

А. Т. Улимаева  
(г. Уфа)

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШИХ И НАИМЕНЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ

Опыт нашей работы в школах Башкирской АССР показал, что при организации повторения учебного материала в X классе целесообразно рассматривать задачи на нахождение наибольших и наименьших значений функций, причем использовать при их решении наряду с аппаратом производной и другие способы. Это способствует активизации мыслительной деятельности учащихся, вызывает у них интерес к решению задач и к изучению математики в целом.

Приведем пример решения одной такой задачи:

Требуется оградить прямоугольный участок земли площадью  $a^2$ . Определите оптимальные размеры участка, при которых затраты на ограду будут наименьшими (предполагается, что стоимость ограды пропорциональна ее длине с коэффициентом  $k > 0$ ).

Решение. I способ. Найдем прямоугольник площади  $a^2$ , у которого периметр наименьший. Пусть  $x > 0$  — длина стороны прямоугольника, тогда длина смежной с ней стороны равна  $\frac{a^2}{x}$ . Периметр прямоугольника  $P(x) = 2(x + \frac{a^2}{x})$ .

Найдем наименьшее значение  $P(x)$ , применяя производную:

$$P'(x) = 2(1 - \frac{a^2}{x^2}), x \in ]0; +\infty[$$

Определим критические точки функции:

$$(2(1 - \frac{a^2}{x^2}) = 0) \Leftrightarrow (x = a \text{ или } x = -a)$$

так как  $a > 0$ , то  $x = a \in ]0; +\infty[$ .

Найдем следующие значения функции  $P'(x)$ :

$$P'(\frac{a}{2}) = 2(1 - \frac{4a^2}{a^2}) = -6 < 0$$

$$P'(2a) = 2(1 - \frac{a^2}{4a^2}) = \frac{3}{2} > 0$$

Следовательно,  $\min_{]0; +\infty[} P(x) = 4a$  при  $x = a$ .

Длина другой стороны прямоугольника также равна  $a$ .

Из условия задачи известно, что стоимость изгороди  $N(x)$  пропорциональна ее длине с коэффициентом  $k > 0$ :  $N(x) = k \cdot P(x)$ . Следовательно  $N(x)$  получит наименьшее значение, откуда

$$N_{opt}(x) = \min_{]0; +\infty[} N(x) = k \cdot 4a \text{ при } x = a$$

Итак, чтобы оптимизировать стоимость изгороди, целесообразно выбрать участок квадратной формы.

II способ. Замечая, что  $P(x) = 2(x + \frac{a^2}{x}) = 2((\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} \frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{a^2}{(\sqrt{x})^2}) + 4a = 2(\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}})^2 + 4a$ , где  $x \in ]0; +\infty[$ , заключаем, что  $\min_{]0; +\infty[} P(x) = 4a$  при  $x = a$ :

$$((\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}})^2 = 0) \Rightarrow (\sqrt{x} = \frac{a}{\sqrt{x}}) \Rightarrow (x = a)$$

III способ. Обозначим полупериметр прямоугольника  $p(x)$ . Пусть  $x$  — длина одной из его сторон, тогда длина смежной с ней стороны равна  $p - x$  ( $0 \leq x \leq p$ ). Площадь прямоугольника  $a^2 = x(p - x)$ ;

$$(x^2 + a^2 - px = 0) \Leftrightarrow ((x - a)^2 + x(2a - p) = 0$$

Последнее равенство истинно лишь при  $2a - p \leq 0$ , т. е. при  $p \geq 2a$ . Следовательно, наименьшее значение полупериметра равно  $2a$ .

Подставляя в уравнение  $x^2 + a^2 - px = 0$  наименьшее значение  $p$ , получим уравнение  $x^2 - 2a + a^2 = 0$ , откуда  $x = a$ .

VI способ. Обозначим длины смежных сторон прямоугольника через  $x$  и  $y$ , а его полупериметр через  $p$ . Тогда  $xy = a^2$ .

Чтобы найти наименьшее значение периметра прямоугольника площади  $a^2$ , воспользуемся известным тождеством:  $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$ . Заменяя в нем произведение  $xy$  на равное ему значение  $a^2$ , получим равенство

$$(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4a^2$$

Из этого равенства видно, что выражение  $(x + y)^2 = p^2$  получит наименьшее значение при  $x - y = 0$ , т. е. при  $x = y$ . Полупериметр  $p = x + y$  достигает своего наименьшего значения при  $x = y = a$ , при этом  $P = 4a$ .

V способ. По условию  $xy = a^2$ , где  $x$  и  $y$  — длины смежных сторон прямоугольника. Предположим, что  $x \neq y$ , пусть, например,  $x = a + b$  ( $b > 0$ ), тогда

$$y = \frac{a^2}{a + b} > \frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b$$

Значит,  $x + y > a + b + a - b = 2a$ .

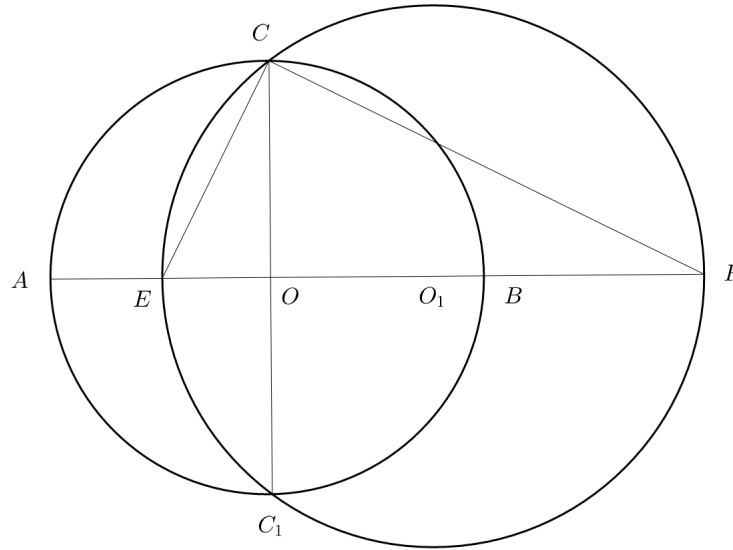
Пусть теперь  $x = y = a$ . В этом случае  $x + y = 2a$ .

Имеем:  $x + y \geq 2a$ , откуда следует, что наименьшее значение периметра прямоугольника равно  $4a$  и достигается оно при  $x = y = a$ .

VI способ. К решению задачи можно применить также геометрические построения. В условии задачи дано:  $xy = a^2$ , где  $x$  и  $y$  — длины смежных сторон прямоугольника.

При  $x = y = a$  ( $a > 0$ ) получаем  $x + y = 2a$ . Построим окружность с центром

в точке  $O$  радиуса  $|AO| = a$ . Имеем:  $|AB| = |AO| + |OB| = x + y = 2a$  (см. рис.).



Пусть  $x \neq y$ . Построим на том же рисунке окружность с центром в точке  $O_1$  и радиусом, равным длине отрезка  $O_1F$ , так, чтобы  $|EO| \cdot |OF| = a^2$ . Тогда  $|EO| + |OF| = |EF|$ , где  $|EO| = x$ ,  $|OF| = y$ .

Рассматривая рисунок, замечаем, что  $|EF| > 2a$ , так как  $|EF|$  – длина диаметра, а  $2a$  – длина хорды  $CC_1$  окружности  $(O_1, |O_1F|)$ . Таким образом получаем, что  $x + y \geq 2a$ , причем  $x + y = 2a$  при  $x = y = a$ .

Т. П. Григорьева

(г. Горький)

#### К ИЗУЧЕНИЮ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Доказательство распределительного свойства скалярного умножения векторов представляет трудности как в методическом, так и в математическом плане.

В учебном пособии "Геометрия 9" (§, с. 59) приведено доказательство этого свойства векторов. Существуют и другие доказательства (см.: Скопец З. А. О распределительном свойстве скалярного произведения векторов. – Математика в школе, 1965, № 6, с. 26; Скопец З. А. и др. Скалярное произведение двух векторов. – Математика в школе, 1968, № 6, с. 8; Скопец З. А. Соотношение Лейбница и распределительное свойство скалярного произведения векторов. – Квант, 1972, № 6, с. 22). Однако названные доказательства либо слишком алгебраичны, либо громоздки. Приведем новое доказательство, навеянное статьей З. А. Скопца, опубликованной в № 6 журнала "Математика в школе" за 1965 г., которое, нам кажется, имеет преимущества по сравнению с указанными.

Предварительно с учащимися нужно рассмотреть метрическое свойство параллелограмма: сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон,

т. е.

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2. \quad (1)$$

Доказательство этого свойства следует из равенств

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 \quad (2)$$

и

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 \quad (3)$$

и не представляет трудностей для учащихся.

Заметим, что метрическое соотношение (1) может быть доказано ранее, в VIII классе, с помощью теоремы косинусов и применяется при решении других задач.

Перейдем теперь к доказательству распределительного свойства скалярного умножения векторов.

От точки  $O$  отложим векторы  $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$ .

(Рис. 1)

а) Пусть точки  $A, B, C$  не принадлежат одной прямой (рис. 1). Построим треугольник  $ABC$  до параллелограмма  $ABCD$ . Тогда  $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}, \vec{AC} = \vec{c} - \vec{a}, \vec{BC} = \vec{c} - \vec{b}$ . Нетрудно видеть, что  $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$ , где  $\vec{d} = \vec{OD}$ , откуда  $\vec{d} = \vec{b} + \vec{c} - \vec{a}, \vec{AD} = \vec{b} + \vec{c} - 2\vec{a}$ . Согласно (1) запишем

$$2|AB|^2 + 2|AC|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$$

или

$$2(\vec{b} - \vec{a})^2 + 2(\vec{c} - \vec{a})^2 = ((\vec{b} + \vec{c}) - 2\vec{a})^2 + (\vec{c} - \vec{b})^2$$

После раскрытия скобок, основанных на равенствах (2) и (3), получаем

$$\vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{a} = (\vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{a}$$

Отметим, что рассмотренное доказательство справедливо как для компланарных так и для некопланарных векторов.

Для полноты изложения рассмотрим два частных случая.

б) Пусть точки  $A, B, C$  принадлежат одной прямой (рис. 2). Тогда введем вектор  $k\vec{a}$ , где  $k \neq 1, k \neq 0$ . Согласно случаю а) имеем:

$$k\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (k\vec{a}) \cdot \vec{b} + (k\vec{a}) \cdot \vec{c}$$

или

$$k(\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})) = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) + k(\vec{a} \cdot \vec{c})$$

После сокращения на  $k$  получаем требуемое равенство.

в) Пусть векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  коллинеарны. Тогда  $\vec{a} = \alpha \vec{e}, \vec{b} = \beta \vec{e}, \vec{c} = \gamma \vec{e}$ , где  $|\vec{e}| = 1$ . Отсюда следует:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \alpha \vec{e} \cdot (\beta \vec{e} + \gamma \vec{e}) = \alpha \vec{e} \cdot (\beta + \gamma) \vec{e} = \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad (4)$$

С другой стороны,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = (\alpha \vec{e}) \cdot (\beta \vec{e}) + (\alpha \vec{e}) \cdot (\gamma \vec{e}) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad (5)$$

Сравнивая правые части равенств (4) и (5), получаем истинность распределительного закона скалярного умножения векторов и для этого случая.

На уроке достаточно ограничиться общим случаем. Случаи б) и в) можно предложить либо в качестве упражнений, либо при повторении, либо сообщить учащимся лишь идею доказательства.

Приведем пример применения распределительного свойства скалярного умножения векторов.

Задача. Даны четыре точки  $A, B, C, D$ . Известны расстояния между этими точками:  $|DA| = a, |DB| = b, |DC| = c, |AB| = a_1, |BC| = a_1, |AC| = b_1$ . Найдите расстояние от одной из этих точек до центроида<sup>1</sup> оставшихся трех точек.

<sup>1</sup> Центроидом трех точек  $P, Q, R$  называется такая точка  $G$ , что

$$\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR})$$

Решение. Пусть требуется найти расстояние от точки  $D$  до центроида  $G$  точек  $A, B, C$  (рис. 3). Введем векторы:  $\vec{DA} = \vec{a}, \vec{DB} = \vec{b}, \vec{DC} = \vec{c}$ . Тогда

$$\vec{DG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

отсюда

$$\vec{DG}^2 = \frac{1}{9}((\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c})^2 = \frac{1}{9}((\vec{a} + \vec{b})^2 + 2(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} + \vec{c}^2)$$

Согласно распределенному свойству скалярного умножения векторов имеем

$$\vec{DG}^2 = \frac{1}{9}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a})$$

Но

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{\vec{OA}^2 + \vec{OB}^2 - \vec{AB}^2}{2} = \frac{a^2 + b^2 - c_1^2}{2} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} &= \frac{\vec{OB}^2 + \vec{OC}^2 - \vec{BC}^2}{2} = \frac{b^2 + c^2 - a_1^2}{2} \\ \vec{c} \cdot \vec{a} &= \frac{\vec{OC}^2 + \vec{OA}^2 - \vec{AC}^2}{2} = \frac{c^2 + a^2 - b_1^2}{2} \end{aligned}$$

поэтому

$$|DG|^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) \quad (6)$$

Отметим, что если точки  $A, B, C, D$  являются вершинами тетраэдра  $ABCD$ , то квадрат длины отрезка  $|DG|$  вычисляется по формуле (6).

Решая эту задачу, мы попутно вывели формулу скалярного квадрата суммы трех векторов:

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a}$$

Эта формула часто применяется при решении задач.

Материал, рассмотренный в статье может быть использован учителем на уроках геометрии как при непосредственном изучении материала, так и при его повторении, а также на внеклассных занятиях.