Devoir maison - Licence L2 - GLMA 499

par Richard Gomez

Février 2012

Une autre manière de définir le rotationnel d'un champs vectoriel

Ce travail n'est pas obligatoire. Ceux qui le désirent pourront le faire sur une feuille double grand format et me le rendre lundi 27 février.

1. Soient $u \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. On définit $v \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$ en posant
$$\operatorname*{mat}_{\mathcal{B}} v = {}^t\Big(\operatorname*{mat}_{\mathcal{B}} u\Big)$$
(autrement dit : en transposant la matrice de u dans une base orthonormée, on obtient un autre endomorphisme). Montrer que v ne dépend pas du choix de $\mathcal{B}$. L'endomorphisme v est appelé transposé de u.

2. Montrer que ${}^tu$ est le seul endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant
$$\forall a, b \in \mathbb{R}^3, \langle u(a), b\rangle = \langle a, {}^tu(b)\rangle$$

3. On dit que $u \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$ est antisymétrique si $u + {}^tu = 0$. Que peut-on dire de la matrice dans une base orthonormée d'un endomorphisme antisymétrique ?

4. Soit $a \in \mathbb{R}^3$. Montrer que l'application $a \wedge \bullet$ définie par
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ b & \longmapsto & a \wedge b \end{array}$$
est linéaire et antisymétrique. On note $\mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$ l'ensemble des endomorphismes antisymétriques de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$ est un espace vectoriel et que
$$\begin{array}{rcrcl} \Phi & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathcal{A}(\mathbb{R}^3) \\ & & a & \longmapsto & a \wedge b \end{array}$$
est un isomorphisme.

5. On définit $u \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$ par sa matrice dans une base orthonormée $\mathcal{B}$:
$$\operatorname*{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$$
Déterminer $\Phi^{-1}(u)$.

6. Soit $\mathcal{B} = (i,\ j,\ k)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. On pose $a = pi + qj + rk$. Calculer l'endomorphisme $\Phi(a)$.

7. Montrer que si $u \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$ alors $u - {}^tu \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$.

8. Soit $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champs de vecteurs dérivable. Pour tout $m \in \mathbb{R}^3$, on note $F'(m)$ la dérivée de F en m. On rappelle que $F'(m) \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$. Montrer que le rotationnel de F en m est l'antécédent de $F'(m) - {}^tF'(m)$ par Φ, autrement dit :
$$\operatorname{rot} F(m) = \Phi^{-1}(F'(m) - {}^tF'(m))$$