Teoria współbieżności

Laboratorium 6

Zastosowanie teorii śladów do szeregowania wątków współbieżnej eliminacji Gaussa

Przemysław Roman

20.12.2022

1 Teoria

1.1 Przyjęte oznaczenia

- N - rozmiar macierzy (zakładamy macierze N x (N + 1), gdzie dodatkowa kolumna jest wektorem wyrazów wolnych)
- $M_{i,j}$ - komórka macierzy znajdująca się w i-tym wierszu, j-tej kolumnie
- indeksowanie macierzy: $i \in [0, N-1], j \in [0, N]$
- lewy, górny róg ma indeksy $(i = 0, j = 0)$

1.2 Niepodzielne zadania obliczeniowe

Wyróżniamy 3 rodzaje działań:

1. $A_{k,i} : \frac{M_{k,i}}{M_{i,i}} \to a_{k,i}$ - dzielenie; wyznaczenie mnożnika do wyzerowania komórki $M_{k,i}$
2. $B_{k,j,i} : a_{k,i} * M_{i,j} \to b_{k,j,i}$ - przemnożenie; wynik będzie odejmowany od $M_{k,j}$
3. $C_{k,j,i} : M_{k,j} - b_{k,j,i} \to M_{k,j}$ - odejmowanie; otrzymujemy nową wartość $M_{k,j}$

1.3 Alfabet w sensie teorii śladów

$$\Sigma = \{A_{k,i} \mid 0 \leqslant i < N-1, i < k < N\} \cup$$
$$\{B_{k,j,i} \mid 0 \leqslant i < N-1, i \leqslant j \leqslant N, i < k < N\} \cup$$
$$\{C_{k,j,i} \mid 0 \leqslant i < N-1, i \leqslant j \leqslant N, i < k < N\}$$

1.4 Relacja (nie)zależności

1. Przed przemnożeniem musimy wyznaczyć mnożnik.
   $B_{k,j,i}$ używa $a_{k,i}$, wyznaczanego przez $A_{k,i}$.

   $$D_1 = \{(A, B) \mid A = A_{k,i}, B = B_{k,j,i} \in \Sigma\}$$

2. Przed odjęciem musimy przemnożyć.
   $C_{k,j,i}$ używa $b_{k,j,i}$, wyznaczanego przez $B_{k,j,i}$.

   $$D_2 = \{(B, C) \mid B = B_{k,j,i}, C = C_{k,j,i} \in \Sigma\}$$

3. Wykonując $C_{k,j,i''}$ chcemy otrzymać aktualne $M_{k,j}$,
   które jest modyfikowane przez wcześniejsze operacje C dla tej komórki - $C_{k,j,i'}$.

   $$D_3 = \{(C', C'') \mid C' = C_{k,j,i'}, C'' = C_{k,j,i''} \in \Sigma \wedge i' < i''\}$$

4. $k_c = i_b \implies C_{k_c,j,i_c} = C_{i_b,j,i_c}$, które modyfikuje $M_{i_b,j}$ wykorzystywane przez B_{k_b,j,i_b}.
$$D_4 = \{(C, B) \mid C = C_{k_c,j,i_c}, B = B_{k_b,j,i_b} \in \Sigma \wedge k_c = i_b\}$$
5. $(j_c = i_a \wedge (k_c = i_a \vee k_c = k_a)) \implies C_{k_c,j_c,i_c} = C_{i_a,i_a,i_c} \vee C_{i_a,k_a,i_c}$, które modyfikują odpowiednio $M_{i_a,i_a} \vee M_{i_a,k_a}$ wykorzystywane przez A_{k_a,i_a}.
$$D_5 = \{(C, A) \mid C = C_{k_c,j_c,i_c}, A = A_{k_a,i_a} \in \Sigma \wedge j_c = i_a \wedge (k_c = i_a \vee k_c = k_a)\}$$

Relację zależności określamy jako:
$$D = sym((\bigcup_{i=1}^{5} D_i)^+) \cup I_\Sigma$$
Natomiast relację niezależności wyznaczamy wzorem:
$$I = \Sigma^2 - D$$

1.5 Ogólna postać słowa w sensie teorii śladów

Słowo redukujące macierz do macierzy trójkątnej górnej można wygenerować poniższym kodem zapisanym w Pythonie.

```
def generate_word(N):
    for i in range(N):
        for k in range(i + 1, N):
            print("A_{" + f"{k},{i}" + "}", end=", ")
            for j in range(i, N + 1):
                print("B_{" + f"{k},{j},{i}" + "}", end=", ")
                print("C_{" + f"{k},{j},{i}" + "}", end=", ")
```

1.6 Ogólna postać klas Foaty

Dla uproszczenia zapisu wprowadzamy pomocnicze zbiory,
$$S_{A_i} = \{A_{k,i} \mid i < k < N\}$$
$$S_{B_i} = \{B_{k,j,i} \mid i < k < N \wedge 0 < j \leqslant N\}$$
$$S_{C_i} = \{C_{k,j,i} \mid i < k < N \wedge 0 < j \leqslant N\}$$
z których tworzymy klasy Foaty grupowane po 3.
$$F_i = [S_{A_i}]_{\equiv_I^+} \frown [S_{B_i}]_{\equiv_I^+} \frown [S_{C_i}]_{\equiv_I^+}$$
Finalnie wyznaczamy ogólną postać klas Foaty:
$$[F_0]_{\equiv_I^+} \frown [F_1]_{\equiv_I^+} \frown [F_2]_{\equiv_I^+} \frown_{\dots} [F_{N-1}]_{\equiv_I^+}$$

2 Przykład

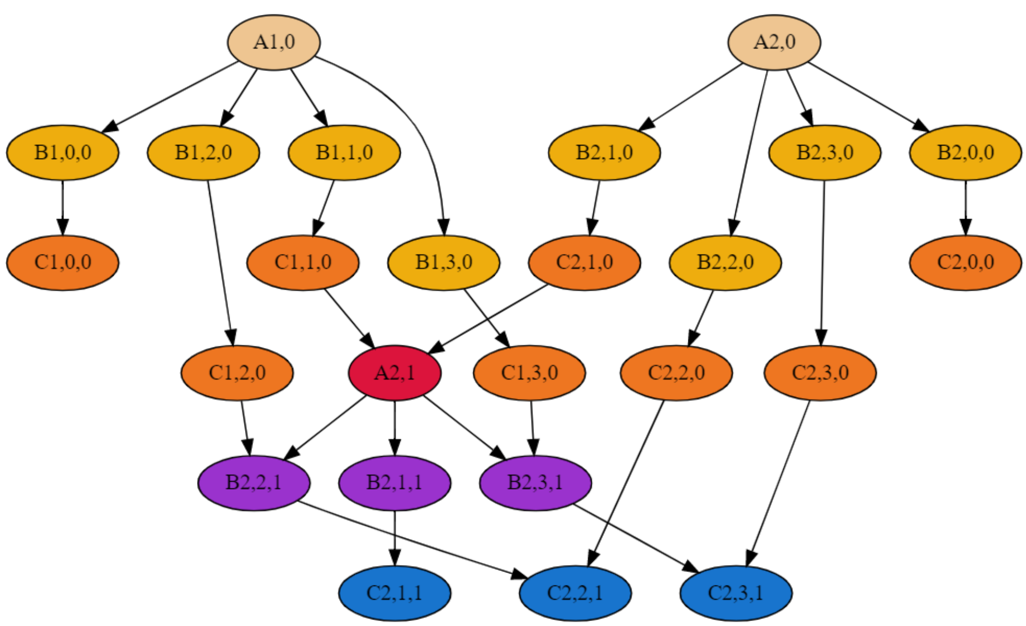
2.1 Przykładowa macierz

$M_{0,0}$	$M_{0,1}$	$M_{0,2}$	$M_{0,3}$
$M_{1,0}$	$M_{1,1}$	$M_{1,2}$	$M_{1,3}$
$M_{2,0}$	$M_{2,1}$	$M_{2,2}$	$M_{2,3}$

2.2 Słowo w sensie teorii śladów

$$A_{1,0}, B_{1,0,0}, C_{1,0,0}, B_{1,1,0}, C_{1,1,0}, B_{1,2,0},$$
$$C_{1,2,0}, B_{1,3,0}, C_{1,3,0}, A_{2,0}, B_{2,0,0}, C_{2,0,0}, B_{2,1,0},$$
$$C_{2,1,0}, B_{2,2,0}, C_{2,2,0}, B_{2,3,0}, C_{2,3,0}, A_{2,1}, B_{2,1,1},$$
$$C_{2,1,1}, B_{2,2,1}, C_{2,2,1}, B_{2,3,1}, C_{2,3,1}$$

2.3 Graf Diekerta



2.4 Klasy Foaty

$$
\begin{gathered}
[\{A_{1,0}, A_{2,0}\}]_{\equiv_I^+} \\
\frown[\{B_{1,0,0}, B_{1,1,0}, B_{1,2,0}, B_{1,3,0}, B_{2,0,0}, B_{2,1,0}, B_{2,2,0}, B_{2,3,0}\}]_{\equiv_I^+} \\
\frown[\{C_{1,0,0}, C_{1,1,0}, C_{1,2,0}, C_{1,3,0}, C_{2,0,0}, C_{2,1,0}, C_{2,2,0}, C_{2,3,0}\}]_{\equiv_I^+} \\
\frown[\{A_{2,1}\}]_{\equiv_I^+} \\
\frown[\{B_{2,1,1}, B_{2,2,1}, B_{2,3,1}\}]_{\equiv_I^+} \\
\frown[\{C_{2,1,1}, C_{2,2,1}, C_{2,3,1}\}]_{\equiv_I^+}
\end{gathered}
$$

Albo prościej, używając zapisu przedstawionego w podsekcji Ogólna postać klas Foaty:

$$[F_0]_{\equiv_I^+} \frown [F_1]_{\equiv_I^+}$$