В.Г.Болтянский
(Москва)

ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ

Функция – одно из важнейших понятий современной математики. Несмотря на это, основные определения и терминология, связанные с функиями, до сих пор не являются устоявшимися и унифицированными. Ученые, работающие в разных областях математики, применяют разную терминологию; например, в анализе чаще используется термин «функция», в топологии – «отображение», в функциональном анализе – «функционал», «оператор» и т.д. Существуют и разные тенденции в понимании смысла функции. Так, одна тенденция (идущая, по-видимому, от книг американского тополога Келли) состоит в том, что рассматриваются только сюръективные отображения, т.е. отображения одного множества на другое. Она принята сейчас в школьных учебниках алгебры. Одна из основных отличительных черт этой тенденции состоит в том, что если каждому элементу x множества A поставлен в соответствие некоторый элемент $f(x) \in B$, причем не все элементы множества B являются образами элементов из A, то можно выбросить из B «лишние» элементы (в примере на рис.1 они обведены штриховой рамкой), благодаря чему f станет отображением множества A на некоторое множество $B' \subset B$. Считая, что каждый раз «лишние» элементы автоматически отбрасываются, мы и приходим к рассмотрению только сюръективных отображений.

Другая тенденция (назовем ее условно «тенденцией Бурбаки») состоит в том, что $f\colon A \to B$ и $f\colon A \to B'$ – это разные отображения (в связи с чем второе из них правильнее обозначать не f, а другой буквой). Этой тенденции придерживается большая часть современных математиков. Достаточно сказать, что вся алгебраическая топология и другие разделы математики (связанные с рассмотрением так называемых категорий и функторов) немыслимы без такого различения. В связи с этим рассматриваются не только сюръективные отображения, но и отображения, не являющиеся сюръективными (отображения одного множества в другое).

Приведу два примера, иллюстрирующие большую гибкость и удобство «тенденции Бурбаки» по сравнению с «тенденцией Келли».

Формула $y = x^6 + 2x^2 - 11x$ задает некоторую числовую функцию, областью определения которой служит вся числовая прямая $\mathbb{R}$. Однако множество значений этой функции есть какой-то луч $[a; +\infty]$, который мы не знаем (для нахождения минимума выражения $x^6 + 2x^2 - 11x$ нужно было найти корень производной, т.е. решить уравнение пятой степени). Вместе с тем ясно, что эта функция ставит в соответствие любому числу $x \in \mathbb{R}$ некоторое число (также принадлежащее $\mathbb{R}$), т.е представляет собой отображение $\mathbb{R}$ снова в множество $\mathbb{R}$. Вряд ли выбрасывание «лишних» элементов, т.е. замена области значений $\mathbb{R}$ множеством значений (т.е. лучом, который мы не знаем), способствует достижению у школьников яности понимания (ведь речь идет о такой простой функции, как многочлен!).

В качестве второго примера отметим, что плоскость P является односвязной фигурой: тождественные отображение $e : K \to P$ любой замкнутой линии K в плоскость P может быть непрерывно продеформировано (рис.2) в отображение всей линии K в одну точку, или, как говорят для краткости, отображение e стягиваемо в точку. Однако тождественное отображение $e : K \to K$ линии K на себя нельзя стянуть в точку (т.е.перемещая, деформируя линию по самой себе, а не по плоскости, мы не сможем осуществить стягивание ее в точку). Это связано как раз с наличием «лишних» элементов у отображения $e : K \to P$. В отличие от плоскости кольцо и другие фигуры, изображенные на рис.3, неодносвязны. Понятие односвязаности является одним из основополагающих в алгебраической топологии, в теории функций комплексного переменного, в анализе. Выбрасывание «лишних» элементов зачеркнуло бы эти области математики!

Было бы неправильным ограничивать кругозор учителя, считая, что если тенденции и определения не соответствуют сегодняшним учебникам, то они «не верны».

В предлагаемой статье дается подход к понятию обратной функции (и связанным с ней вопросам школьного курса) с точки зрения «тенденции Бурбаки». Учитель легко разберется, где определения, принятые в статье, соответствуют принятым сейчас в учебниках алгебры, а где расходятся с ними.

1.Общие свойства обратных отображений

Пусть f – некоторое отображение множества A в множество B (для краткости пишут $f\colon A \to$

B). Это означает, что каждому элементу $x_0 \in A$ поставлен с соответствие какой-то элемент множества B, обозначаемый через $f(x_0)$ и называемый образом элемента x_0 при отображении f. Множество А называется областью определения отображения f, а B – множеством значений этого отображения.

Пусть $f\colon A \to B$. Возьмем произвольный элемент $y_0 \in B$. Множество всех корней уравнения[1] $f(x) = y_0$ называется прообразом элемента y_0 и обозначается через $f^{-1}(y_0)$. Иначе говоря, элемент $x_0 \in A$ в том и только в том случае принадлежит множеству $f^{-1}(y_0)$, если $f(x_0) = y_0$.

Прообраз $f^{-1}(x)$ может быть пустым множеством, а может состоять из одного, двух или большего (даже бесконечного) числа элементов. Так, для отображения $f\colon A \to B$, показанного на рис.4, прообразы элементов будут следующими:

$$f^{-1}(p) = \varnothing, f^{-1}(q) = \{b\}$$

$$f^{-1}(r) = \{a; c; d\}$$

Если для любого элемента $y_0 \in B$ его прообраз $f^{-1}(y_0)$ состоит ровно из одного элемента, то отображение $f\colon A \to B$ называется биективным (или взаимно-однозначным). В случае биективного отображения $f\colon A \to B$ принято записывать прообразы без фигурных скобок: если $f(x_0) = y_0$, то пишут

$$f^{-1}(y_0) = x_0.$$

Этим определяется некоторое отображение $B \to A$, которое называется обратным к отображению f и обозначается через f^{-1}

Обратное отображение как бы возвращает элементы на свои места. Если отображение f переводит элемент $x_0 \in A$ в элемент $y_0 \in B$, то отображение f^{-1} переводит y_0 обратно в x_0 (этим и объясняется название обратное отображение). Ясно, что обратное отображение f^{-1} также является биективным, причем обратным к f^{-1} является исходное отображение f, т.е. $(f^{-1})^{-1} = f$. На этом основании говорят, что отображения f и f^{-1} являются взаимно-обратными.

Из сказанного выше непосредственно следует, что при переходе к обратному отображению область определения и область значений меняются местами, т.е. если $f\colon A \to B$ - произвольное биективное отображение, то обратное отображение f^{-1} определено на множестве B и имеет область значений A,

$$f^{-1} : B \to A.$$

Легко видеть, что композиция $f^{-1} \circ f$, т.е. результат последовательно выполнения сначала отображения f, а затем отображения f^{-1} представляет собой тождественное отображение множества A. В самом деле, если $f(x_0) = y_0$, то

$$(f^{-1} \circ f)(x_0) = f^{-1}(f(x_0)) = f^{-1}(y_0) = x_0$$

Следовательно, отображение $f^{-1} \circ f$ переводит элемент x_0 в себя. Так как это справедливо для любого элемента $x_0 \in A$, то $f^{-1} \circ f$ – тождественное отображение. Точно так же композиция $f^{-1} \circ f$ (сначала выполняется f^{-1}, затем f) есть тождественное отображение множества B. Условившись обозначать тождественное отображение символом id (от английского identity - тождество), можем написать

$$f^{-1} \circ f = id, f \circ f^{-1} = id \tag{1}$$

Сформулируем доказанную теорему.

Теорема 1. Пусть $f\colon A \to B$ – произвольное биективное отображение, а $f^{-1}\colon B \to A$ – обратное к нему отображение. Тогда верны равенства (1).

Важно отметить, что теорема, обратная теореме 1, также верна.

Теорема 2. Пусть $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to A$ – некоторые отображения. Если справедливы соотношения

$$g \circ f = id, f \circ g = id, \tag{2}$$

[1] Несмотря на то что речь идет о произвольном отображении $f\colon A \to B$ (не заданном с помощью аналитического выражения), имеет смысл говорить о решении «уравнения», т.е. о нахождении всех тех $x \in A$, при которых соотношение $f(x) = y_0$ превращается в истинное высказывание.

то оба отображения f, g биективны и являются взаимно-обратными.

Доказательство. Прежде всего установим биективность отображения f. Пусть y_0 – произвольный элемент множества B. Положим $x_0 = g(y_0)$. Тогда $f(x_0) = f(g(y_0)) = (f \circ g)(y_0)$ (поскольку $f \circ g = id$). Итак,

$$x_0 \in f^{-1}(y_0).$$

Допустим, что существует еще один элемент

$$x_1 \in f^{-1}(y_0)$$

т.е. элемент $x_1 \in A$, удовлетворяющий условию $f(x_1) = y_0$. Применяя отображение g, находим $g(f(x_1)) = g(y_0) = x_0$, т.е. $(g \circ f)(x_1) = x_0$. Но так как $g \circ f = id$, то $(g \circ f)(x_1) = x_1$ Следовательно, $x_0 = x_1$.

Таким образом доказано, что дли любого $_0 \in$ прообраз $f^{-1}(y_0)$ состоит из одного элемента. Это, по определению, означает, что отображение f биективно.

Полученное в процессе доказательства соотношение $f(x_0) = y_0$ означает, что $f^{-1}(y_0) = x_0$. Но первоначально мы определили элемент x_0 равенством $x_0 = g(y_0)$. Таким образом, $g(y_0) = f^{-1}(y_0)$. Поскольку это справедливо для любого элемемта $y_0 \in B$, отображение g совпадает с f^{-1}.

Пример 1. Пусть A — плоскость, B — некоторая содержащаяся в этой плоскости прямая. Через f обозначим ортогональное проектирование плоскости на прямую . Далее через $g\colon B \to A$ обозначим отображение, которое произвольной точке $\in$ ставит в соответствие ту же самую точку (но уже рассматриваемую как элемент множества A). Ясно, что если $N \in$, то верны равенства $f(N) = N$, $g(N) = N$, и потому $f \circ g = id$, т. е. выполнено второе из соотношений (2). Первое же из этих соотношений не выполнено: легко видеть, что $g \circ f = f$. Поэтому отображения f и g не являются взаимно-обратными. Этот пример показывает, что выполнения только одного из равенств (2) недостаточно для справедливости заключения теоремы 2.

Пусть $f\colon A \to B$ – произвольное отображение. Обозначим через $E(f)$ множество всех тех элементов $_0 \in B$, для которых прообраз $f^{-1}(y_0)$ является непустым множеством. Множество $E(f)$ называется образом (или множеством значений) отображения f.

Если отображение $f\colon A \to B$ удовлетворяет условию $B = E(f)$, то оно называется сюръективным отображением (или отображением множества на множество B).

Далее, отображение $f\colon A \to B$ называется инъективным, если для любого элемента $y_0 \in B$ прообраз $f^{-1}(y_0)$ либо является пустым множеством, либо состоит ровно иэ одного элемента. Легко видеть, что отображение $f\colon A \to B$ в том и только в том случае является биективным, если оно сюръективно и инъективно одновременно. В самом деле, сюръективность означает, что для любого $y_0 \in B$ прообраз $f^{-1}(y_0)$ является непустым множеством, и потому (в силу инъективности) он состоит ровно из одного элемента.

2. Числовые функции

Числовой функцией условимся называть всякое сюръективное отображение $f\colon A \to B$, где $A \subset \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R}$.

Наиболее часто употребляемым способом задания числовой функции является запись ее равенством, в левой части которого стоит y, а в правой — некоторое выражение, содержащее переменную . Например,

$$y = x^2, \quad y = \sqrt{x-1} + lg(x^2 - 5)$$

и т. д. Когда говорят, что такая запись определяет некоторую числовую функцию f, то имеют в виду следующие соглашения:

1. Областью определения функции f является множество всех тех действительных чисел, при подстановке которых вместо x выполнимы (в области действительных чисел) все действия, указанные в рассматриваемом выражении.

2. Если $x_0 \in A$, то за $f(x_0)$ принимается значение стоящего в правой части выражения при $= _0$.

3. Функция f сюръективна, т. е. областью ее значений является множество всех чисел вида $f(x_0)$, где $\in A$,

Если $F(x)$ — некоторое выражение с переменной , то для краткости вместо «числовая функция, определенная равенством $y = F(x)$» говорят просто «функция $y = F(x)$». Именно в этом смысле употребляются привычные для школьного обихода обороты «функция $y = x^2$», «функция $y = \sin x$» и т. п.

Заметим, что часто числовая функция задается несколькими различными формулами, рассматриваемыми на непересекающихся промежутках. Например, функция $y = |x|$ определяется следующим образом:

$$y = \begin{cases} x & \text{при} x \geq 0 \\ -x & \text{при} x < 0 \end{cases}$$

В таких записях традиционно используется фигурная скобка, означающая, что правая часть рассматривается как единое выражение.

Пусть $F(x)$ — некоторое выражение с переменной x. Обозначим через область определения функции

$$y = F(x), \tag{3}$$

а через B — множество ее значений. Предположим, что соотношение (3), рассматриваемое как уравнение относительно x, имеет для любого $y \in B$ ровно один корень, который можно явно найти в виде выражения $G(y)$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Функция $y = G(x)$ является обратной для функции $y = F(x)$.

Доказательство. Для удобства обозначим функцию $y = F(x)$ через f, а функцию $y = G(x)$ — через g. Если $x_0 \in A$, то число $y_0 = F(x_0)$ является образом точки x_0 при отображении f, т. е. $y_0 = f(x_0)$. Кроме того, равенство $y_0 = F(x_0)$ означает, что x_0 есть корень уравнения (3) при $y = y_0$, иначе говоря, $x_0 = G(y_0)$. Следовательно, x_0 есть образ точки y_0 при отображении g, $x_0 = g(y_0)$. Таким образом,

$$(g \circ f)(x_0) = g(f(x_0)) = g(y_0) = x_0$$

и $f \circ g$ есть тождественное отображение множества B.

Пусть теперь $y_1 \in B$. Тогда уравнение (3) имеет при $y = y_1$ единственный корень $x_1 = G(y_1)$. Отсюда можно сделать 2 вывода: 1) $x_1 = g(y_1)$, 2) $y_1 = F(x_1)$, т.е. $y_1 = f(x_1)$. Таким образом,

$$(g \circ f)(y_1) = f(g(y_1)) = f(x_1) = y_1$$

и $f \circ g$ есть тождественное отображение множества B.

Мы видим, что $g \circ f = id$, $f \circ g = id$, и потому, согласно теореме 2, $g = f^{-1}$.

Замечание. Соотношение (3), рассматриваемое как уравнение относительно x, имеет корень только при $y \in B$ (так как $B = E(f)$). Следовательно, если установлено, что уравнение (3) имеет при любом $y \in \mathbb{R}$ не более одного корня, то это означает, что при $y \notin B$ оно корней не имеет, а при $y \in B$ имеет ровно один корень. Таким образом, мы получаем следующее практическое правило для нахождения функции $y = G(x)$, обратной для функции $y = F(x)$.

Решить уравнение (3) относительно x (убедившись в процессе решения, что это уравнение имеет не более одного корня) и записать этот корень в виде $x = G(y)$. где $G(y)$ — некоторое выражение, содержащее переменную y. Если это удастся, то надо затем поменять местами x и y, т. е. написать $y = G(x)$.

Это практическое правило удобно тем, что не требует предварительно находить область определения и множество значений функции (3): при правильном решении уравнения (3) получаемое выражение $G(y)$ имеет в качестве своей области определения множество B (т е. множество значений функции $y = F(x)$).

Пример 2. Найти функцию, обратную следующей:

$$y = \frac{2x - 1}{x - 2} \tag{4}$$

Решение. Рассматривая соотношение (4) как уравнение относительно x, находим (при $y \neq 2$) единственный корень

$$x = \frac{2y - 1}{y - 2}$$