А. Т. Улимаева
(г. Уфа)
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШИХ И НАИМЕНЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ

Опыт нашей работы в школах Башкирской АССР показал, что при организации повторения учебного материла в X классе целесообразно рассматривать задачи на нахождение наибольших и наименьших значений функций, причем использовать при их решении наряду с аппаратом производной и другие способы. Это способствуют активизации мыслительной деятельности учащихся, вызывает у них интерес к решению задач и к изучению математики в целом.

Приведем пример решения одной такой задачи:

Требуется оградить прямоугольный участок земли площадью $a^2$. Определите оптимальные размеры участка, при которых затраты на ограду будут наименьшими (предполагается, что стоимость ограды пропорционально ее длине с коэффициентом $k > 0$).

Решение. I способ. Найдем прямоугольник площади $a^2$, у которого периметр наименьший. Пусть $x > 0$ – длина стороны прямоугольника, тогда длина смежной с ней стороны равна $\frac{a^2}{x}$. Периметр прямоугольника $P(x) = 2(x + \frac{a^2}{x})$.

Найдем наименьшее значение $P(x)$, применяя производную:

$$P'(x) = 2(1 - \frac{a^2}{x^2}), x \in ]0; +\infty[$$

Определим критические точки функции:

$$(2(1 - \frac{a^2}{x^2}) = 0) \Leftrightarrow (x = a \text{ или } x = -a)$$

так как $a > 0$, то $x = a \in ]0, +\infty[$.

Найдем следующие значения функции $P'(x)$:

$$P'(\frac{a}{2}) = 2(1 - \frac{4a^2}{a^2}) = -6 < 0$$

$$P'(2a) = 2(1 - \frac{a^2}{4a^2}) = \frac{3}{2} > 0$$

Следовательно, $\min\limits_{]0;+\infty[} P(x) = 4a$ при $x = a$.

Длина другой стороны прямоугольника также равна $a$.

Из условия задачи известно, что стоимость изгороди $N(x)$ пропорциональна ее длине с коэффициентом $k > 0 : N(x) = k \cdot P(x)$. Следовательно $N(x)$ получит наименьшее значение, откуда

$$N_{opt}(x) = \min_{]0;+\infty[} N(x) = k \cdot 4a \text{ при } x = a$$

Итак, чтобы оптимизировать стоимость изгороди, целесообразно выбрать участок квадратной формы.
II способ. Замечая, что $P(x) = 2(x + \frac{a^2}{x}) = 2((\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x}\frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{a^2}{(\sqrt{x})^2}) + 4a = 2(\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}})^2 + 4a$, где $x \in ]0; +\infty[$, заключаем, что $\min\limits_{]0;+\infty[} P(x) = 4a$ при $x = a$:

$$((\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}})^2 = 0) \Rightarrow (\sqrt{x} = \frac{a}{\sqrt{x}}) \Rightarrow (x = a)$$

III способ. Обозначим полупериметр прямоугольника $p(x)$. Пусть x – длина одной из его сторон, тогда длина смежной с ней стороны равна $p - x (0 \leqslant x \leqslant p)$. Площадь прямоугольника $a^2 = x(p - x)$;

$$(x^2 + a^2 - px = 0) \Leftrightarrow ((x - a)^2 + x(2a - p) = 0$$

Последнее равенство истинно лишь при $2a - p \leqslant 0$, т. е. при $p \geqslant 2a$. Следовательно, наименьшее значение полупериметра равно 2a.
Подставляя в уравнение $x^2 + a^2 - px = 0$ наименьшее значение $p$, получим уравнение $x^2 - 2a + a^2 = 0$, откуда $x = a$.
VI способ. Обозначим длины смежных сторон прямоугольника через $x$ и $y$, а его полупериметр через p. Тогда $xy = a^2$.
Чтобы найти наименьшее значение периметра прямоугольника площади $a^2$, воспользуемся известным тождеством: $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$. Заменив в нем произведение $xy$ на равное ему значение $a^2$, получим равенство

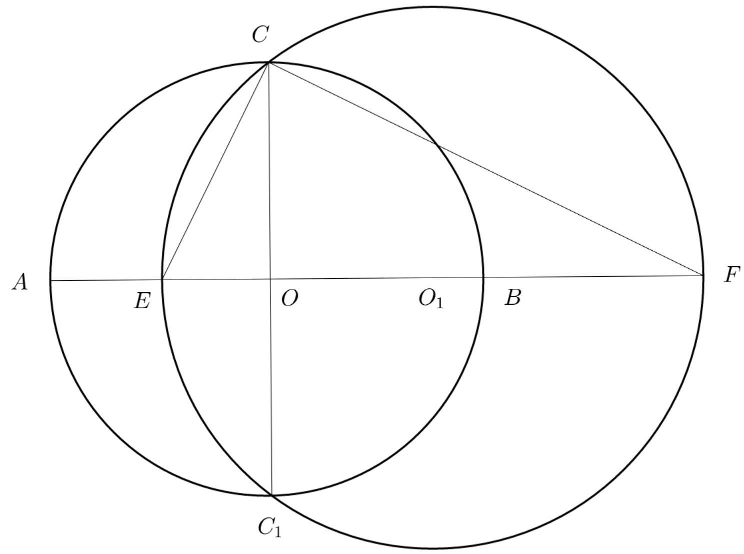
$$(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4a^2$$

Из этого равенства видно, что выражение $(x+y)^2 = p^2$ получит наименьшее значение при $x - y = 0$, т. е. при $x = y$. Полупериметр $p = x + y$ достигает своего наименьшего значения при $x = y = a$, при этом $P = 4a$.
V способ. По условию $xy = a^2$, где $x$ и $y$ – длины смежных сторон прямоугольника. Предположим, что $x \neq y$, пусть, например, $x = a + b(b > 0)$, тогда

$$y = \frac{a^2}{a + b} > \frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b$$

Значит, $x + y > a + b + a - b = 2a$.
Пусть теперь $x = y = a$. В этом случае $x + y = 2a$.
Имеем: $x + y \geqslant 2a$, откуда следует, что наименьшее значение периметра прямоугольника равно $4a$ и достигается оно при $x = y = a$
VI способ. К решению задачи можно применить также геометрические построения. В условии задачи дано: $xy = a^2$, где $x$ и $y$ – длины смежных сторон прямоугольника.
При $x = y = a(a > 0)$ получаем $x+y = 2a$. Построим окружность с центром

в точке $O$ радиуса $|AO| = a$. Имеем: $|AB| = |AO| + |OB| = x + y = 2a$ (см. рис.).




Пусть $x \neq y$. Построим на том же рисунке окружность с центром в точке $O_1$ и радиусом, равным длине отрезка $O_1F$, так, чтобы $|EO| \cdot |OF| = a^2$. Тогда $|EO| + |OF| = |EF|$, где $|EO| = x$, $|OF| = y$.

Рассматривая рисунок, замечаем, что $|EF| > 2a$, так как $|EF|$ – длина диаметра, а $2a$ – длина хорды $CC_1$ окружности $(O_1, |O_1F|)$. Таким образом получаем, что $x + y \geqslant 2a$, причем $x + y = 2a$ при $x = y = a$.