PED

Projeto Educação Dav

Aula 02 - Números Racionais

Índice

Números Racionais (Q)

Os números racionais são uma ampliação do conjunto dos números inteiros, então, além dos números inteiros, foram acrescentadas todas as frações. O conjunto dos números racionais é representado por:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a \in \mathbb{Z},\ e\ b \in \mathbb{Z}^*\}$$

O que essa representação diz é que um número é racional se ele pode ser representado como a fração a sobre b, tal que a é um número inteiro e b é um número inteiro diferente de zero. Mas se formos definir os números racionais com menos rigor, podemos dizer o seguinte:

Números racionais são todos os números que podem ser representados como uma fração.

Exemplos de números Racionais:

- Os **números inteiros**, por exemplo: -10, 7, 0;
- Os **números decimais exatos**, por exemplo: 1,25; 0,1; 3,1415;
- As **dízimas periódicas simples**, por exemplo: 1,424242…;
- As **dízimas periódicas compostas**, por exemplo: 1,0288888…

Não são números racionais:

- As **dízimas não periódicas**, por exemplo: 4,1239489201…;
- As **raízes não exatas**, por exemplo: $\sqrt{2}$; ;
- A **raiz quadrada de números negativos**, por exemplo: $\sqrt{-25}$.

Observação: A existência de números não racionais faz com que surjam outros conjuntos, como o dos números irracionais e o dos números complexos.

Representação dos números Racionais

Sabendo que, os números racionais são representados através da divisão de dois números inteiros, então, **podemos representa-los através de uma fração**, ou seja, todos os exemplos de números racionais citados anteriormente **(os números inteiros, números decimais exatos, dízimas periódicas simples e dízimas periódicas compostas)** podem ser representados através de fração.

Números inteiros:

$$2 = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{20}{10}$$

Decimais exatos:

Nos números decimais exatos é importante observar que chamamos de parte decimal a parte que vem depois da vírgula, ou seja, no número **2,5** a parte decimal é o 5, assim como no número **0,2** a parte decimal é o 2. Quando há apenas um número na parte decimal escrevemos esse número sobre **10** em forma de fração, quando há dois números na parte decimal escrevemos esses números sobre **100**, ou seja, a quantidade de números na parte decimal influencia diretamente no denominador que aumenta seus zeros conforme a parte decimal possui mais números.

$$0{,}2 = \frac{2}{10} \qquad 0{,}5 = \frac{5}{10} \qquad 0{,}52 = \frac{52}{100}$$

Dízimas periódicas:

São dois os tipos de dízimas periódicas, a **simples** e a **composta**. O processo para encontrar suas representações em forma de fração não é simples mas apresenta um padrão que torna possível essa transformação, essa representação em forma de fração de uma dízima periódica é chamada de **Fração geratriz**. Nas dízimas periódicas o primeiro passo a se tomar é identificar a **parte inteira** e o **período, que é a parte decimal que se repete**.

Dízimas periódicas simples:

Na dízima periódica simples na sua parte decimal existe **apenas** a parte que se repete que é o que chamamos de período.

Ex: **9,25252525...**

Parte inteira é o **9**, o período é igual **25**.

6,37373737...

Parte inteira é o **6**, o período é igual **37**.

1,278278278278...

Parte inteira é o **1**, o período é igual **278**.

A regra para encontrar fração geratriz de uma dízima periódica simples é feita em três passos:

1º passo: juntar sua parte inteira com seu período sem a vírgula

2º passo: subtrair o valor encontrado no 1º passo pela parte inteira

3º passo: dividir o valor encontrado no 2º passo **99...**, **a quantidade de noves é igual a quantidade de números presentes no período**, ou seja, se o período apresenta dois números divide por 99, se o período tem três números divide por 999 e assim sucessivamente.

Exemplo 1: Vamos fazer com a dízima periódica **9,2525252525...**

Sua parte inteira é igual **9** e seu período é igual **25**

1º passo: juntar sua parte inteira com seu período sem a vírgula = **925**

2º passo: subtrair pela parte inteira = **925 – 9 = 916**

3º passo: dividir por 99 = $\frac{916}{99}$ **,** então**: 9,25252525... =** $\frac{916}{99}$

Exemplo 2: Vamos fazer com a dízima periódica **6,373737373737...**

Sua parte inteira é igual **6** e seu período é igual **37**

1º passo: juntar sua parte inteira com seu período sem a vírgula = **637**

2º passo: subtrair pela parte inteira = **637 – 6 = 631**

3º passo: dividir por 99 = $\frac{631}{99}$, então: **6,3737373737... =** $\frac{631}{99}$

Exemplo 3: Vamos fazer com a dízima periódica **1,278278278...**

Sua parte inteira é igual **1** e seu período é igual **278**

1º passo: juntar sua parte inteira com seu período sem a vírgula = **1278**

2º passo: subtrair pela parte inteira = **1278 – 1 = 1277**

3º passo: dividir por 999 = $\frac{1277}{999}$, então: 1,278278278... = $\frac{1277}{999}$

Dízimas periódicas composta:

Na dízima periódica composta em sua parte decimal existe uma **parte que não se repete que é a parte não periódica e também a parte que se repete que é o período.**

Ex: **5,126262626...**

A parte inteira é igual a **5**, a parte não periódica é igual a **1** e o período e igual a **26**.

Ex: **8,735353535...**

A parte inteira é igual a **8**, a parte não periódica é igual a **7** e o período e igual a **35**.

A regra para encontrar fração geratriz de uma dízima periódica composta é feita em três passos:

1º passo: juntar sua parte inteira com sua parte não periódica e seu período sem a vírgula;

2º passo: subtrair o valor encontrado no 1º passo pela parte inteira com sua parte não periódica

3º passo: dividir o valor encontrado no 2º passo **990...**, **a quantidade de noves é igual a quantidade de números presentes no período e acrescenta a esses noves um número zero para cada número presente na parte não periódica**, ou seja, se o período apresenta dois números divide por 99, se o período tem três números divide por 999 e assim sucessivamente e **se a parte não periódica apresenta um número acrescenta um zero, 0, junto aos noves no denominador se apresenta dois números acrescenta dois zeros, 00, junto aos noves no denominador**.

Exemplo 1: Vamos fazer com a dízima periódica **5,1262626262626...**

Sua parte inteira é igual **5**, sua parte não periódica é igual a **1** e seu período é igual **26**

1º passo: juntar sua parte inteira com sua parte não periódica e seu período sem a vírgula = **5126**

2º passo: subtrair o valor encontrado no 1º passo pela junção da parte inteira com a parte não periódica = **5126 - 51 = 5075**

3º passo: dividir o valor encontrado no 2º passo por 990 = $\frac{5075}{990}$, então:

5,12626262626... = $\frac{5075}{990}$

Exemplo 2: Vamos fazer com a dízima periódica **2,415252525252...**

Sua parte inteira é igual **2**, sua parte não periódica é igual a **41** e seu período é igual **52**

1º passo: juntar sua parte inteira com sua parte não periódica e seu período sem a vírgula = **24152**

2º passo: subtrair o valor encontrado no 1º passo pela junção da parte inteira com a parte não periódica = **24152 - 241 = 23911**

3º passo: dividir o valor encontrado no 2º passo por 9900 = $\frac{23911}{9900}$, então:

2,415252525252... = $\frac{5075}{990}$

Exercício

Encontre a fração geratriz da dízima periódica 4,27272727...?

a) $\frac{427}{100}$

b) $\frac{423}{99}$

c) $\frac{423}{100}$

d) $\frac{427}{99}$

Gabarito: b

Exercício

Qual a fração geratriz da dízima periódica 5,1364646464...?

a) $\frac{50851}{9900}$

b) $\frac{5146}{\mathbf{99}}$

c) $\frac{5136}{100}$

d) $\frac{5095}{999}$

Gabarito: a

Operações com números racionais

As operações de **adição, subtração, multiplicação e divisão de frações apresentam algumas regras que precisam ser memorizadas**, pois são de suma importância na resolução das questões de diversos temas da matemática, as duas primeiras operações citadas (adição e subtração) necessitam de um pouco mais de atenção pois são operações que variam de acordo com as características dos denominadores.

Adição e subtração

A operação de adição e subtração de frações e feita de duas formas, que são: quando possuem **denominadores iguais** ou quando possuem **denominadores diferentes**.

Quando possuem **denominadores iguais** o processo é simples, é só **conservar os denominadores e somar ou subtrair os numeradores**.

Ex: $\mathbf{\frac{4}{5}} + \mathbf{\frac{6}{5}} = \frac{4+6}{5} = \frac{10}{5} = 2$

Ex: $\mathbf{\frac{8}{7}} - \mathbf{\frac{6}{7}} = \frac{8-6}{7} = \frac{2}{7}$

Quando possuem **denominadores diferentes** o processo é mais complexo, **é necessário achar um denominador comum através do mmc dos denominadores, depois dividir esse denominador comum pelo antigo denominador e multiplicar pelo numerador.**

$$x\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{6+9+10}{12} = \frac{25}{12}\right.$$

2 , 4 , 6	2
1 , 2 , 3	2
1 , 1 , 3	3
1 , 1 , 1	2x2x3=12

Ex: $\frac{4}{5} + \frac{1}{6}$

1º passo: Achar um denominador comum através do mmc dos denominadores **5** e **6**.

5,6	2
5,3	3
5,1	5
1,1	2.3.5 = 30

2º passo: Dividir esse denominador comum, **30**, pelos antigos denominadores (**5** e **6**) e multiplicar pelos seus respectivos numeradores.

30 : 5 = 6x4 = 20

30 : 6 = 5x1 = 5

Assim teremos a seguinte fração:

$$\frac{20}{30} + \frac{5}{30} = \frac{25}{30}$$

Multiplicação de Frações

A **multiplicação de frações** talvez seja a operação mais simples entre as outras operações com frações pois consiste apenas em **multiplicar numerador com numerador e multiplicar denominador com denominador**.

$$a)\ \frac{2}{3} x \frac{5}{7} = \frac{2x5}{3x7} = \frac{10}{21}$$

$$b)\ \frac{6}{11} x \frac{9}{5} = \frac{6x9}{11x5} = \frac{54}{55}$$

$$c)\ \frac{13}{5} x \frac{7}{2} = \frac{13x7}{5x2} = \frac{91}{10}$$

Divisão de Frações

A divisão de frações é um processo simples, porém, exige bastante atenção e precisa ser memorizado pois é um processo que ocorre somente na divisão. A regra é basicamente a seguinte: quando houver a divisão entre duas frações, **conserva-se a primeira fração e multiplica pelo inverso da segunda fração**.

$$\frac{2}{3} \div \frac{7}{5} = \frac{2x5}{3x7} = \frac{10}{21}$$

Exemplos:

$$a)\ \frac{9}{2} \div \frac{7}{3} = \frac{9}{2} x \frac{3}{7} = \frac{27}{14}$$

$$b)\ \frac{8}{3} : \frac{5}{9} = \frac{8}{3} x \frac{9}{5} = \frac{72}{15}$$

$$c)\ \frac{12}{5} \div \frac{6}{7} = \frac{12}{5} x \frac{7}{6} = \frac{84}{30}$$

Redução de Frações

Em algumas frações não é possível fazer a divisão exata do numerador pelo denominador, porém essas frações podem ser reduzidas, é o que chamamos de **frações redutíveis**, essa redução ocorre até não haver mais a possibilidade de redução, é quando chegamos a uma **fração irredutível**.

A redução ocorre quando o numerador e o denominador podem ser ainda divididos por um mesmo valor, um divisor comum:

$$\frac{8}{20} \overset{\div 2}{=} \frac{4}{10} \overset{\div 2}{=} \frac{2}{5} \longrightarrow \text{FRAÇÃO IRREDUTÍVEL}$$

No exemplo acima podemos observar a fração $\frac{8}{20}$ no qual não é possível dividir o numerador pelo denominador, porém, é possível reduzir essa fração dividindo os dois valores por um divisor comum, no caso o 2. O valor obtido foi a fração $\frac{4}{10}$ que também é redutível pelo mesmo divisor comum, com isso foi obtido a fração irredutível $\frac{2}{5}$.

$$\frac{12}{42} \overset{:2}{=} \frac{6}{21} \overset{:3}{=} \frac{2}{7}$$

$$\frac{24}{36} = \frac{24:2}{36:2} = \frac{12:2}{18:2} = \frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3}$$

QUESTÕES

1) O que é uma DÍZIMA PERIÓDICA?
   a) É um número que, escrito na forma decimal, apresenta um número ou conjunto de números que se repetem infinitamente
   b) É um número que, quando dividido por zero, resulta em outros números inteiros.
   c) É qualquer número não inteiro que apresenta infinitas casas decimais.
   d) É um número que pode ser escrito na forma de algarismos romanos, sem perda de significado ou alteração de quantidade

2) Juliana aprendeu com sua professora o procedimento para transformar uma dízima periódica em uma fração irredutível. Ao aplicar esse procedimento à dízima periódica $0,0\overline{63}$, a fração irredutível que Juliana encontrou foi:
   a) 7/110
   b) 63/110
   c) 63/1000
   d) 7/1000

3) Dentre as frações abaixo, qual corresponde ao número 1,2666...?
   a) 63/50
   b) 19/15
   c) 17/12
   d) 15/13
   e) 19/17

4) A fração geratriz da dízima periódica 2,3444... é:
   a) 211/90
   b) 2/9
   c) 197/41
   d) Nenhuma das alternativas.

5) Considere a dízima periódica 3,2757575 ... e então indique nas alternativas sua fração geratriz correspondente.
   a) 1081/330
   b) 327,75/75
   c) 10327/217
   d) $\boxed{x \cos}$ 12/$\boxed{y \text{ sen}}$ 23

6) A representação decimal da fração 238/10000é:
   a) 0,0238
   b) 0,238
   c) 2,38
   d) 0,00238
   e) 0,000238

7) Após se aposentar, um professor doou um quarto de seus livros para a biblioteca da cidade e doou 289 livros para cada uma das 3 escolas que ele lecionou, e ainda ficou com um número de livros igual a um sétimo do que ele tinha. O número de livros doados para a biblioteca foi
   a) 182.
   b) 224.
   c) 294.
   d) 315.
   e) 357.

8) Um Professor de Matemática dividiu dois números inteiros positivos em sua calculadora e obteve como resultado a dízima periódica 0,151515…. Se a divisão tivesse sido feita na outra ordem, ou seja, o maior dos dois números dividido pelo menor deles, o resultado obtido por este professor seria:
   a) 0,66
   b) 0,666…
   c) 6,66
   d) 6,666…
   e) 6,6

9) Cláudio está pintando o muro de uma determinada escola. No primeiro dia ele pintou ⅕ do muro e, no dia seguinte, pintou o dobro do dia anterior. Que parte do muro ainda falta para Cláudio pintar?

a) 1/5
b) 2/5
c) 3/5
d) 4/5
e) 5/5

10) Maria comprou 21 metros de corda. Depois comprou 33 metros do mesmo tipo de corda, pagando R$ 9,60 a mais do que pagou na primeira compra. Se, nas duas compras, cada metro de corda custou a mesma quantia, quanto Maria pagou na primeira compra?

a) R$ 6,10
b) R$ 16,80
c) R$ 19,20
d) R$ 26,40
e) R$ 36,40

11) Se a = 0,44444... e b = 5/9. Então 81 vezes o quadrado da diferença entre (a – b) é igual a:

a) 0,81
b) 1
c) 8,1
d) - 1
e) - 81

Gabarito

1.a 2.a 3.b 4.a 5.a 6.a 7.e 8.e 9.b 10.b 11.b

REFERÊNCIAS

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. "Números racionais"; Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/numeros-racionais.htm. Acesso em 27 de dezembro de 2022.