

Российская Академия наук
Санкт-Петербургский академический университет —
Научно-образовательный центр нанотехнологий
Санкт-Петербургская кафедра философии РАН

История и методология механизмов элиминации в языках с зависимыми типами

Реферат аспиранта СПБАУ-НОЦНТ
Шабалина Александра Леонидовича

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент
Москвин Денис Николаевич

Руководитель аспирантской группы
д.ф.н., проф.
Мангасарян Владимир Николаевич

Санкт-Петербург
2015

Содержание

1	Лямбда-исчисление с зависимыми типами	3
1.1	Нетипизированное лямбда-исчисление	3
1.2	Просто типизированное лямбда-исчисление	3
1.3	Другие способы типизирования	4
1.4	Зависимые типы	5
2	Индуктивные типы данных	6
2.1	Расширение лямбда-исчисления дополнительными типами данных	6
2.2	Механизм сопоставления с образцом	6
2.3	Алгебраические типы данных	6
2.4	Зависимые индуктивные типы данных	6
3	Механизмы элиминации для зависимых индуктивных ти- пов данных	7
4	Список литературы	8

1. Лямбда-исчисление с зависимыми типами

1.1. Нетипизированное лямбда-исчисление

Лямбда-исчисление Чёрча, наряду с машинами Тьюринга и общерекурсивными функциями Гёделя, задает множество эффективно вычислимых функций [1]. То есть функций, для вычисления которых существует алгоритм. Это, в свою очередь, означает, что любая программа, исполняемая на современных вычислительных устройствах, должна быть выражима на языке лямбда-исчисления. Формально этот язык задается следующим образом [1]:

- Есть некоторое множество *переменных* V .
- Есть множество *термов* T , задаваемых индуктивно:

$$T = \begin{cases} x, & x \in V & \text{переменная} \\ M N, & M, N \in T & \text{применение} \\ \lambda x.M, & x \in V, M \in T & \text{лямбда-абстракция} \end{cases}$$

- Множеством свободных переменных терма t называется подмножество V , в которое входят все переменные в терме t , кроме тех, что связаны лямбда-абстракцией (определение аналогично для других связывающих конструкций в математике, к примеру, кванторов существования и всеобщности):

$$\begin{aligned} FV(x) &= \{x\} \\ FV(MN) &= FV(M) \cup FV(N) \\ FV(\lambda x.M) &= FV(M) \setminus \{x\} \end{aligned}$$

- Вычисление выполняется с помощью правила бэта-редукции:

$$(\lambda x.M)N \Rightarrow_{\beta} M[x := N]$$

Где нотация $M[x := N]$ означает замену в M всех свободных вхождений переменной x на терм N .

1.2. Просто типизированное лямбда-исчисление

Недостаток нетипизированного лямбда-исчисления лежит во «вседозволенности» операции применения MN : ничто не гарантирует, что M

будет функцией. Чтобы решить эту проблему, Чёрч разработал просто типизированное лямбда-исчисление [2]:

- Множество переменных на уровне термов V и на уровне типов TyV .
- Множество типов Ty :

$$Ty = \begin{cases} x, & x \in TyV \\ \sigma \rightarrow \tau, & \sigma, \tau \in Ty \end{cases}$$

- Множество термов T :

$$T = \begin{cases} x, & x \in V \\ M N, & M, N \in T \\ \lambda x : \sigma. M, & x \in V, \sigma \in Ty, M \in T \end{cases}$$

- Правила присваивания типов:

$$\frac{}{\Gamma \vdash x : \sigma} \quad (x : \sigma) \in \Gamma$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash MN : \sigma}$$

$$\frac{(\Gamma \cup \{x : \sigma\}) \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash (\lambda x : \sigma. M) : \sigma \rightarrow \tau}$$

- Вычисление выполняется также с помощью бэта-редукции, имеющему аналогичный вид нетипизированному случаю. Но определяется только для термов, которым можно присвоить тип.

1.3. Другие способы типизирования

Недостаток просто типизированного лямбда-исчисления обратный: множество термов, которые хотелось бы написать будут отвергнуты системой типов. Поэтому было придумано множество способов расширить систему типов, чтобы с одной стороны позволить писать больше программ, которые хочется, а с другой — отвергать некорректные. Одной из таких систем типов является System F Жирара [7]:

- Типы

$$Ty = \begin{cases} x, & x \in TyV \\ \sigma \rightarrow \tau, & \sigma \in Ty, \tau \in Ty \\ \forall x.\sigma, & x \in TyV, \sigma \in Ty \end{cases}$$

- Термы

$$T = \begin{cases} x, & x \in V \\ M N, & M, N \in T \\ \lambda x : \sigma.M, & x \in V, \sigma \in Ty, M \in T \\ \Lambda x.M, & X \in TyV, M \in T & \text{абстракция по типу} \\ M[\sigma], & M \in T, \sigma \in Ty & \text{применение типа} \end{cases}$$

- Типизация. Все правила из просто типизированного плюс:

$$\frac{\Gamma \cup \{x\} \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \Lambda x.M : \forall X.\sigma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \forall x.\tau}{\Gamma \vdash M[\sigma] : \tau[x := \sigma]}$$

Введение абстракции по типам позволяет строить утверждения о программах [9]. Например, существует ровно один терм с типом $\forall a.\forall b.a \rightarrow b \rightarrow a - \Lambda a.\Lambda b.\lambda x.\lambda y.x$.

1.4. Зависимые типы

Развивая идею построения утверждения по программам, можно прийти к соответствию Карри-Говарда между типами и теоремами в математической логике [8]. В частности, System F соответствует интуиционистской (конструктивной) пропозициональной логике второго порядка (но без квантора существования).

Если теперь вместо пропозициональной логики взять логику предикатов и построить по ней систему типов, то получатся так называемые зависимые типы [5]. Ключевая идея в том, что мы объединяем множества типов и термов в одно. Позволяя таким образом писать термы на уровне типов. Это открывает возможность для проведения формальной верификации программ с помощью одной лишь системы типов.

2. Индуктивные типы данных

2.1. Расширение лямбда-исчисления дополнительными типами данных

TODO: Из [7].

2.2. Механизм сопоставления с образцом

TODO: Из [3].

2.3. Алгебраические типы данных

TODO: Из [4].

2.4. Зависимые индуктивные типы данных

TODO: Calculus of Inductive Constructions

TODO: UTT

3. Механизмы элиминации для зависимых индуктивных типов данных

TODO: Из [6].

4. Список литературы

- [1] H. P. Barendregt. *The Lambda Calculus Its Syntax and Semantics*, volume 103. North Holland, revised edition, 1984.
- [2] Henk Barendregt, S. Abramsky, D. M. Gabbay, T. S. E. Maibaum, and H. P. Barendregt. Lambda calculi with types. In *Handbook of Logic in Computer Science*, pages 117–309. Oxford University Press, 1992.
- [3] Rod M Burstall. Proving properties of programs by structural induction. *The Computer Journal*, 12(1):41–48, 1969.
- [4] Rod M Burstall and John Darlington. A transformation system for developing recursive programs. *Journal of the ACM (JACM)*, 24(1):44–67, 1977.
- [5] P. Martin-Löf. An intuitionistic theory of types: predicative part. In *Logic Colloquium*, 1973.
- [6] CONOR MCBRIDE and JAMES MCKINNA. The view from the left. *Journal of Functional Programming*, 14:69–111, 1 2004.
- [7] Benjamin C. Pierce. *Types and Programming Languages*. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 2002.
- [8] Philip Wadler. Propositions as types.
- [9] Philip Wadler. Theorems for free! In *Functional Programming Languages and Computer Architecture*, pages 347–359. ACM Press, 1989.