А. Т. Улимаева

(г. Уфа)

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШИХ И НАИМЕНЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ

Опыт нашей работы в школах Башкирской АССР показал, что при организации повторения учебного материла в X классе целесообразно рассматривать задачи на нахождение наибольших и наименьших значений функций, причем использовать при их решении наряду с аппаратом производной и другие способы. Это способствуют активизации мыслительной деятельности учащихся, вызывает у них интерес к решению задач и к изучению математики в целом.

Приведем пример решения одной такой задачи:

Требуется оградить прямоугольный участок земли площадью  $a^2$ . Определите оптимальные размеры участка, при которых затраты на ограду будут наименьшими (предполагается, что сто-имость ограды пропорционально ее длине с коэффициентом k > 0).

**Решение. І способ.** Найдем прямоугольник площади  $a^2$ , у которого периметр наименьший. Пусть x>0 — длина стороны прямоугольника, тогда длина смежной с ней стороны равна  $\frac{a^2}{x}$ . Периметр прямоугольника  $P(x)=2(x+\frac{a^2}{x})$ .

Найдем наименьшее значение P(x), применяя производную:

$$P'(x) = 2(1 - \frac{a^2}{x^2}), x \in ]0; +\infty[$$

Определим критические точки функции:

$$(2(1-\frac{a^2}{x^2})=0) \Leftrightarrow (x=a \text{ или } x=-a)$$

так как a > 0, то  $x = a \in ]0, +\infty[$ .

Найдем следующие значения функции P'(x):

$$P'(\frac{a}{2}) = 2(1 - \frac{4a^2}{a^2}) = -6 < 0$$

$$P'(2a) = 2(1 - \frac{a^2}{4a^2}) = \frac{3}{2} > 0$$

Следовательно,  $\min_{]0;+\infty[}P(x)=4a$  при x=a.

Длина другой стороны прямоугольника также равна a.

Из условия задачи известно, что стоимость изгороди N(x) пропорциональна ее длине с коэффициентом k > 0:  $N(x) = k \cdot P(x)$ . Следовательно N(x) получит наименьшее значение, откуда

$$N_{opt}(x) = \min_{]0; +\infty[} N(x) = k \cdot 4a$$
 при  $x = a$ 

Итак, чтобы оптимизировать стоимость изгороди, целесообразно выбрать участок квадратной формы.

II способ. Замечая, что  $P(x) = 2(x + \frac{a^2}{x}) = 2((\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} \frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{a^2}{(\sqrt{x})^2}) + 4a = 2(\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}})^2 + 4a$ , где  $x \in ]0; +\infty[$ , заключаем, что  $\min_{]0; +\infty[} P(x) = 4a$  при x = a:

$$((\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}})^2 = 0) \Rightarrow (\sqrt{x} = \frac{a}{\sqrt{x}}) \Rightarrow (x = a)$$

III способ. Обозначим полупериметр прямоугольника p(x). Пусть x- длина одной из его сторон, тогда длина смежной с ней стороны равна  $p-x(0 \le x \le p)$ . Площадь прямоугольника  $a^2 = x(p-x)$ ;

$$(x^2 + a^2 - px = 0) \Leftrightarrow ((x - a)^2 + x(2a - p) = 0$$

Последнее равенство истинно лишь при  $2a - p \le 0$ , т. е. при  $p \ge 2a$ . Следовательно, наименьшее значение полупериметра равно 2a.

Подставляя в уравнение  $x^2 + a^2 - px = 0$  наименьшее значение p, получим уравнение  $x^2 - 2a + a^2 = 0$ , откуда x = a.

**VI способ.** Обозначим длины смежных сторон прямоугольника через x и y, а его полупериметр через р. Тогда  $xy=a^2$ .

Чтобы найти наименьшее значение периметра прямоугольника площади  $a^2$ , воспользуемся известным тождеством:  $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy$ . Заменив в нем произведение xy на равное ему значение  $a^2$ , получим равенство

$$(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4a^2$$

Из этого равенства видно, что выражение  $(x+y)^2=p^2$  получит наименьшее значение при x-y=0, т. е. при x=y. Полупериметр p=x+y достигает своего наименьшего значения при x=y=a, при этом P=4a.

**V способ.** По условию  $xy = a^2$ , где x и y – длины смежных сторон прямоугольника.

Предположим, что  $x \neq y$ , пусть, например, x = a + b(b > 0), тогда

$$y = \frac{a^2}{a+b} > \frac{a^2 - b^2}{a+b} = a - b$$

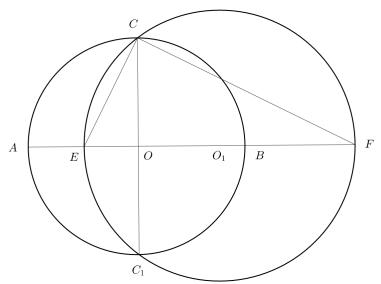
Значит, x + y > a + b + a - b = 2a.

Пусть теперь x = y = a. В этом случае x + y = 2a.

Имеем:  $x+y \geqslant 2a$ , откуда следует, что наименьшее значение периметра прямоугольника равно 4a и достигается оно при x=y=a

**VI способ.** К решению задачи можно применить также геометрические построения. В условии задачи дано:  $xy = a^2$ , где x и y – длины смежных сторон прямоугольника.

При x=y=a(a>0) получаем x+y=2a. Построим окружность с центром в точке O радиуса |AO|=a. Имеем: |AB|=|AO|+|OB|=x+y=2a (см. рис.).



Пусть  $x \neq y$ . Построим на том же рисунке окружность с центром в точке  $O_1$  и радиусом, равным длине отрезка  $O_1F$ , так, чтобы  $|EO|\cdot |OF|=a^2$ . Тогда |EO|+|OF|=|EF|, где |EO|=x, |OF|=y.

Рассматривая рисунок, замечаем, что |EF|>2a, так как |EF| – длина диаметра, а 2a – длина хорды  $CC_1$  окружности  $(O_1,|O_1F|)$ . Таким образом получаем, что  $x+y\geqslant 2a$ , причем x+y=2a при x=y=a.

## Т. П. Григорьева

(г. Горький)

## К ИЗУЧЕНИЮ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Доказательство распределительного свойства скалярного умножения векторов представляет трудности как в методическом, так и в математическом плане. В учебном пособии "Геометрия 9"(§, с. 59) приведено доказательство этого свойства векторов. Существуют и другие доказательства (см.: Скопец З. А. О распределительном свойстве скалярного произведения векторов. —Математика в школе, 1965, № 6, с. 26; Скопец З. А. и др. Скалярное произведение двух векторов. —Математика в школе, 1968, № 6, с. 8; Скопец З. А. Соотношение Лейбница и распределительное свойство скалярного произведения векторов. —Квант, 1972, № 6, с. 22). Однако названные доказательства либо слишком алгебраичны, либо громоздки. Приведем новое доказательство, навеянное статьей З. А. Скопеца, опубликованной в № 6 журнала "Математика в школе"за 1965 г., которое, нам кажется, имеет преимущества по сравнению с указанными.

Предварительно с учащимися нужно рассмотреть метрическое свойство параллелограмма: сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон, т. е.

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2. (1)$$

Доказательство этого свойства следует из равенств

$$(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})^2 = \overrightarrow{a^2} - 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{b^2}$$
 (2)

И

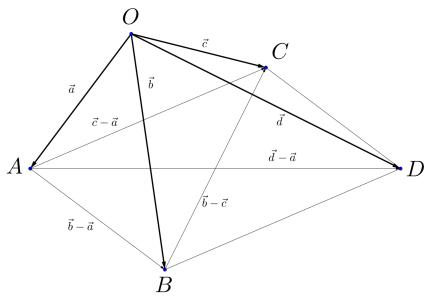
$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})^2 = \overrightarrow{a^2} + 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{b^2}$$
 (3)

и не представляет трудностей для учащихся.

Заметим, что метрическое соотношение (1) может быть доказано ранее, в VIII классе, с помощью теоремы косинусов и применяется при решении других задач.

Перейдем теперь к доказательству распределительного свойства скалярного умножения векторов.

От точки O отложим векторы  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}, \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$ .



(Рис. 1)

а) Пусть точки A, B, C не принадлежат одной прямой (рис. 1). Достроим треугольник  $\overrightarrow{ABC}$  до параллелограмма  $\overrightarrow{ABCD}$ . Тогда  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}, \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{c} - \overrightarrow{b}$ . Нетрудно видеть,

что  $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{d}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$ , где  $\overrightarrow{d}=\overrightarrow{OD}$ , откуда  $\overrightarrow{d}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a}$ ,  $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}-2\overrightarrow{a}$ . Согласно (1) запишем

$$2|AB|^2 + 2|AC|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$$

или

$$2(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})^2+2(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a})^2=((\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})-2\overrightarrow{a})^2+(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{b})^2$$

После раскрытия скобок, основанных на равенствах (2) и (3), получаем

$$\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} = (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{a}$$

Отметим, что рассмотренное доказательство справедливо как для компланарных так и для некопланарных векторов.

Для полноты изложения рассмотрим два частных случая.

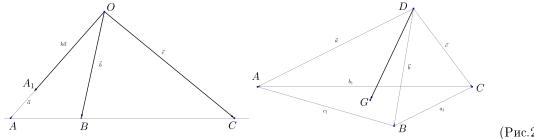
б) Пусть точки A, B, C принадлежат одной прямой (рис. 2). Тогда введем вектор  $k \overrightarrow{d}$ , где  $k \neq 1, k \neq =$ . Согласно случаю а) имеем:

$$k\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})=(k\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{b}+(k\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{c}$$

или

$$k(\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}))=k(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})+k(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c})$$

После сокращения на k получаем требуемое равенство.



в) Пусть векторы  $\overrightarrow{a}$ ,  $\overrightarrow{b}$ ,  $\overrightarrow{c}$  коллинеарны. Тогда  $\overrightarrow{a} = \alpha \overrightarrow{e}$ .  $\overrightarrow{b} = \beta \overrightarrow{e}$ ,  $\overrightarrow{c} = \gamma \overrightarrow{e}$ , где  $|\overrightarrow{e}| = 1$ . Отсюда следует:

$$\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \alpha \overrightarrow{e} \cdot (\beta \overrightarrow{e} + \gamma \overrightarrow{e}) = \alpha \overrightarrow{e} \cdot (\beta + \gamma) \overrightarrow{e} = \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \tag{4}$$

С другой стороны,

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} = (\alpha \overrightarrow{e}) \cdot (\beta \overrightarrow{e}) + (\alpha \overrightarrow{e}) \cdot (\gamma \overrightarrow{e}) = \alpha \beta + \alpha \gamma \tag{5}$$

Сравнивая правые части равенств (4) и (5), получаем истинность распределительного закона скалярного умножения векторов и для этого случая.

На уроке достаточно ограничиться общим случаем. Случаи б) и в) можно предложить либо в качестве упражнений, либо при повторении, либо сообщить учащимся лишь идею доказательства.

Приведем пример применения распределительного свойства скалярного умножения векторов.

**Задача.** Даны четыре точки A, B, C, D. Известны расстояния между этими точками:  $|DA| = a, |DB| = b, |DC| = c, |AB| = a_1, |BC| = a_1, |AC| = b_1$ . Найдите расстояние от одной из этих точек до центроида <sup>1</sup> оставшихся трех точек.

**Решение.** Пусть требуется найти расстояние от точки D до центроида G точек A, B, C (рис.

3). Введем векторы:  $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{d},\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{b},DC=\overrightarrow{c}.$  Тогда

$$\overrightarrow{DG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR})$$

 $<sup>^{1}</sup>$ Центроидом трех точек P,Q,R называется такая точка G, что

отсюда

$$\overrightarrow{DG}^2 = \frac{1}{9}((\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c})^2 = \frac{1}{9}((\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})^2 + 2(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} + \overrightarrow{c}^2)$$

Согласно распределенному свойству скалярного умножения векторов имеем

$$\overrightarrow{DG^2} = \frac{1}{9} (\overrightarrow{a}^2 + \overrightarrow{b}^2 + \overrightarrow{c}^2 + 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} + 2\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a})$$

Но

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \frac{\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{AB}^2}{2} = \frac{a^2 + b^2 - c_1^2}{2}$$

$$\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = \frac{\overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 - \overrightarrow{BC}^2}{2} = \frac{b^2 + c^2 - a_1^2}{2}$$

$$\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OA}^2 - \overrightarrow{AC}^2}{2} = \frac{c^2 + a^2 - b_1^2}{2}$$

поэтому

$$|DG|^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)$$
(6)

Отметим, что если точки A, B, C, D являются вершинами тетраэдра ABCD, то квадрат длины отрезка |DG| вычисляется по формуле (6).

Решая эту задачу, мы попутно вывели формулу скалярного квадрата суммы трех векторов:

$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})^2 = \overrightarrow{a}^2 + \overrightarrow{b}^2 + \overrightarrow{c}^2 + 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} + 2\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a}$$

Эта формула часто применяется при решении задач.

Материал, рассмотренный в статье может быть использован учителем на уроках геометрии как при непосредственном изучении материала, так и при его повторении, а также на внеклассных занятиях.