А. Т. Улимаева
(г. Уфа)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШИХ И НАИМЕНЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ

Опыт нашей работы в школах Башкирской АССР показал, что при организации повторения учебного материла в X классе целесообразно рассматривать задачи на нахождение наибольших и наименьших значений функций, причем использовать при их решении наряду с аппаратом производной и другие способы. Это способствуют активизации мыслительной деятельности учащихся, вызывает у них интерес к решению задач и к изучению математики в целом.

Приведем пример решения одной такой задачи:

Требуется оградить прямоугольный участок земли площадью a^2. Определите оптимальные размеры участка, при которых затраты на ограду будут наименьшими (предполагается, что стоимость ограды пропорционально ее длине с коэффициентом $k > 0$).

Решение. I способ. Найдем прямоугольник площади a^2, у которого периметр наименьший. Пусть $x > 0$ – длина стороны прямоугольника, тогда длина смежной с ней стороны равна $\frac{a^2}{x}$. Периметр прямоугольника $P(x) = 2(x + \frac{a^2}{x})$.

Найдем наименьшее значение $P(x)$, применяя производную:

$$P'(x) = 2(1 - \frac{a^2}{x^2}), x \in]0; +\infty[$$

Определим критические точки функции:

$$(2(1 - \frac{a^2}{x^2}) = 0) \Leftrightarrow (x = a \text{ или } x = -a)$$

так как $a > 0$, то $x = a \in]0, +\infty[$.

Найдем следующие значения функции $P'(x)$:

$$P'(\frac{a}{2}) = 2(1 - \frac{4a^2}{a^2}) = -6 < 0$$

$$P'(2a) = 2(1 - \frac{a^2}{4a^2}) = \frac{3}{2} > 0$$

Следовательно, $\min\limits_{]0;+\infty[} P(x) = 4a$ при $x = a$.

Длина другой стороны прямоугольника также равна a.

Из условия задачи известно, что стоимость изгороди $N(x)$ пропорциональна ее длине с коэффициентом $k > 0 : N(x) = k \cdot P(x)$. Следовательно $N(x)$ получит наименьшее значение, откуда

$$N_{opt}(x) = \min_{]0;+\infty[} N(x) = k \cdot 4a \text{ при } x = a$$

Итак, чтобы оптимизировать стоимость изгороди, целесообразно выбрать участок квадратной формы.

II способ. Замечая, что $P(x) = 2(x + \frac{a^2}{x}) = 2((\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x}\frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{a^2}{(\sqrt{x})^2}) + 4a = 2(\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}})^2 + 4a$, где $x \in]0; +\infty[$, заключаем, что $\min\limits_{]0;+\infty[} P(x) = 4a$ при $x = a$:

$$((\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}})^2 = 0) \Rightarrow (\sqrt{x} = \frac{a}{\sqrt{x}}) \Rightarrow (x = a)$$

III способ. Обозначим полупериметр прямоугольника $p(x)$. Пусть x – длина одной из его сторон, тогда длина смежной с ней стороны равна $p - x (0 \leqslant x \leqslant p)$. Площадь прямоугольника $a^2 = x(p - x)$;

$$(x^2 + a^2 - px = 0) \Leftrightarrow ((x - a)^2 + x(2a - p) = 0$$

Последнее равенство истинно лишь при $2a - p \leqslant 0$, т. е. при $p \geqslant 2a$. Следовательно, наименьшее значение полупериметра равно 2a.

Подставляя в уравнение $x^2 + a^2 - px = 0$ наименьшее значение p, получим уравнение $x^2 - 2a + a^2 = 0$, откуда $x = a$.

VI способ. Обозначим длины смежных сторон прямоугольника через x и y, а его полупериметр через р. Тогда $xy = a^2$.

Чтобы найти наименьшее значение периметра прямоугольника площади a^2, воспользуемся известным тождеством: $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy$. Заменив в нем произведение xy на равное ему значение a^2, получим равенство

$$(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4a^2$$

Из этого равенства видно, что выражение $(x+y)^2 = p^2$ получит наименьшее значение при $x - y = 0$, т. е. при $x = y$. Полупериметр $p = x + y$ достигает своего наименьшего значения при $x = y = a$, при этом $P = 4a$.

V способ. По условию $xy = a^2$, где x и y – длины смежных сторон прямоугольника.

Предположим, что $x \neq y$, пусть, например, $x = a + b(b > 0)$, тогда

$$y = \frac{a^2}{a+b} > \frac{a^2 - b^2}{a+b} = a - b$$

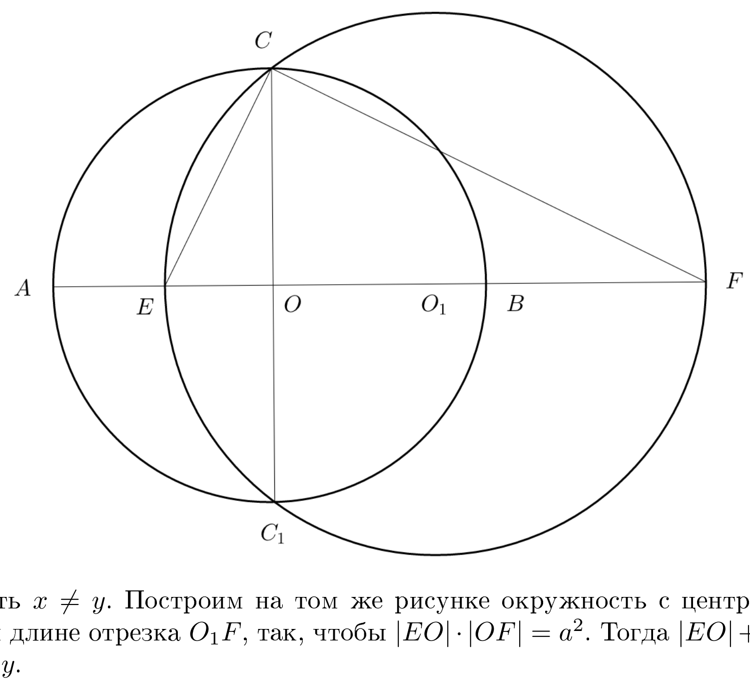
Значит, $x + y > a + b + a - b = 2a$.

Пусть теперь $x = y = a$. В этом случае $x + y = 2a$.

Имеем: $x+y \geqslant 2a$, откуда следует, что наименьшее значение периметра прямоугольника равно $4a$ и достигается оно при $x = y = a$

VI способ. К решению задачи можно применить также геометрические построения. В условии задачи дано: $xy = a^2$, где x и y – длины смежных сторон прямоугольника.

При $x = y = a(a > 0)$ получаем $x+y = 2a$. Построим окружность с центром в точке O радиуса $|AO| = a$. Имеем: $|AB| = |AO| + |OB| = x + y = 2a$ (см. рис.).



Пусть $x \neq y$. Построим на том же рисунке окружность с центром в точке O_1 и радиусом, равным длине отрезка O_1F, так, чтобы $|EO| \cdot |OF| = a^2$. Тогда $|EO| + |OF| = |EF|$, где $|EO| = x$, $|OF| = y$.

Рассматривая рисунок, замечаем, что $|EF| > 2a$, так как $|EF|$ – длина диаметра, а $2a$ – длина хорды CC_1 окружности $(O_1, |O_1F|)$. Таким образом получаем, что $x + y \geqslant 2a$, причем $x + y = 2a$ при $x = y = a$.

Т. П. Григорьева
(г. Горький)

К ИЗУЧЕНИЮ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Доказательство распределительного свойства скалярного умножения векторов представляет трудности как в методическом, так и в математическом плане. В учебном пособии "Геометрия 9"(§, с. 59) приведено доказательство этого свойства векторов. Существуют и другие доказательства (см.: Скопец З. А. О распределительном свойстве скалярного произведения векторов. –Математика в школе, 1965, № 6, с. 26; Скопец З. А. и др. Скалярное произведение двух векторов. –Математика в школе, 1968, № 6, с. 8; Скопец З. А. Соотношение Лейбница и распределительное свойство скалярного произведения векторов. –Квант, 1972, № 6, с. 22). Однако названные доказательства либо слишком алгебраичны, либо громоздки. Приведем новое доказательство, навеянное статьей З. А. Скопеца, опубликованной в № 6 журнала "Математика в школе"за 1965 г., которое, нам кажется, имеет преимущества по сравнению с указанными.

Предварительно с учащимися нужно рассмотреть метрическое свойство параллелограмма: сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон, т. е.

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2. \tag{1}$$

Доказательство этого свойства следует из равенств

$$(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})^2 = \overrightarrow{a}^2 - 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{b}^2 \tag{2}$$

и

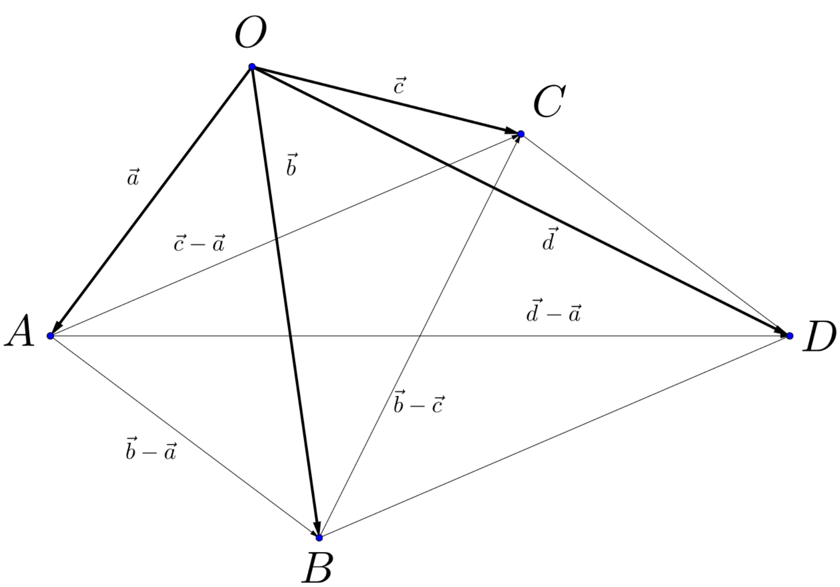
$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})^2 = \overrightarrow{a}^2 + 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{b}^2 \tag{3}$$

и не представляет трудностей для учащихся.

Заметим, что метрическое соотношение (1) может быть доказано ранее, в VIII классе, с помощью теоремы косинусов и применяется при решении других задач.

Перейдем теперь к доказательству распределительного свойства скалярного умножения векторов.

От точки O отложим векторы $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}, \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$.



(Рис. 1)

а) Пусть точки A, B, C не принадлежат одной прямой (рис. 1). Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABCD$. Тогда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}, \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{c} - \overrightarrow{b}$. Нетрудно видеть, что $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{d} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$, где $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{OD}$, откуда $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{a}$. Согласно (1) запишем

$$2|AB|^2 + 2|AC|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$$

или

$$2(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a})^2 + 2(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})^2 = ((\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) - 2\overrightarrow{a})^2 + (\overrightarrow{c} - \overrightarrow{b})^2$$

После раскрытия скобок, основанных на равенствах (2) и (3), получаем

$$\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} = (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{a}$$

Отметим, что рассмотренное доказательство справедливо как для компланарных так и для некопланарных векторов.

Для полноты изложения рассмотрим два частных случая.

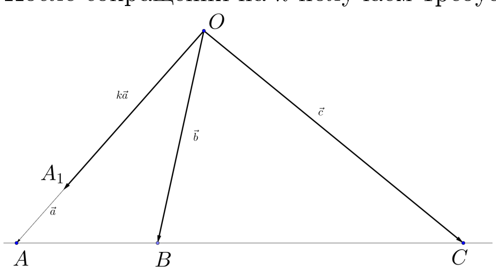
б) Пусть точки A, B, C принадлежат одной прямой (рис. 2). Тогда введем вектор $k\overrightarrow{a}$, где $k \neq 1, k \neq =$. Согласно случаю а) имеем:

$$k\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = (k\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} + (k\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{c}$$

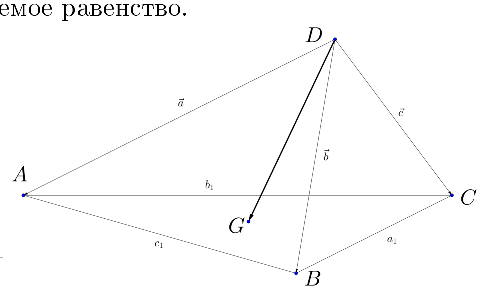
или

$$k(\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})) = k(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) + k(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})$$

После сокращения на k получаем требуемое равенство.



(Рис.2)



(Рис.3)

в) Пусть векторы $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ коллинеарны. Тогда $\overrightarrow{a} = \alpha\overrightarrow{e}$. $\overrightarrow{b} = \beta\overrightarrow{e}, \overrightarrow{c} = \gamma\overrightarrow{e}$, где $|\overrightarrow{e}| = 1$. Отсюда следует:

$$\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \alpha\overrightarrow{e} \cdot (\beta\overrightarrow{e} + \gamma\overrightarrow{e}) = \alpha\overrightarrow{e} \cdot (\beta + \gamma)\overrightarrow{e} = \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \tag{4}$$

С другой стороны,

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} = (\alpha\overrightarrow{e}) \cdot (\beta\overrightarrow{e}) + (\alpha\overrightarrow{e}) \cdot (\gamma\overrightarrow{e}) = \alpha\beta + \alpha\gamma \tag{5}$$

Сравнивая правые части равенств (4) и (5), получаем истинность распределительного закона скалярного умножения векторов и для этого случая.

На уроке достаточно ограничиться общим случаем. Случаи б) и в) можно предложить либо в качестве упражнений, либо при повторении, либо сообщить учащимся лишь идею доказательства.

Приведем пример применения распределительного свойства скалярного умножения векторов.

Задача. Даны четыре точки A, B, C, D. Известны расстояния между этими точками: $|DA| = a, |DB| = b, |DC| = c, |AB| = a_1, |BC| = a_1, |AC| = b_1$. Найдите расстояние от одной из этих точек до центроида [1] оставшихся трех точек.

Решение. Пусть требуется найти расстояние от точки D до центроида G точек A, B, C (рис. 3). Введем векторы: $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{b}, DC = \overrightarrow{c}$. Тогда

$$\overrightarrow{DG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$$

[1] Центроидом трех точек P, Q, R называется такая точка G, что

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR})$$

отсюда

$$\overrightarrow{DG}^2 = \frac{1}{9}((\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c})^2 = \frac{1}{9}((\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})^2 + 2(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} + \overrightarrow{c}^2)$$

Согласно распределенному свойству скалярного умножения векторов имеем

$$\overrightarrow{DG}^2 = \frac{1}{9}(\overrightarrow{a}^2 + \overrightarrow{b}^2 + \overrightarrow{c}^2 + 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} + 2\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a})$$

Но

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \frac{\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{AB}^2}{2} = \frac{a^2 + b^2 - c_1^2}{2}$$

$$\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = \frac{\overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 - \overrightarrow{BC}^2}{2} = \frac{b^2 + c^2 - a_1^2}{2}$$

$$\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OA}^2 - \overrightarrow{AC}^2}{2} = \frac{c^2 + a^2 - b_1^2}{2}$$

поэтому

$$|DG|^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) \tag{6}$$

Отметим, что если точки A, B, C, D являются вершинами тетраэдра $ABCD$, то квадрат длины отрезка $|DG|$ вычисляется по формуле (6).

Решая эту задачу, мы попутно вывели формулу скалярного квадрата суммы трех векторов:

$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})^2 = \overrightarrow{a}^2 + \overrightarrow{b}^2 + \overrightarrow{c}^2 + 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} + 2\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a}$$

Эта формула часто применяется при решении задач.

Материал, рассмотренный в статье может быть использован учителем на уроках геометрии как при непосредственном изучении материала, так и при его повторении, а также на внеклассных занятиях.