



PED

Projeto Educação Dav

Aula 01 – Números Naturais e Inteiros, múltiplos e divisores. MMC e MDC.

Índice

Números naturais	03
Números Inteiros	03
Números Primos	03
Multiplos e Divisores	04
Múltiplos de um número	04
Divisores de um número	06
Cálculos do MDC e MMC	07
Múltiplos	07
Divisores	07
Mínimo múltiplo comun	08
Mínimo divisor comun	09
Decomposição simultânea	10
Questões	12

Números naturais (N)

O primeiro conjunto numérico a surgir foi o dos números naturais, que atendeu à necessidade do ser humano de **contabilizar e de quantificar objetos**. Ele é representado pela letra **N**, e os números naturais são:

$$N=0, 1, 2, 3, 4, 5... "$$

Números inteiros (Z)

Com o passar do tempo, surgiu a necessidade da representação de números negativos, que não existem nos números naturais, tornando necessária a ampliação do conjunto, dando origem ao conjunto dos números inteiros, composto pelos números naturais e os números opostos a ele. Ele é representado pela letra **Z**, e os números inteiros são:

$$Z=-3,-2,-1, 0, 1, 2, 3... "$$

Números primos

Os números primos são aqueles que **possuem como divisor somente o número 1 e o próprio número**. Para verificar se um número é primo ou não, um dos métodos mais triviais é fazer a listagem dos divisores desse número. Caso apareça números a mais que 1 e o número em questão, este não é primo.

Múltiplos e divisores

Os conceitos de múltiplos e divisores de um número natural estendem-se para o conjunto dos números inteiros. Quando tratamos do assunto múltiplos e divisores, referimo-nos a conjuntos numéricos que satisfazem algumas condições. **Os múltiplos são encontrados após a multiplicação por números inteiros, e os divisores são números divisíveis por um certo número.**

Devido a isso, encontraremos subconjuntos dos números inteiros, pois os elementos dos conjuntos dos múltiplos e divisores são elementos do conjunto dos números inteiros. Para entender o que são números primos, é necessário compreender o conceito de divisores.

Múltiplos de um número

Sejam **a** e **b** dois números inteiros conhecidos, o número **a** é múltiplo de **b** se, e somente se, existir um número inteiro **k** tal que **a = b · k**. Desse modo, o conjunto dos múltiplos de **a** é obtido multiplicando **a** por todos números inteiros, os resultados dessas multiplicações são os múltiplos de **a**.

Por exemplo, listemos os 12 primeiros múltiplos de 2. Para isso temos que multiplicar o número 2 pelos 12 primeiros números inteiros, assim:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 &= 2 \\ 2 \cdot 2 &= 4 \\ 2 \cdot 3 &= 6 \\ 2 \cdot 4 &= 8 \\ 2 \cdot 5 &= 10 \\ 2 \cdot 6 &= 12 \\ 2 \cdot 7 &= 14 \\ 2 \cdot 8 &= 16 \\ 2 \cdot 9 &= 18 \\ 2 \cdot 10 &= 20 \\ 2 \cdot 11 &= 22 \\ 2 \cdot 12 &= 24 \end{aligned}$$

Portanto, os múltiplos de 2 são:

$$M(2) = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24\}$$

Para verificar se um número é ou não múltiplo de outro, devemos encontrar um número inteiro de forma que a multiplicação entre eles resulte no primeiro número. Veja os exemplos:

O número 49 é múltiplo de 7, pois existe número inteiro que, multiplicado por 7, resulta em 49.

$$49 = 7 \cdot 7$$

O número 324 é múltiplo de 3, pois existe número inteiro que, multiplicado por 3, resulta em 324.

$$324 = 3 \cdot 108$$

O número 523 não é múltiplo de 2, pois não existe número inteiro que, multiplicado por 2, resulte em 523."

Exercício

01) Qual das opções abaixo não é múltiplo de 3?

- a) 15
- b) 9
- c) 37
- d) 21

Gabarito: c

Divisores de um número

Sejam **a** e **b** dois números inteiros conhecidos, vamos dizer que **b** é divisor de **a** se o número **b** for múltiplo de **a**, ou seja, a divisão entre **b** e **a** é exata (deve deixar resto 0).

Veja alguns exemplos:

22 é múltiplo de 2, então, 2 é divisor de 22.

63 é múltiplo de 3, logo, 3 é divisor de 63.

121 não é múltiplo de 10, assim, 10 não é divisor de 121.

Para listar os divisores de um número, devemos buscar os números que o dividem. Veja:

– Liste os divisores de 2, 3 e 20.

$$D(2) = \{1, 2\}$$

$$D(3) = \{1, 3\}$$

$$D(20) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

Observe que os números da lista dos divisores sempre são divisíveis pelo número em questão e que o maior valor que aparece nessa lista é o próprio número, pois nenhum número maior que ele será divisível por ele.

Por exemplo, nos divisores de 30, o maior valor dessa lista é o próprio 30, pois nenhum número maior que 30 será divisível por ele. Assim:

$$D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

Cálculo do MMC e do MDC

O cálculo do MMC e do MDC é feito pela fatoração dos números e escolha oportuna dos fatores que farão parte do resultado procurado.

Os cálculos de **MMC** e **MDC** estão relacionados com **múltiplos e divisores** de um número natural.

Múltiplos

Entendemos por múltiplo o produto gerado pela multiplicação entre dois números.

Observe:

Dizemos que 30 é múltiplo de 5, pois $5 \cdot 6 = 30$. Existe um número natural que multiplicado por 5 resulta em 30.

Veja mais alguns números e seus múltiplos:

$M(3) = 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \dots$

$M(4) = 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, \dots$

$M(10) = 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, \dots$

$M(8) = 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, \dots$

$M(20) = 0, 20, 40, 60, 80, 100, 120, \dots$

$M(11) = 0, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, \dots$

Os múltiplos de um número formam um conjunto infinito de elementos.

Divisores

Um número é considerado divisível por outro quando o resto da divisão entre eles é igual a zero. Observe alguns números e seus divisores:

$D(10) = 1, 2, 5, 10.$

$D(20) = 1, 2, 4, 5, 10, 20.$

$D(25) = 1, 5, 25.$

$D(100) = 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100."$

Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

O mínimo múltiplo comum entre dois números é representado pelo menor valor comum pertencente aos múltiplos dos números. Observe o MMC entre os números 20 e 30:

$$M(20) = 0, 20, 40, 60, 80, 100, 120,$$

$$M(30) = 0, 30, 60, 90, 120, 150, 180, ...$$

O MMC entre 20 e 30 é equivalente a 60.

Outra forma de determinar o MMC entre 20 e 30 é por meio da fatoração, em que **devemos escolher os fatores comuns e não comuns de maior expoente**. Observe:

$$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5$$

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$MMC(20, 30) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

A terceira opção consiste em realizar a decomposição simultânea dos números, multiplicando os fatores obtidos. Observe:

20	30	2
10	15	2
5	15	3
5	5	5
1		

$MMC(20, 30) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

Máximo Divisor Comum (MDC)

O máximo divisor comum entre dois números **é representado pelo maior valor comum pertencente aos divisores dos números**. Observe o MDC entre os números 20 e 30:

$$D(20) = 1, 2, 4, 5, \mathbf{10}, 20.$$

$$D(30) = 1, 2, 3, 5, 6, \mathbf{10}, 15, 30.$$

O maior divisor comum dos números 20 e 30 é 10.

Podemos também determinar o MDC entre dois números por meio da fatoração, em que **escolhemos os fatores comuns de menor expoente**. Observe o MDC de 20 e 30 a partir desse método.

$$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5$$

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = \mathbf{2} \cdot 3 \cdot 5$$

$$MDC(20, 30) = \mathbf{2 \cdot 5 = 10}$$

Exemplo:

Vamos determinar o MMC e o MDC entre os números 80 e 120.

MMC

$$80 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = \mathbf{2^4 \cdot 5}$$

$$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = \mathbf{2^3 \cdot 3 \cdot 5}$$

$$MMC(80, 120) = \mathbf{2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240}$$

$$MDC(80, 120) = \mathbf{2^3 \cdot 5 = 40}$$

Exemplo:

Encontre o MDC entre 120 e 150.

Primeiro encontraremos a decomposição em fatores primos de cada um desses números:

150	2	120	2
75	3	60	2
25	5	30	2
5	5	15	3
1	5	5	5
	2 · 3 · 5 ²	1	2 ³ · 3 · 5

Agora vamos encontrar os fatores que são comuns aos dois e calcular o produto entre eles.

Note que, em 150, aparece o fator 2 e, em 120, aparece 2³. Nesse caso, sempre escolhemos o fator com o menor expoente, ou seja, 2 é um fator em comum. O mesmo acontece com o 3 e com o 5.

MDC (150, 120) = 2 · 3 · 5 = 30"

Decomposição simultânea

Semelhantemente ao método anterior, a ideia é encontrar os fatores em comum aos dois números quando realizamos a decomposição; porém, faremos essa decomposição dos dois números ao mesmo tempo.

150	120	2
75	60	2
75	30	2
75	15	3
25	5	5
5	1	5
1	1	2 · 3 · 5 = 30

Exercício

Em uma confecção, há rolos de malha com medidas de 120, 180 e 240 centímetros. Será preciso cortar o tecido em pedaços iguais, maiores possíveis e, não sobrar nada. Qual será o comprimento máximo de cada tira de malha?

- a) 20
- b) 30
- c) 50
- d) 60
- e) 80

Gabarito: d

QUESTÕES

01) Dois irmãos moram juntos e costumam fazer longas viagens em seus trabalhos. João é maquinista de trem e fica sempre 20 dias fora de casa a cada viagem, folgando no vigésimo primeiro dia. Antônio é piloto de avião e ausenta-se de sua casa por oito dias, tendo o nono dia para descansar. Se ambos os irmãos iniciaram uma viagem hoje, daqui a quantos dias eles poderão encontrar-se em casa?

- a) 61
- b) 62
- c) 63
- d) 64
- e) 65

02) No primeiro dia de aula de uma escola, a professora de Matemática Ana reuniu todos os alunos do 6º ao 9º ano no pátio. Com a ajuda dos demais professores, Ana contabilizou que havia 532 meninas e 456 meninos. Ao propor uma dinâmica, a professora pediu aos alunos que se dividissem na maior quantidade de grupos possível. Os grupos deveriam ter a mesma quantidade de pessoas e a mesma quantidade de meninos e de meninas em ambos. Qual é o total de alunos em cada grupo?

- a) 6
- b) 7
- c) 12
- d) 13
- e) 15

03)(UEL) Três ciclistas percorrem um circuito saindo todos ao mesmo tempo, do mesmo ponto, e com o mesmo sentido. O primeiro faz o percurso em 40 s, o segundo em 36 s e o terceiro em 30 s. Com base nessas informações, depois de quanto tempo os três ciclistas se reencontrarão novamente no ponto de partida, pela primeira vez, e quantas voltas terá dado o primeiro, o segundo e o terceiro ciclistas, respectivamente?

- a) 5 minutos, 10 voltas, 11 voltas e 13 voltas.
- b) 6 minutos, 9 voltas, 10 voltas e 12 voltas.
- c) 7 minutos, 10 voltas, 11 voltas e 12 voltas.
- d) 8 minutos, 8 voltas, 9 voltas e 10 voltas.
- e) 9 minutos, 9 voltas, 11 voltas e 12 voltas.

04)(UFPE) Uma escola deverá distribuir um total de 1260 bolas de gude amarelas e 9072 bolas de gude verdes entre alguns de seus alunos. Cada aluno contemplado receberá o mesmo número de bolas amarelas e o mesmo número de bolas verdes. Se a escola possui 300 alunos e o maior número possível de alunos da escola deverá ser contemplado, qual o total de bolas que cada aluno contemplado receberá?

- a) 38
- b) 39
- c) 40
- d) 41
- e) 42

Gabarito

1.c 2.d 3.b 4.d

REFERÊNCIAS

LUIZ, Robson. "Múltiplos e divisores"; Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/multiplos-divisores.htm>. Acesso em 20 de dezembro de 2022.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. "Cálculo do MMC e do MDC"; Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/calculo-mmc-mdc.htm>. Acesso em 21 de dezembro de 2022.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. "Máximo divisor comum (MDC)"; Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/maximo-divisor-comum.htm>. Acesso em 21 de dezembro de 2022.

"Exercícios sobre regra prática para calcular MMC e MDC". Mundo Educação. Disponível em: <https://exercicios.mundoeducacao.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-regra-pratica-para-calcular-mmc-mdc.htm#questao-1312> Acesso em 21 de dezembro de 2022.