1

Nalezněte všechna reálná řešení rovnice $e^{-x^2} = 4^x$.

Výsledek zadejte jako množinu obsahující tato řešení včetně složených závorek, tj. např. `{1,2,3}`. Odmocninu zadejte pomocí funkce `sqrt` tj. např. `sqrt(2)` pro $\sqrt{2}$. Přirozený logaritmus pomocí funkce `ln`, tj. např. `ln(42)`.

$$e^{-x^2} = 4^x \quad / \ln$$

$$\ln e^{-x^2} = \ln 4^x$$

$$-x^2 = x \cdot \ln 4$$

$$x^2 + x \cdot \ln 4 = 0$$

$$x \cdot (x + \ln 4) = 0$$

$$\boxed{x = 0 \ \vee \ x + \ln 4 = 0 \Rightarrow x = -\ln 4}$$

2

Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

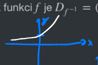
- × Funkce f se nazývá ostře rostoucí na intervalu I, jestliže pro každé $x, y \in I$ splňující $x < y$ platí $f(x) \leq f(y)$.
- × Funkce f se nazývá ostře klesající na intervalu I, jestliže pro každé $x, y \in I$ splňující $x \leq y$ platí $f(x) \geq f(y)$.
- ✓ Funkce f se nazývá klesající na intervalu I, jestliže pro každé $x, y \in I$ splňující $x < y$ platí $f(x) \geq f(y)$.
- ✓ Funkce f se nazývá ostře rostoucí na intervalu I, jestliže pro každé $x, y \in I$ splňující $x < y$, je $f(x) < f(y)$.

Def. f se nazývá ostře rostoucí (klesající) na intervalu $J \Leftrightarrow (\forall x, y \in J)(x < y) : (f(x) < f(y))$ $\geq$ $\geq$

3

Vyberte pravdivé výroky o prosté funkci f s definičním oborem $D_f = \mathbb{R}$ a oborem hodnot $H_f = (0, +\infty)$.

- ✓ Definiční obor inverzní funkce k funkci f je $D_{f^{-1}} = (0, +\infty)$. $\Rightarrow f \to f^{-1} : D(f^{-1}) = H(f)$
- ✓ Takovou funkcí je například e^x.



- × Takovou funkcí je například $\ln(x)$.

- ✓ Inverzní funkce k funkci f existuje a je také prostá.

4

Která z nabízených funkcí je inverzní funkcí k funkci

$$f(x) = x^2, \quad x \in D_f = (-\infty, 0\rangle.$$

- $q(x) = \sqrt{-x}, x \in D_q = \langle -\infty, 0)$
- Tato funkce inverzní funkci nemá (protože se jedná o kvadratickou funkci).
- $h(x) = \sqrt{x}, x \in D_h = \langle 0, +\infty)$
- $g(x) = -\sqrt{x}, x \in D_g = \langle 0, +\infty)$

$D_{f^{-1}} = H_f$

$\Downarrow$

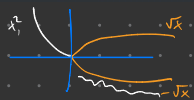
$D_f = H_{f^{-1}}$

$f(x) = x^2 \; ; D_f = (-\infty, 0\rangle$

$H_f = \langle 0, +\infty)$

$\Downarrow$

$D_{f^{-1}} = \langle 0, +\infty) \; , H_{f^{-1}} = (-\infty, 0\rangle$



$y = x^2 \quad |\sqrt{\ }$

$|x| = \sqrt{y}$

$x = \mp\sqrt{y}$

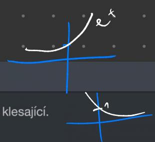
$y = \ln x$

$y = e^x$

1
0

0
1

5.



Rozhodněte, které tvrzení o funkci e^x je pravdivé.

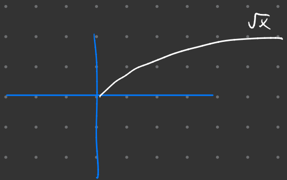
- Funkce e^{-x} je ostře klesající.
- Inverzní funkce k e^x je $\ln(x)$.
- Obor hodnot funkce e^x je množina všech reálných čísel. $H_f = (0, +\infty)$
- Funkce e^x je periodická.

6.

Která z následujících funkcí je zúžením funkce zadané předpisem $f(x) = \sqrt{x}$?

- Funkce zadaná předpisem $g(x) = f(x)$ pro $x \in (0, 1)$.
- Funkce zadaná předpisem $g(x) = \sqrt{x-1}$ pro $x \geq 1$. $D_g = \langle 1, +\infty)$
- Funkce zadaná vzorcem $g(x) = \frac{\sqrt{x^3}}{x}$. $= \frac{\sqrt{x^3}}{x} = \frac{\cancel{x}\sqrt{x}}{\cancel{x}} = \sqrt{x}$
- Funkce zadaná předpisem $g(x) = \sqrt[4]{x^2}$. $= \sqrt{x}$

$D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_g \neq D_f$



7.

Prostá funkce $f : A \to \mathbb{R}$ je funkce splňující podmínku:

- ✗ Pro každé $x_1, x_2 \in A$ splňující $f(x_1) \neq f(x_2)$ platí $x_1 = x_2$.
- ✓ Pro každé $x_1, x_2 \in A$ splňující $x_1 \neq x_2$ platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- ✗ Pro každé $x_1, x_2 \in A$ splňující $x_1 \neq x_2$ platí $f(x_1) = f(x_2)$.
- ✓ Pro každé $x_1, x_2 \in A$ splňující $f(x_1) = f(x_2)$ platí $x_1 = x_2$.

8.

Rozhodněte, které tvrzení o funkci tg je pravdivé.

- ✗ Obor hodnot funkce tg je roven $(-1, 1)$.
- ✓ Funkce tg je periodická s periodou π.
- ✓ Rovnost $\mathrm{tg}(x + 2\pi) = \mathrm{tg}(x + 4\pi)$ platí pro všechna x z definičního oboru.
- ✗ Funkce tg je prostá.

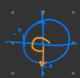
9.

Nalezněte nějaké řešení rovnice $\sin^2(3x) + 2\sin(x)\cos(x) + \cos^2(3x) = 0$.

$$\sin^2(3x) + 2\cdot\underbrace{\sin\cdot\cos x}_{\sin(2x)} + \cos^2(3x) = 0$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin(2x) = -1 \to$$



$$2x = \frac{3}{2}\pi$$

$$\boxed{x = \frac{3}{4}\pi}$$

10.

Nalezněte všechna reálná řešení rovnice $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$.

$$x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \to a = x^2$$

$$a^2 + 3a - 4 = 0$$

$$(a+4)\cdot(a-1) = 0$$

$$-4 = x^2 \quad \vee \quad 1 = x^2$$

$$x: = -4 \qquad x = \mp 1$$

$$K = \emptyset$$

11.

Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

- ✓ Pro každé kladné x platí $x = e^{\ln x}$.
- ✗ Pro každé kladné x a y platí $\ln(x + y) = \ln(x) + \ln(y)$.
- ✓ Pro každé kladné x platí $x^{1+x} = e^{(1+x)\ln x}$.
- ✓ Pro všechna reálná x a y platí $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$.

2^x

12.

Nechť $f : A \to \mathbb{R}$ je funkce s definičním oborem $D_f = A \subset \mathbb{R}$. Vyberte pravdivá tvrzení.

- ✓ Vzor množiny $N \subset \mathbb{R}$ je definován jako $f^{-1}(N) = \{x \in A \mid \text{existuje } y \in N \text{ splňující } f(x) = y\}$.
- ✗ Vzorem jednoprvkové množiny vzhledem k zobrazení f je jednoprvková množina.
- ✓ Obrazem jednoprvkové podmnožiny množiny A při zobrazení f je jednoprvková množina.
- ✗ Obor hodnot takovéto funkce je roven $\mathbb{R}$.

13

Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

- Funkce f se nazývá klesající na intervalu I, jestliže existuje $x \in I$ pro které platí $f(x) \geq f(x+1)$.
- Je-li funkce f prostá na intervalu I, pak je na tomto intervalu f ostře rostoucí nebo ostře klesající.
- Funkce f se nazývá klesající na intervalu I, jestliže existují $x, y \in I$ splňující $x < y$, pro která platí $f(x) \geq f(y)$.
- Funkce f se nazývá rostoucí na intervalu I, jestliže pro každé $x \in I$ platí $f(x) \leq f(x+1)$.

14

Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

- Funkce arcsin je inverzní funkcí k funkci $\sin : \mathbb{R} \to \langle -1, 1 \rangle$.
- Oborem hodnot funkce $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je množina $\langle -1, 1 \rangle$.
- Pro všechna reálná x platí $|\sin(2x)| \leq 1$.
- Pro všechna reálná x platí $|\sin(2x)| \leq 2$.