

Российская Академия наук
Санкт-Петербургский академический университет —
Научно-образовательный центр нанотехнологий
Санкт-Петербургская кафедра философии РАН

История и методология механизмов элиминации в языках с зависимыми типами

Реферат аспиранта СПБАУ-НОЦНТ
Шабалина Александра Леонидовича

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент
Москвин Денис Николаевич

Руководитель аспирантской группы
д.ф.н., проф.
Мангасарян Владимир Николаевич

Санкт-Петербург
2015

Содержание

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Лямбда-исчисление с индуктивными типами | 3 |
| 1.1 | Лямбда-исчисление | 3 |
| 1.1.1 | Нетипизированное лямбда-исчисление | 3 |
| 1.1.2 | Просто типизированное лямбда-исчисление | 4 |
| 1.1.3 | Другие способы типизирования | 4 |
| 1.2 | Сопоставление с образцом | 5 |
| 1.2.1 | Расширение лямбда-исчисления дополнительными типами данных | 5 |
| 1.2.2 | Механизм сопоставления с образцом | 8 |
| 1.3 | Индуктивные типы данных | 9 |
| 2 | Зависимые типы в лямбда-исчислении | 10 |
| 2.1 | Зависимые типы | 10 |
| 2.2 | Индуктивные семейства типов | 10 |
| 2.3 | Сопоставление с образцом для индуктивных семейств типов | 11 |
| 3 | Механизмы элиминации в языках с зависимыми типами | 12 |
| 3.1 | Выразимость сопоставления с образцом через элиминаторы | 12 |
| 3.2 | Расширение сопоставления с образцом views | 12 |
| 3.3 | Прочие расширения сопоставления с образцом | 12 |
| 3.4 | Проблемы механизма сопоставлением с образцом | 12 |
| 4 | Список литературы | 13 |

1. Лямбда-исчисление с индуктивными типами

1.1. Лямбда-исчисление

1.1.1. Нетипизированное лямбда-исчисление

Лямбда-исчисление Чёрча, наряду с машинами Тьюринга и общерекурсивными функциями Гёделя, задает множество эффективно вычисляемых функций [1]. То есть функций, для вычисления которых существует алгоритм. Это, в свою очередь, означает, что любая программа, исполняемая на современных вычислительных устройствах, должна быть выражима на языке лямбда-исчисления. Формально этот язык задается следующим образом [1]:

- Есть некоторое множество *переменных* V .
- Есть множество *термов* T , задаваемых индуктивно:

$$T = \begin{cases} x, & x \in V & \text{переменная} \\ M N, & M, N \in T & \text{применение} \\ \lambda x.M, & x \in V, M \in T & \text{лямбда-абстракция} \end{cases}$$

- Множеством свободных переменных терма t называется подмножество V , в которое входят все переменные в терме t , кроме тех, что связаны лямбда-абстракцией (определение аналогично для других связывающих конструкций в математике, к примеру, кванторов существования и всеобщности):

$$\begin{aligned} FV(x) &= \{x\} \\ FV(MN) &= FV(M) \cup FV(N) \\ FV(\lambda x.M) &= FV(M) \setminus \{x\} \end{aligned}$$

- Вычисление выполняется с помощью правила бета-редукции:

$$(\lambda x.M)N \Rightarrow_{\beta} M[x := N]$$

Где нотация $M[x := N]$ означает замену в M всех свободных вхождений переменной x на терм N .

1.1.2. Просто типизированное лямбда-исчисление

Недостаток нетипизированного лямбда-исчисления лежит во «вседозволенности» операции применения MN : ничто не гарантирует, что M будет функцией. Чтобы решить эту проблему, Чёрч разработал просто типизированное лямбда-исчисление [2]:

- Множество переменных на уровне термов V и на уровне типов TyV .
- Множество типов Ty :

$$Ty = \begin{cases} x, & x \in TyV \\ \sigma \rightarrow \tau, & \sigma, \tau \in Ty \end{cases}$$

- Множество термов T :

$$T = \begin{cases} x, & x \in V \\ M N, & M, N \in T \\ \lambda x : \sigma. M, & x \in V, \sigma \in Ty, M \in T \end{cases}$$

- Правила присваивания типов:

$$\frac{}{\Gamma \vdash x : \sigma} \quad (x : \sigma) \in \Gamma$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash MN : \sigma}$$

$$\frac{(\Gamma \cup \{x : \sigma\}) \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash (\lambda x : \sigma. M) : \sigma \rightarrow \tau}$$

- Вычисление выполняется также с помощью бэта-редукции, имеющему аналогичный вид нетипизированному случаю. Но определяется только для термов, которым можно присвоить тип.

1.1.3. Другие способы типизирования

Недостаток просто типизированного лямбда-исчисления обратный: множество термов, которые хотелось бы написать будут отвергнуты системой типов. Поэтому было придумано множество способов расширить систему типов, чтобы с одной стороны позволить писать больше программ, которые хочется, а с другой — отвергать некорректные. Одной из таких систем типов является System F Жирара [9]:

- Типы

$$Ty = \begin{cases} x, & x \in TyV \\ \sigma \rightarrow \tau, & \sigma \in Ty, \tau \in Ty \\ \forall x.\sigma, & x \in TyV, \sigma \in Ty \end{cases}$$

- Термы

$$T = \begin{cases} x, & x \in V \\ M N, & M, N \in T \\ \lambda x : \sigma.M, & x \in V, \sigma \in Ty, M \in T \\ \Lambda x.M, & X \in TyV, M \in T & \text{абстракция по типу} \\ M[\sigma], & M \in T, \sigma \in Ty & \text{применение типа} \end{cases}$$

- Типизация. Все правила из просто типизированного плюс:

$$\frac{\Gamma \cup \{x\} \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \Lambda x.M : \forall X.\sigma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \forall x.\tau}{\Gamma \vdash M[\sigma] : \tau[x := \sigma]}$$

Введение абстракции по типам позволяет строить утверждения о программах [11]. Например, существует ровно один терм с типом $\forall a.\forall b.a \rightarrow b \rightarrow a - \Lambda a.\Lambda b.\lambda x.\lambda y.x$.

1.2. Сопоставление с образцом

1.2.1. Расширение лямбда-исчисления дополнительными типами данных

Чтобы превратить лямбда-исчисление в практический язык программирования, требуется ввести дополнительные типы данных, такие как числа, списки, Здесь будем рассматривать System F.

Посмотрим, как можно ввести типы *Bool*, *Nat* и *List* [9]:

- Расширяем множество типов типами *Bool*, *Nat*, *List T*, где $T \in Ty$.
- Расширяем множество термов термами *true*, *false*, *ifThenElse*, *0*, *succ*, *pred*, *iszero*, *nil*, *cons*, *isnil*, *head*, *tail*.
- Дополняем правила типизации:

$$\Gamma \vdash \text{true} : \text{Bool}$$

$$\Gamma \vdash \text{false} : \text{Bool}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e : \text{Bool} \quad \Gamma \vdash t : T \quad \Gamma \vdash f : T}{\Gamma \vdash \text{ifThenElse } e \ t \ f : T}$$

$$\Gamma \vdash 0 : \text{Nat}$$

$$\frac{\Gamma \vdash n : \text{Nat}}{\Gamma \vdash \text{succ } n : \text{Nat}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash n : \text{Nat}}{\Gamma \vdash \text{pred } n : \text{Nat}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash n : \text{Nat}}{\Gamma \vdash \text{iszero } n : \text{Bool}}$$

$$\Gamma \vdash \text{nil}[T] : \text{List } T$$

$$\frac{\Gamma \vdash x : T \quad \Gamma \vdash xs : \text{List } T}{\Gamma \vdash \text{cons}[T] \ x \ xs : \text{List } T}$$

$$\frac{\Gamma \vdash xs : \text{List } T}{\Gamma \vdash \text{isnil}[T] \ xs : \text{Bool}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash xs : \text{List } T}{\Gamma \vdash \text{head}[T] \ xs : T}$$

$$\frac{\Gamma \vdash xs : \text{List } T}{\Gamma \vdash \text{tail}[T] \ xs : \text{List } T}$$

- И расширяем правила вычислений. Назовем их дельта-редукциями:

$$\frac{e \Rightarrow e'}{\text{ifThenElse } e \ t \ f \Rightarrow \text{ifThenElse } e' \ t \ f}$$

$$\frac{t \Rightarrow t'}{\text{ifThenElse } \text{true} \ t \ f \Rightarrow t'}$$

$$\frac{f \Rightarrow f'}{ifThenElse\ false\ t\ f \Rightarrow f'}$$

$$\frac{n \Rightarrow n'}{succ\ n \Rightarrow succ\ n'}$$

$$\frac{n \Rightarrow n'}{pred\ n \Rightarrow pred\ n'}$$

$$pred\ (succ\ n) \Rightarrow n$$

$$\frac{n \Rightarrow n'}{iszero\ n \Rightarrow iszero\ n'}$$

$$iszero\ 0 \Rightarrow true$$

$$iszero\ (succ\ n) \Rightarrow false$$

$$\frac{x \Rightarrow x' \quad xs \Rightarrow xs'}{cons[T]\ x\ xs \Rightarrow cons[T]\ x'\ xs'}$$

$$\frac{xs \Rightarrow xs'}{isnil[T]\ xs \Rightarrow isnil[T]\ xs'}$$

$$isnil[S]\ (nil[T]) \Rightarrow true$$

$$isnil[S]\ (cons[T]\ x\ xs) \Rightarrow false$$

$$\frac{xs \Rightarrow xs'}{head[T]\ xs \Rightarrow head[T]\ xs'}$$

$$head[S]\ (cons[T]\ x\ xs) \Rightarrow x$$

$$\frac{xs \Rightarrow xs'}{tail[T]\ xs \Rightarrow tail[T]\ xs'}$$

$$tail[S]\ (cons[T]\ x\ xs) \Rightarrow xs$$

Можно заметить, что введение типа в систему состоит из шагов:

1. Введение типа на уровень типов: *Bool*, *Nat*, *List T*.
2. Введение конструкторов — функций (или, в частном случае, констант), которые дают на выходе элемент введенного типа: *true*, *false*, *0*, *succ*, *nil*, *cons*.
3. Введение предикатов, которые проверяют каким конструктором был построен аргумент: *iszero*, *isnil*.
4. Введение деструкторов — функций, действующих обратно конструкторам, то есть получая на вход элемент вводимого типа, они возвращают аргумент соответствующего конструктора: *pred*, *head*, *tail*

Последние 2 этапа можно объединить в один элиминатор, как в случае с *Bool*: *ifThenElse*. В общем случае эта функция принимает на вход элемент вводимого типа, затем столько же функций, сколько конструкторов и каждая из этих функций имеет число аргументов такое же, как и соответствующий ей конструктор. Все эти функции возвращают какой-то тип *a* и весь элиминатор тоже возвращает этот тип *a*. Вычислительно первый аргумент проверяется на то, каким конструктором и с какими аргументами он был построен и на результат выдается применение соответствующей функции к аргументам конструктора.

1.2.2. Механизм сопоставления с образцом

В 1968-м году Бурсталл [3] предложил синтаксическую конструкцию, которая позволяет избавиться от явного написания предикатов с деструкторами, заменив их соответствующими конструкторами:

$$\begin{array}{ll}
\text{let } lst = cons \ x \ xs & \Leftrightarrow \text{let } lst = cons \ x \ xs \\
\text{let } (cons \ x \ xs) = lst & \Leftrightarrow \text{let } x = head \ lst; \text{let } xs = tail \ lst \\
lst \text{ is } nil & \Leftrightarrow isnil \ lst
\end{array}$$

И развивая идею чуть дальше, заменять конструкции вида:

$$\begin{array}{ll}
\text{if} & e \text{ is } c_1 \text{ then let } (c_1 \ x_1 \ \dots \ x_{k_1}) = e; \phi_1 \ x_1 \ \dots \ x_{k_1} \\
\text{else if} & e \text{ is } c_2 \text{ then let } (c_2 \ x_1 \ \dots \ x_{k_2}) = e; \phi_2 \ x_1 \ \dots \ x_{k_2} \\
& \vdots \\
\text{else if} & e \text{ is } c_n \text{ then let } (c_n \ x_1 \ \dots \ x_{k_n}) = e; \phi_n \ x_1 \ \dots \ x_{k_n}
\end{array}$$

конструкцией

cases e :

$$\begin{aligned} c_1 \ x_1 \ \dots \ x_{k_1} &: \phi_1 \ x_1 \ \dots \ x_{k_1} \\ c_2 \ x_1 \ \dots \ x_{k_2} &: \phi_2 \ x_1 \ \dots \ x_{k_2} \\ &\vdots \\ c_n \ x_1 \ \dots \ x_{k_n} &: \phi_n \ x_1 \ \dots \ x_{k_n} \end{aligned}$$

Механизм, названный позднее сопоставлением с образцом, оказался очень практически удобным и получил широкое распространение в языках вроде ML, Haskell,

1.3. Индуктивные типы данных

Встроенных в систему типов бывает недостаточно и хочется иметь возможность вводить собственные типы данных. Это можно делать, явно предоставляя функции преобразования между новым введенным типом и комбинацией встроенных [4]. Это позволяет писать функции в терминах нового типа и дает возможность изменить внутреннее представление этого типа, не переписывая эти функции.

Но от ручного написания функций преобразования тоже хочется избавиться, что было впервые сделано в 1980-м году в языке Норе [5]. В нем был введен способ вводить пользовательские типы данных, которые имеют форму деревьев. Например, *Bool*, *Nat*, *List T* принимают вид:

```
data Bool == true ++ false
data Nat == 0 ++ succ(Nat)
typevar T
data List(T) == nil ++ cons(T#List(T))
```

2. Зависимые типы в лямбда-исчислении

2.1. Зависимые типы

Развивая идею построения утверждения по программам, можно прийти к соответствию Карри-Говарда между типами и теоремами в математической логике [10]. В частности, System F соответствует интуиционистской (конструктивной) пропозициональной логике второго порядка (но без квантора существования).

Если теперь вместо пропозициональной логики взять логику предикатов и построить по ней систему типов, то получатся так называемые зависимые типы [8]. Ключевая идея в том, что мы объединяем множества типов и термов в одно. Позволяя таким образом писать термы на уровне типов. Это открывает возможность для проведения формальной верификации программ с помощью одной лишь системы типов.

Первой такой системой типов стала интенциональная теория типов Мартин-Лёфа [8]. Это закрытая система в том смысле, что у пользователя нет способа добавить еще один тип и необходимо использовать существующие: Π -типы, Σ -типы, размеченные объединения, тип равенства, тип конечных множеств, натуральные числа и вселенные.

2.2. Индуктивные семейства типов

Несмотря на то, что система типов Мартин-Лёфа закрыта, введение типов данных производилось систематически:

1. Ввести константу
2. Ввести правила построения термов этого типа
3. Ввести правила использования термов этого типа (элиминации)
4. Ввести правила вычисления, по которым правила элиминации и построения обратны друг другу

В [7] предлагает схему с семействами типов, рекурсивно зависящими друг от друга.

Альтернативный подход: ввести тип W , который является самым общим индуктивным типом. Но мы теряем некоторые свойства связанные с равенством.

2.3. Сопоставление с образцом для индуктивных семейств типов

Усложнение системы по сравнению с System F сказывается на реализации сопоставления с образцом. Наличие Π -типов означает, что в функции нескольких аргументов выполняя сопоставление по первому аргументу, меняется тип последующих и, как следствие, набор подходящих для них паттернов. А добавляя к этому еще семейства типов, теряется линейность.

Механизм сопоставления с образцом предпочтительней прямого использования элиминаторов по следующим соображениям [6]:

- Неожидаанное вычислительное поведение
- Читаемость
- В индуктивных семействах в зависимости от того, что считать параметрами, а что индексами меняется элиминатор.

Первое представление сопоставления с образцом для языков с зависимыми типами и индуктивными семействами было дано в [6].

3. Механизмы элиминации в языках с зависимыми типами

3.1. Выразимость сопоставления с образцом через элиминаторы

3.2. Расширение сопоставления с образцом views

3.3. Прочие расширения сопоставления с образцом

3.4. Проблемы механизма сопоставлением с образцом

4. Список литературы

- [1] H. P. Barendregt. *The Lambda Calculus Its Syntax and Semantics*, volume 103. North Holland, revised edition, 1984.
- [2] Henk Barendregt, S. Abramsky, D. M. Gabbay, T. S. E. Maibaum, and H. P. Barendregt. Lambda calculi with types. In *Handbook of Logic in Computer Science*, pages 117–309. Oxford University Press, 1992.
- [3] Rod M Burstall. Proving properties of programs by structural induction. *The Computer Journal*, 12(1):41–48, 1969.
- [4] Rod M Burstall and John Darlington. A transformation system for developing recursive programs. *Journal of the ACM (JACM)*, 24(1):44–67, 1977.
- [5] Rod M Burstall, David B MacQueen, and Donald T Sannella. Hope: An experimental applicative language. In *Proceedings of the 1980 ACM conference on LISP and functional programming*, pages 136–143. ACM, 1980.
- [6] Thierry Coquand. Pattern matching with dependent types. In *Proceedings of the Workshop on Types for Proofs and Program*, pages 66–79. Citeseer, 1992.
- [7] Peter Dybjer. Inductive families. *Formal Aspects of Computing*, 6:440–465, 1997.
- [8] P. Martin-Löf. An intuitionistic theory of types: predicative part. In *Logic Colloquium*, 1973.
- [9] Benjamin C. Pierce. *Types and Programming Languages*. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 2002.
- [10] Philip Wadler. Propositions as types.
- [11] Philip Wadler. Theorems for free! In *Functional Programming Languages and Computer Architecture*, pages 347–359. ACM Press, 1989.