***Коллоквиум 4***

***Анализ ценных бумаг в условиях определенности***

1. Простые и сложные проценты. Начисление процентов и инфляция.
2. Номинальная и эффективная ставка процента, учетная ставка, реальная ставка, налоги
3. Метод дисконтированных платежей и его использование при оценке финансового актива
4. Формулы наращенной суммы по простым и сложным процентам
5. Формулы современной величины по простым и сложным процентам.
6. Наращенная сумма годовой ренты
7. Наращенная сумма годовой ренты с начислением процентов несколько раз в году
8. Наращенная сумма р-срочной ренты
9. Определение параметров ренты – размер и срок
10. Определение параметров ренты – размер и ставка процентов
11. Расчет срока ссуды и процентных ставок
12. Номинальная и эффективная ставки процентов

### Анализ купонных и бескупонных облигаций с помощью метода дисконтирования

### Модели поведения дивидендов

### Анализ стоимости и доходности акций. Модель нулевого и постоянного роста дивидендов

1. Анализ стоимости и доходности акций Модель переменного роста дивидендов
2. Конвертация валюты и наращение процентов
3. Погашение задолженности частями.
4. Модели изменения потока дивидендов
5. Контур финансовой операции. Переменная сумма счета.
6. Контур финансовой операции. Актуарный метод и правило торговца
7. Дюрация облигации и ее свойства
8. Дюрация бескупонной облигации
9. Дюрация купонной облигации
10. Дюрация портфеля облигаций
11. Защита портфеля облигаций от изменения процентной ставки
12. Показатель выпуклости облигации и его свойства
13. Свойства дюрации портфеля облигаций.
14. Свойства показателя выпуклости портфеля облигаций.
15. Облигация и ее характеристики
16. Текущая стоимость облигации при выплате купонов один раз в году
17. Текущая стоимость облигации при выплате купонов m раз в году
18. Текущая стоимость бессрочной облигации
19. Рыночная цена облигации
20. Курс облигации и доходность облигации к моменту погашения
21. Свойства рыночной цены и дохожности облигации
22. Получить формулу для текущей стоимости облигации , если купонные выплаты производятся несколько раз в году.
23. Получите уравнение, из которого находится доходность облигации к погашению
24. Выведите формулу для текущей стоимости облигации, когда купонные платежи даются раз в году
25. Доказать, что если текущая стоимость облигации растет, то ставка процента падает и наоборот.
26. Доказать утверждение «Дюрация бескупонной облигации равна времени ее погашения».
27. Докажите, что облигация продается по номиналу тогда и только тогда, когда ее доходность к погашению равна купонной ставке
28. Докажите, что Облигация продается с дисконтом тогда и только тогда, когда ее доходность к погашению больше купонной ставке.
29. Доказать, что если рыночная цена облигации растет, то ее доходность к погашению падает и наоборот
30. Доказать утверждение «Если сумма денег предоставляется в заем на один год при однократном начислении процентов, то дюрация такой сделки равна 1.
31. Дайте обоснование утверждению «Рыночная цена облигации как функция доходности к погашению является непрерывной, монотонно убывающей, вогнутой функцией, принимающей любые положительные значения».
32. Дайте обоснование утверждению «Текущая стоимость облигации как функция ставки процента является непрерывной, монотонно убывающей, вогнутой функцией, принимающей любые положительные значения».
33. Доказать, что дюрация является невозрастающей функцией процентной ставки,
34. Доказать, что дюрация является убывающей функцией купонной ставки
35. Защита портфеля облигаций от изменения процентной ставки

***1. Простые и сложные проценты. Начисление процентов и инфляция***

## Под процентными деньгами (кратко – процентами) в финансовых расчетах понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг в любой форме: в виде выдачи денежной ссуды, продажи в кредит, помещения денег на сберегательный счет, учета векселя, покупки сберегательного сертификата или облигаций и т.д.

Начисление процентов, как правило, производится дискретно, т.е. в отдельные (обычно равноотстоящие) моменты времени. Причем в качестве периодов начисления принимают год, полугодие, квартал, месяц (дискретные проценты). Иногда практикуют ежедневное начисление, а в ряде случаев удобно применять непрерывные проценты.

Проценты либо выплачиваются кредитору по мере их начисления, либо присоединяются к сумме долга. Процесс увеличения денежных средств в связи с присоединением процентов к сумме долга, называют наращением или ростом первоначальной суммы.

В практике существуют различные начисления процентов, зависящие от условий контрактов. Соответственно применяют различные виды процентных ставок. Одно из основных отличий связано с выбором исходной базы (суммы) для начисления процентов. Ставки процентов могут применяться к одной и той же начальной сумме на протяжении всего срока ссуды или к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами. В первом случае они называются **простыми**, а во втором – **сложными процентными ставками**.

## Начисление процентов и инфляция

Следствием инфляции является падение покупательной способности денег, которое за период  характеризуется индексом . *Индекс**покупательной способности*  равен обратной величине индекса цен , т.е. . (2.34)

*Индекс цен* указывает, во сколько раз выросли цены за указанный промежуток времени.

**Наращение по простым процентам.** Если наращенная за  лет сумма денег составляет , а индекс цен равен , то реально наращенная сумма денег с учетом их покупательной способности равна

. (2.35)

Пусть ожидаемый среднегодовой темп инфляции (характеризующий прирост цен за год) равен . Тогда годовой индекс цен составит .

Если наращение производится по простой ставке в течение  лет, то реальное наращение при темпе роста инфляции  составит

, (2.36)

где в общем случае , (2.37)

и, в частности, при неизменном темпе роста цен ,

. (2.38)

Процентная ставка, которая при начислении простых процентов компенсирует инфляцию, равна . (2.39)

Один из способов компенсации обесценивания денег заключается в увеличении ставки процентов на величину так называемой **инфляционной премии**. Скорректированная таким образом ставка называется **брутто-ставкой**. Брутто-ставка, которую будем обозначать символом , находится из равенства скорректированного на инфляцию множителя наращения по брутто**-**ставке и множителя наращения по реальной ставке процента , (2.40)

откуда  (2.41)

**Наращение по сложным процентам.** Наращенная по сложным процентам сумма к концу срока ссуда с учетом падения покупательной способности денег (т.е. в неизменных рублях) составит

 (2.42)

где индекс цен определяется выражением (2.37) или (2.38), в зависимости от непостоянного или постоянного темпа инфляции.

В этом случае падение покупательной способности денег компенсируется при ставке обеспечивающей равенство .

При начислении сложных процентов применяются **два способа компенсации потерь** от снижения покупательной способности денег.

1. Корректировка ставки процентов, по которой производится наращение, на величину **инфляционной премии.** Ставка процентов, увеличенная на величину инфляционной премии, называется брутто-ставкой. Будем обозначать ее символом . Считая, что годовой темп инфляции равен  можем написать равенство соответствующих множителей наращения

 (2.43)

где  – реальная ставка.

Отсюда  (2.44)

т.е. инфляционная премия равна 

2. Индексация первоначальной суммы Р. В этом случае сумма  корректируется согласно движению заранее оговоренного индекса. Тогда

 (2.45)

Нетрудно заметить, что и в случае 1. и в случае 2. в итоге мы приходим к одной и той же формуле наращения. В ней первые два сомножителя в правой части отражают индексацию первоначальной суммы, а последние два – корректировку ставки процента.

***2. Номинальная и эффективная ставка процента, учётная ставка, реальная ставка, налоги***

## Номинальная и эффективная ставки процентов

Пусть годовая ставка сложных процентов равна , а число периодов начисления в году – . Тогда каждый раз проценты начисляют по ставке . Ставка  называется **номинальной.** Начисление процентов по номинальной ставке производится по формуле

, (2.10) где  – число периодов начисления.

Если срок ссуды измеряется дробным числом периодов начисления, то при ‑разовом начислении процентов в году наращенную сумму можно рассчитать несколькими способами, приводящими к различным результатам:

1) по формуле сложных процентов:

, (2.11) где  – число (возможно дробное) периодов начисления процентов;  – период начисления процентов,

2) по смешанной формуле:

, (2.12) где  – целое число периодов начисления (т.е.  – целая часть от деления всего срока ссуды  на период начисления );

 – оставшаяся часть периода начисления ().

**Эффективная ставка** показывает, какая годовая ставка сложных процентов дает тот же финансовый результат, что и ‑разовое наращение в год по ставке .

Если проценты капитализируются  раз в год, каждый раз со ставкой , то по определению эффективной ставки можно записать равенство для соответствующих множителей наращения

, (2.13) где  – эффективная ставка;  – номинальная ставка.

Отсюда получаем, что связь между эффективной и номинальной ставками выражается соотношением . (2.14)

Обратная зависимость имеет вид . (2.15)

Для расчета процентов при учете векселей применяется **учетная ставка**, которую обозначим символом .

По определению простая годовая учетная ставка находится как . Размер дисконта или учета, удерживаемого банком, равен , откуда следует

. (1.6)

Множитель  называется дисконтным множителем. Срок  измеряет период времени от момента учета векселя до даты его погашения в годах. Дисконтирование по учетной ставке производится чаще всего при условии, что год равен 360 дням.

**Наращение по учетной ставке**. Учетная ставка может использоваться для наращения, т.е. для расчета  по . В этом случае .

На практике приходится решать и обратную задачу – находить реальную ставку процента в условиях инфляции. Из соотношений между множителями наращения нетрудно вывести формулы, определяющие реальную ставку  по заданной (или объявленной) брутто-ставке .

При начислении простых процентов годовая реальная ставка процентов равна

 (2.46)

При начислении сложных процентов реальная ставка процентов определяется следующим выражением:

 (2.47)

В рекламном «море» предложений различных банков по кредитным операциям по сложным процентам можно ориентироваться, если пересчитать их на эффективную годовую ставку. При номинальной ставке , начислении процентов  раз в году и сроке кредита  лет наращенная сумма равна

. (2.48)

Если  и  одинаковы, то при одинаковом  и процентной ставке , обеспечивающей ту же доходность при начислении процентов один раз в году

. (2.49)

Приравнивая наращенные суммы, для , которая в этом случае называется эффективной годовой ставкой, получим:

. (2.50)

**Налог на полученные проценты**

В ряде стран проценты облагаются налогом, что, естественно, уменьшает реальную наращенную сумму.

Обозначим наращенную сумму до выплаты налогов через S, а с учетом выплаты – как S'. Пусть ставка налога на проценты равна g. В случае простых процентов налог равен . Найдем наращен­ную сумму S' после выплаты налогов:



Таким образом, учет налога сводится к сокращению процентной ставки: вместо ставки i фактически применяется ставка . В долгосрочных операциях при начислении налога на сложные проценты возможны следующие варианты:

1) налог начисляется за весь срок сразу, т. е. на всю сумму процентов;

2) сумма налога определяется за каждый истекший год. Тогда еже годная сумма налога будет величиной переменной, так как сумма про­ центов увеличивается во времени. В первом случае сумма налога равна , а наращен­ная сумма после выплаты налога:



Рассмотрим второй случай. Обозначим налог за год t как Gt. Тогда



За первый год налог составит: 

за второй: 

за n-й: .

Налог за п лет: 

***3. Метод дисконтированных платежей и его использование при оценке финансового актива***

Чистая текущая стоимость (*Net Present Value* – *NPV*) ценной бумаги, определяемая как разность «фундаментальной» и рыночной стоимости ценной бумаги: *NVP = V-P*.

Анализ NPV позволяет дать рекомендации относительно инвестиционной привлекательности ценных бумаг, т.е. о целесообразности их покупки или продажи в текущей момент времени. Рекомендации для ценных бумаг с сопоставимым риском основываются на «золотом правиле инвестирования»: «покупай дёшево и продавай дорого», т.е. рекомендуется покупать «недооцененные» (при NPV > 0) и продавать «переоцененные» рынком ценные бумаги (при NPV < 0). Условие NPV = 0 соответствует «равновесным» рыночным ценам активов (P = V) и поэтому может служить для определения «нормальной» или «внутренней» доходности ценных бумаг (Internal Rate of Return – IRR), т.е. доходности, на которую можно рассчитывать при покупке ценной бумаги по её «истинной» стоимости.

Для определения текущей стоимости ценной бумаги при заданном ожидаемом по ним потоке платежей традиционно используется *метод дисконтирования платежей*.

Будем использовать следующие обозначения:

*T* – количество периодов владения ценной бумагой, оставшихся до её погашения;

*Ci* – сумма платежа по ценной бумаге, ожидаемая в периоде *t*, *t =*1, 2, …, *T*;

 – текущая стоимость (*present value*) ценной бумаги в текущем периоде *t*=0.

Пусть платежи поступают в конце каждого периода владения и подлежат капитализации с начислением процентом по формуле сложных процентов. При этом ставка дисконтирования платежей остаётся постоянной в течении всего срока обращения ценной бумаги и равна *R*.

Тогда в соответствии с методом дисконтирования платежей *текущая стоимость ценной бумаги* определяется по формуле

, (4.1)

откуда следует, что .

Таким образом, текущая стоимость ценной бумаги может интерпретироваться как сумма, вложив которую на срок, равный сроку обращения ценной бумаги, под некоторую ставку *R*, можно в итоге получить сумму, равную стоимости всех ожидаемых по ценной бумаге платежей. При этом ставку *R* удобно интерпретировать как *ставку ожидаемой доходности вложений с сопоставимой степенью риска*.

Очевидно, воспользоваться формулой (4.1) можно только, если характеристики *R* и {*Ct*} известны. На практике истинные значения *R* и {*Ct*} неизвестны и поэтому используются их *ожидаемые* (*прогнозные*) значения.

***4. Формулы наращенной суммы по простым и сложным процентам***

## Формула наращения по простым процентам

Под **наращенной суммой** ссуды (долга, депозита, других видов инвестированных средств) понимается первоначальная ее сумма вместе с начисленными на нее процентами к концу срока.

Пусть  – первоначальная сумма денег,  – ставка простых процентов, тогда  – начисленные проценты за один период,  – начисленные проценты за  периодов.

Процесс изменения суммы долга с начисленными простыми процентами описывается арифметической прогрессией, членами которой являются величины

, ,  и т.д. до .

Первый член этой прогрессии равен , разность – , а последний член определяемый как

, (1.1)

и является наращенной суммой. Формула (1.1) называется **формулой наращения по простым процентам** или кратко – формулой простых процентов. Множитель  является **множителем наращения**. Он показывает, во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной суммы. Наращенную сумму можно представить в виде двух слагаемых: первоначальной суммы  и суммы процентов 

, (1.2)

где . (1.3)

При начислении простых процентов по ставке  за базу принимается первоначальная сумма долга. Увеличение наращенной суммы  линейно зависит от времени.

## Формула наращения по сложным процентам

Пусть первоначальная сумма долга равна , тогда через один год сумма с присоединенными процентами составит , через 2 года – , через  лет – . Таким образом, получаем формулу наращения для сложных процентов , (2.1)

где  – наращенная сумма;

 – годовая ставка сложных процентов;

 – срок ссуды;

 – множитель наращения.

В практических расчетах в основном применяют дискретные проценты, т.е. проценты, начисляемые за одинаковые интервалы времени (год, полугодие, квартал и т.д.). Наращение по сложным процентам происходит по закону геометрической прогрессии, первый член которой равен , а знаменатель – .

Отметим, что при сроке  наращение по простым процентам дает больший результат, чем по сложным, а при  – наоборот. В этом нетрудно убедиться на конкретных числовых примерах. Наибольшее превышение суммы, наращенной по простым процентам, над суммой, наращенной по сложным процентам (при одинаковых процентных ставках), достигается при .

***5. Формулы современной величины по простым и сложным процентам***

В практике часто приходится решать задачу, обратную к задаче наращения процентов, когда по заданной сумме , соответствующей концу финансовой операции, требуется найти исходную сумму . Расчет  по  называется **дисконтированием** суммы . Величину , найденную дисконтированием, называют **современной величиной** (**текущей стоимостью**) суммы . Проценты в виде разности  называются **дисконтом**, или **скидкой**. Процесс начисления и удержания процентов вперед (в виде дисконта) называют **учетом**. Дисконт как скидка с конечной суммы долга может определяться через процентную ставку или в виде абсолютной величины.

Известны два вида дисконтирования: математическое дисконтирование и банковский (коммерческий) учет.

**Математическое дисконтирование**. Этот вид дисконтирования представляет собой решение задачи, обратной наращению первоначальной ссуды. Если в прямой задаче определяется , то в обратной находится . Дробь в правой части равенства при величине  называется **дисконтным множителем**. Этот множитель показывает, какую долю составляет первоначальная сумма ссуды в окончательной величине долга. Дисконт суммы  равен .

**Банковский, или коммерческий учет**. Операция учета (учета векселей) заключается в том, что банк до наступления срока платежа по векселю или другому платежному обязательству покупает его у владельца (являющегося кредитором) по цене ниже той суммы, которая должна быть выплачена по нему в конце срока, т.е. приобретает (учитывает) его с дисконтом.

Для расчета процентов при учете векселей применяется **учетная ставка**, которую обозначим символом .

По определению простая годовая учетная ставка находится как . Размер дисконта или учета, удерживаемого банком, равен , откуда следует

. (1.6)

Множитель  называется дисконтным множителем. Срок  измеряет период времени от момента учета векселя до даты его погашения в годах. Дисконтирование по учетной ставке производится чаще всего при условии, что год равен 360 дням.

**Наращение по учетной ставке**. Учетная ставка может использоваться для наращения, т.е. для расчета  по . В этом случае .

Операции наращения и дисконтирования по своей сути противоположны, но ставка наращения и учетная ставка могут использоваться для решения обеих задач. В этом случае в зависимости от применяемой ставки можно различать прямую и обратную задачи.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Ставка | Прямая задача | Обратная задача |
| наращения () | наращение: | дисконтирование: |
| учетная () | дисконтирование: | наращение: |

**Совмещение начисления процентов по ставке наращения и дисконтирования по учетной ставке**. В том случае, когда учету подлежит долговое обязательство, предусматривающее начисление простых процентов на первоначальную сумму долга, необходимо решить две задачи: (1) определить конечную сумму долга на момент его погашения; (2) рассчитать сумму, получаемую при учете, путем дисконтирования конечной суммы долга, применяя учетную ставку, действующую в момент учета.

Решение этих задач можно записать в виде одной формулы, содержащей наращение по ставке простых процентов, фигурирующей в долговом обязательстве, и дисконтирование по учетной ставке:

,

где  – первоначальная сумма ссуды;

 – сумма, получаемая при учете обязательства;

 – общий срок платежного обязательства, в течение которого начисляются проценты,

 – срок с момента учета до погашения долга.

Как и в случае простых процентов, рассмотрим два вида учета – математический и банковский.

**Математический учет**. В этом случае решается задача, обратная наращению по сложным процентам. Запишем исходную формулу для наращения  и решим её относительно .

, (2.16)

где  – учетный или дисконтный множитель.

. (2.17)

Если проценты начисляются  раз в году, то получим

, (2.18)

где  – дисконтный множитель.

. (2.19)

Величину , полученную дисконтированием , называют **современной**, или **текущей стоимостью**, или **приведенной величиной** . Суммы  и  эквивалентны в том смысле, что платёж в сумме  через  лет равноценен сумме , выплаченной в настоящий момент.

Разность  называют **дисконтом**.

**Банковский учет**. В этом случае предполагается использование сложной учетной ставки. Дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется при помощи формулы

, (2.20)

где  – сложная годовая учетная ставка.

Дисконт в этом случае равен

. (2.21)

При использовании сложной учетной ставки процесс дисконтирования происходит с прогрессирующим замедлением, т.к. учетная ставка каждый раз применяется к сумме, уменьшенной за предыдущий период на величину дисконта.

***6. Наращенная сумма годовой ренты***

**Обычная годовая рента.** Пусть в конце каждого года в течение  лет на расчетный счет вносится по  рублей, проценты начисляются один раз в год по ставке . В этом случае первый взнос к концу срока ренты возрастет до величины  т.к. на сумму  проценты начислялись в течение  года. Второй взнос увеличивается до  и т.д. На последний взнос проценты не начисляются. Таким образом, в конце срока ренты ее наращенная сумма будет равна сумме членов геометрической прогрессии

в которой первый член равен  знаменатель –  число членов . Искомая сумма равна где 

Параметр и называется **коэффициентом наращения ренты**. Он зависит только от срока ренты  и уровня процентной ставки . Поэтому его значения могут быть представлены в таблице с двумя графами.

***7. Наращенная сумма годовой ренты с начислением процентов несколько раз в году***

Поток платежей, все члены которого являются положительными величинами, а временные интервалы по выплатам постоянны, называют ***финансовой рентой***, или ***аннуитетом***.

Финансовая рента характеризуется следующими параметрами:

***член ренты*** – величина каждого отдельного платежа;

***период ренты*** – временной интервал между двумя соседними платежами;

***срок ренты*** – время, измеренное от начала финансовой ренты до конца ее последнего периода;

***процентная ставка*** – ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей, образующих ренту;

***число платежей в году***;

***число начислений процентов в году***;

***моменты платежей внутри периода ренты***. Формула обычной годовой ренты, когда в конце каждого года в течение n лет на расчетный счет вносится по R рублей, а проценты начисляются один раз в году по ставке i, имеет вид: .

Если проценты начисляются m раз в году, то формула наращенной суммы ренты равна: .

***8. Наращенная сумма р-срочной ренты***

Поток платежей, все члены которого являются положительными величинами, а временные интервалы по выплатам постоянны, называют ***финансовой рентой***, или ***аннуитетом***.

Финансовая рента характеризуется следующими параметрами:

***член ренты (размер)*** – величина каждого отдельного платежа;

***период ренты*** – временной интервал между двумя соседними платежами;

***срок ренты*** – время, измеренное от начала финансовой ренты до конца ее последнего периода;

***процентная ставка*** – ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей, образующих ренту;

***число платежей в году***;

***число начислений процентов в году***;

***моменты платежей внутри периода ренты***.

Формула обычной годовой ренты, когда в конце каждого года в течение n лет на расчетный счет вносится по R рублей, а проценты начисляются один раз в году по ставке i, имеет вид: .

Если рента р-срочная, а проценты начисляют несколько раз в году, то выделяют следующие случаи:

1. рента р-срочная, проценты начисляются один раз в году (m = 1). Наращенная сумма ренты равна:
2. рента р-срочная, начисление процентов и поступление платежа совпадают по времени (m = р). Наращенная сумма ренты равна:
3. рента р-срочная, при чем p≥1, m≥1. Это самый общий случай р-срочной ренты с начислением процентов m раз в году, причем возможна ситуация, когда p≠m. В этом случае наращенная сумма равна:

.

***9. Определение параметров ренты – размер и срок***

Поток платежей, все члены которого являются положительными величинами, а временные интервалы по выплатам постоянны, называют ***финансовой рентой***, или ***аннуитетом***.

Финансовая рента характеризуется следующими параметрами:

***член ренты*** – величина каждого отдельного платежа;

***период ренты*** – временной интервал между двумя соседними платежами;

***срок ренты*** – время, измеренное от начала финансовой ренты до конца ее последнего периода;

***процентная ставка*** – ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей, образующих ренту;

***число платежей в году***;

***число начислений процентов в году***;

***моменты платежей внутри периода ренты***. Формула обычной годовой ренты, когда в конце каждого года в течение n лет на расчетный счет вносится по R рублей, а проценты начисляются один раз в году по ставке i, имеет вид: .

***Размер (член) ренты*** в случае обычной годовой ренты вычисляется по формуле:

***Срок обычной*** годовой ренты равен:

***10. Определение параметров ренты – размер и ставка процентов***

Поток платежей, все члены которого являются положительными величинами, а временные интервалы по выплатам постоянны, называют ***финансовой рентой***, или ***аннуитетом***.

Финансовая рента характеризуется следующими параметрами:

***член ренты*** – величина каждого отдельного платежа;

***период ренты*** – временной интервал между двумя соседними платежами;

***срок ренты*** – время, измеренное от начала финансовой ренты до конца ее последнего периода;

***процентная ставка*** – ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей, образующих ренту;

***число платежей в году***;

***число начислений процентов в году***;

***моменты платежей внутри периода ренты***. Формула обычной годовой ренты, когда в конце каждого года в течение n лет на расчетный счет вносится по R рублей, а проценты начисляются один раз в году по ставке i, имеет вид: .

***Размер (член) ренты*** в случае обычной годовой ренты вычисляется по формуле: .

***Ставка процентов*** для обычной годовой ренты рассчитывается по формуле:

***11. Расчет срока ссуды и процентных ставок***

***Срок ссуды*** равен: , где n – срок ссуды; t – срок операций(ссуды) в днях; K – число дней в году (временная база). Определение числа дней ссуды также м.б. точным и приблизительным. В первом случае вычисляют фактическое число дней между двумя датами, во втором – продолжительность ссуды определяется числом месяцев и дней ссуды, при этом все месяцы приближенно считаются равными, содержащими по 30 дней. В обоих случаях дата выдачи и дата погашения долга считается за один день. Подсчет точного числа дней между датами можно осуществить на компьютере, взяв разность этих дат, или с помощью специальной таблицы, в которой представлены порядковые номера дат в году.

***Уровень процентной*** ставки может служить мерой доходности операции, критерием сопоставления альтернатив и выбора наиболее выгодных условий. Из формул (1.1):



и (1.6) :



получаем ставку наращения i и учетную ставку d :

Напомним, что срок n в двух формулах имеет разный смысл: в первом случае

это весь срок операции, а во втором – срок, оставшийся до погашения.

***12. Номинальная и эффективная ставки процентов***

Пусть годовая ставка сложных процентов равна j , а число периодов начисления в году – m . Тогда каждый раз проценты начисляют по ставке j / m.

Ставка j называется ***номинальной***. Начисление процентов по номинальной

ставке производится по формуле



где N – число периодов начисления.

Если срок ссуды измеряется дробным числом периодов начисления, то при m-разовом начислении процентов в году наращенную сумму можно рассчитать несколькими способами, приводящими к различным результатам:

1. по формуле сложных процентов: 

где N /τ – число (возможно дробное) периодов начисления процентов;

τ – период начисления процентов;

2) по смешанной формуле:



где a – целое число периодов начисления (т. е. a = [N / τ ] – целая часть от де-

ления всего срока ссуды N на период начисления τ );

b – оставшаяся часть периода начисления (b = N / τ - a). ***Эффективная ставка*** показывает, какая годовая ставка сложных процентов дает тот же финансовый результат, что и m -разовое наращение в год по ставке j / m.

Если проценты капитализируются m раз в год, каждый раз со ставкой j/m, то по определению эффективной ставки можно записать равенство для соответствующих множителей наращения:



где iэ – эффективная ставка;

j – номинальная ставка.

Отсюда получаем, что связь между эффективной и номинальной ставка-

ми выражается соотношением



Обратная зависимость имеет вид:



**13.Анализ купонных и бескупонных облигаций с помощью метода дисконтирования.**

Анализ купонных облигаций**.** Для определения текущей стоимости купонной облигации воспользуемся общей формулой *текущей стоимости ценных бумаг* методом дисконтирования платежей (4.1),при некоторых предположениях, учитывающих особенности потока платежей по купонным облигациям. Введём обозначения:

*T < ∞* – количество периодов владения, оставшихся до погашения облигации;

*F* – финальная выплата по облигации, совпадающая с её номинальной стоимостью;

*q > 0* – ставка купонного дохода (*купонная доходность*) за один период владения в долях;

*m ≥ 1* – частота выплат купонного дохода за один период владения;

*R > 0* – ставка дисконтирования купонного дохода, соответствующая одному периоду владения. Ставка *R* интерпретируется как ожидаемая доходность вложений с сопоставимым риском.

Относительно потока платежей {*Ct*} предполагается, что

 (4.4)

Предполагается, также, что платежи в виде купонного дохода поступают в конце каждого периода и подлежат капитализации с начислением сложных процентов.

Рассмотрим вначале случай, когда *T < ∞*, *q > 0* и *m = 1*, т.е. когда период выплат купонного дохода совпадает с периодом владения облигации. С учётом сделанных предположений из (4.1) следует, что текущая стоимость купонной облигации определяется соотношением:

  (4.5)

где  текущая стоимость ренты с *T* единичными выплатами и постоянной ставкой наращения *R*;- текущая стоимость финальной выплаты по облигации, *Fo < F*.

Обозначим *d*=(1+*R*)-1 – дисконтный множитель. По формуле для суммы *T* первых членов геометрической прогрессии имеем:  (4.6)

и окончательно получаем формулу ,(4.7)

Если известна текущая рыночная стоимость облигации (цена покупки) *P*, то можно оценить инвестиционную привлекательность облигации на основе чистой текущей стоимости *NPV* и внутренней доходности *R\**, которая, как известно, является решением уравнения *NPV* = 0, т.е. удовлетворяет тождеству ,(4.8)

Ставка внутренней доходности облигации *R\** определяет так называемую *полную доходность облигации* (*доходность к погашению*), поскольку учитывает все виды платежей по облигации до момента её погашения.

Для купонных облигаций с несколькими выплатами купонного дохода в течении одного периода владения (т.е. при *m > 1*) может быть проведён аналогичный анализ, если предварительно положить:

*R≡R(m)* – номинальная ставка начисления процентов за один период владения в предположении, что *m > 1*;

*R/m* – ставка начисления процентов за один период выплат купонного дохода;

*q/m* – ставка купонного дохода за один период выплат.

По аналогии с предыдущим случаем можно получить следующую формулу для текущей стоимости облигации: ,

Анализ бескупонных облигаций. В предположении *q = 0* и *1 ≤ T < ∞* текущая стоимость бескупонной *T‑*периодной облигации совпадает с текущей ценой финальной выплаты, т.е.: , (4.9) . Из (4.9) и условия *NPV = V – P* следует, что внутренняя доходность облигации *R\** удовлетворяет тождеству (4.10) и определяется по формуле ,

Ставка *R\** определяет полную доходность или доходность к погашению бескупонной *T* – периодичной облигации, так как разность между ценой покупки облигации и её номинальной стоимостью, выплачиваемой при погашении облигации, является единственным источником дохода владельца данной облигации.

**14.Модели поведения дивидентов.**

Пусть *Dt* – величина дивидендов, выплачиваемых по акциям в периоде владения *t*. Предполагается, что дивиденды поступают в конце каждого периода и подлежат капитализации с начислением сложных процентов. При использовании метода дисконтирования платежей в рассматриваемом случае необходимо учитывать две особенности потока платежей {*Dt*} по акциям:

1) поток платежей {*Dt*} (*t*= 1, 2, …, *T*) по акциям представляет собой поток дивидендов, выплата которых ожидается в течение всего периода обращения акций, откуда следует, что *T =  ∞*;

2) доход в виде дивидендов по обыкновенным акциям, в отличии от дохода по облигациям, не является фиксированным, т.е. оговоренным условиями выпуска, и, следовательно, при оценке текущей таких акций могут использоваться лишь прогнозные значения будущих дивидендов.

Предположим, что ставка дисконтирования дивидендов, интерпретируемая как ожидаемая доходность вложений с сопоставимой степенью риска, в течении всего срока обращения акций остаётся постоянной и равной *R*. Тогда в соответствии с методом дисконтирования платежей текущая стоимость акции определяется как сумма текущих стоимостей всех ожидаемых по акции дивидендов: ,(4.11)

Таким образом, для практического использования формулы (4.11) инвестор должен знать прогнозные значения всех будущих дивидендов {*Dt*} (*t*= 1, 2, …). В силу «неограниченности жизни» акций задача предсказания бесконечного потока дивидендов оказывается неразрешимой без дополнительных предположений в виде определённых *моделей изменения дивидендов*.

Будем предполагать, что поток дивидендов по акциям порождается следующей рекуррентной формулой:,*t*= 1, 2, …,(4.12) где *D0* – некоторое известное значение, например величина последних дивидендов, выплаченных по данным акциям. Величина *gt* определяется из соотношения:,*t*= 1, 2, …,т.е.является *темпом прироста дивидендов* за период владения *t*.

Различные предположения относительно темпов прироста дивидендов {*gt*} приводят к различным моделям изменения дивидендов. Наиболее известными являются модели нулевого, постоянного и переменного роста дивидендов.

*Модель нулевого роста дивидендов* описывается соотношением (4.12) при условии, что

*gt* = 0, *t*= 1, 2, …Условие означает, что в будущем в течении всего срока обращения акций по ним ожидаются фиксированные дивиденды, т.е. *D*1*= D*2*= … = DT*, где *D0*– некоторая заданная величина дивидендов. На практике данная модель оказывается полезной при анализе *привилегированных* «*не участвующих*» *акций*, по которым не предусмотрено никаких выплат, кроме фиксированных дивидендов.

*Модель постоянного роста дивидендов* предполагает, что ожидается рост дивидендов с постоянным темпом, т.е. в (4.12) следует положить: *gt* = *g = const*, *t*= 1, 2, …,

где *g* – постоянный ожидаемый темп прироста дивидендов. Поскольку на выплату на выплату дивидендов может направляться лишь некоторая доля чистой прибыли корпорации, то следует положить, что *g < R*. Таким образом, в данном случае поток дивидендов {*Dt*} удовлетворяет следующему соотношению (*D0* – известная величина): , *t*= 1, 2, …,

Предположение о постоянстве дивидендов в течении всего срока обращения акций, очевидно, трудно осуществимо на практике. Однако в ряде случаев подобная модель может использоваться для оценки обыкновенных акций тех корпораций, которые придерживаются определённой дивидендной политики, направленной на поддержание курса акций за счёт постоянного (хотя, возможно, и невысокого) темпа прироста дивидендов.

*Модели переменного роста дивидендов* предполагают наличие двух и более этапов в жизни корпорации, отличающихся схемами выплат дивидендов. Приведём примеры подобных моментов.

Пусть модель включают два этапа. Первый этап состоит из фиксированного числа *T < ∞* периодов владения, начиная с текущего момента времени, второй этап – весь остальной срок обращения акций. Предполагается, что *D*1*= D*2*= … = DT* – заданные прогнозные значения дивидендов для первых *T* периодов владения. На втором этапе ожидается изменение дивидендов в соответствии с моделью постоянного роста дивидендов и темпом прироста *g*:

, *t*= 1, 2, …

**15.Анализ стоимости и доходности акций . Модель нулевого и постоянного роста дивидентов.**

*Модель нулевого роста дивидендов.*

Обозначим, *d=*(1+*R*)-1 – дисконтный множитель. Тогда на основании текущей стоимости акции методом дисконтирования платежей, которая определяется как сумма текущих стоимостей всех ожидаемых по акции дивидендов: , и условии *gt* = 0, *t*= 1, 2, … текущая стоимость акции в случае модели нулевого роста дивидендов допускает представление

.(4.16)

Так как *d < 1*, то по свойству суммы бесконечной геометрической прогрессии имеем:,что с учётом (4.16) влечёт .(4.17)

Из (4.17) следует, что текущая стоимость акции прямо пропорциональна величине выплачиваемых по ней дивидендов и обратно пропорциональна ожидаемой доходности вложений с сопоставимой степенью риска.

Для анализа инвестиционной привлекательности акций, как и в случае облигаций, используется чистая текущая стоимость *NPV* и внутренняя доходность *IRR*. Пусть *P* – текущая рыночная цена (цена покупки) акции. Для рассматриваемой модели из условия *NPV* = *V – P* = *0* получаем формулу для определения внутренней доходности акции: ,(4.18)

Ставка вида (4.18) обычно называется ставкой дивидендной доходности акции. Соотношение (4.18) подтверждает известный факт: доходность актива тем больше, чем больше ожидаемые по нему выплаты и чем меньше цена покупки данного актива.

*Модель постоянного роста дивидендов.*

*Н*а основании основании текущей стоимости акции методом дисконтирования платежей, которая определяется как сумма текущих стоимостей всех ожидаемых по акции дивидендов: , и потока дивидендов {*Dt*}, *t*= 1, 2, …, текущая стоимость акции в случае модели постоянного роста дивидендов определяется по формуле: ,(4.19) где использовано обозначение .

С учётом свойства суммы бесконечной геометрической прогрессии из (4.19) следует:

. (4.20)

Из условия *NPV = V – P = 0* (где *P* – рыночная цена покупки акции) получаем соотношение для внутренней доходности акции:.(4.21)

Формулы (4.20), (4.21) согласуются с ранее отмеченными закономерностями. В частном случае при *q = 0* из них следуют формулы (4.17), (4.18) для модели нулевого роста дивидендов. Если на различных этапах функционирования компании – эмитента имеют место различные схемы выплат дивидендов, то для анализа акций может использоваться модель переменного роста дивидендов.

16. **Анализ стоимости и доходности акций . Модель переменного роста дивидентов.**

*Модель переменного роста дивидендов.* Для определения текущей стоимости акции *V* на основе модели переменного роста дивидендов , *t*= 1, 2, …, применим метод дисконтирования платежей.

Введём обозначения  – текущая стоимость платежей по акции за первые *T* периодов; *V+* – текущая стоимость платежей по акции за оставшийся спустя *T* периодов срок обращения. Тогда текущая стоимость акции будет равна . Величина  определяется как текущая стоимость актива с фиксированным потоком платежей, примером которого является купонная облигация. Поэтому имеем: , (4.22) где *R* – ожидаемая доходность активов с сопоставимым риском.

Для нахождения *V+* вычислим вначале текущую стоимость акции *VT* в предложении, что текущим моментом является момент *T* и имеет место модель постоянного роста дивидендов. Согласно . : ,(4.23)

Величину *VT* можно интерпретировать как единовременное поступление, равноценное потоку платежей после периода *T* (например, как финальную выплату по *T‑*периодной облигации). Поэтому для нахождения её текущей стоимости к найденному значению *VT*  вида (4.23) следует применить процедуру дисконтирования: ,(4.24)

На основании (4.22), (4.24) и соотношения  получаем выражение для текущей стоимости акции в соответствии с моделью переменного роста дивидендов:

.

**17.Конвертация валюты и наращения процентов.**

Всего возможно 4 варианта наращения процентов:

1. Без конвертации. Валютные средства размещаются в качестве валютного депозита, наращение первоначальной суммы производиться по валютной ставке путем прямого применения формулы простых процентов.
2. С конвертацией. Исходные валютные средства конвертируются в рубли, наращение идет по рублевой ставке, в конце операции рублевая сумма конвертируется в исходную валюту.
3. С конвертацией. Исходные валютные средства конвертируются в рубли, наращение идет по рублевой ставке, в конце операции рублевая сумма конвертируется в исходную валюту.
4. С конвертацией. Рублевая сумма конвертируется в какую-либо конкретную валюту, которая инвестируется в валютный депозит. Проценты начисляются по валютной ставке. Наращенная сумма в конце операции обратно конвертируется в рубли.

Предварительно введем ОБОЗНАЧЕНИЯ:

 ‑ сумма депозита в валюте,

 ‑ сумма депозита в рублях,

 ‑ наращенная сумма в валюте,

 ‑ наращенная сумма в рублях,

 ‑ курс обмена в начале операции

(курс валюты в руб.),

 ‑ курс обмена в конце операции,

 ‑ срок депозита,

 ‑ ставка наращения для рублевых сумм (в виде десятичной дроби),

 ‑ ставка наращения для конкретной валюты.

ВАРИАНТ: .Операция состоит из трех этапов: обмена валюты на рубли, наращения рублевой суммы, обратное конвертирование рублевой суммы в исходную валюту. Наращенная сумма, получаемая в конце операции в валюте, составит .Множители наращения с учетом двойной конвертации равен где  ‑ темп роста обменного курса за срок операции.

Мы видим, что множитель наращения  связан линейной зависимостью со ставкой  и обратной с обменным курсом в конце операции  (или с темпом роста обменного курса ) .

Простая годовая ставка процентов, характеризующая доходность операции в целом: Подставим в эту формулу записанное ранее выражение для  Таким образом , с увеличением  доходность  падает по гиперболе с асимптотой 

ВЫВОД 1: Если ожидаемые величины  или  превышают свои критические значения, то операция явно убыточна ().

Теперь определим **максимально допустимое значение курса обмена в конце операции** , при котором эффективность будет равна существующей ставке по депозитам в валюте, и применение двойной конвертации не дает никакой дополнительной выгоды. Для этого приравняем множители наращения для двух альтернативных операций .Следует, что max или max .

ВЫВОД 2: Депозит валюты через конвертацию в рубли выгоднее валютного депозита, если обменный курс в конце операции ожидается меньше max .

ВАРИАНТ: .Рассмотрим теперь вариант с двойной конвертацией, когда имеется исходная сумма в рублях. В этом случае трем этапам операции соответствуют три сомножителя следующего выражения для наращенной суммы . Здесь также множитель наращения линейно зависит от ставки, но теперь от валютной ставки процентов. От конечного курса обмена он также зависит линейно.

Проведем теоретический анализ эффективности этой операции с двойной конвертацией и определим критические точки. Доходность операции в целом определяется по формуле. .Отсюда, подставим выражения для , получаем .

Зависимость показателя эффективности  и  линейная. При ,при , при . Найдем теперь значение , при котором . Оно оказывается равным .

ВЫВОД 3: Если ожидается величины  или  меньше своих критических значений, то операция явно убыточна ().

Минимально допустимая величина ,обеспечивающая такую же доходность, что и прямой вклад в рублях, определяется путем приравнивания множителей наращения для альтернативных операций (или из равенства ),откуда min  или min 

ВЫВОД 4: Депозит рублевых сумм через конвертацию в валюту выгоднее рублевого депозита, если обменный курс в конце операции ожидается больше min .

Теперь рассмотрим совмещение конвертации валюты и наращение **сложных процентов**.

ВАРИАНТ: .Три этапа операции записываются в одной формуле для наращения суммы,где  ‑ ставка сложных процентов.Множитель наращения , где  ‑ темп роста валютного курса за период операции. Определим доходность операции в целом в виде годовой ставки сложных процентов . Из формулы наращения по сложным процентам 

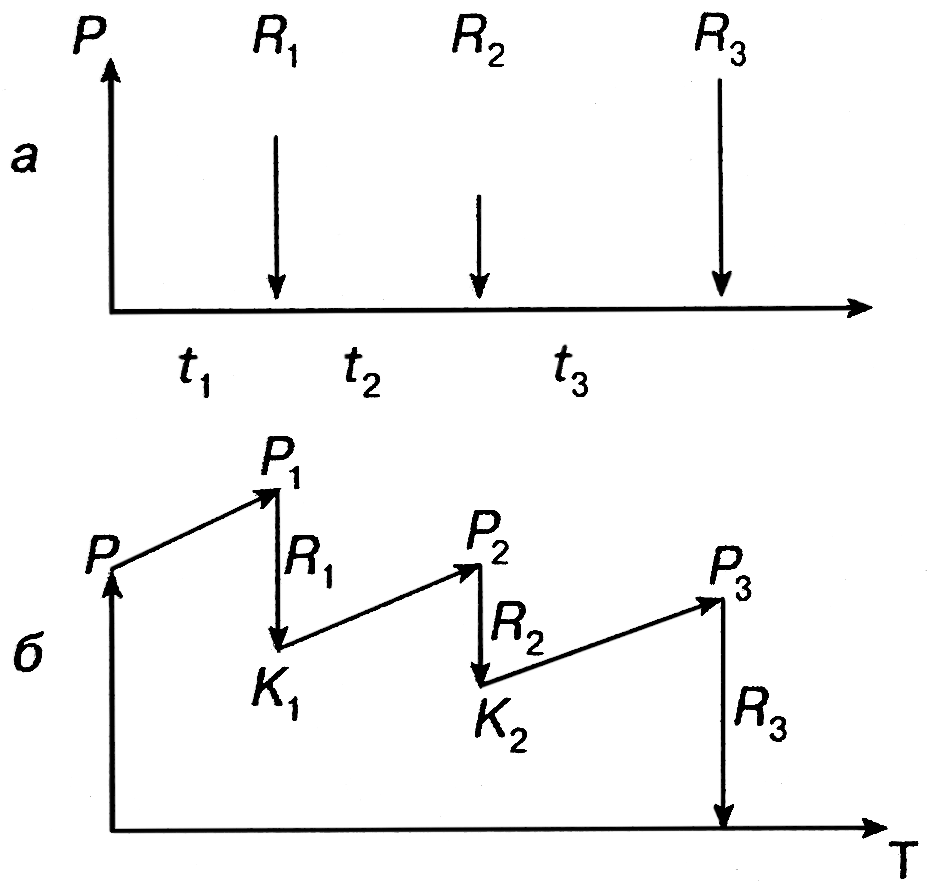
следует, что . Подставим в эту формулу значения , получим 

Анализ показывает, что при , при , а при . Критическое значение , при котором эффективность операции равна нулю, т.е. , определяется как , что означает равенство среднегодового темпа роста курса валюты годовому темпу наращения по рублевой ставке: .

ВЫВОД 5: Если ожидаемые величины  или  больше своих критических значений, то рассматриваемая операция с двойной конверсией явно убыточна ().

Максимально допустимое значение , при котором доходность операции будет равна доходности при прямом инвестировании валютных средств по ставке , находится из равенства соответствующих множителей наращения , Откуда  или 

ВЫВОД 6: Депозит валюты через конвертацию в рубли выгоднее валютного депозита, если обменный курс в конце операции ожидается меньше max .

**18.Погашение задолженности частями.** **Контур финансовой операции**

Финансовая или кредитная операции предполагают сбалансированность вложений и отдачи. Понятие сбалансированности можно пояснить на графике (Контур финансовой операции)

Пусть ссуда в размере  выдана на срок . На протяжении этого срока в счет погашения задолженности производятся, допустим, два промежуточных платежа  и , а в конце срока выплачивается остаток задолженности , подводящий баланс операции.

На интервале времени  задолженность возрастает до величины . В момент времени  долг уменьшается до величины  и т.д. Заканчивается операция получением кредитором остатка задолженности . В этот момент задолженность полностью погашается.

Назовем график типа б) *контуром финансовой операции*. Сбалансированная операция обязательно имеет замкнутый контур, т.е. последняя выплата полностью покрывает остаток задолженности. Контур операции обычно применяется при погашении задолженности частичными промежуточными платежами.

С помощью последовательных частичных платежей иногда погашаются краткосрочные обязательства. В этом случае существуют два метода расчета процентов и определения остатка задолженности. Первый называется **актуарным** и применяется в основном в операциях со сроком более года. Второй метод назван **правило торговца**. Он обычно применяется коммерческими фирмами в сделках со сроком не более года.

**Актуарный метод.**

Актуарный метод предполагает последовательное начисление процентов на фактические суммы долга. Частичный платеж идет в первую очередь на погашение процентов, начисленных на дату платежа. Если величина платежа превышает сумму начисленных процентов, то разница идет на погашение основной суммы долга. Непогашенный остаток долга служит базой для начисления процентов за следующий период и т.д. Если же частичный платеж меньше начисленных процентов, то никакие зачеты в сумме долга не делаются. Такое поступление приплюсовывается к следующему платежу.

Для случая, показанного на рис., получим следующие расчетные формулы для определения остатка задолженности: 

где , ,  ‑ периоды времени, заданные в годах,‑ годовая процентная ставка.

**Правило торговца**

Правило торговца является другим подходом к расчету частичных платежей. Здесь возможны две ситуации.

1. Если срок ссуды не превышает, сумма долга с начисленными за весь срок процентами остается неизменной до полного погашения. Одновременно идет накопление частичных платежей начисленными на них до конца срока процентами.
2. В случае, когда срок превышает год, указанные выше расчеты, делаются для годового периода задолженности. В конце года из суммы задолженности вычитается наращенная сумма накопленных частичных платежей. Остаток погашается в следующем году.

При общем сроке ссуды  алгоритм можно записать следующим образом ,где  ‑ остаток долга на конец срока, ‑ наращенная сумма долга, ‑ наращенная сумма платежей,  ‑ сумма частичного платежа,

 ‑ интервал времени от момента платежа до конца срока,

 ‑ число частичных (промежуточных) платежей.

***19. Модели изменения потока дивидендов***

Пусть *Dt* – величина дивидендов, выплачиваемых по акциям в периоде владения *t*. Предполагается, что дивиденды поступают в конце каждого периода и подлежат капитализации с начислением сложных процентов. При использовании метода дисконтирования платежей в рассматриваемом случае необходимо учитывать две особенности потока платежей {*Dt*} по акциям:

1) поток платежей {*Dt*} (*t*= 1, 2, …, *T*) по акциям представляет собой поток дивидендов, выплата которых ожидается в течение всего периода обращения акций, откуда следует, что *T =  ∞*;

2) доход в виде дивидендов по обыкновенным акциям, в отличии от дохода по облигациям, не является фиксированным, т.е. оговоренным условиями выпуска, и, следовательно, при оценке текущей таких акций могут использоваться лишь прогнозные значения будущих дивидендов.

Предположим, что ставка дисконтирования дивидендов, интерпретируемая как ожидаемая доходность вложений с сопоставимой степенью риска, в течении всего срока обращения акций остаётся постоянной и равной *R*. Тогда в соответствии с методом дисконтирования платежей текущая стоимость акции определяется как сумма текущих стоимостей всех ожидаемых по акции дивидендов:

 (4.11)

Таким образом, для практического использования формулы (4.11) инвестор должен знать прогнозные значения всех будущих дивидендов {*Dt*} (*t*= 1, 2, …). В силу «неограниченности жизни» акций задача предсказания бесконечного потока дивидендов оказывается неразрешимой без дополнительных предположений в виде определённых *моделей изменения дивидендов*. Познакомимся с традиционными моделями изменения дивидендов, а также используем их для нахождения текущей стоимости, *NPV* и *IRR* акций.

Будем предполагать, что поток дивидендов по акциям порождается следующей рекуррентной формулой: * t*= 1, 2, …, (4.12)

где *D0* – некоторое известное значение, например, величина последних дивидендов, выплаченных по данным акциям.

Величина *gt* определяется из соотношения:

 *t*= 1, 2, …, (4.13)

т.е. является *темпом прироста дивидендов* за период владения *t*.

Различные предположения относительно темпов прироста дивидендов {*gt*} приводят к различным моделям изменения дивидендов.

Наиболее известными являются модели нулевого, постоянного и переменного роста дивидендов.

*Модель нулевого роста дивидендов* описывается соотношением (4.12) при условии, что *gt* = 0, *t*= 1, 2, … (4.14)

Условие (4.14) означает, что в будущем в течении всего срока обращения акций по ним ожидаются фиксированные дивиденды, т.е. *D*1*= D*2*= … = DT*, где *D0*– некоторая заданная величина дивидендов.

На практике данная модель оказывается полезной при анализе *привилегированных* «*не участвующих*» *акций*, по которым не предусмотрено никаких выплат, кроме фиксированных дивидендов.

*Модель постоянного роста дивидендов* предполагает, что ожидается рост дивидендов с постоянным темпом, т.е. в (4.12) следует положить: *gt* = *g = const*, *t*= 1, 2, …, где *g* – постоянный ожидаемый темп прироста дивидендов. Поскольку на выплату на выплату дивидендов может направляться лишь некоторая доля чистой прибыли корпорации, то следует положить, что *g < R*.

Таким образом, в данном случае поток дивидендов {*Dt*} удовлетворяет следующему соотношению (*D0* – известная величина):

 *t*= 1, 2, …, (4.15)

Предположение о постоянстве дивидендов в течении всего срока обращения акций, очевидно, трудно осуществимо на практике. Однако в ряде случаев подобная модель может использоваться для оценки обыкновенных акций тех корпораций, которые придерживаются определённой дивидендной политики, направленной на поддержание курса акций за счёт постоянного (хотя, возможно, и невысокого) темпа прироста дивидендов.

*Модели переменного роста дивидендов* предполагают наличие двух и более этапов в жизни корпорации, отличающихся схемами выплат дивидендов. Приведём примеры подобных моментов.

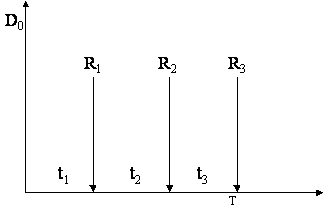
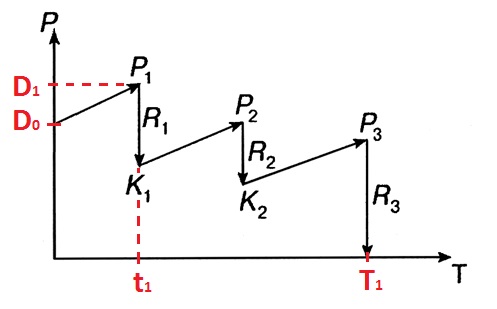
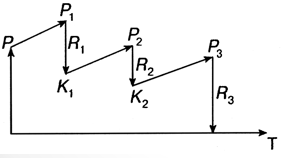
Пусть модель включают два этапа.

Первый этап состоит из фиксированного числа *T < ∞* периодов владения, начиная с текущего момента времени, второй этап – весь остальной срок обращения акций. Предполагается, что *D*1*= D*2*= … = DT* – заданные прогнозные значения дивидендов для первых *T* периодов владения.

На втором этапе ожидается изменение дивидендов в соответствии с моделью постоянного роста дивидендов и темпом прироста *g*: 

***20. Контур финансовой операции. Переменная сумма счета***

Финансовая или кредитная операции предполагают сбалансированность вложений и отдачи. Понятие сбалансированности можно пояснить на графике.

D0 – первоначальный размер ссуды

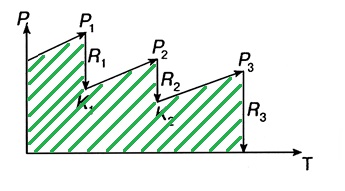
T1 – срок ссуды

R1 и R2 – промежуточные платежи

R3 – остаток задолженности, подводящий баланс операции

K1 – долг в момент времени t1

K1 = D1 – R1

****

Сбалансированная операция обязательно имеет замкнутый контур, т.е. последняя выплата полностью покрывает остаток задолженности.

Контур операции обычно применяется при погашении задолженности частичными промежуточными платежами.

**Переменная сумма счета и расчет процентов. Процент чисел**

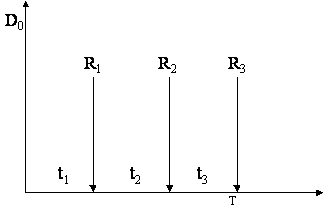
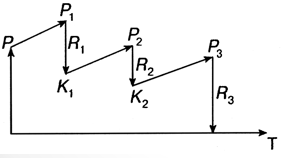
Рассмотрим ситуацию, когда сумма счета в течение срока хранения изменяется: денежные средства снимаются, делаются дополнительные взносы. Тогда используют методику расчета с вычислением процентов чисел. Каждый раз, когда сумма на счете изменяется, вычисляется процентное число Cj за прошедший период j , в течение которого сумма на счете оставалась неизменной, по формуле: *Cj* = *(Pj tj)/100* ,где *tj*- длительность периода в днях

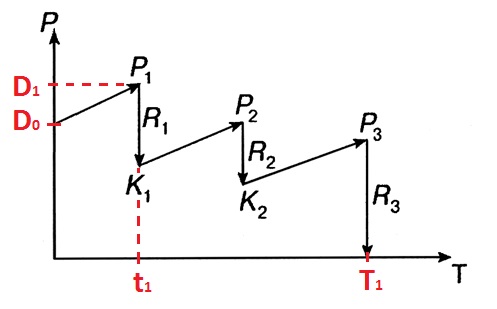
Для определения суммы процентов за весь срок, все процентные числа складываются, и их сумма делится на постоянный делитель *D*: *D = K/i,* где *K – число дней в году, i – годовая ставка простых %*

При закрытии счета владелец получит сумму равную последнему значению суммы на счете плюс сумму процентов.

***21. Контур финансовой операции. Актуарный метод и правило торговца***

Финансовая или кредитная операции предполагают сбалансированность вложений и отдачи. Понятие сбалансированности можно пояснить на графике.



D0 – первоначальный размер ссуды

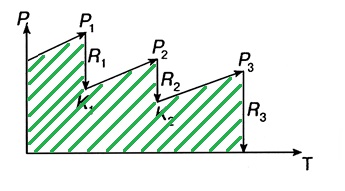
T1 – срок ссуды

R1 и R2 – промежуточные платежи

R3 – остаток задолженности, подводящий баланс операции

K1 – долг в момент времени t1

K1 = D1 – R1

****

Сбалансированная операция обязательно имеет замкнутый контур, т.е. последняя выплата полностью покрывает остаток задолженности.

Контур операции обычно применяется при погашении задолженности частичными промежуточными платежами.

С помощью последовательных частичных платежей иногда погашаются краткосрочные обязательства.

Методы расчета процентов и определения остатка задолженности:

1. Актуарный метод (операции сроком > 1 года)

2. Правило торговца (операции сроком < 1 года, применяется коммерч. фирмами)

**Актуарный метод**

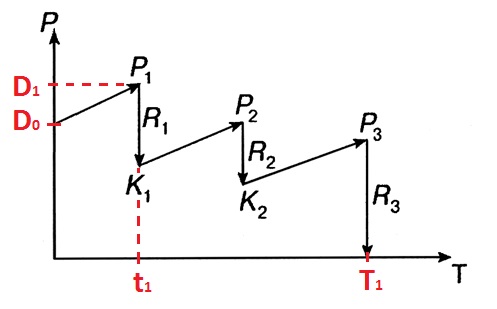
* предполагает последовательное начисление процентов на фактические суммы долга
* частичный платеж идет в первую очередь на погашение процентов, начисленных на дату платежа

Величина платежа превышает сумму начисленных процентов

* разница идет на погашение основной суммы долга
* непогашенный остаток долга служит базой для начисления процентов за следующий период

Частичный платеж меньше начисленных процентов

* никакие зачеты в сумме долга не делаются
* такое поступление приплюсовывается к следующему платежу

****

K1 = D0·(1 + t1·i) – R1

K2 = K1·(1 + t2·i) – R2

K2·(1 + t3·i) – R3 = 0

t1, t2, t3 – периоды времени, заданные в годах

i – годовая процентная ставка

**Правило торговца**

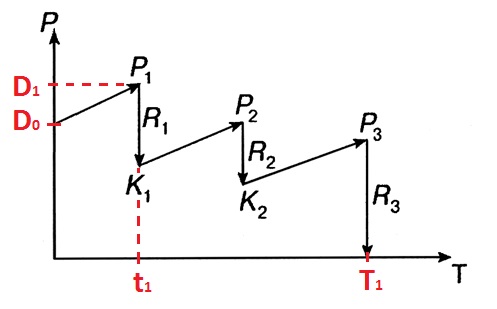
При расчете частичных платежей возможны ситуации

Срок ссуды < 1 года

* сумма долга с начисленными за весь срок процентами остается неизменной до полного погашения
* одновременно идет накопление частичных платежей начисленными на них до конца срока процентами

Срок ссуды > 1 года

* расчеты делаются для годового периода задолженности
* в конце года из суммы задолженности вычитается наращенная сумма накопленных частичных платежей
* остаток погашается в следующем году



При общем сроке ссуды T ≤ 1

S = D – K = P·(1 + T·i) –

S – остаток долга на конец срока

D – наращенная сумма долга

K – наращенная сумма платежей

Rj – сумма частичного платежа

tj – интервал времени от момента платежа до конца срока

m – число частичных (промежуточных) платежей

***22. Дюрация облигации и ее свойства***

В общем виде дюрация определяется по формуле:

где *v* – множитель дисконтирования по ставке доходности к погашению r, т.е. ,

платежи по облигации через моменты времени

Срок гашения *T=*

В качестве весов – дисконтированные величины => при определении дюрации учитывается фактор времени.

Т.о. **дюрация** – это средняя продолжительность платежей.

Т.к. в качестве ставки дисконтировнаия берется ставка доходности к погашению, то знаменатель – это рыночная цена облигации *P*:

С учетом этого соотношения дюрацию можно записать как:

Где – современная стоимость платежа, поступившего в момент времени

Весовыми коэффициентами в формуле дюрации являются отношения современных стоимостей каждого платежа к рыночной цене *P(r),* т.е. весовые коэффициенты выражают долю рыночной цены облигации, которая будет получена через Сумма данных коэффициентов равна единице:

Рассмотрим облигацию с периодической выплатой процентов один раз в конце года, погашаемую в конце срока *T.* Для такой облигации дюрация определяется по формуле:

Где g – купонная ставка,

N – номинал облигации,

n – количество периодов (количество купонных выплат).

Облигации, имеющие одинаковую дюрацию, реагируют на изменение одинаковым образом. В связи с этим инвесторы при формировании портфеля облигаций стремятся включать в портфель облигации с одинаковой дюрацией. Этот метод называется **иммунизацией** портфеля и позволяет ограничить влияние будущих колебаний рыночной процентной ставки на ожидаемые доходы.

**Свойства дюрации и показателя выпуклости облигации**

1. Дюрация облигации не превосходит срока до ее погашения *T,* т.е. .
2. Дюрация облигации без выплаты процентов (чисто дисконтная облигация) равна сроку до ее погашения, т.е. .
3. Если облигация купонная, то чем больше внутренняя доходность облигации, тем меньше ее дюрация и показатель выпуклости, т.е. для любых .
4. Если все платежи по облигации отсрочить на лет, не изменяя ее внутренней доходности *r* , то дюрация облигации увеличится на лет, а показатель выпуклости увеличится на ) лет.
5. Если до погашения облигации остается больше одного купонного периода, то при заданном значении внутренней доходности *r* дюрация облигации и показатель выпуклости тем больше, чем меньше купонная ставка g, т.е. для любых .

*(Писать по желанию)*

*Как правило, чем меньше купон облигации, тем больше дюрация, так как больший уд. вес выплат по облигации приходится на момент ее погашения. Чем выше купон облигации, тем меньше ее дюрация.*

*При прочих равных условиях, чем больше время до погашения облигации, тем больше дюрация.*

*Чем больше дюрация, тем выше риск изменения цены облигации.*

*При повышении доходности до погашения дюрация уменьшается, при понижении доходности до погашения дюрация возрастает.*

***23. Дюрация бескупонной облигации***

В общем виде дюрация определяется по формуле:

где *v* – множитель дисконтирования по ставке доходности к погашению r, т.е. ,

платежи по облигации через моменты времени

Срок гашения *T=*

В качестве весов – дисконтированные величины => при определении дюрации учитывается фактор времени.

Т.о. **дюрация** – это средняя продолжительность платежей.

Т.к. в качестве ставки дисконтировнаия берется ставка доходности к погашению, то знаменатель – это рыночная цена облигации *P*:

С учетом этого соотношения дюрацию можно записать как:

Где – современная стоимость платежа, поступившего в момент времени

Весовыми коэффициентами в формуле дюрации являются отношения современных стоимостей каждого платежа к рыночной цене *P(r),* т.е. весовые коэффициенты выражают долю рыночной цены облигации, которая будет получена через Сумма данных коэффициентов равна единице:

Для бескупонной облигации номиналом N со сроком погашения t текущая стоимость равна PV = N/(1+r)t

Она же совпадает с дисконтированной стоимостью единственного платежа, поэтому её дюрация просто равна сроку облигации: т.е.: D = t.

Облигации с нулевым купоном представляют интерес для инвесторов, проводящих операции с четко определенным временным горизонтом.

***24. Дюрация купонной облигации***

В общем виде дюрация определяется по формуле:

где *v* – множитель дисконтирования по ставке доходности к погашению r, т.е. ,

платежи по облигации через моменты времени

Срок гашения *T=*

В качестве весов – дисконтированные величины => при определении дюрации учитывается фактор времени.

Т.о. **дюрация** – это средняя продолжительность платежей.

Т.к. в качестве ставки дисконтировнаия берется ставка доходности к погашению, то знаменатель – это рыночная цена облигации *P*:

С учетом этого соотношения дюрацию можно записать как:

Где – современная стоимость платежа, поступившего в момент времени

Весовыми коэффициентами в формуле дюрации являются отношения современных стоимостей каждого платежа к рыночной цене *P(r),* т.е. весовые коэффициенты выражают долю рыночной цены облигации, которая будет получена через Сумма данных коэффициентов равна единице:

**Дюрация купонной облигации** всегда меньше срока погашения, так как имеются промежуточные платежи, обеспечивающие возмещение конкретной доли текущей цены облигации. При этом чем выше купон, тем меньше будет отношение показателя дюрации к сроку погашения.

В случае купонной облигации денежный поток состоит из купонных платежей и погашения номинала. При этом погашение номинала может быть частями (амортизация) и купонная ставка может вообще говоря изменяться в течение срока обращения облигации. Если величину купонов обозначить C_i, а гашения номинала N_j, то дюрация облигации будет равна

D=\frac {\sum^m_{i=1}\frac {C_i}{(1+r)^{t_i}}t_i+\sum^k_{j=1}\frac {N_j}{(1+r)^{t_j}}t_j} {P}

где - цена облигации (предполагается что в качестве r используется доходность к погашению облигации, поэтому PV(r)=P).

1. **Дюрация портфеля облигаций**

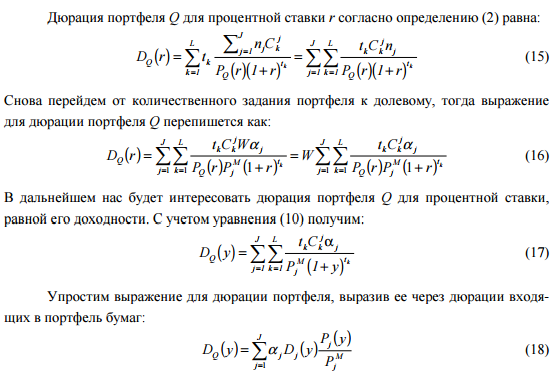
Дюрация портфеля облигаций – средневзвешенная дюрация отдельных облигаций, входящих в портфель, где в качестве веса выступает удельный вес облигаций в портфеле.

*Если сумма денег предоставляется в за­ём на один год при однократном начислении процента, то для такой сделки* ***D = 1****.*

Рассмотрим ***портфель П***, состоящий из облигаций вида ***А****,* ***В****,* ***С****, ...* с долями ***νA*** *,* ***νB****,* ***νC****, …* , так что ***νA + νB + νC + … = 1***.

Определим **дюрацию портфеля D(П)** как средневзвешенную сумму дюраций отдельных ценных бумаг, входящих в портфель, т.е. ***D(П) = νA D(A)+ νB D(B)+ νC D(C)+ …* .** Заменим в формуле (3) частные производные на разностные отношения. Получим приближенную формулу: **.**

Отсюда получаем:



1. **Защита портфеля облигаций от изменения процентной ставки**

Важное значение дюрации состоит в том, что она показыва­ет чувствительность цены облигации. Поэтому, используя знание дюрации, можно снизить риск, связанный с изменением процент­ной ставки. Аме­риканский экономист П. Самуэльсон впервые доказал возможность замены одной облигации двумя так, что при данной процентной ставке текущая стоимость не меняется, а при измене­нии её только увеличивается.

Покажем, что это возможно при выравнивании дюраций активов и задолженностей. Пусть мы взяли в долг и обязаны выплатить сумму ***С*** в мо­мент времени **t**. Тогда текущая стоимость задолженности равна и дюрация ***D1 = t****.* Назовем такую задолженность ***облигацией I***.

Рассмотрим две бескупонные облигации ***A*** *и* ***В*** *с* номиналь­ными стоимостями **NA**и **NB**и временем погашения **tA** и **tB** со­ответственно. **Портфель П**, составленный из двух таких облигаций *А* и *В,* назовём ***облигацией II****.* Тогда текущая стоимость **портфеля П** равна: , а дюрация ***D*2** портфеля П равна ***D2* = tAwA + *tBwB****,* где , причем **wA *+ wB* = 1**.

Пусть текущая процентная ставка r0 такова, что:

Из этих равенств следует, что

Следовательно, графики функций и касаются в точке .

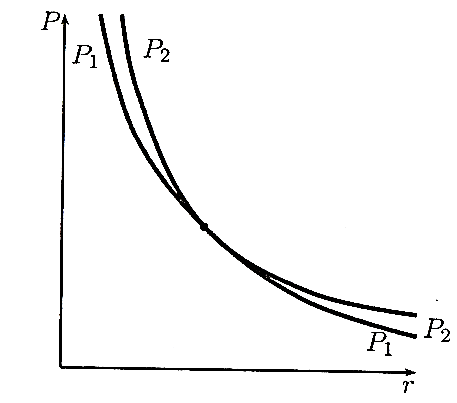
Найдём первые и вторые производные при :



Сравним ***t*2** и с учётом того, что Поскольку *,* то

Сравнивая P2` и P2``, убеждаемся в том, что справедливо неравенство 

Геометрически это означает, что кривая «цена-доходность» при выполнении условий (13)-(15) «более выпукла», чем кри­вая :



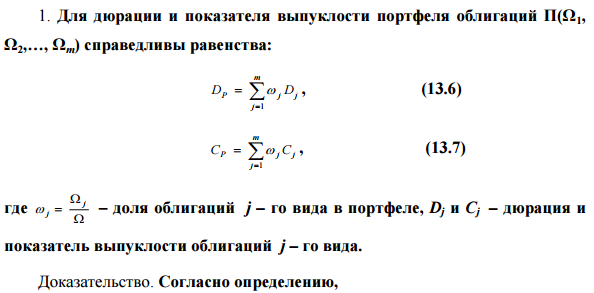
Отсюда следует, что когда доходность к погашению возрастет на , то текущая стоимость уменьшается сильнее, чем теку­щая стоимость , т.е. и, наоборот, если доходность падает, то стоимость по облигации *I* растет медленнее, чем стоимость облигации *II,* т.е. .

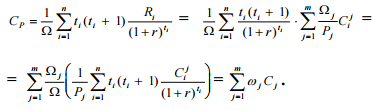
1. **Показатель выпуклости облигации и его свойства**

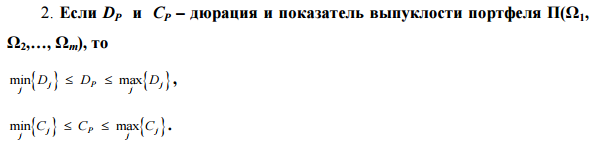
**Выпуклость облигации *W(r)*** *– величина* *,* где **Р(r)** *–* текущая стоимость облигации.

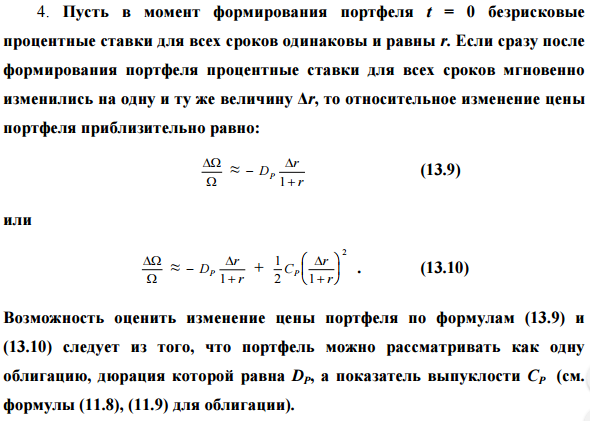
Преобразуем выпуклость облигации:

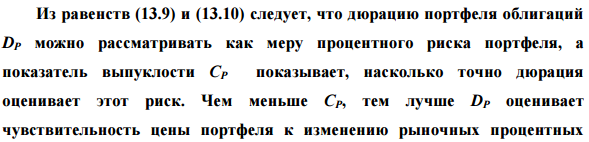
Для уточнения формулы воспользуемся формулой Тей­лора с центром в **r** для функции ***Р(r* + ∆r)**. Оставляя в ней первые три слагаемых и используя выражения для дюрации и выпуклости облигации, получим 









ставок.

1. **Свойства дюрации портфеля облигаций**

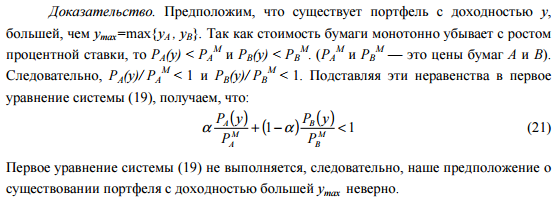
Будем называть пару (y, D) допустимой, если существует допустимый портфель облигаций с данными параметрами доходности и дюрации и удовлетворяющий системе.

***Утверждение 1.*** Для допустимой пары (y, D) существует реализующий ее портфель, состоящий только из трех бумаг, торгуемых на рынке.

Это утверждение следует из того, что при фиксированной доходности и дюрации множество допустимых портфелей имеет вид многогранника, заданного тремя равенствами и условиями неотрицательности. Крайние точки такого многогранника имеют не более трех положительных координат. Им и соответствуют искомые портфели. Это утверждение может быть усилено для экстремальных доходностей.

***Утверждение 2.*** Для допустимой пары (yext, D), где yext - наибольшее или наименьшее значение доходности при заданной дюрации, существует портфель только из двух бумаг, торгуемых на рынке.

***Утверждение 3***. Для произвольных облигаций А и В доходность портфеля, составленного как αA+(1-α)B, 0<α <1, лежит между доходностями yA и yB.



Случай с y<ymin=min{yA , yB} разбирается аналогично.

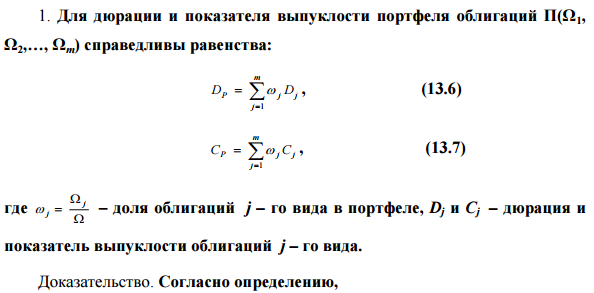
***Утверждение 4***. Для бескупонных облигаций А и В дюрация портфеля, составленного как αA+(1-α)B, α > 0, лежит между DA , DB.

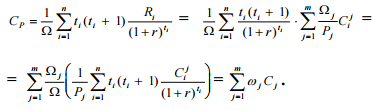
Дюрация портфеля вычисляется при процентной ставке, равной его доходности. Если мы хотим, чтобы дюрация портфеля не была между дюрациями первой и второй бумаги, то для этого требуется неотрицательный наклон графика дюрации портфеля от его доходности в точке y1, или формально D'(y1)≥ 0.

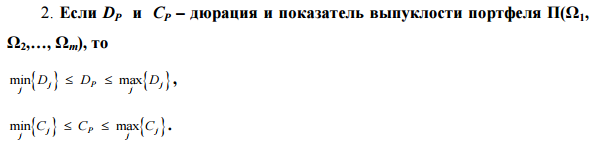
***Гипотеза***: Если две бумаги, А и В, имеют одинаковые дюрации и доходность по бумаге А больше, чем по бумаге В, то любой портфель, состоящий из бумаги А и некоторой бумаги С будет иметь более высокую доходность при фиксированной дюрации, чем портфель из бумаг В и С. Иными словами, если бумага «плохая», то есть не обеспечивающая максимальную доходность для заданной дюрации, то с какой бумагой ее не комбинируй, все равно не достичь максимальной доходности.

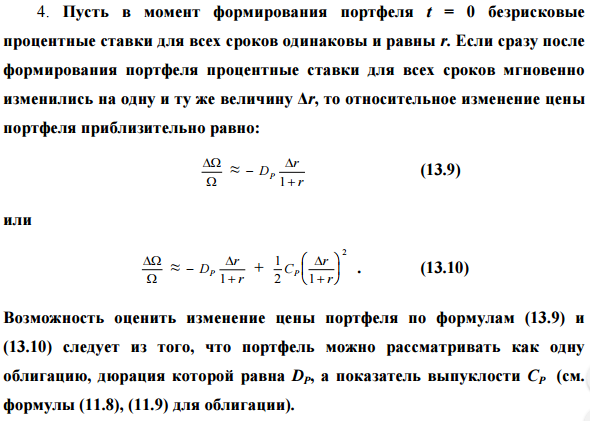
Справедливость гипотезы означает отсутствие критических точек. Невыполнение гипотезы приводит к возникновению критической точки на пересечении дуг AC и BC.

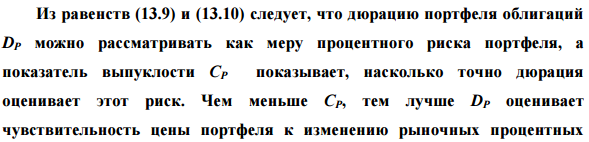
1. **Свойства показателя выпуклости портфеля облигаций**









ставок.

1. **Облигация и ее характеристики**

*Облигации (bonds)* - это долговые обязательства, выпускаемые коммерческими или правительственными структурами с целью привлечения денежных средств. Также облигация может предусматривать право владельца (держателя) на получение процента (купона) от её номинальной стоимости либо иные имущественные права.

Общим доходом по облигации являются сумма выплачиваемых процентов (купонов) и размер дисконта при покупке.

Облигации служат дополнительным источником средств для эмитента, являясь эквивалентом займа. Иногда их выпуск носит целевой характер - для финансирования конкретных программ или объектов, доход от которых в дальнейшем служит источником для выплаты дохода по облигациям.

В общем плане облигации представляют собой долгосрочные долговые обязательства с фиксированным процентом. Различают три основных категории облигаций: облигации корпораций, облигации федерального правительства и муниципальные облигации.

Облигация характеризуется набором параметров, от которых зависят свойства облигации:

* *Номинальная стоимость облигации (номинал, N) -* это цена по которой облигация будет погашена (выкуплена эмитентом у инвестора) в конце своего срока. Большинство облигаций выпускается с номиналом 1000 рублей.
* *Срок действия облигации (maturity, время погашения, Т) -* срок, через который облигация будет погашена. Так же бывает оферта — иногда эмитент может установить дату оферты, это когда он может выкупить облигацию у инвестора до даты погашения. Инвестор может подать облигацию к оферте.
* *Купонный доход (С) -* это денежные средства, которые эмитент периодически выплачивает по облигации
* *Текущая стоимость облигации Р*
* *Рыночная (курсовая) цена облигации V -* на рынке цена облигации может отличаться от номинала и быть больше или меньше номинала
* *Доходность к моменту погашения ρ*

**31. Текущая стоимость облигации при выплате купонов один раз в год**

Для определения текущей стоимости купонной облигации воспользуемся общей формулой (4.1) при некоторых предположениях, учитывающих особенности потока платежей по купонным облигациям.

Введём обозначения:

T < ∞ – количество периодов владения, оставшихся до погашения облигации;

F – финальная выплата по облигации, совпадающая с её номинальной стоимостью;

q > 0 – ставка купонного дохода (купонная доходность) за один период владения в долях;

m ≥ 1 – частота выплат купонного дохода за один период владения;

R > 0 – ставка дисконтирования купонного дохода, соответствующая одному периоду владения. Ставка R интерпретируется как ожидаемая доходность вложений с сопоставимым риском.

Относительно потока платежей {*Ct*} предполагается, что



(4.4)

Предполагается, также, что платежи в виде купонного дохода поступают в конце каждого периода и подлежат капитализации с начислением сложных процентов.

Рассмотрим вначале случай, когда *T < ∞*, *q > 0* и *m = 1*, т.е. когда период выплат купонного дохода совпадает с периодом владения облигации. С учётом сделанных предположений из (4.1) следует, что текущая стоимость купонной облигации определяется соотношением:

(4.5)

****

**Где текущая стоимость ренты** с *T* единичными выплатами и постоянной ставкой наращения *R*;

  - текущая стоимость финальной выплаты по облигации, *Fo < F*.

Обозначим *d*=(1+*R*)-1 – дисконтный множитель.

По формуле для суммы *T* первых членов геометрической прогрессии имеем:

(4.6)

и окончательно получаем формулу

(4.7)

Если известна текущая рыночная стоимость облигации (цена покупки) *P*, то можно оценить инвестиционную привлекательность облигации на основе чистой текущей стоимости *NPV* и внутренней доходности *R\**, которая, как известно, является решением уравнения *NPV* = 0, т.е. удовлетворяет тождеству



(4.8)

Ставка внутренней доходности облигации *R\** определяет так называемую *полную доходность облигации* (*доходность к погашению*), поскольку учитывает все виды платежей по облигации до момента её погашения.

**32. Текущая стоимость облигаций с m выплатами**

Для определения текущей стоимости купонной облигации воспользуемся общей формулой (4.1) при некоторых предположениях, учитывающих особенности потока платежей по купонным облигациям.

Введём обозначения:

T < ∞ – количество периодов владения, оставшихся до погашения облигации;

F – финальная выплата по облигации, совпадающая с её номинальной стоимостью;

q > 0 – ставка купонного дохода (купонная доходность) за один период владения в долях;

m ≥ 1 – частота выплат купонного дохода за один период владения;

R > 0 – ставка дисконтирования купонного дохода, соответствующая одному периоду владения. Ставка R интерпретируется как ожидаемая доходность вложений с сопоставимым риском.

Относительно потока платежей {*Ct*} предполагается, что



(4.4)

Для купонных облигаций с несколькими выплатами купонного дохода в течении одного периода владения (т.е. при *m > 1*) может быть проведён анализ, если предварительно положить:

*R≡R(m)* – номинальная ставка начисления процентов за один период владения в предположении, что *m > 1*;

*R/m* – ставка начисления процентов за один период выплат купонного дохода;

*q/m* – ставка купонного дохода за один период выплат.

Можно получить следующую формулу для текущей стоимости облигации:



**33. Текущая стоимость бессрочных облигаций**

Бессрочная облигация (perpetuity annuity) - бесконечная рента, которая никогда не заканчивается, или поток платежей наличными, который продолжается всегда. Есть немного фактически существующих бессрочных облигаций, например, в Великобритании правительство выпускало их в прошлом; они известны и ими все еще торгуют как британскими консолями. Другие типы подобных инвестиций - недвижимое имущество и привилегированные акции, и для того чтобы установить цену бессрочных облигаций могут быть использованы такие же методики. Бессрочная облигация - одна из форм обычных аннуитетов (или рент).

Бессрочные облигации относятся к ценным бумагам с фиксированным уровнем дохода. Для расчета текущей рыночной стоимости облигации дисконтируют и суммируют денежные потоки образованные купонным доходом.

Бессрочная облигация является аннуитетом, в котором периодические выплаты начинаются на фиксированную дату и продолжаются до бесконечности. Его иногда называют вечной рентой. Фиксированные купонные платежи на надолго (навечно) инвестированные денежные суммы являются яркими примерами бессрочных облигаций.

Ценность бессрочной облигации конечна, потому что у платежей, которые ожидаются далеко в будущем, есть чрезвычайно низкая текущая стоимость (текущая стоимость потоков будущей выручки). В отличие от обычной облигации, бессрочные никогда не погашаются, и нет приведенной стоимости для ее номинальной стоимости. Предполагая, что платежи начинаются в конце текущего периода, цена бессрочной облигации - просто сумма купонных платежей дисконтированных по соответствующей учетной ставке или доходности.

Формула оценки бессрочной облигации:

Формула  оценки облигации с годовым начислением процентов.

B0 - текущая цена облигации;  
C - годовой купонный доход, рублей;  
r - требуемая норма прибыли.

Формула оценки бессрочной облигации с многократным внутригодовым начислением процентов:

Формула  оценки облигации с годовым начислением процентов.

B0 - текущая цена облигации;  
C - годовой купонный доход, рублей;  
r - требуемая норма прибыли, % годовых;  
z - количество начислений за год.

**34. Рыночная цена облигаций**

#### Рыночная цена облигации

Рыночная цена облигации при размещении ее на фондовом рынке может быть равной номиналу, ниже или выше его. После размещения облигаций их рыночная цена определяется конъюнктурой фондового рынка в целом, конъюнктурой рынка данного вида облигаций и отношением рынка к ценным бумагам данного эмитента, ситуации в целом на финансовом рынке и двумя главными элементами облигационного займа:

1) периода, оставшегося до погашения облигации и получения ее номинальной стоимости. При этом чем ближе срок погашения облигации, тем больше ее рыночная стоимость соответствует ее номинальной стоимости;

2) права на регулярный купонный доход. Чем больше доход, который получают держатели облигации, тем выше ее рыночная стоимость.

С момента их эмиссии и до периода, предшествующего погашению облигации, они продаются и покупаются по установившимся па рынке ценам. Погашение облигации производится по ее номинальной стоимости. Рыночная цена облигации определяется ее характеристиками. Сюда входят: номинальная стоимость (номинал), курс, пункт (сотая часть процента), купон (купонный процент), дата погашения, дисконт, ставка дисконтирования.

***Номинальная цена*** (стоимость, номинал) - сумма, которая берется при размещении облигационного займа и подлежит возврату при погашении займа по истечении его срока. ***Курс облигации -***процентное соотношение рыночной цены облигации и ее номинала:

http://studme.org/imag/econom/bus_ospr/image452.jpg

где ***Рk -***курс облигаций; ***Р -***рыночная цена облигации; ***N -***номинальная цена (стоимость) облигации.

***Изменение*** (прирост или уменьшение) стоимости облигации за определенный период рассчитывается как разность между номинальной стоимостью и ценой покупки (продажи) облигации. ***Дисконт*** (премия или скидка) - разность (положительная или отрицательная) между рыночной ценой и номиналов стоимостью облигации.

***Купон*** (купонный процент) - это фиксированный или плавающий процент, на основании которого держателю облигации выплачивается денежный доход (платеж), пропорциональный купонному проценту и сроку владения облигациями. Купонный доход (процент) по облигации устанавливается к величине номинальной стоимости при выпуске облигаций и указывается в проспекте эмиссии. Купонный доход может быть регулярным (выплачиваться по периодам - ежегодно или по интервалам: по полугодиям, ежеквартально, ежемесячно) или выплачиваться при погашении облигации. Величина купонного дохода зависит от макроэкономических показателей, состояния фондового рынка, финансового состояния эмитента, его надежности, срока обращения облигации.

#### 35. Курс и доходность облигации

#### Курс облигации

Облигации, являясь объектом купли-продажи на [рынке ценных бумаг](http://www.grandars.ru/student/finansy/rynok-cennyh-bumag.html), имеют рыночную цену, которая в момент эмиссии может быть равна номиналу, а также быть ниже или выше его. Рыночные цены существенно различаются между собой, поэтому для достижения их сопоставимости рассчитывается **курс облигации**. Под курсом облигации понимают покупную цену одной облигации в расчете на 100 денежных единиц номинала. Курс облигации зависит от средней величины ссудного рыночного процента, существующего в данный момент, срока погашения, степени надежности эмитента и ряда других факторов.

Расчет курса производится по формуле:

http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=P_k%20=%20%5Cfrac%20%7bP%7d%7bN%7d%20%5Ccdot%20100

* **Рк** — курс облигации;
* **Р** — рыночная цена;
* **N** — номинальная цена облигации.

**Доходность облигации**

Доходность облигации характеризуется рядом параметров, которые зависят от условий, предложенных эмитентом. Так, например, для облигаций, погашаемых в конце срока, на который они выпущены, доходность измеряется:

* купонной доходностью;
* текущей доходностью;
* полной доходностью.

**Купонная доходность**

**Купонная доходность** — норма процента, которая указана на ценной бумаге и которую эмитент обязуется уплатить по каждому купону. Платежи по купонам могут производиться раз в квартал, по полугодиям или раз в год.

**Текущая доходность**

**Текущая доходность** (**CY**) облигации с фиксированной ставкой купона — определяется как отношение периодического платежа к цене приобретения.

Текущая доходность характеризует выплачиваемый годовой процент на вложенный капитал, т.е. на сумму, уплаченную в момент приобретения облигации. Текущая доходность определяется по формуле:

http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=i_m%20=%20%5Cfrac%20%7bN%20%5Ccdot%20k%7d%7bP%7d%20=%20%5Cfrac%20%7bg%7d%7bP_k%7d%20%5Ccdot%20100

* http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=k — норма доходности по купонам (годовая ставка купона);
* http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=N — номинальная цена облигации;
* http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=P — рыночная цена (цена приобретения);
* http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=P_k — курс в момент приобретения.

Вместе с тем текущая доходность не учитывает изменения цены облигации за время ее хранения, т.е. другого источника дохода.

Текущая доходность продаваемых облигаций меняется в соответствии с изменениями их цен на рынке. Однако с момента покупки она становится постоянной (зафиксированной) величиной, так как ставка купона остается неизменной.

Показатель текущей доходности не учитывает курсовую разницу между ценой покупки и погашения. Поэтому он не пригоден для сравнения эффективности операций операций с различными исходными условиями.

**Доходность к погашению**

Доходность к погашению (YTM) — это процентная ставка в коэффициенте дисконтирования, которая устанавливает равенство между текущей стоимостью потока платежей по облигации и её рыночной ценой http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=P.

http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1993/4994ec1d60.jpg

Рассмотрим некоторые важнейшие свойства этого показателя. По сути он представляет собой внутреннюю доходность инвестиции (IRR). Однако, реальная доходность облигации к погашению будет равна **YTM** только при выполнении следующих условий:

* облигация хранится до срока погашения;
* полученные купонные доходы немедленно реинвестируются по ставке http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=r%20=%20YTM.

Очевидно, что независимо от желаний инвестора второе условие достаточно трудно выполнить на практике.

Между доходностью к погашению http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=YTM и ставкой реинвестирования купонного дохода http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=r существует прямая зависимость. С уменьшением http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=r будет уменьшаться и величина http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=YTM, с ростом http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=r величина http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=YTM будет также расти.

**Полная доходность**

**Полная доходность** учитывает все источники дохода. В ряде экономических публикаций показатель полной доходности называют **ставкой помещения**. Определив ставку помещения в виде годовой ставки сложных или простых процентов, можно судить об эффективности приобретенной ценной бумаги.

Начисление процентов по ставке помещения на цену приобретения дает доход, эквивалентный фактически получаемому по ней доходу за весь период обращения этой облигации до момента ее погашения. Ставка помещения является расчетной величиной и в явном виде на рынке ценных бумаг не выступает.

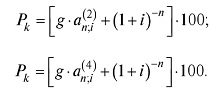
При определении доходности облигации учитывается цена приобретения http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=P (рыночная цена), которая сама зависит от ряда факторов. Покупатель облигации в момент ее приобретения рассчитывает на получение дохода в виде серии твердых выплат в форме фиксированных процентов, которые осуществляются в течение всего срока ее обращения, а также возмещение ее номинальной стоимости к концу этого срока.

Поэтому если ежегодно получаемые по облигациям выплаты будут помещены на банковский депозит или инвестированы каким-либо иным образом и станут приносить ежегодный процентный доход http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=I%20=%20N%20%5Ccdot%20g то стоимость облигации будет равна сумме двух слагаемых — современной стоимости ее аннуитетов (серии ежегодных выплат процентных платежей) и современной стоимости ее номинала:

http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1993/29e6250d86.jpgилиhttp://www.grandars.ru/images/1/review/id/1993/add02a9a96.jpg

* http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=P — рыночная цена облигации;
* http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=P_k — курс облигации;
* http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=N — номинал облигации;
* http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=g — купонная ставка;
* http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=n — время от момента приобретения до момента погашения облигации;
* http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=i — ссудный процент, предлагаемый банками в момент продажи облигации.

В случае когда облигация предусматривает выплату процентов по полугодиям или поквартально, курсовая стоимость облигации рассчитывается по формулам:



***36. Свойства рыночной цены и доходности облигации***

**Теорема 3.1.**

Рыночная цена облигации V как функция до­ходности к погашению ρ при ρ > -1 является непрерывной, мо­нотонно убывающей, выпуклой вниз (вогнутой) функцией, при­нимающей любые положительные значения.

**Замечание.**

Аналогичную теорему можно сформулировать для зависимости текущей стоимости облигации *Р* от ставки про­цента *r*.

**Теорема 3.2.**

а) Облигация продается по номиналу (V = N) тогда и только тогда, когда ее доходность к погашению равна купонной ставке (ρ=q).

б) Облигация продается с дисконтом I = N - V (V < N), тогда и только тогда, когда ее доходность к погашению больше купон­ной ставки (ρ > q).

в) Облигация продается с премией J = V - N (V > N), тогда и только тогда, когда ее доходность к погашению меньше купон­ной ставки (ρ < q).

**Следствие.**

Если рыночная цена облигации V растет, то ее доходность к погашению ρ уменьшается. Если рыночная цена облигации V падает, то ее доходность к погашению ρ увеличи­вается.

**Замечание.**

Аналогичную теорему можно сформулировать для текущей цены облигации Р. Тогда, вместо доходности к по­гашению ρ будет использоваться процентная ставка r.

**Теорема 3.3.**

При постоянной доходности к погашению ρ величина дисконта I = N - V или премии J = V - N облигации уменьшается при уменьшением времени до погашения n.

**Следствие 1.**

При постоянной доходности к погашению

**Следствие 2.**

Если две облигации имеют одну и ту же ку­понную ставку q, номинальную стоимость N и доходность к погашению ρ, то облигация с меньшим сроком обращения n, бу­дет продаваться с меньшим дисконтом или премией.

**Теорема 3.4.**

Уменьшение доходности к погашению облига­ции ρ приведет к увеличению ее рыночной стоимости на вели­чину большую, чем соответствующее уменьшение стоимости облигации при увеличении доходности на ту же величину.

**Теорема 3.5.**

При любой положительной рыночной цене об­лигации V > 0существует единственное значение величины до­ходности к погашению ρ, которая является решениемуравнений (3.6)-(3.8).

(3.6)

(3.7)

(3.8)

**Утверждение 3.1.**

Формула для приближенного вычисле­ния доходности к погашению облигации ρ, являющейся решением уравнений (3.6)-(3.8) при больших n имеет вид:

(3.10)

где q– купонная ставка процента, – курс облигации, n – количество лет до погашения облигации.

**Замечание.**

Формула (3.10)является асимптотически точ­нойв том смысле, что

где ρ∞ – доходность к погашению соответствующей бессрочной об­лигации (см.(3.9)). Однако, при не очень больших n < 10 эта фор­мула дает значительную погрешность.

(3.9)

Поэтому, при небольших n < 10 используется другая, более точная приближенная формула, которая имеет вид

(3.11)

***37. Получить формулу для текущей стоимости облигации, если купонные выплаты производятся несколько раз в году***

Для купонных облигаций ***с несколькими выплатами купонного дохода*** в течение одного периода владения (т.е. при ***m > 1***):

Для определения текущей стоимости купонной облигации воспользуемся общей формулой (4.1) при некоторых предположениях, учитывающих особенности потока платежей по купонным облигациям.

, (4.1)

откуда следует, что

.

Предварительно предположим, что:

***R≡R(m)*** – номинальная ставка начисления процентов за один период владения в предположении, что *m > 1*;

***R/m*** – ставка начисления процентов за один период выплат купонного дохода;

***q/m*** – ставка купонного дохода за один период выплат.

С учётом сделанных предположений из (4.1) получим следующую формулу для текущей стоимости облигации:

,

***38. Получите уравнение, из которого находится доходность облигации к погашению***

***Доходность к моменту погашения******ρ*** - это такая процентная ставка, при которой сумма дисконтируемых купон­ных платежей и номинальной стоимости на интервале *(t, Т]* дли­ны *n = Т - t* равна текущей рыночной цене облигации в момент времени *t*.

Таким образом ***ρ*** является решением уравнения:

(3.6)

или

(3.7)

или

(3.8)

где ***V*** – рыночная цена облигации в момент времени *t,*

***N*** – но­минальная стоимость,

***n = Т - t*** – количество лет до погашения облигации.

Если доходность облигации к моменту погашению выше теку­щей ставки процента (*ρ > r*), то говорят, что облигация *прибыль­на*.

Наиболее просто вычисляется доходность к погашению бес­срочной облигации *ρ∞* с номиналом *N*, купонной ставкой *q* и ры­ночной ценой *V*:

(3.9)

где ***К = V/N*** — курс бессрочной облигации.

***39. Выведите формулу для текущей стоимости облигации, когда купонные платежи даются раз в году***

Для определения текущей стоимости купонной облигации воспользуемся общей формулой (4.1) при некоторых предположениях, учитывающих особенности потока платежей по купонным облигациям.

, (4.1)

откуда следует, что

.

Введём обозначения:

***T < ∞*** – количество периодов владения, оставшихся до погашения облигации;

***F*** – финальная выплата по облигации, совпадающая с её номинальной стоимостью;

***q > 0*** – ставка купонного дохода (*купонная доходность*) за один период владения в долях;

***m ≥ 1*** – частота выплат купонного дохода за один период владения;

***R > 0*** – ставка дисконтирования купонного дохода, соответствующая одному периоду владения.

Ставка *R* интерпретируется как ожидаемая доходность вложений с сопоставимым риском.

Относительно потока платежей {*Ct*} предполагается, что

 (4.4)

Предполагается, также, что платежи в виде купонного дохода поступают *в конце каждого периода* и подлежат капитализации с начислением сложных процентов.

Рассмотрим вначале случай, когда *T < ∞*, *q > 0* и ***m = 1***, т.е. когда период выплат купонного дохода совпадает с периодом владения облигации.

С учётом сделанных предположений из (4.1) следует, что текущая стоимость купонной облигации определяется соотношением:

  (4.5)

где  текущая стоимость ренты с *T* единичными выплатами и постоянной ставкой наращения *R*;

- текущая стоимость финальной выплаты по облигации, *Fo < F*.

Обозначим *d*=(1+*R*)-1 – дисконтный множитель. По формуле для суммы *T* первых членов геометрической прогрессии имеем:

, (4.6)

и окончательно получаем формулу

, (4.7)

Если известна текущая рыночная стоимость облигации (цена покупки) *P*, то можно оценить инвестиционную привлекательность облигации на основе чистой текущей стоимости *NPV* и внутренней доходности *R\**, которая, как известно, является решением уравнения *NPV* = 0, т.е. удовлетворяет тождеству

, (4.8) Ставка внутренней доходности облигации *R\** определяет так называемую *полную доходность облигации* (*доходность к погашению*), поскольку учитывает все виды платежей по облигации до момента её погашения.

***40. Доказать, что если текущая стоимость облигации растет, то ставка процента падает и наоборот***

Поскольку функция *V(ρ)* при *ρ > -1* яв­ляется непрерывной, монотонно убывающей функцией (теорема 3.1):

**Теорема 3.1.**

Рыночная цена облигации V как функция до­ходности к погашению ρ при ρ > -1 является непрерывной, мо­нотонно убывающей, выпуклой вниз (вогнутой) функцией, при­нимающей любые положительные значения.

а из формулы (3.8) следует, что *V(q) = N*:

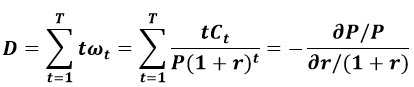
(3.8)

то можно выявить следующее **следствие:**

Если текущая цена облигации P растет, то процентная ставка r уменьшается. И наоборот. Если текущая цена облигации P падает, то процентная ставка r увеличи­вается.

**41. Доказать утверждение: «Дюрация бескупонной облигации равна времени ее погашения».**

**Дюрацию D** определим следующим образом:

 (1)

Рассмотрим дюрацию бескупонной облигации со сроком пога­шения . В этом случае при и , текущая стоимость равна , а из (1) получается, что

Таким образом верно, что ***D = Т***.

**42. Докажите, что облигация продается по номиналу тогда и только тогда, когда ее доходность к погашению равна купонной ставке.**

Доказательство обусловлено тем фактом, что функция является убывающей в своей области определения. (V – рыночная цена облигации, а r – доходность к погашению).

Тогда из формулы

следует, что .

Т.е.

**43. Докажите, что облигация продается с дисконтом тогда и только тогда, когда ее доходность к погашению больше купонной ставки.**

Доказательство обусловлено тем фактом, что функция является убывающей в своей области определения. (V – рыночная цена облигации, а r – доходность к погашению).

Тогда из формулы

следует, что

– т.е. рыночная цена облигации ниже ее номинальной стоимости – облигация продается с дисконтом.

В противном случае рыночная цена облигации будет выше номинальной стоимости.

**44. Доказать, что если рыночная цена облигации растет, то ее доходность к погашению падает и наоборот.**

Зависимость между доходностью к погашению и рыночной ценой облигации носит обратный нелинейный характер.

Доказательство обусловлено тем фактом, что функция является убывающей в своей области определения. (V – рыночная цена облигации, а r – доходность к погашению).

Тогда из формулы

следует, что

цена при доходности к погашению, равной купонной ставке, равна:

.

Т.е.

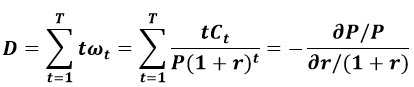
Если увеличить доходность к погашению, то цена составит:

т.е. с увеличением доходности рыночная цена облигации падает.

В противном случае рыночная цена облигации возрастет.

**45. Доказать утверждение «Если сумма денег предоставляется в заем на один год при однократном начислении процентов, то дюрация такой сделки равна 1».**

**Дюрацию D** определим следующим образом:

 (1)

Рассмотрим дюрацию со сроком пога­шения 1 год. В этом случае начисление процентов однократное: и , текущая стоимость равна , тогда из (1)

Таким образом верно, что ***D = 1***.

***46. Дайте обоснование утверждению «Рыночная цена облигации как функция доходности к погашению является непрерывной, монотонно убывающей, вогнутой функцией, принимающей любые положительные значения»***

**Теорема 3.1.**

Рыночная цена облигации V как функция до­ходности к погашению ρ при ρ > -1 является непрерывной, мо­нотонно убывающей, выпуклой вниз (вогнутой) функцией, при­нимающей любые положительные значения.

**Доказательство.**

Утверждение теоремы следует из анализа формулы (3.6).

***Доходностью к моменту погашения ρ*** – такая процентная ставка, при которой сумма дисконтируемых купон­ных платежей и номинальной стоимости на интервале *(t, Т]* дли­ны *n = Т - t* равна текущей рыночной цене облигации в момент времени *t*. Таким образом ***ρ*** является решением уравнения:

(3.6)

где ***V*** – рыночная цена облигации в момент времени *t,*

***N*** – но­минальная стоимость,

***n = Т - t*** – количество лет до погашения облигации.

***47. Дайте обоснование утверждению «Текущая стоимость облигации как функция ставки процента является непрерывной, монотонно убывающей, вогнутой функцией, принимающей любые положительные значения»***

**Теорема**

Текущая стоимость облигации как функция ставки процента является непрерывной, монотонно убывающей, вогнутой функцией, принимающей любые положительные значения.

**Доказательство.**

Утверждение теоремы следует из анализа формулы (3.6).

***Доходностью к моменту погашения ρ*** – такая процентная ставка, при которой сумма дисконтируемых купон­ных платежей и номинальной стоимости на интервале *(t, Т]* дли­ны *n = Т - t* равна текущей рыночной цене облигации в момент времени *t*. Таким образом ***ρ*** является решением уравнения:

(3.6)

где ***V*** – рыночная цена облигации в момент времени *t,*

***N*** – но­минальная стоимость,

***n = Т - t*** – количество лет до погашения облигации.

***48. Доказать, что дюрация является невозрастающей функцией процентной ставки***

**Теорема 3.6.**

Дюрация D = D(r) является невозрастающей функцией процентной ставки r.

**Доказательство.**

Вычислим частную производную *dD/dr* и покажем, что она не положительна. Дифференцируя выражение (3.14)

(3.14)

с учетом (3.12),

(3.12)

получим

Рассмотрим вектор с координатами и вектор с координатами *.* Тогда выражение в квадратных скобках можно записать в виде

*.*

В силу неравенства Коши-Буняковского это выражение не положительно, что и доказывает теорему.

***49. Доказать, что дюрация является убывающей функцией купонной ставки***

Существует следующая теорема:

**Теорема 3.7.**

Дюрация облигации определяется по формуле

(3.16)

где ***r*** - процентная ставка,

***q*** - купонная ставка,

***n*** - количество лет до погашения облигации.

**Следствие данной теоремы:**

***Дюрация D = D(q) — убывающая функция от­носительно купонной ставки q.***

**Доказательство:**

Для доказательства представим выражение (3.16) в виде:

где *А, В, Е >* 0, *п > -* постоянные.

Затем преобразуем его следующим образом:

где .

***50. Защита портфеля облигаций от изменения процентной ставки***

Важное значение дюрации состоит в том, что она показыва­ет чувствительность цены облигации, или, вообще говоря, потока платежей, к изменению доходности. Поэтому, используя знание дюрации, можно снизить риск, связанный с изменением процент­ной ставки. Процентный риск возрастает с умень­шением цены облигации и, наоборот, уменьшается с увеличением цены, однако, облигации с разными сроками погашения реагиру­ют по-разному на изменения процентных ставок. Поэтому, если процентная ставка растёт, доход от реинвестиции купонов возрас­тает, но рыночная стоимость облигации падает, и наоборот, если процентная ставка падает, те стоимость облигации растёт. Аме­риканский экономист теорема П. Самуэльсона впервые доказал возможность замены одной облигации двумя так, что при данной процентной ставке текущая стоимость не меняется, а при измене­нии процентной ставки только увеличивается. Покажем, что это возможно при выравнивании дюраций активов и задолженностей.

Пусть мы взяли в долг и обязаны выплатить сумму *С* в мо­мент времени t. Тогда текущая стоимость задолженности равна и дюрация *.* Назовем такую задолженность облигацией I.

Рассмотрим две бескупонные облигации *A* и *В* с номиналь­ными стоимостями и и временем погашения и со­ответственно. Предположим, что процентная ставка *r* не зависит от срока погашения облигации и, поэтому, совпадает с доходно­стью облигации к погашению. Портфель П, составленный из двух таких облигаций *А* и *В,* назовём *облигацией II.* Тогда текущая стоимость портфеля П равна

а дюрация портфеля П равна*,* где

причем

Пусть текущая процентная ставка такова, что:

(3.26)

(3.24)

(3.25)

Из равенств (3.25) и (3.26) следует, что

Следовательно, графики функций и касаются в точке . Сравним их вторые производные, чтобы определить, ка­кой график является ’’более выпуклым”. Найдём первые и вторые производные при :

(3.28)

Сравним *t*2 и с учётом того, что

(3.29)

Поскольку из (3.26) следует, что *,* то

Сравнивая (3.29) и (3.28), убеждаемся в том, что справедливо неравенство

(3.30)

Геометрически это означает, что кривая ’’цена-доходность” при выполнении условий (3.24)-(3.26) ’’более выпукла”, чем кри­вая *.*

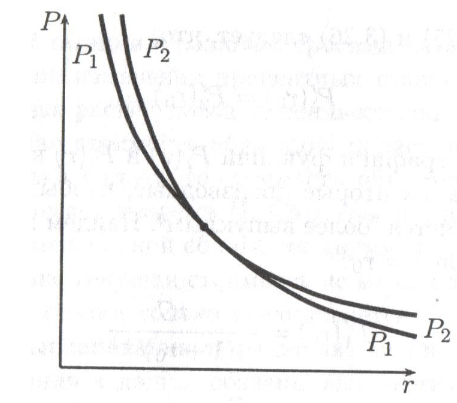


Рис. 3.1. Более выпуклая кривая выгоднее, чем менее выпуклая

Отсюда следует, что когда доходность к погашению возрастет на , то текущая стоимость уменьшается сильнее, чем теку­щая стоимость , т.е. и, наоборот, если доходность падает, то стоимость по облигации I растет медленнее, чем стоимость облигации II, т.е. . По­этому говорят, что стоимость облигации II ’’защищает” (хеджи­рует) стоимость облигации I или, что облигация II иммунизиру­ет облигацию I.

Из приведенных выше рассуждений следует, что для ”иммунизирующего портфеля”, состоящего из двух облигаций А и В, ’’хеджирующие” доли и должны удовлетворять си­стеме уравнений:

(3.31)