ТЕОРЕМА МОРЛЕЯ

Э.Г.Готман
(г.Арзамас)
З.А.Скопец
(г.Ярославль)

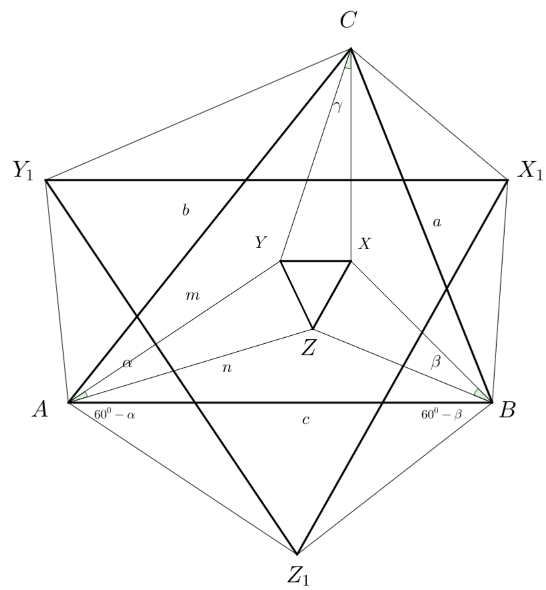
На первой странице обложки нашего журнала помещен чертеж к теореме Морлея. Любителям математики хорошо известна эта удивительная теорема элементарной геометрии о трисектрисах труеугольника . Она была сформулирована американским математиком Ф. Морлеем (1860-1937). Первые доказательства теоремы Морлея опубликованы в 1909 г. Позднее появилось более десятка новых доказательств, но довольно сложных по сравнению с ее простой формулировкой.

Предлагаемое ниже элементарное доказательство доступно учащимся старших классов и может быть расмотрено на занятиях математического кружка.

Теорема. Трисекрисы углов треугольника, примыкающие к одной стороне, попарно пересекаются в точках, являющихся вершинами равностороннего треугольника.

Трисектрисами угла называют прямые, проходящие через вершину угла и делящие его на три равные части.

Доказательство. Пусть трисектрисы углов данного треугольника ABC, примикающие к сторонам BC, CA и AB, пересекаются в точках X, Y и Z
(рис. 1).



Введем обозначения: $A = 3\alpha$, $B = 3\beta$, $C = 3\gamma$,$\mid AY \mid= m$, $\mid AZ \mid= n$. Длины сторон треугольника ABC будем обозначать через a,b и c.

Вычислим величины углов AZY и BZX.

Так как $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180^\circ$, то $\alpha + \beta + \gamma + 60^\circ$ и $\alpha + \beta = 60^\circ - \gamma$. Применив теорему синусов к треугольнику AZB, получим

$$\frac{n}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$

отсюда

$$n = \frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{c\sin\beta}{\sin(60^\circ - \gamma}.$$

Аналогично находим, что

$$m = \frac{b\sin\gamma}{\sin(60^\circ - \beta)}.$$

Из треугольника ABC по теореме синусов имеем

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin 3\beta}{\sin 3\gamma}.$$

Следовательно,

$$\frac{m}{n} = \frac{\sin 3\beta \sin\gamma \sin(60^\circ - \gamma)}{\sin 3\gamma \sin\beta \sin(60^\circ - \beta)}.$$

Упростим это равенство, применив тождество $\sin 3\beta = 4\sin\beta\sin(60^\circ+\beta)\sin(60^\circ-\beta)$. Получим:

$$\frac{m}{n} = \frac{\sin(60^\circ + \beta)}{\sin(60^\circ + \gamma)}.$$

Теперь уже без всяких вычислений можно доказать, что интересующие нас углы AZY и AYZ треугольника AYZ равны $60^\circ+\beta$ и $60^\circ+\gamma$.

Действительно, так как $\alpha+\beta+\gamma = 60^\circ$, то существует треугольник с углами $60^\circ+\beta$, $60^\circ+\gamma$ и α, а отношение его сторон, заключающих угол α, равно

$$\frac{\sin(60^\circ + \beta)}{\sin(60^\circ + \gamma)} = \frac{m}{n}.$$

Поскольку $\widehat{YAZ} = \alpha$, треугольник AYZ подобен такому треугольнику. Тогда

$$\widehat{AZY} = 60^\circ + \beta \text{ и } \widehat{AYZ} = 60^\circ + \gamma.$$

Точно так же докажем, что $\widehat{BZX} = 60^\circ+\alpha$. А так как $\widehat{AZB} = 120^\circ+\gamma$ и $\widehat{YZA}+\widehat{AZB}+\widehat{BZX} = (60^\circ+\beta)+(120^\circ+\gamma)+(60^\circ+\alpha) = 300^\circ$, то $\widehat{XZY} = 60^\circ$.

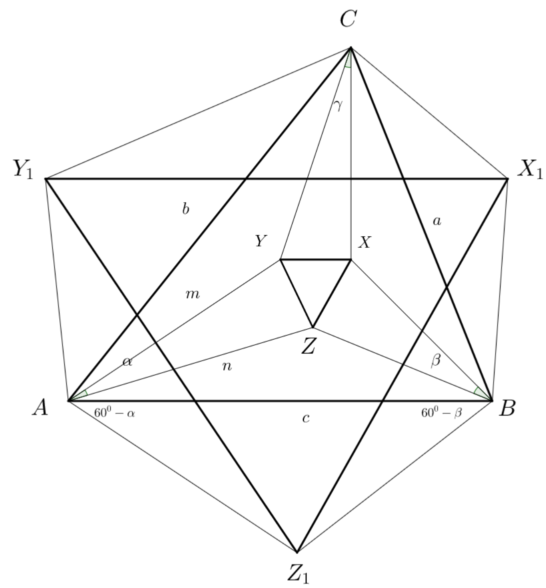
Аналогично докажем, что каждый из двух других углов треугольника XYZ также равен 60°. Значит, треугольник XYZ – равносторонний.

При попытке доказать теорему Морлея геометрически возникают большие трудности. Их удается преодолеть, если действовать в обратном порядке: сначала построить равносторонний треугольник XYZ, а затем исходный треугольник ABC. Такого рода доказательство имеется в книге Г.С.М. Кокстера ≪Введение в геометрию≫ (М.: Наука, 1966, с. 44-45).

Теорему Морлея можно обобщить, если рассматривать кроме внутренних еще и внешние трисектрисы треугольника (прямые, делящие на три равные части внешние углы треугольника, а также углы, дополняющие углы треугольника до 360°).

Знаменитый французский математик А. Лебег в 1939 г. опубликовал статью, в которой, используя элементарные средства, доказал, что среди точек пересечения всех трисектрис треугольника можно указать 27 троек, являющихся вершинами равносторонних треугольников.

В частности, трисектрисы внешних углов треугольника ABC, примыкающие к одной и той же стороне, попарно пересекаются в точках, являющихся вершинами равностороннего треугольника (рис. 2).



Простое и экономное доказательство можно получить, применив тригонометрию. Если X_1,Y_1,Z_1 – точки пересечения указанных трисектрис, то, пользуясь теоремой синусов, как в приведенном выше доказательстве, устанавливаем, что углы Z_1 и Y_1 треугольника $A\,Y_1\,Z_1$ равны соответственно β и γ, а каждый из углов треугольника $X_1\ Y_1\ Z_1$ равен $60°$. Кроме того, легко установить, что стороны треугольника $X_1Y_1Z_1$ соответственно параллельны сторонам треугольника XYZ.

Эффектное доказательство полной обобщенной теоремы Морлея можно провести, используя аппарат комплексных чисел.