOH

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad AB = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \qquad (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

MATRIKS PANGKAT

DEFINITION

If A is a square matrix, then we define the nonnegative integer powers of A to be

$$A^0 = I \qquad A^n = \underbrace{AA\cdots A}_{n \text{ factors}} \qquad (n > 0)$$

Moreover, if A is invertible, then we define the negative integer powers to be

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{n \text{ factors}}$$

HUKUM EKSPONEN

If A is a square matrix and r and s are integers, t hen

$$A^r A^s = A^{r+s}, \qquad (A^r)^s = A^{rs}$$

If A is an invertible matrix, then:

(a) A^{-1} is invertible and $(A^{-1})^{-1} = A$.

(b) A^n is invertible and $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(c) For any nonzero scalar k, the matrix kA is invertible and $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.

CONTOH

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 30 \\ 15 & 41 \end{bmatrix}$$

$$A^{-3} = (A^{-1})^3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & -30 \\ -15 & 11 \end{bmatrix}$$

POLINOMIAL MATRIKS

Jika A matriks bujur sangkar ($A_{m \times m}$), dan jika $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ adalah polynomial, maka kita mendefinisikan

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_n A^n$$

dengan $I_{m \times m}$. Dengan kata lain, $p(A)$ adalah matriks m x m

$$p(x) = 2x^2 - 3x + 4 \quad \text{and} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$p(A) = 2A^2 - 3A + 4I = 2\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2 - 3\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$$

TRANSPOS MATRIKS: SIFAT-SIFATNYA

(a) $((A)^T)^T = A$

(b) $(A+B)^T = A^T + B^T$ *and* $(A-B)^T = A^T - B^T$

(c) $(kA)^T = kA^T$, *where k is any scalar*

(d) $(AB)^T = B^T A^T$

Jika *A* dapat dibalikkan, maka A^T juga dapat dibalikkan:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}, \qquad (A^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix},$$

$$(A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

1.5 MATRIKS ELEMENTER, CARA MENCARI MATRIKS BALIKAN

Operasi matriks elementer dapat digunakan untuk mencari matriks balik:

$$[A|I] \longrightarrow [I|A^{-1}]$$

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{-1B1+B3}]{\text{-2B1+B2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{2B2+B3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{-1B3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{-3B3+B1}]{\text{3B3+B2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{-2B2+B1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

SOLUSI SPL DENGAN MATRIKS BALIKAN

Jika matriks SPL adalah

$$Ax = b$$

Maka, solusi SPLnya adalah

$$x = A^{-1}b$$

1.6 JENIS-JENIS MATRIKS

1. Matriks Diagonal
2. Matriks Segitiga
3. Matriks Simetris

MATRIKS DIAGONAL

Matriks bujur sangkat yang semua elemen selain diagonal utamanya adalah NOL

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Bentuk umumnya:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

Balikan dan pangkatnya:

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/d_n \end{bmatrix} \qquad D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix}$$

CONTOH

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad A^{5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -243 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}, \qquad A^{-5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{243} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{32} \end{bmatrix}$$

MATRIKS SEGITIGA

Ada dua jenis:

- Matriks segitiga ATAS (MSA): semua elemen DI BAWAH diagonal utamanya adalah NOL
- Matriks segitiga BAWAH (MSB): semua elemen DI ATAS diagonal utamanya adalah NOL

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \text{ MSA} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \text{ MSB}$$

Hasil perkalian MSA dan MSA adalah MSA, MSB ya MSB

Balikan MSA adalah MSA, balikan MSB adalah MSB

MATRIKS SIMETRIS

Matriks yang ditranspos hasilnya sama dengan matriks asalnya: $A = A^T$

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

Sifat-sifatnya:

1. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$
2. $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$
3. $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$

CONTOH

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -11 \\ -2 & 4 & -8 \\ -11 & -8 & 41 \end{bmatrix}$$

$$A A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -17 \\ -17 & 34 \end{bmatrix}$$