



Tecnun
Universidad
de Navarra

Proyecto Fin de Grado

INGENIERÍA ELÉCTRICA

Diseño y desarrollo de una lanzadera electromagnética

Pedro José Romero Gombau

Donostia-San Sebastián, mayo 2024

Po Manuel Lardizabal, 13. 20018 Donostia-San Sebastián, Gipuzkoa Tel. 943 219 877 · Fax 943
311 442 · www.tecnun.es

Resumen

Este trabajo de fin de grado trata acerca del diseño y la implementación de una lanzadora electromagnética, centrándose en el uso de ANSYS Maxwell para la simulación y el desarrollo de un prototipo funcional. Si bien el campo de la tecnología de las lanzadoras electromagnéticas está bien establecido, el objetivo principal de este proyecto es el diseño de una práctica universitaria en la que los alumnos dispongan de las fórmulas necesarias para optimizar la geometría y alimentación de la bobina y logren una mayor velocidad y fuerza de lanzamiento del proyectil. Los métodos empleados incluyen la creación de geometría en ANSYS Maxwell y simulaciones transitorias para analizar el comportamiento de la bobina, con énfasis en los parámetros dinámicos del proyectil. Además, se realizarán cálculos analíticos manuales para derivar relaciones electromagnéticas que rigen la interacción entre la bobina y el proyectil. En resumen, esta tesis presenta una exploración exhaustiva de las técnicas de diseño y simulación de una lanzadera electromagnética, con un enfoque en el aprendizaje de ANSYS Maxwell y la optimización de la geometría de la bobina para mejorar el rendimiento del proyectil.

Palabras clave:Lanzadera electromagnética, ANSYS Maxwell, Simulación, Prototipo, Optimización.

Abstract

This undergraduate thesis focuses on the design and implementation of an electromagnetic launcher, emphasizing the use of ANSYS Maxwell for simulation and the development of a functional prototype. Although the field of electromagnetic launcher technology is well-established, the primary objective of this project is to design a university practical exercise in which students have the necessary formulas to optimize the geometry and power supply of the coil, achieving higher speed and force in projectile launch. The methods employed include creating geometry in ANSYS Maxwell and transient simulations to analyze the coil's behavior, with an emphasis on the dynamic parameters of the projectile. Additionally, manual analytical calculations will be conducted to derive electromagnetic relationships governing the interaction between the coil and the projectile. In summary, this thesis presents a comprehensive exploration of the design and simulation techniques for an electromagnetic launcher, focusing on learning ANSYS Maxwell and optimizing coil geometry to improve projectile performance.

Key words:Coilgun, ANSYS Maxwell, Simulation, Prototype, Optimization.

Índice

1. Introducción	8
1.1. Objetivos y métodos	9
1.2. Motivación	10
2. Marco teórico	11
3. Desarrollo	17
3.1. Desarrollo teórico	17
3.2. Simulaciones	22
3.2.1. Geometría	22
3.2.2. Simulaciones instantáneas	23
3.2.3. Simulaciones transitorias	25
3.3. Prototipo	29
3.3.1. Materiales	30
3.3.2. Sensores de movimiento	30
3.3.3. Circuito electrónico	31
3.3.4. Bobina	32
3.4. Desarrollo de la práctica	33
4. Discusión y conclusiones	34

Índice de figuras

1.	Cañón de Gauss. Imagen tomada de http://www.coilgun.eclipse.co.uk/	8
2.	Ecuaciones de Maxwell.[7]	11
3.	Visualización del campo magnético de un conductor. Elaboración propia.	12
4.	Curva \vec{C} para la cual realizaremos los cálculos. Imagen tomada de https://artpictures.club/autumn2023.html	12
5.	Visualización del campo magnético de una bobina energizada. Imagen tomada de https://ece.northeastern.edu/fac-ece/nian/mom/electromagnets.html	14
6.	Esquema cualitativo de la lanzadera electromagnética. Elaboración propia.	14
7.	Esquema de una bobina con un core ferromagnético y su circuito magnético equivalente. Elaboración propia.	16
8.	Esquema geométrico del sistema. Elaboración propia.	18
9.	Secciones del sistema con una vista de planta. Elaboración propia.	18
10.	Círculo magnético del sistema. Elaboración propia.	19
11.	Aplicación de cálculos de MATLAB. Elaboración propia.	20
12.	Reluctancias vs x. Elaboración propia.	20
13.	Inducción vs x. Elaboración propia.	21
14.	Fuerza vs x. Elaboración propia.	21
15.	Geometría de la barra y bobina en 2D. Elaboración propia.	22
16.	Mallado de la barra y bobina en 2D. Elaboración propia.	23
17.	Detalle del mallado de la barra y bobina en 2D. Elaboración propia.	23
18.	Visualización de los campos magnéticos con la bobina energizada y $x = 2/10 * h_c$. Elaboración propia.	24
19.	Visualización de los campos magnéticos dentro del solenoide. Elaboración propia.	24
20.	Fuerza (verde) y corriente (rojo) vs tiempo en la configuración 1. Elaboración propia.	25
21.	Posición (verde) y velocidad (rojo) vs tiempo en la configuración 1. Elaboración propia.	25
22.	Fuerza (rojo) y corriente (verde) vs tiempo en la configuración 2. Elaboración propia.	26
23.	Posición (verde) y velocidad (rojo) vs tiempo en la configuración 2. Elaboración propia.	26
24.	Fuerza (rojo) y corriente (verde) vs tiempo en la configuración 3. Elaboración propia.	27
25.	Posición (verde) y velocidad (rojo) vs tiempo en la configuración 3. Elaboración propia.	27
26.	Esquema conexiones del MODELO SENSORES . Elaboración propia.	30
27.	Conexión del interrupor de disparo. Elaboración propia.	31
28.	Colocación del sensor. Elaboración propia.	32

Índice de tablas

1. Fuerzas de atracción magnética en los diferentes ejes del espacio. Elaboración propia.	24
---	----

1. Introducción

En el ámbito de la ingeniería y la física aplicada, las *coilguns*, también conocidas como *lanzaderas electromagnéticas*, representan una tecnología de creciente interés debido a su potencial en aplicaciones tanto industriales como militares. El concepto de las lanzaderas electromagnéticas se origina en el siglo XIX, cuando se empiezan a explorar las propiedades del electromagnetismo y sus potenciales aplicaciones. Uno de los nombres con los que uno se puede referir a esta tecnología es *Cañones de Gauss*, debido a que fue el matemático Carl Friedrich Gauss quién desarrolló en esta época las ecuaciones que regían el comportamiento del dispositivo. Sin embargo, no es hasta los tempranos años del siglo XX cuando se construye la primera lanzadera funcional, producto del ingenio del científico noruego Kristian Birkeland.[6]

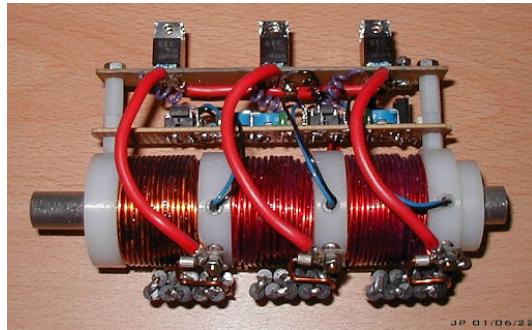


Figura 1: Cañón de Gauss. Imagen tomada de <http://www.coilgun.eclipse.co.uk/>

Las principales aplicaciones de las lanzaderas electromagnéticas se encuentran en el ámbito militar, donde se utilizan para el lanzamiento de proyectiles a alta velocidad sin la necesidad de explosivos químicos. Esta tecnología ofrece ventajas significativas, como la reducción del desgaste mecánico y la capacidad de ajustar la fuerza de lanzamiento con precisión. Además, en el sector aeroespacial, las lanzaderas electromagnéticas se consideran una alternativa prometedora para el lanzamiento de satélites y otros objetos al espacio, debido a su eficiencia energética y menor impacto ambiental en comparación con los cohetes tradicionales. También encontramos varias aplicaciones en la industria, como por ejemplo en procesos de manufactura que requieren la propulsión de materiales a altas velocidades. También se están explorando aplicaciones en el campo de la medicina, como en dispositivos de resonancia magnética y aceleradores de partículas para tratamientos médicos avanzados.

[5]

Para finalizar con la introducción, se presentará brevemente el funcionamiento básico de estos cañones. El objetivo físico de una lanzadera electromagnética es la creación de un campo magnético mediante el paso de una corriente eléctrica a través de una bobina de cobre. Cuando se aplica corriente a la bobina, se genera un campo magnético que ejerce una fuerza sobre el proyectil, generalmente una barra de material ferromagnético, a la que me referiré durante este proyecto como **vástago**. El proceso de aceleración comienza cuando la corriente eléctrica, controlada por un circuito electrónico, fluye a través de la bobina, creando un campo magnético que atrae el proyectil hacia el centro de la bobina. Antes de que los centros de la bobina y el vástago estén alineados, la corriente se corta, provocando que este último continúe su movimiento hacia adelante debido a su inercia. A lo largo de este documento, se desarrollarán con detalle los diferentes aspectos teóricos y constructivos de una lanzadera electromagnética, llegando a desarrollar un prototipo con el objetivo de preparar una práctica universitaria para el departamento de Ingeniería Eléctrica de Tecnun.

1.1. Objetivos y métodos

Exploraremos ahora los principales objetivos del proyecto, desglosando cada parte constituyente y su resultado esperado. El principal propósito de este trabajo es el diseño de una práctica universitaria que se pueda realizar durante el primer o segundo curso, con la idea de atraer a nuevos ingenieros hacia el campo de la electricidad. Para lograr este objetivo principal, el trabajo se dividirá en cuatro partes: desarrollo teórico, simulaciones, desarrollo de un prototipo y desarrollo de la práctica. Los objetivos y resultados esperados de cada parte son:

1. **Desarrollo teórico:** Este apartado tiene como objetivo explorar las fórmulas que describen el comportamiento del vástago dentro de la bobina cuando es alimentada con corriente continua. El desarrollo resultará en una serie de fórmulas que constituirán un modelo del sistema, así como un programa que las implemente en una aplicación de *MatLAB®*.
2. **Simulaciones:** Las simulaciones tienen como objetivo obtener otro modelo físico del sistema, utilizando el método de los elementos finitos a través del software *ANSYS Maxwell®*. El resultado esperado es un modelo paramétrico que permita introducir los valores de la geometría de la bobina y su alimentación, y devuelva los valores dinámicos del vástago. Se espera que estos resultados sean más precisos que los obtenidos mediante el desarrollo teórico y se pretende probar diferentes configuraciones hasta llegar a la más óptima.
3. **Prototipo:** Esta parte tiene como objetivo el diseño y desarrollo de un prototipo funcional de lanzadera que permita comparar los resultados teóricos con los físicos. Será necesario diseñar un circuito electrónico de control con *Arduino®* y un medio físico para sujetar y alimentar la bobina. El resultado esperado es un prototipo manejable y modular, con el cual se puedan probar diferentes configuraciones.
4. **Desarrollo de la práctica:** Con los resultados obtenidos en los apartados anteriores, se desarrollará un documento que presente un problema de optimización a resolver por los alumnos que realicen la práctica. Se fijarán los parámetros objetivos y se especificarán los valores que pueden modificar, así como las relaciones entre ellos, definidas por las ecuaciones obtenidas en el desarrollo teórico (??).

1.2. Motivación

Trataré en este subapartado las motivaciones que han impulsado este proyecto y justifican el área de estudio del mismo. El desarrollo de este proyecto está justificado por los siguientes puntos, que van a ser las principales áreas de influencia de este trabajo de final de grado:

1. **Vanguardia Tecnológica:** La investigación y desarrollo en tecnologías como la tratada en este trabajo representan una oportunidad para estar a la vanguardia en el campo de la ingeniería electromagnética. Este proyecto permite explorar y comprender los principios fundamentales del electromagnetismo aplicados a un sistema real y funcional.
2. **Aplicación de Conocimientos Teóricos:** La creación de una *lanzadera electromagnética* requiere la aplicación de conocimientos avanzados en física, matemáticas e ingeniería eléctrica. Este proyecto proporciona un contexto práctico en el que tanto yo como alumno, como los futuros estudiantes que lo utilicen, emplearán teorías y conceptos aprendidos en las aulas para fortalecer su entendimiento de los fenómenos electromagnéticos a un nivel visual y palpable.
3. **Desarrollo de Competencias Técnicas:** La construcción de la *lanzadera* involucra diversas habilidades técnicas, desde el diseño y simulación en software especializado hasta la fabricación y prueba de placas electrónicas y prototipos funcionales. Este proceso mejora significativamente las competencias prácticas en el laboratorio, una habilidad esencial para cualquier ingeniero eléctrico.
4. **Fomento de la Innovación Educativa:** El desarrollo de este proyecto no solo busca aportar al conocimiento técnico, sino también servir como una herramienta educativa innovadora. La práctica universitaria diseñada a partir de este proyecto permitirá a los estudiantes experimentar directamente con la optimización de parámetros electromagnéticos, desarrollando habilidades críticas y fomentando una mentalidad innovadora.

Con esto queda justificada la realización de este proyecto de fin de grado, y podemos empezar a desarrollar el proceso de creación de la **lanzadera electromagnética**.

2. Marco teórico

En esta sección se desarrollarán los principios teóricos que permiten el funcionamiento de las lanzaderas electromagnéticas. Para entender estos principios, es esencial comprender los fundamentos del electromagnetismo, el concepto de bobina, su relación con la generación de campos magnéticos y la forma de modelar estos.

El electromagnetismo es una rama fundamental de la física que estudia las interacciones entre los campos eléctricos y magnéticos. Su desarrollo ha sido crucial para el avance de la tecnología, desde la generación y transmisión de electricidad hasta las comunicaciones inalámbricas. Aunque la raza humana conoce los fenómenos eléctricos y magnéticos desde la historia antigua, estos no fueron estudiados hasta el siglo XVII, y se consideraban fenómenos independientes hasta que Hans Christian Ørsted descubrió en 1820 que una corriente eléctrica puede generar un campo magnético. Mientras el físico danés preparaba los equipos para dar una conferencia en la Universidad de Copenhague, observó que la aguja de una brújula cercana se desviaba cuando la corriente fluía a través de un alambre conductor. Este accidental descubrimiento le llevó a publicar el artículo CIRCA EFFEC-TUM CONFLICTUS ELECTRICI IN ACUM MAGNETICAM, en el que se describieron los fenómenos electromagnéticos por primera vez, aunque de manera cualitativa. En la siguiente década, Ampère y Faraday describirían matemáticamente el descubrimiento de Ørsted, dando lugar al electromagnetismo como lo conocemos hoy en día. [3]

El trabajo de James Clerk Maxwell en la década de 1860 unificó estos descubrimientos en un marco teórico coherente. Maxwell formuló un conjunto de ecuaciones que describen cómo los campos eléctricos y magnéticos interactúan y se propagan. Estas ecuaciones, conocidas como las ecuaciones de Maxwell, son la base del electromagnetismo clásico.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Figura 2: Ecuaciones de Maxwell.[7]

En el caso de este proyecto, la ley de Maxwell de mayor interés es la de Ampère. Esta ley es la que define la relación entre un campo magnético y uno eléctrico, y partir de las ecuaciones anteriores se puede definir la ley integral de Ampère como:

"La integral de línea del campo magnético \mathbf{B} alrededor de un lazo cerrado es igual a μ_0 multiplicado por la corriente total I_{enc} que pasa a través de cualquier superficie delimitada por el lazo. Matemáticamente, esto se expresa como:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{enc}$$

donde μ_0 es la permeabilidad del vacío."

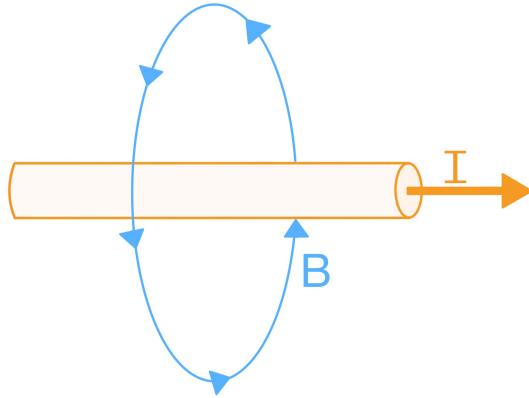


Figura 3: Visualización del campo magnético de un conductor. Elaboración propia.

Una vez entendido el comportamiento en un conductor, el siguiente paso es analizar el componente principal de la lanzadera: la **bobina**. Una bobina, o solenoide, es un conductor enrollado de manera cilíndrica alrededor de un núcleo de algún material. El número de vueltas que da el conductor alrededor del núcleo se define como espiras y se denota como N , y el núcleo posee un parámetro físico llamado permeabilidad relativa μ_r , que indica su capacidad para permitir el paso del flujo magnético. Se llegará a continuación a una expresión para el campo magnético alrededor de un solenoide. Para ello, partiremos de la ley integral de Ampère y consideraremos un solenoide con N espiras y longitud l , por el cual pasa una corriente I . Elegimos una trayectoria rectangular \vec{C} que va parcialmente dentro y fuera del solenoide, la cual es conveniente porque simplifica los cálculos del campo magnético.

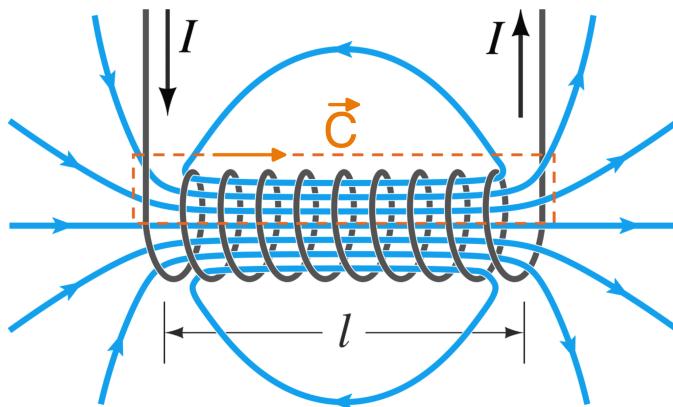


Figura 4: Curva \vec{C} para la cual realizaremos los cálculos. Imagen tomada de <https://artpictures.club/autumn-2023.html>.

La integral de línea del campo magnético B en la trayectoria rectangular \vec{C} se puede dividir en cuatro segmentos:

- Dentro del solenoide, paralelo al eje del solenoide, longitud l .
- Fuera del solenoide, paralelo al eje del solenoide, longitud l .
- Dos segmentos perpendiculares al eje del solenoide, cada uno de longitud w .

Debido a la simetría y a que el solenoide es muy largo, asumimos que el campo magnético fuera del solenoide es despreciable, y el campo dentro es uniforme y paralelo al eje del solenoide. Así, la integral se simplifica a:

$$\oint_c \vec{B} d\vec{l} = Bl$$

Analizando ahora la corriente encerrada total, se observa que será igual a la corriente que fluye por las N espiras:

$$I_{encerrada} = NI$$

En una longitud cualquiera, l , se puede hablar de una densidad de espiras igual a $n = \frac{N}{l}$, por lo que en la curva \vec{C} tendremos:

$$I_{encerrada} = nIl$$

Con lo que se obtien los dos términos de la ecuación integral de Ampère, por lo que podemos igualar:

$$Bl = \mu_0 nIl \rightarrow B = \mu_0 nI \quad \forall n = \frac{N}{l} \rightarrow B = \mu_0 \frac{NI}{l}$$

Que es la expresión para la inducción electromagnética en un solenoide.

El siguiente punto de interés es la forma del campo magnético del solenoide. La geometría del mismo juega un papel crucial en la distribución del campo magnético. Debido a su forma cilíndrica y a la disposición de las espiras, el campo magnético generado en el interior del solenoide es casi uniforme y paralelo al eje del cilindro, variando solo en los extremos donde se curva hacia el núcleo para cumplir la ley de Gauss para el campo magnético ($\nabla B = 0$). Esta uniformidad del campo magnético es una característica deseable en muchas aplicaciones, como en el diseño de inductores o transformadores. En nuestro caso, la uniformidad del campo nos va a permitir acelerar el proyectil de la lanzadera de manera rectilínea hacia el centro de la bobina.[7] [2][8].

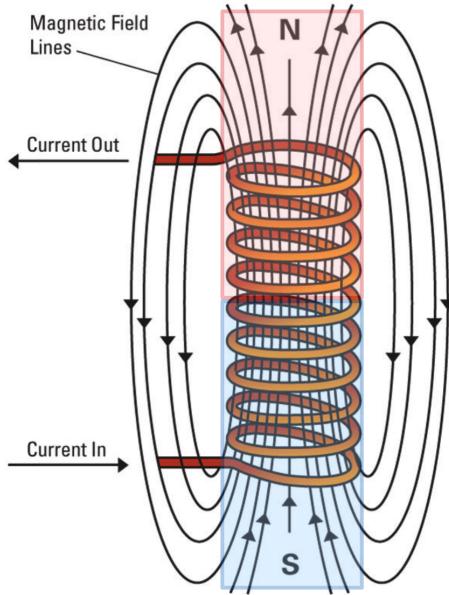


Figura 5: Visualización del campo magnético de una bobina energizada. Imagen tomada de <https://ece.northeastern.edu/fac-ece/nian/mom/electromagnets.html>.

La forma en que este fenómeno será aprovechado para construir la lanzadera consiste en colocar un proyectil de material ferromagnético en el extremo de una bobina energizada, el cual será atraído hacia el centro debido al campo magnético. Justo cuando los centros del proyectil y la bobina se encuentren alineados, la corriente se interrumpirá, evitando que el proyectil siga siendo atraído por el electroimán y permitiéndole avanzar por inercia. Esto se logrará mediante un circuito electrónico que energizará la bobina durante el tiempo necesario para que el proyectil alcance la máxima velocidad posible. Este circuito será desarrollado en la sección de prototipo (3.3).

La figura 7 a continuación es un esquema sencillo en el que se visualizan las partes esenciales de una lanzadera electromagnética:

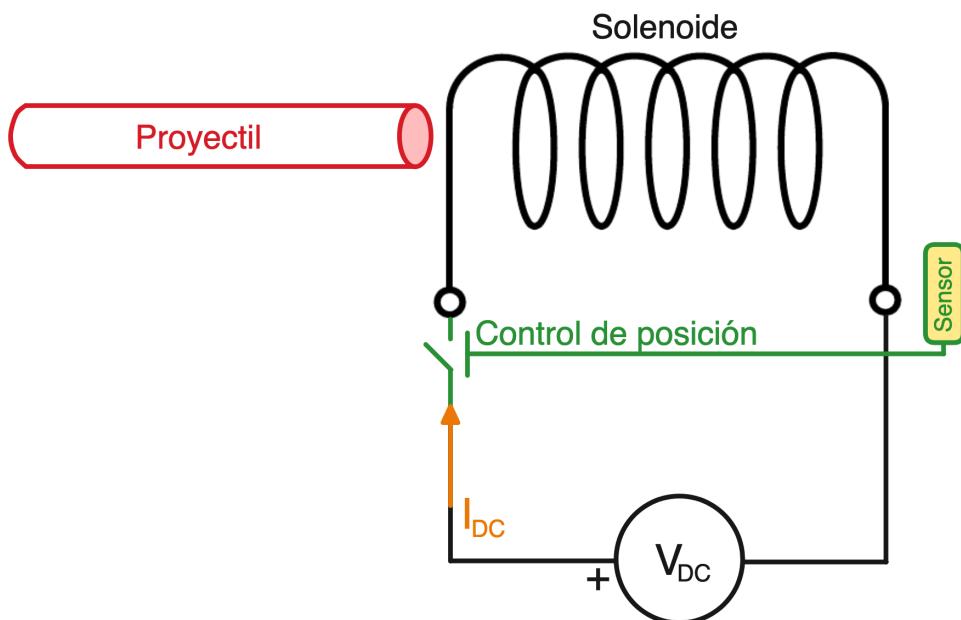


Figura 6: Esquema cualitativo de la lanzadera electromagnética. Elaboración propia.

Antes de finalizar el marco teórico, es necesario definir la manera en la que se va a representar el sistema de manera computable. Para ello, se utiliza el análisis del circuito magnético del sistema. Un circuito magnético se puede analizar de manera análoga a un circuito eléctrico, utilizando los conceptos de reluctancia, fuerza magnetomotriz (FMM) y flujo magnético. A continuación, se describen estos conceptos y sus relaciones entre sí.

- **Reluctancia** La reluctancia \mathcal{R} es una medida de la oposición que ofrece un material al paso del flujo magnético. Es análoga a la resistencia en un circuito eléctrico y su unidad es $[H^{-1}]$. La fórmula para la reluctancia es:

$$\mathcal{R} = \frac{l_{car}}{\mu_0 \mu_r A}$$

Donde:

$\mu_0 \mu_r$ es la permeabilidad del material $[NA^2]$.

l_{car} es la longitud característica del camino magnético $[m]$.

A es el área de la sección transversal del camino magnético $[m^2]$.

- **Fuerza Magnetomotriz (FMM)** La fuerza magnetomotriz \mathcal{F} es la fuerza que impulsa el flujo magnético a través de un circuito magnético. Es análoga a la fuerza electromotriz (*fem*) en un circuito eléctrico y su unidad es $[A \cdot v]$. La FMM se define como:

$$\mathcal{F} = NI$$

Donde:

N es el número de vueltas de la bobina $[v]$.

I es la corriente de alimentación de la bobina $[A]$.

- **Flujo Magnético** El flujo magnético ϕ es la cantidad de campo magnético que pasa a través de una superficie. Es análogo a la corriente eléctrica y su unidad es $[Wb]$. Se define como:

$$\phi = BA$$

Donde:

B es la densidad de flujo magnético $[T]$.

A es el área de la superficie perpendicular al campo magnético $[m^2]$.

- **Ley de Hopkinson** La Ley de Hopkinson establece la relación entre la FMM, el flujo magnético y la reluctancia en un circuito magnético, de manera análoga a la Ley de Ohm en los circuitos eléctricos:

$$\mathcal{F} = \mathcal{R}\phi$$

Como expresa la ley de Hopkinson, los conceptos de reluctancia, FMM y flujo magnético están interrelacionados en un circuito magnético. La FMM generada por una corriente que pasa a través de un devanado crea un flujo magnético que se opone a la reluctancia del material.[2][8]

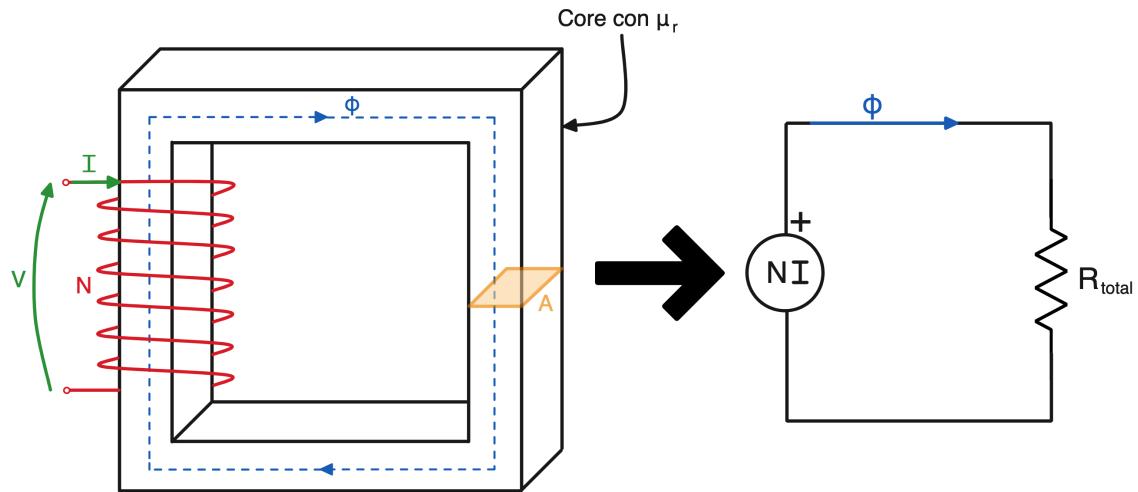


Figura 7: Esquema de una bobina con un core ferromagnético y su circuito magnético equivalente.
Elaboración propia.

3. Desarrollo

En esta sección se detallarán los pasos llevados a cabo para la consecución del objetivo principal de este proyecto: el diseño y construcción de una *lanzadera electromagnética*. En los siguientes apartados, se describirán concisamente los procedimientos, herramientas y resultados obtenidos en cada una de estas fases del desarrollo.

3.1. Desarrollo teórico

En la sección de desarrollo teórico trataré de proporcionar un procedimiento mediante el cual los alumnos que realicen la práctica sean capaces de optimizar la velocidad y fuerza del proyectil a partir de los parámetros eléctricos y geométricos que definen el sistema. Estos parámetros de entrada serán:

- **Parámetros geométricos:**

- a. r_{cext} y r_{cint} : radios exterior e interior de la bobina, respectivamente.
- b. l_c : altura de la bobina.
- c. r_{fe} : radio del vástago.
- d. l_{fe} : longitud del vástago.
- e. k_{disp} : parámetro multiplicador para obtener la sección de dispersión. La dispersión es la parte del flujo que abraza a la bobina y a la barra.

- **Parámetros eléctricos:**

- a. N : número de espiras.
- b. I_{cc} : corriente de alimentación del solenoide.
- c. μ_{fe} : permeabilidad relativa del vástago ferromagnético.

El objetivo de este desarrollo es crear un programa en MATLAB al que se le proporcionen estos datos, y que calcule automáticamente la fuerza que experimentará el proyectil a través del circuito magnético del sistema. Como se muestra en la figura 5 el valor de B varía a lo largo del solenoide, por lo tanto, además de los parámetros constantes dados, será necesario parametrizar también la posición del vástago en cada momento (x en la figura 8) y calcular la fuerza que experimenta en cada una de esas posiciones. Se muestra a continuación el esquema que nos servirá de guía durante la creación del código, en el que se muestran todas las variables mencionadas anteriormente:

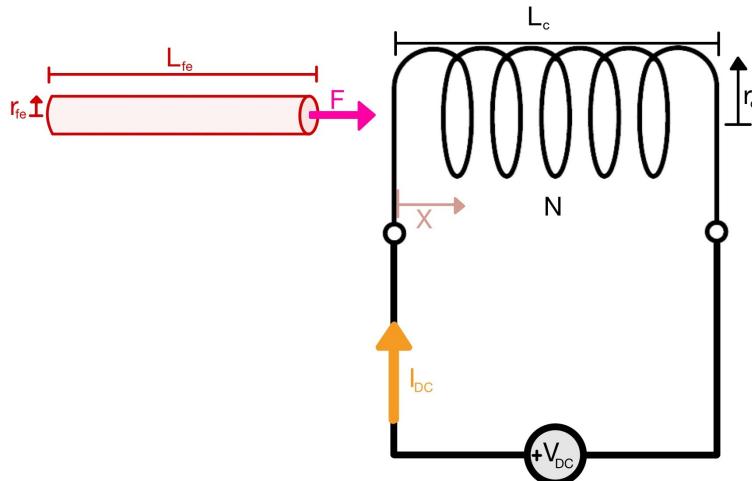


Figura 8: Esquema geométrico del sistema. Elaboración propia.

El primer paso será partir de las fórmulas del circuito magnético definidas en el 2 marco teórico y para ello la primera tarea es realizar un análisis de las diferentes reluctancias del sistema, con el objetivo de computar así la inducción magnética, la cual nos permitirá obtener la fuerza de atracción que experimenta el vástagos, que según Nicolás Jerez [4] viene dada por la expresión:

$$F = \frac{1}{2} \frac{B^2 * S}{\mu_0}$$

Teniendo clara la relación entre inducción y fuerza, el siguiente paso es definir claramente las diferentes áreas efectivas de los componentes del sistema para calcular las reluctancias, las cuales son:

- $S_c = \pi * r_{cext}^2$: Esta superficie se corresponde con la sección delimitada por el radio exterior de la bobina, y es el área efectiva del flujo encerrado en su interior.
- $S_{fe} = \pi * r_{fe}^2$: Esta superficie se corresponde con la sección delimitada por el radio del vástagos.
- $S_{disp} = \pi * r_{disp}^2$ $\forall r_{disp} = k_{disp} r_c$: Esta superficie se corresponde con el área de dispersión de flujo.

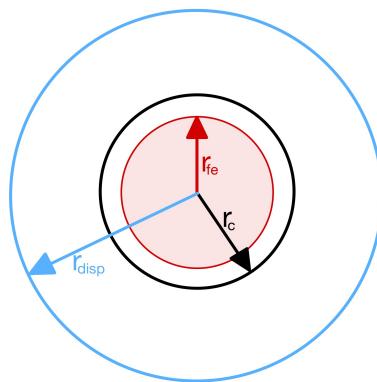


Figura 9: Secciones del sistema con una vista de planta. Elaboración propia.

Teniendo en cuenta las fórmulas en la sección del marco teórico (2) y lo expuesto en la figura 9, podemos concluir que existen cuatro principales reluctancias en el sistema de la figura 8:

- $\mathcal{R}_{disp\ c} = \frac{h_c}{\mu_0 * S_{disp}}$: Se corresponde a la reluctancia del aire que abraza la bobina. Esta reluctancia es fija ya que las dimensiones del solenoide son constantes.
- $\mathcal{R}_{fe} = \frac{l_{fe}}{\mu_0 * \mu_{fe} * S_{fe}}$: Se corresponde a la reluctancia de la barra. Esta reluctancia es fija ya que las dimensiones del vástago son constantes.
- $\mathcal{R}_\phi = \frac{(h_c + l_{fe}) - x}{\mu_0 * S_{disp}}$: Se corresponde a la reluctancia del aire del camino más largo del flujo magnético, y es la que provoca que el campo del electroimán interactúe con el vástago. Es variable ya que la posición del vástago es variable y el camino se reduce con el tiempo.
- $\mathcal{R}_{aire\ c} = \frac{h_c - x}{\mu_0 * S_c}$: Se corresponde a la reluctancia del aire en el interior de la bobina. Es variable ya que la cantidad de aire disminuye con la posición del vástago.

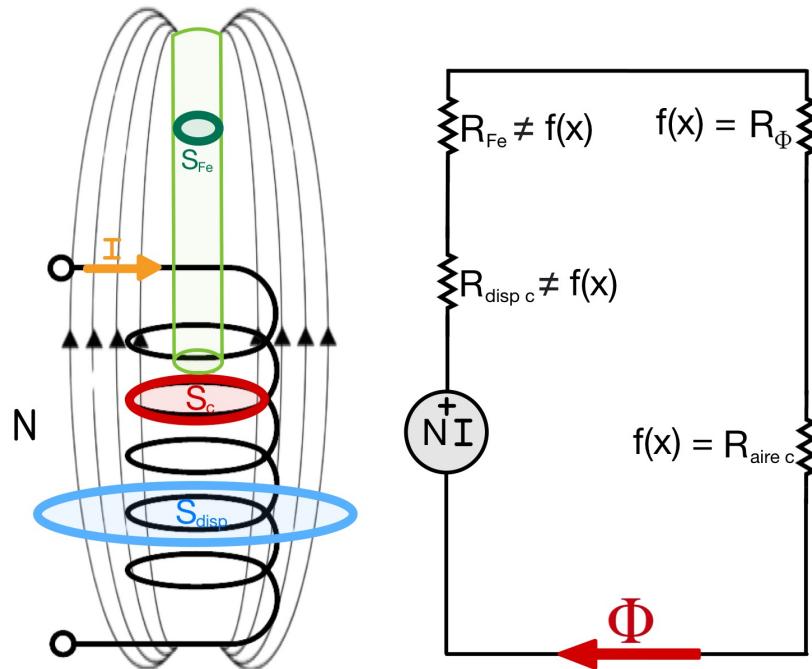


Figura 10: Circuito magnético del sistema. Elaboración propia.

Con el circuito magnético definido, el siguiente paso es programar las relaciones presentadas en esta sección en MATLAB y graficar los resultados en función de la posición. El programa en MATLAB constará de tres secciones: definición, cálculos y graficación. El código está disponible en el anexo 1 4. El producto de este código es una "calculadora" que devuelve la evolución de la fuerza con el parámetro x , y queda así:

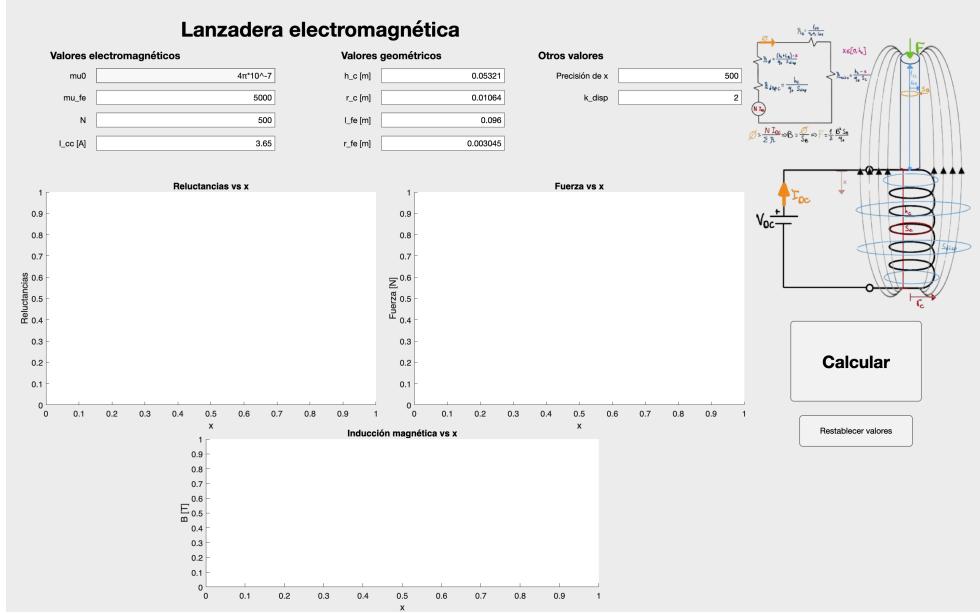


Figura 11: Aplicación de cálculos de MATLAB. Elaboración propia.

Los valores escritos en las variables del sistema que se pueden ver en la figura 11 se corresponden con la bobina de ejemplo que se ha utilizado para crear el proyecto. Dicha bobina tiene la siguiente geometría:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 4\pi \times 10^{-7} & \mu_{fe} &= 5000 & N &= 500 \\ l_{fe} &= 0.096m & r_{fe} &= 0.003045m \\ h_c &= 0.05321m & r_c &= 0.01064m & r_{disp} &= k_{disp} r_c = 2 r_c \end{aligned}$$

Con esta configuración, la forma de las gráficas obtenidas es:

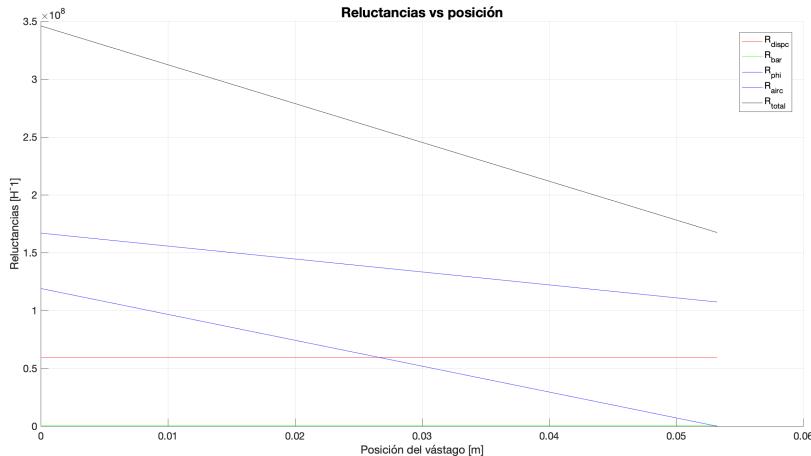


Figura 12: Reluctancias vs x. Elaboración propia.

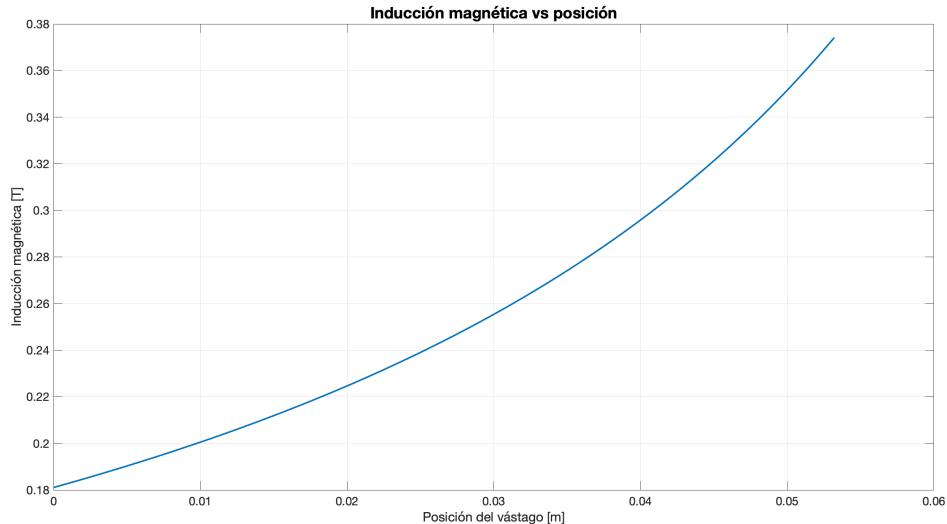


Figura 13: Inducción vs x. Elaboración propia.

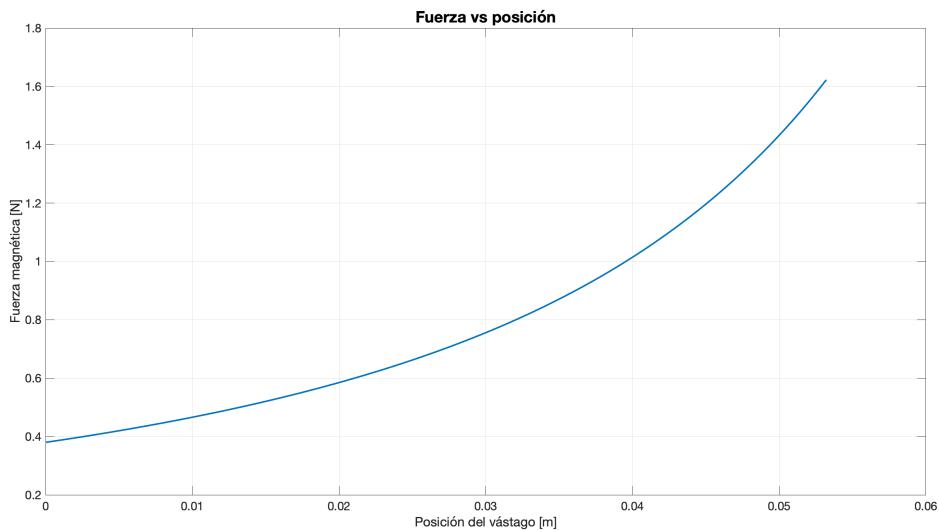


Figura 14: Fuerza vs x. Elaboración propia.

Estas figuras serán discutidas en el apartado de conclusiones

Prueba inicial

Antes de continuar con el desarrollo, se ha realizado una prueba con un dinamómetro sobre la bobina de prueba especificada anteriormente, para verificar los resultados de la figura 14 y poder continuar con las simulaciones y prototipo con una referencia. Se ha obtenido el siguiente resultado:

HACE FALTA PONER FIGURA CON FOTO DEL DINAMÓMETRO???

$$F_{vas} = 2.4 \text{ N } \forall I_{cc} = 3.5 \text{ A}$$

3.2. Simulaciones

En esta sección, se describe el proceso de creación del modelo de la lanzadera electromagnética realizado utilizando ANSYS Maxwell. Este software de métodos finitos está especializado en el análisis de sistemas electromagnéticos. El objetivo de estas simulaciones es obtener una comprensión detallada del comportamiento del campo magnético generado por la bobina y su interacción con el proyectil ferromagnético en la lanzadera electromagnética. Se ha dividido el proceso en tres subapartados: creación de la geometría, simulaciones instantáneas y simulaciones transitorias. En la primera, se mostrará el proceso de creación de la geometría paramétrica en 2D y 3D, en la segunda y tercera se explicarán las condiciones de contorno y resultados de las simulaciones instantáneas y transitorias, respectivamente.

3.2.1. Geometría

El primer paso para realizar las simulaciones fue la creación de la geometría del sistema en ANSYS Maxwell. Para ello, se definieron las dimensiones y características de la bobina y el proyectil de manera paramétrica. Esto quiere decir que las dimensiones de los polígonos que conforman el modelo no son fijas, si no que están asociados a variables por lo que simular diferentes configuraciones se convierte en algo más sencillo. La geometría fue primeramente diseñada en 3D, pero también se obtuvo la sección central del archivo tridimensional para poder simular en 2D, lo que a priori permite menor tiempo de computación. Una vez creada la geometría, se definieron los diferentes materiales y las propiedades eléctricas y magnéticas. El material utilizado para los conductores del solenoide es cobre recocido, PVC para el soporte de la bobina y **FALTA EL ACERO** para el vástago. Con esto, se construye la geometría a continuación mostrada:

- **Geometría en 3D:**
- **Mallado en 3D:**
- **Geometría en 2D:**

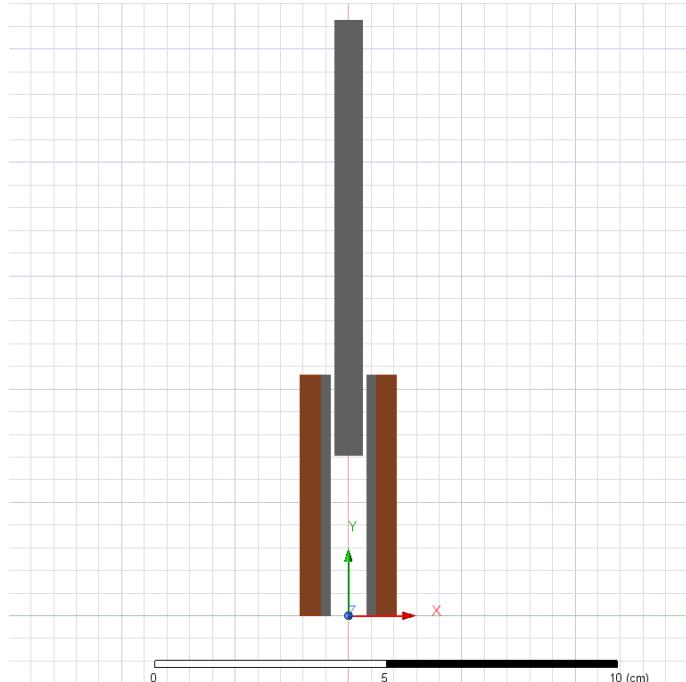


Figura 15: Geometría de la barra y bobina en 2D. Elaboración propia.

- **Mallado en 2D**

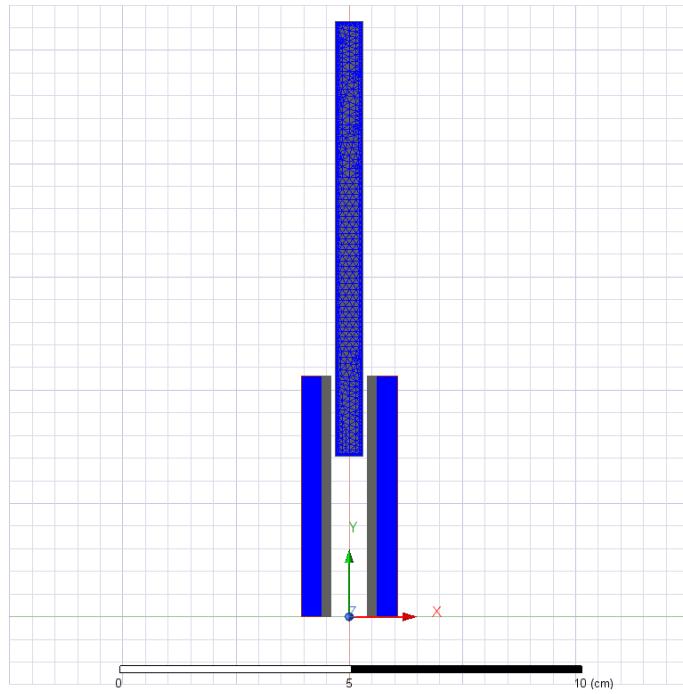


Figura 16: Mallado de la barra y bobina en 2D. Elaboración propia.

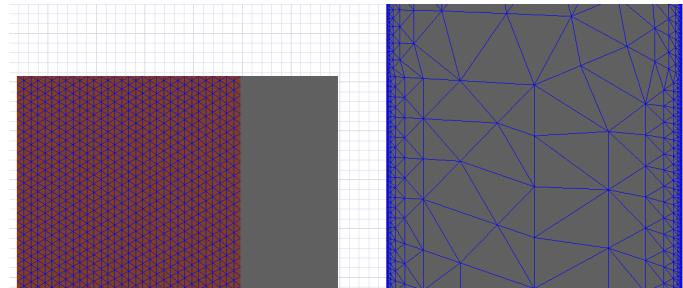


Figura 17: Detalle del mallado de la barra y bobina en 2D. Elaboración propia.

La bobina se ha generado de la forma mostrada en las figuras anteriores debido a que representar un número de espiras del orden de 10^2 de manera helicoidal y con varias capas es muy complicado en ANSYS, ya que no es un entorno de diseño en 3D. Al crear un cilindro con dimensiones apropiadas, se puede indicar al software que lo trate como un solenoide, asignándole un número de espiras y una corriente de excitación. El programa distribuye uniformemente el campo generado por la corriente en todo el volumen, lo que resulta en una aproximación muy válida [1, p. 13].

3.2.2. Simulaciones instantáneas

ANSYS Maxwell permite realizar simulaciones de diferentes tipos, de las cuales tienen interés para este proyecto las magnetoestáticas y las transitorias. Como primera prueba para el modelo de la figura **FIGURA3D**, se realizó una simulación electroestática con una $I_{cc} = 3.5 \text{ A}$ para poder observar los campos magnéticos del sistema, resultando en la siguiente figura:

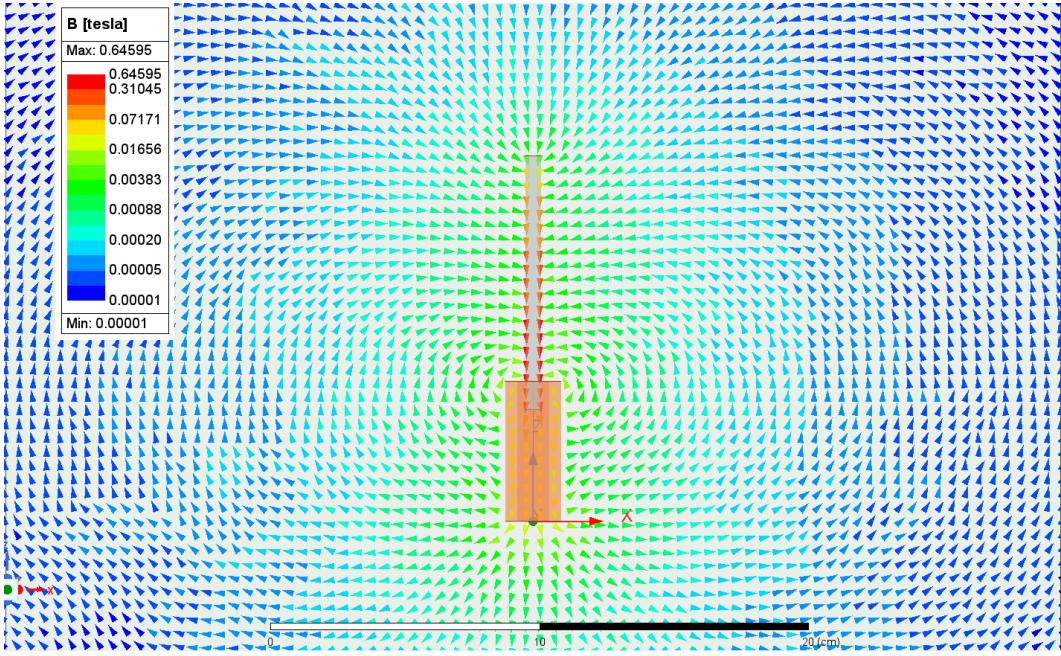


Figura 18: Visualización de los campos magnéticos con la bobina energizada y $x = 2/10 * h_c$. Elaboración propia.

Vemos que se puede apreciar perfectamente la forma descrita en las figuras 4 y 5, curvándose en los extremos del sistema pero permaneciendo bastante uniforme a lo largo de h_c . Se muestra a continuación un detalle de los campos únicamente dentro de la bobina con la barra en la posición de la figura 18:

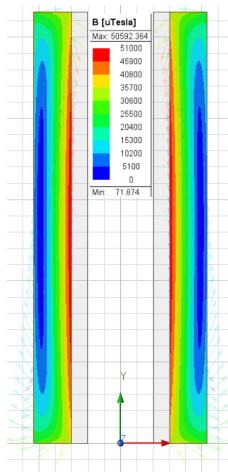


Figura 19: Visualización de los campos magnéticos dentro del solenoide. Elaboración propia.

Además de visualizar los campos, ANSYS Maxwell permite añadir distintas medidas a la simulación, entre las que se encuentra la fuerza de atracción magnética. Realizando la simulación de nuevo para la configuración en 3D, se obtiene que la fuerza es igual a:

	F_x	F_y	F_z	F_{tot}
F_{ANSYS}	Data 2	Data 3	Data 4	Data 5

Tabla 1: Fuerzas de atracción magnética en los diferentes ejes del espacio. Elaboración propia.

3.2.3. Simulaciones transitorias

Una vez observados los campos de manera estacionaria, el siguiente paso es conseguir la variación de los valores de fuerza con la posición del vástago, además sin forzar este movimiento. Es decir, especificar la región de movimiento y los valores de alimentación de la bobina y dejar que ANSYS genere el movimiento y nos de información acerca de la fuerza y velocidad experimentadas por el vástago. Al realizar esto con el modelo 3D, ANSYS devolvía un error fatal probablemente debido a que los ordenadores en los que se estaba realiendo la simulación no eran lo suficientemente potentes. Se recurrió entonces a la utilización exclusiva de la geometría en 2D, la que dio resultados tanto de movimiento como fuerza. Para llegar a los últimos resultados, se realizaron varias simulaciones con varias configuraciones temporales diferentes, las cuales se muestran a

Configuración 1

La primera configuración transitoria utilizada es:

$$T_{sim} = 150 \text{ ms} \quad T_{step} = 5 \text{ ms} \rightarrow 30 \text{ steps}$$

$$I(t=0) = 3.5 \text{ A} \quad I(t \geq 50 \text{ ms}) = 0 \text{ A}$$

$$V_{coil} = 13.1 \text{ V} \quad R_{coil} = 3.65 \Omega$$

$$m_{bar} = 0.019 \text{ kg} \quad v_{bar \ ini} = 0 \text{ ms}^{-1}$$

Las gráficas resultantes de fuerza-corriente y velocidad-posición son:



Figura 20: Fuerza (verde) y corriente (rojo) vs tiempo en la configuración 1. Elaboración propia.

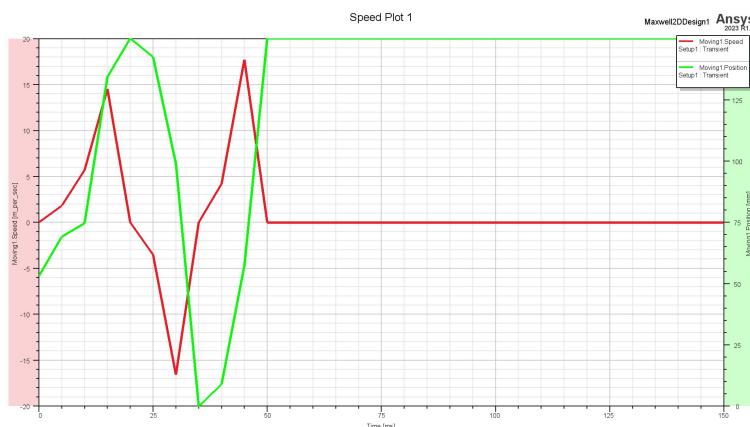


Figura 21: Posición (verde) y velocidad (rojo) vs tiempo en la configuración 1. Elaboración propia.

Como se puede observar en las figuras 20 y 21, T_{sim} es muy largo ya que la mayor parte del tiempo no ocurre nada. También es destacable que existen oscilaciones, lo que indica que la bobina está siendo alimentada durante demasiado tiempo y está siendo retenida en el centro.

Configuración 2

La segunda configuración transitoria utilizada es:

$$T_{sim} = 75 \text{ ms} \quad T_{step} = 0.6 \text{ ms} \rightarrow 125 \text{ steps}$$

$$I(t=0) = 3.5 \text{ A} \quad I(t \geq 30 \text{ ms}) = 0 \text{ A}$$

$$V_{coil} = 13.1 \text{ V} \quad R_{coil} = 3.65 \Omega$$

$$m_{bar} = 0.019 \text{ kg} \quad v_{bar \ ini} = 0 \text{ ms}^{-1}$$

Las gráficas resultantes de fuerza-corriente y velocidad-posición son:

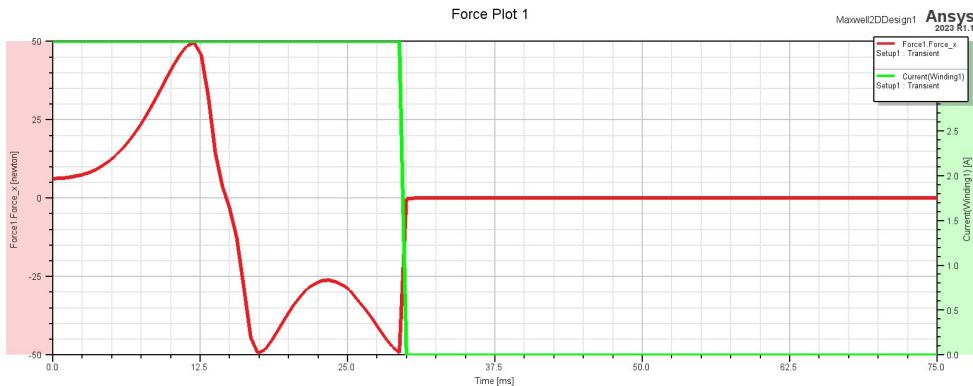


Figura 22: Fuerza (rojo) y corriente (verde) vs tiempo en la configuración 2. Elaboración propia.

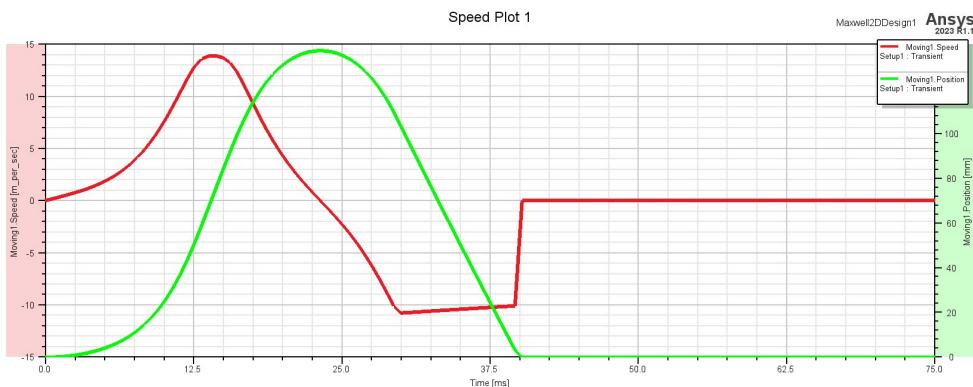


Figura 23: Posición (verde) y velocidad (rojo) vs tiempo en la configuración 2. Elaboración propia.

En la segunda configuración, se utilizó un timestep muy pequeño para poder observar con precisión el movimiento del vástagos. Se observa más ajustado el tiempo de simulación, aunque el tiempo de alimentación de la bobina sigue siendo muy elevado ya que el vástagos sigue oscilando, aunque ya solo lo hace una vez.

Configuración 3

La tercera configuración transitoria utilizada es:

$$T_{sim} = 25 \text{ ms} \quad T_{step} = 1 \text{ ms} \rightarrow 25 \text{ steps}$$

$$I(t=0) = 3.5 \text{ A} \quad I(t \geq 15 \text{ ms}) = 0 \text{ A}$$

$$V_{coil} = 13.1 \text{ V} \quad R_{coil} = 3.65 \Omega$$

$$m_{bar} = 0.019 \text{ kg} \quad v_{bar \ ini} = 0 \text{ ms}^{-1}$$

Las gráficas resultantes de fuerza-corriente y velocidad-posición son:

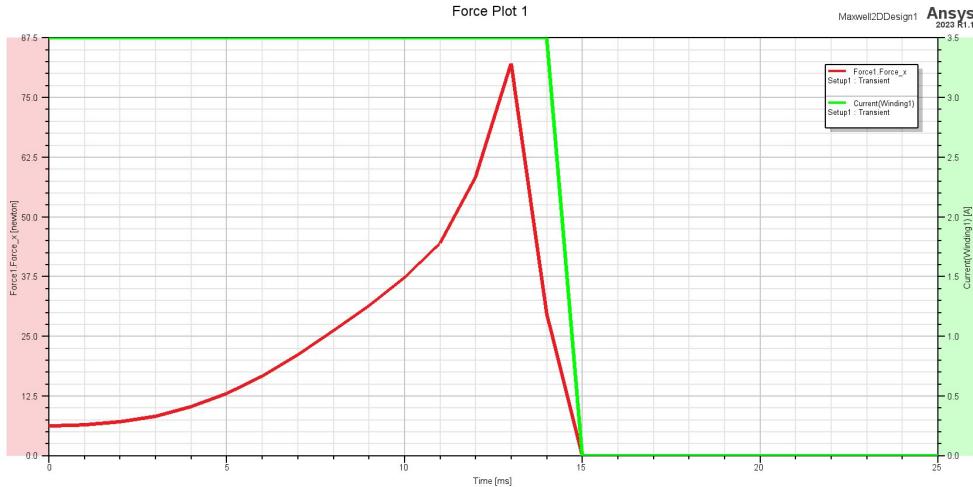


Figura 24: Fuerza (rojo) y corriente (verde) vs tiempo en la configuración 3. Elaboración propia.



Figura 25: Posición (verde) y velocidad (rojo) vs tiempo en la configuración 3. Elaboración propia.

Esta configuración proporciona unos resultados que aunque no sean verosímiles debido a la magnitud de la fuerza ($F_{max} \approx 80 \text{ N}$), sí que tienen una forma que se corresponde con lo obtenido en el apartado de desarrollo analítico 3.1, concretamente con la forma de la evolución de la fuerza frente a la posición del vástago que se puede observar en la figura 14.

Con esto se dará por finalizado el apartado de simulaciones. Aunque se ha encontrado una configuración que es coherente en cuanto al comportamiento del sistema, los resultados obtenidos no son precisos en términos de magnitud. Dado que no se ha logrado avanzar en la mejora de la precisión de los resultados, se ha decidido no continuar dedicando más tiempo a afinar esta configuración, ya que la calculadora proporciona valores más verosímiles de manera fiable.

3.3. Prototipo

El desarrollo del prototipo de la lanzadera electromagnética constituye una etapa crucial en la validación del modelo teórico y las diferentes simulaciones realizadas en fases previas. Esta sección se centra en el diseño y construcción de un dispositivo funcional que permita la evaluación práctica de los conceptos estudiados y la obtención de datos experimentales que respalden las predicciones teóricas.

El objetivo principal del prototipo es proporcionar una plataforma experimental (a la que se le llamará *banco de pruebas*) que permita comprobar la efectividad de las configuraciones propuestas y realizar ajustes basados en observaciones empíricas. No se pretende construir una lanzadera electromagnética como la de la figura 1, sino más bien un prototipo modular que sea fácilmente modificable para poder probar diferentes configuraciones de bobina y alimentación. Una de las partes más importantes del prototipo ha sido la implementación de un sistema de medición capaz de registrar con exactitud la velocidad y fuerza del proyectil.

El siguiente apartado detalla los pasos específicos seguidos en el desarrollo del prototipo, desde el montaje del banco de pruebas, el diseño del circuito electrónico y la construcción de la bobina, hasta el ensamblaje sistema completo. Cada uno de estos pasos ha conllevado más de una iteración hasta llegar al resultado final, que es lo que se va a detallar en esta sección. Sin embargo, en el Anexo II se puede encontrar el proceso más detallado.

FOTO DEL PROTOTIPO FINAL

3.3.1. Materiales

Para el montaje del prototipo, se utilizaron perfiles técnicos estructurales de aluminio como el que se presenta en la siguiente figura:

FIGURA DE LOS PERFILES DE ALUMINIO

La ventaja de utilizar estos perfiles es que se puede modificar de manera muy sencilla la distribución de las diferentes partes del montaje, las cuales consisten en: dos parejas de perfiles en **T** que sirven de apoyo para el resto de la estructura, un perfil inferior que es en el que se coloca la bobina y un perfil superior que es en el que se colocan los sensores de movimiento y el circuito electrónico.

FIGURA DEL BANCO SOLO CON LOS PERFILES

Se describirán con detalle los sensores de movimiento, las restricciones de la bobina y el circuito electrónico diseñado para el proyecto.

3.3.2. Sensores de movimiento

Los sensores de movimiento utilizados para el proyecto tienen como objetivo proporcionar la velocidad a la que sale el vástago de la bobina. Los que se han empleado son sensores de carácter capacitivo, lo que significa que detectan la presencia de un objeto delante de ellos por el cambio de la capacidad con la superficie del sensor. Colocando dos de estos dispositivos a una distancia conocida x y obteniendo la diferencia temporal Δt de activación de la señal mediante una placa arduino conectada al sistema, es trivial calcular la velocidad del vástago según la fórmula:

$$v_{vas} = \frac{x}{\Delta t}$$

Los sensores elegidos para llevar a cabo esta tarea son los **MODELO SENSORES**, los cuales tienen el siguiente esquema de conexión:

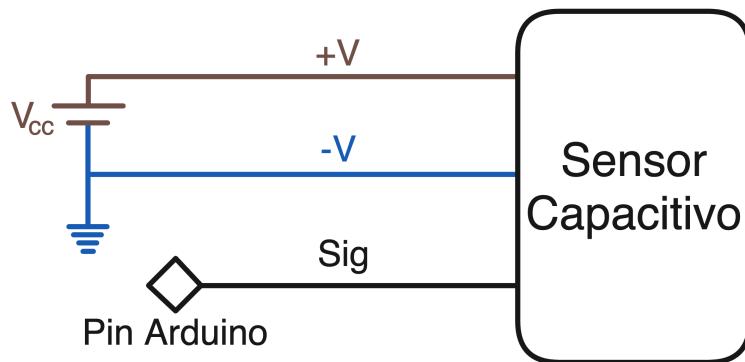


Figura 26: Esquema conexiones del **MODELO SENSORES**. Elaboración propia.

La tensión de alimentación del sensor es de $V_{cc} \in [6, 30] V$, y la salida de la señal (tensión entre **SIG** y **GND**) es de $V_{sig} = V_{cc}$. Esto es algo a tener en cuenta, pues la entrada de los puertos de arduino no puede superar los 5 V. Montando el prototipo, se decidió que el circuito electrónico iba a estar alimentado a 15 V, por lo que será necesario un divisor de tensiones para poder leer la señal de los sensores, el cual está detallado en el apartado de diseño del circuito 3.3.3.

3.3.3. Circuito electrónico

El diseño y desarrollo de la lanzadera electromagnética no solo requiere de la implementación de los componentes físicos de soporte, bobina y vástago, sino que también es esencial el diseño de un circuito electrónico que controle y optimice su funcionamiento. La precisión y eficiencia del dispositivo dependen en gran medida de la electrónica que lo acompaña. Durante el proceso de montaje del banco de pruebas, se han identificado dos etapas críticas de las cuales se debe encargar el circuito electrónico: la etapa de disparo y la etapa de medición.

Disparo

Para el disparo, debemos indentificar dos momentos críticos, los de inicio y finalización de alimentación de la bobina para que el vástago adquiera inercia sin quedarse atascado en el campo magnético. Cuando se empezó el proyecto se pensó en realizar los disparos a mano apagando y encendiendo la fuente del solenoide, pero al realizar las simulaciones, se descubrió la imposibilidad de este método ya que la constante de tiempo (τ) del sistema ronda los $10^{-2} s$ o $10 ms$. Esto plantea un problema a la hora de disparar el vástago, pues debemos alimentar la bobina por un período de tiempo muy breve, lo cual es prácticamente imposible de hacer manualmente. Es necesario por ende diseñar de manera electrónica las órdenes de inicio y finalización del disparo del vástago.

El inicio del disparo es trivial, y tratará de un interruptor conectado a la placa arduino. Esta detectará la pulsación del interruptor y mandará la orden de disparo a través del mecanismo correspondiente.

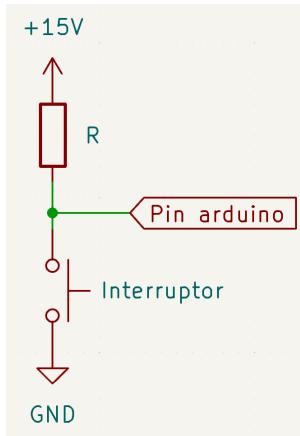


Figura 27: Conexión del interruptor de disparo. Elaboración propia.

Por otro lado, la finalización del disparo es más compleja. Es necesario dejar de alimentar la bobina antes de que su centro esté alineado con el del vástago, ya que de lo contrario, este seguirá siendo atraído por el campo magnético y no adquirirá la inercia necesaria para que su movimiento continúe. Para lograr esto, se va a aprovechar el hecho de que por diseño $l_{fe} \geq h_c$, colocando uno de los sensores de movimiento justo a la salida de la bobina. Esto permitirá obtener la señal de detección del primer sensor en el momento preciso en que sea necesario cortar la alimentación del solenoide, garantizando que el vástago adquiera la inercia adecuada para su desplazamiento.

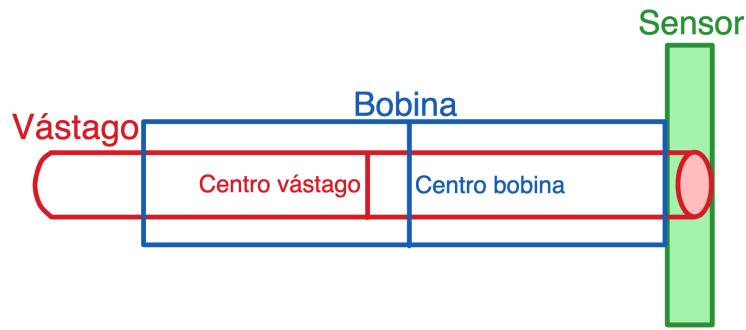


Figura 28: Colocación del sensor. Elaboración propia.

La señal generada por el sensor de movimiento será enviada a un Arduino, que la procesará y activará un relé de potencia de estado sólido conectado a uno de sus pines. Este relé estará conectado a una fuente de corriente y será responsable de interrumpir la alimentación de la bobina en el momento adecuado. El uso de un relé de estado sólido asegura una commutación rápida y precisa, eliminando la alimentación de la bobina de manera efectiva y asegurando el correcto funcionamiento del sistema de disparo.

3.3.4. Bobina

Los solenoides que se prueben en el prototipo deben de cumplir las siguientes especificaciones:

- $0.5 \leq h_c \leq XX$: la longitud máxima de la bobina está delimitada por la longitud del perfil menos un espacio mínimo entre sensores.

3.4. Desarrollo de la práctica

En este apartado se desarrollarán los criterios que se van a emplear para utilizar todo lo aprendido en el momento y confeccionar así una práctica universitaria para los alumnos de Sistemas Eléctricos de tercer año de ingeniería eléctrica.

4. Discusión y conclusiones

Referencias

- [1] ANSOFT. *ANSOFT Maxwell 3D V15 User Guide*, 2012. URL https://ansoft-maxwell.narod.ru/en/CompleteMaxwell3D_V15.pdf. Accedido: 2024-06-22.
- [2] D. J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*, 2005.
- [3] IEEE Spain. *Doscientos aniversario de Oersted y el descubrimiento del electromagnetismo*. URL <https://ieeespain.org/doscientos-aniversario-oersted-y-el-descubrimiento-del-electromagnetismo/>. Accedido: 24-06-2024.
- [4] N. Jerez. *Problemas de Máquinas Eléctricas*, 2016. URL <https://www.researchgate.net/profile/Nicolas-Jerez-3/>. Accedido: 2024-06-04.
- [5] R. Kaye, B. Turman, and S. Shope. *Applications of coilgun electromagnetic propulsion technology*, 08 2002. URL <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/1189573>. Accedido: 05-06-2024.
- [6] V. K. Sai Chaithanya. *A Review on Technological Advancement in Electromagnetic Coil Gun System*, 2018. URL <https://www.ijert.org/>. Accedido: 05-06-2024.
- [7] Purcell, Edward M. and Morin, David J. *Electricidad y magnetismo*, 2013.
- [8] P. A. Tipler and G. Mosca. *Physics for Scientists and Engineers*. W. H. Freeman, New York, NY, 6th edition, 2008.

Anexo I. Código de MATLAB para la calculadora de fuerza.

En este anexo se presenta el código escrito para la calculadora expuesta en el apartado de desarrollo teórico 3.1. El código para la calculadora es ligeramente diferente ya que recibe las variables del campo *Value* de los componentes de la interfaz en lugar de desde un valor numérico fijo, pero el procedimiento que ejecuta es el mismo que se muestra a continuación:

```
1 % Propiedades electromagneticas
2 mu0 = 4 * pi * 10^-7; % Permeabilidad del vacio [H/m]
3 mu_fe = 5000; % Permeabilidad relativa del hierro
4 N = 500; % Numero de espiras
5 I_c = 3.65; % Corriente de la bobina
6
7 % Geometria
8 h_c = 0.05321; % Longitud de la bobina [m]
9 r_c = 0.01064; % Radio externo de la bobina [m]
10 l_fe = 0.096; % Longitud del vastago [m]
11 r_fe = 0.003045; % Radio del vastago [m]
12
13 S_c = pi * r_c ^ 2; % Seccion de la bobina [m^2]
14 S_bar = pi * r_fe ^ 2; % Seccion del vastago [m^2]
15 S_disp = 2 * S_c; % Seccion de dispersion [m^2]
16
17 % Vectores espaciales
18 num_points = 2000; % Numero de puntos
19 x = linspace(0, h_c, num_points); % Region de movimiento
20
21 % Definicion de los vectores magneticos
22 R_dispc = zeros(size(x));
23 R_phi = zeros(size(x));
24 R_B = zeros(size(x));
25 R_airc = zeros(size(x));
26 R_total = zeros(size(x));
27 Phi = zeros(size(x));
28 B = zeros(size(x));
29 F = zeros(size(x));
30
31 % Calculos
32 for i = 1:length(x)
33     % Calculo de reluctancias:
34     R_dispc(i) = h_c / (mu0 * S_disp); % Reluctancia de
35         % dispersion de la bobina [H^-1]
36     R_B(i) = l_fe / (mu_fe * mu0 * S_bar); % Reluctancia
37         % del vastago [H^-1]
38     R_phi(i) = ((h_c + l_fe) - x(i)) / (mu0 * S_disp); %
39         % Reluctancia de dispersion [H^-1]
40     R_airc(i) = (h_c - x(i)) / (mu0 * S_c); % Reluctancia
41         % del aire dentro de la bobina [H^-1]
42
43     R_total(i) = R_dispc(i) + R_phi(i) + R_B(i) + R_airc(
44         i); % Reluctancia total [H^-1]
```

```

40
41      % Flujo [Wb]
42      Phi(i) = (N * I_c) / R_total(i);
43
44      % Induccion magnetica [T]
45      B(i) = Phi(i) / S_bar;
46
47      % Fuerza en x(i) [N]
48      F(i) = 0.5 * B(i)^2 * S_bar / mu0;
49  end
50
51  % Graficas
52
53  % Reluctancias R[H^-1]
54  figure;
55  hold on;
56  plot(x, R_dispC, 'r', 'DisplayName', 'R_{dispC}');
57  plot(x, R_B, 'g', 'DisplayName', 'R_{bar}');
58  plot(x, R_phi, 'b', 'DisplayName', 'R_{phi}');
59  plot(x, R_airc, 'b', 'DisplayName', 'R_{airc}');
60  plot(x, R_total, 'k', 'DisplayName', 'R_{total}');
61  xlabel('Posicion del vastago [m]');
62  ylabel('Reluctancias [H^-1]');
63  title('Reluctancias vs posicion');
64  legend show;
65  legend('Location', 'best');
66  grid on;
67  hold off;
68
69  % Induccion magnetica B[T]
70  figure;
71  plot(x, B, 'LineWidth', 2);
72  xlabel('Posicion del vastago [m]');
73  ylabel('Induccion magnetica [T]');
74  title('Induccion magnetica vs posicion');
75  grid on;
76
77  % Fuerza [N]
78  figure;
79  plot(x, F, 'LineWidth', 2);
80  xlabel('Posicion del vastago [m]');
81  ylabel('Fuerza magnetica [N]');
82  title('Fuerza vs posicion');
83  grid on;

```