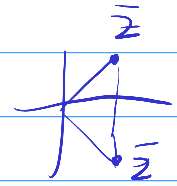
(1)

Def. Skalární součin – V – VP nad $T = \mathbb{R} | \mathbb{C}$, tak SS je zobrazení $\langle \cdot | \cdot \rangle$
$V \times V \to T$ ∧ platí 3 axiomy

– 1) zobrazení je lineární v druhém argumentu
$\langle x | y+z \rangle = \langle x | y \rangle + \langle x | z \rangle$
$\langle x | \alpha \cdot y \rangle = \alpha \cdot \langle x | y \rangle$

– 2) hermitovská symetrie platí $\quad z = a + bi$
$\langle x | y \rangle = \overline{\langle y | x \rangle}$ → v $\mathbb{C}$ $\quad \overline{z} = a - bi$



– 3) zobrazení je pozitivně definitní
$\langle x | x \rangle \geq 0 \wedge (\langle x | x \rangle = 0 \Rightarrow x = \theta)$

↳ Dvojici $(V, \langle x | y \rangle)$ nazýváme VP se SS / prehilbertův prostor $\mathcal{H}$

Poz. pro libovolné $x, y, z \in \mathcal{H}$ a $\alpha \in T$:
1) platí sdružená linearita v prvním argumentu
$\langle x + y | z \rangle = \langle x | z \rangle + \langle y | z \rangle$
$\langle \alpha x | z \rangle = \overline{\alpha} \cdot \langle x | z \rangle$ pouze v $\mathbb{C}$

2) SS s 0
$\langle x | \theta \rangle = \langle \theta | x \rangle = 0$

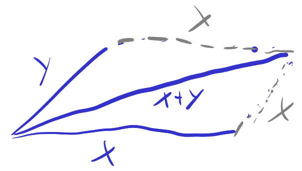
Def. na T^n definujeme standardní SS:
$x \cdot y := \sum_{j=1}^{n} \overline{x}_j \cdot y_j \qquad (a,b) \cdot (c,d) = a \cdot c + b \cdot d$

Def. Norma: V – VP nad $T = \mathbb{R} / \mathbb{C}$ – velikost vektoru, $\|x - y\|$ – vzdálenost vektorů
Zobrazení $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$, pokud pro lib. $x, y \in V$ a $\alpha \in T$ platí:

axiomy – 1) norma je vždy nezáporná
$\|x\| \geq 0$

2) pouze θ má normu 0
$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

3) norma je homogenní v $|x|$
$\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$



4) $\triangle$ nerovnost

$||x+y|| \le ||x|| + ||y||$

Def. V $\mathcal{H}$ s SS mějme zobrazení $||\cdot|| : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{H}$ dáno předpisem

$||x|| := \sqrt{\langle x|x\rangle}$.

norma přidružená k SS, neboli euklidovská norma

Věta: pro každé $x, y \in \mathcal{H}$ platí:

$|\langle x|y\rangle| \le ||x|| \cdot ||y||$

rovnost $\iff$ jeden vektor je násobkem druhého

Def. • Nechť máme $\mathcal{H}$ s SS a $x, y \in \mathcal{H}$. Vektor x nazýváme ortogonální na y (neboli taky kolmý na y) $\iff$ $\langle x|y\rangle = 0$

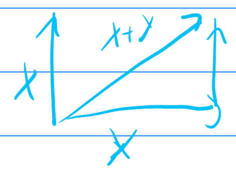
Def. • Mějme SV $(x_1, \dots x_n) \in \mathcal{H}$, SV nazveme OG $\iff$ každý vektor $\in$ SV je OG na ostatní. $\forall\, i,j \in \hat{n} \wedge i \ne j$ $\langle x_i, x_j\rangle = 0$

Def. SV je ortonormální $\iff$ je OG $\wedge$ každý vektor má velikost 1.

$\forall\, i,j \in \hat{n}$ $\langle x_i|x_j\rangle = \begin{cases} 0 & i \ne j \\ 1 & i = j \end{cases}$

Věta: Pythagorova věta - nechť $x, y \in \mathcal{H}$ a x je OG na y, tak potom pro normu indukovanou SS platí

$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$



Věta: OG SV je LN. Speciálně ON je LN

Věta: Nechť SV je ON báze z $\mathcal{H}$ $\Rightarrow$ pro každé $z \in \mathcal{H}$:

$z = \sum_{i=1}^{\hat{n}} \langle x_i|z\rangle x_i$ / $(z)_{\mathcal{X}} = ((\langle x_1|z\rangle, \langle x_2|z\rangle \dots)$

souřadnice

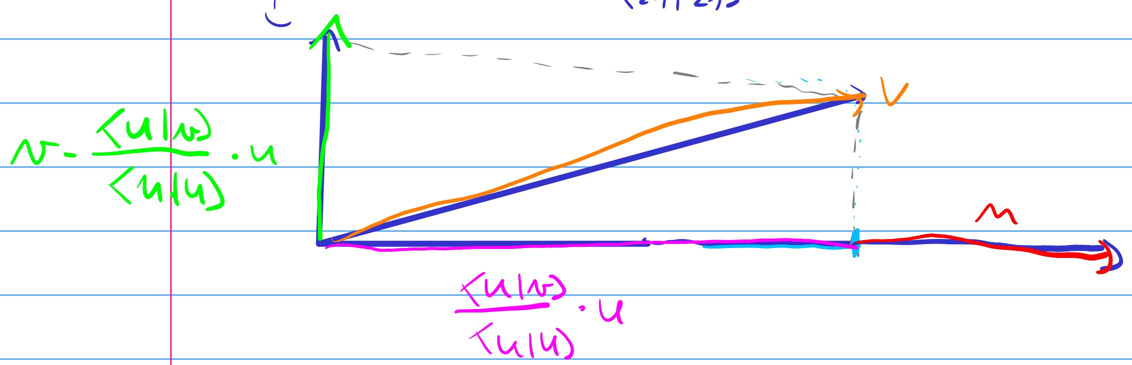
Jestli je báze jen OG $\Rightarrow z = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x_i | z \rangle \cdot x_i}{\langle x_i | x_i \rangle}$

Pozn. Každý konečně dim. prostor má OG/ON bázi (o SJ)

Věta: Gramova-Schmidtova ortogonalizace:
Nechť $X = (x_1, \dots, x_n) \subseteq \mathcal{H}$ je LN SV.
Potom existuje ON SV $Y = (y_1, \dots, y_n) \subseteq \mathcal{H}$ takových, že $\forall k \in \hat{n}$
$\langle x_1, \dots, x_k \rangle = \langle y_1, \dots, y_k \rangle$

řádné tam nejsou)

- 1 vektor $z_1 = x_1$ - OG B, je nenulový, je $\perp$ na ostatní vektory
- 2 vektory $z_2 = x_2 - \frac{\langle z_1 | x_2 \rangle}{\langle z_1 | z_1 \rangle} \cdot z_1$



- n vektorů - $z_n = x_n - \frac{\langle z_1 | x_n \rangle}{\langle z_1 | z_1 \rangle} z_1 - \dots x_{n-1} \frac{\langle z_{n-1} | x_n \rangle}{\langle z_{n-1} | z_{n-1} \rangle} \cdot z_{n-1}$

$\Rightarrow (z_1, \dots, z_n)$ je OG báze $\rightarrow \left(\frac{z_1}{\|z_1\|}, \dots, \frac{z_n}{\|z_n\|} \right)$ ON báze

$z \rightarrow \alpha \cdot z = 1 \Rightarrow |\alpha| \cdot \|z\| = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\|z\|}$

$\hookrightarrow \frac{z}{\|z\|}$

$$\left(\begin{array}{l} z_1 = x_1 \\ z_2 = x_2 - P_{z_1}(x_2) \\ z_3 = x_3 - P_{z_1}(x_2) - P_{z_1}(x_3) \end{array} \right\} \text{rekurzivní zápis}$$

Př. 1

Příklad č. 15637: Určete, která z následujících zobrazení jsou skalárním součinem na $\mathbb{R}^2$.
Pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ definujeme: *

1. $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = 2x_1y_2 + 1$,
2. $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 4x_2y_1$
3. $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = 2x_1y_2 + 2y_1x_2 + 2x_2y_2$,
4. $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = 8x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2$.

Pokud je zobrazení skalárním součinem, najděte všechny vektory ortogonální (kolmé) na vektor $(1, 1)$.

* 1) je lineární ? 2) je symetrické ? 3) je + definitní ?

a) $\langle (1,0) | (0,0) \rangle = 2\cdot 1 \cdot 0 + 1 = 1$ $\qquad 1 \neq 0$

\+ díky lin.

$\langle (1,0) | 0\cdot(0,0) \rangle = 0 \cdot \langle (1,0), (0,0) \rangle = 0 \cdot 1 = 0$

↳ není SS, není lin.

b) je lin, není sym.

$\langle x | y \rangle = x_1 \cdot y_1 + 2x_1 \cdot y_2 + 4x_2 \cdot y_1$

$= \langle y | x \rangle = y_1 \cdot x_1 + 2y_1 x_2 + 4y_2 \cdot x_1$

$\langle (1,0), (0,1) \rangle = 1\cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \cdot 0 = 2$ $\qquad 2 \neq 4 \Rightarrow$ nejde o SS

$\langle (0,1), (1,0) \rangle = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4$

d) $\langle x | y \rangle = 8x_1 \cdot y_1 + 2x_1 \cdot y_2 + 2x_2 \cdot y_1 + 2 \cdot x_2 \cdot y_2$

1) je lineární ?

$\langle x | y + z \rangle = \langle x | y \rangle + \langle x | z \rangle$

máme tři vektory $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1 + y_2)$, $z = (z_1 + z_2)$

$\langle x | y + z \rangle = \langle (x_1, x_2) | (y_1 + z_1, y_2 + z_2) \rangle = 8 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 \cdot (y_2 + z_2) +$

$+ 2 \cdot (y_2 + z_2) + 2 \cdot (y_1 + z_1) \cdot x_2 + 2 \cdot (y_1 + z_1) \cdot (y_2 + z_2)$

$\langle x | y \rangle + \langle x | z \rangle = \langle (x_1, x_2) | (y_1, y_2) \rangle + \langle (x_1, x_2) | (z_1, z_2) \rangle =$

$= 8 \cdot (x_1) \cdot y_1 + 2 \cdot x_1 \cdot y_2 + 2 \cdot$ — // — prostě se to bude rovnat

$\langle x | \alpha y \rangle = \alpha \langle x | y \rangle$ → udělá se analogicky

2) symetrie

$\langle X | Y \rangle = \langle Y | X \rangle$ → vyjde, protože se jen prohodí písmenka

3) pozitivní definitnost

$\langle x | x \rangle = 8x_1 x_1 + 2 x_1 x_2 + 2 x_2 x_1 + 2 x_2 \cdot x_2 = 8x_1^2 + 4x_1 x_2 + 2x_2^2$

↳ doplnit na čtverec

$= \underbrace{4x_1^2 + 4x_1^2 + 4x_1 \cdot x_2 + x_2^2}_{(2x_1+x_2)^2} + x_2^2$

≥ 0 $\langle (0,0) \rangle = 0$

=> je pozitivně definitní

je to SS

$8 \cdot (x_1^2 + \frac{1}{2} x_1 \cdot x_2 + \frac{1}{4} x_2^2) =$

$= 8 \cdot (x_1^2 + 2 \cdot (x_1 + \frac{1}{4} x_2) + \frac{1}{16} x_2^2 - \frac{1}{16} x_2^2 + \frac{1}{4} x_2^2)$

$= 8 \cdot (x_1 + \frac{1}{4} x_2)^2 + \frac{3}{2} x_2^2$

Vektory kolmé na (1,1)

$\langle (1,1) | (x_1, x_2) \rangle = 0 = 8 \cdot 1 \cdot x_1 + 2 \cdot 1 \cdot x_2 + 2 \cdot 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 =$

$= 5x_1 + 2x_2 = 0$

$\langle (-2, 5) \rangle$ → LO tvoří kolmé vektory

Příklad č. 15638: Dokažte, že maximová norma (nebo též ∞-norma) definovaná pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ předpisem

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

je skutečně normou.
Platí Pythagorova věta i pro tuto normu?

1) $\|x\| \geq 0$ $\quad \max\{\underset{0}{\underset{\vee\!|}{|x_1|}}, \underset{0}{\underset{\vee\!|}{|x_2|}}, \dots\} \to \max \geq 0$

2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$

$\|x_\infty\| = 0 \Rightarrow 0 \leq |x_i| \leq \|x\|_\infty = 0 \Rightarrow$ všech jsou 0 $|x_i| = 0 \Rightarrow x = \Theta$

$x = \Theta$ $\quad \|\Theta\|_\infty = \max\{|0|, |0|\} = 0$

3) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

$\|\alpha x\| = \max\{|\alpha x_1|, |\alpha x_2|, \dots |\alpha x_n|\} = \alpha \max\{|x_1| \dots |x_n|\} = |\alpha| \cdot \|x\|_\infty$

$|\alpha x_1| \to |\alpha| \cdot |x|$

4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\|x+y\|_\infty = \max\{|x_1 + y_1|, \dots |x_n + y_n|\} \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

$|x_{i} + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

jedná se o normu

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ $\quad x \cdot y = 0$

$(1,1) = \|(1,1)\|_\infty^2 = 1 \neq \|(1,0) + (0,1)\|^2 = 1 + 1 = 2$

Příklad č. 15639: V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem najděte všechny vektory, které jsou ortogonální na všechny vektory podprostoru $\langle \underset{u}{(3,2,1,4)}, \underset{v}{(1,1,0,1)} \rangle$.

stačí kolmost na $(3,2,1,4)$ a $(1,1,0,1)$; je-li $x \perp u \wedge x \perp v \Rightarrow$

$\langle x \mid \alpha u + \beta v \rangle = \alpha \cdot \underbrace{\langle x \mid u \rangle}_{0} + \beta \cdot \underbrace{\langle x \mid v \rangle}_{0} = 0 \Rightarrow$ libovolný vektor

$x \cdot (3,2,1,4) = x_1 \cdot 3 + x_2 \cdot 2 + x_3 \cdot 1 + x_4 \cdot 4 = 0$
$x \cdot (1,1,0,1) = x_1 + x_2 + x_4 = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$\dim S_0 = n - h(A)$

$S_0 = \langle (-1,1,1,0), (-2,1,0,1) \rangle$

S_0 obsahuje vše OG vektory

Příklad č. 15640: Buď $P \neq \emptyset$ podmnožina prehilbertova vektorového prostoru V nad tělesem $\mathbb{R}$. Definujme množinu

$$P^{\perp} = \{\mathbf{x} \in V \mid \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = 0 \text{ pro všechny } \mathbf{y} \in P\},$$

kde $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle$ je skalární součin.
Dokažte, že množina $P^{\perp}$, která se nazývá **ortogonální doplněk**, tvoří podprostor V.

1) neprázdnost $\theta \in P^{\perp}$ $\langle \theta \mid y \rangle = 0$
pro každé $y \in P$
$\Rightarrow P \neq \emptyset$

2) uzavřenost na součet
$x, z \in P^{\perp} \Rightarrow x + z \in P^{\perp}$

$\langle (x+z) \mid y \rangle = 0$ $\langle x \mid y \rangle + \langle z \mid y \rangle = 0 + 0 = 0$
$y \in P$
$\Rightarrow x + z \in P^{\perp}$

3) uzavřenost na násobek

$x \in P^{\perp}$; $\alpha \in \mathbb{R}$ $\langle \alpha x \mid y \rangle = \alpha \cdot \langle x \mid y \rangle = \alpha \cdot 0 = 0$

$\alpha \cdot x \in P^{\perp}$

Příklad č. 15641: Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem najděte ortogonální bázi podprostoru

$$P = \langle \overset{x_1}{(1,0,1,0)}, \overset{x_2}{(1,1,1,1)}, \overset{x_3}{(0,0,1,1)} \rangle.$$

Najděte také bázi $P^\perp$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to S_0 = \langle (1,-1,-1,1) \rangle$$

$$\text{Báze } P^\perp = ((1,-1,-1,1))$$

$$z_1 = (1,0,1,0)$$

$$z_2 = (1,1,1,1) - \frac{\langle (1,0,1,0) \mid (1,1,1,1) \rangle}{\langle (1,0,1,0) \mid (1,0,1,0) \rangle} \cdot (1,0,1,0) = (0,1,0,1)$$

$$z_3 = (0,0,1,1) - P_{z_2}(0,0,1,1) - P_{z_3}(0,0,1,1) = (-1/2, -1/2, 1/2, 1/2)$$

Ob báze je (z_1, z_2, z_3)

Příklad č. 15642: Uvažujme $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem. Buď P podprostor a $P^\perp$ jeho ortogonální doplněk. Dokažte, že platí následující:

1. $P \cap P^\perp = \{\theta\}$,
2. $\dim P + \dim P^\perp = \overset{\dim}{n}$,
3. pro každý vektor $\mathbf{x}$ existují jednoznačně určené vektory $\mathbf{a} \in P$ a $\mathbf{b} \in P^\perp$ tak, že $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

1) $x \in P \wedge x \in P^\perp \Rightarrow x \cdot x = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = \theta$

2) $\dim P = 0 \quad P = \{\theta\} \Rightarrow \{\theta\}^\perp = P^\perp = \mathbb{R}^n \Rightarrow \dim P + \dim P^\perp = \dim n$

$\dim P = k \to$ kolmé ve $P^\perp$ na vektory z B $(x_1, \dots, x_k)$ $k \in P$

$\left(\begin{array}{c|c} x_1 & \\ x_2 & 0 \\ x_k & \end{array}\right) \to$ frobeniova věta

$\dim S_0 = n - h(A) = n - k$

3) a) existence

$P = \{0\} \quad P^\perp = \mathbb{R}^n \to x = \underset{P}{\theta} + \underset{P^\perp}{x}$

$\dim P = k \neq 0$

$P = \langle (x_1, \dots, x_k) \rangle \xrightarrow{Ob} (z_1, \dots, z_k)$ Ob báze P

$a = P_{z_1}(x) + P_{z_2}(x) + \dots + P_{z_k}(x) =$

$b = x - a \Rightarrow x = a + b$, $b \in P^{\perp}$, tedy $z_i \cdot b = 0 =$

$= z_i \cdot (x - a) = z_i \cdot x - \left(z_i \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{z_j \cdot x}{z_j \cdot z_j} \cdot z_j \right) \Rightarrow z_i \cdot z_j = 0 \Leftrightarrow i \neq j$

$= z_i\, x - \frac{z_i x_i}{\cancel{z_i z_i}} \cdot \cancel{z_i} \cdot z_i = 0$

b) jednoznačnost

$$\underset{P}{x = a} + \underset{P^{\perp}}{b} = \underset{P}{c} + \underset{P^{\perp}}{d}$$

$$\underset{P}{(a-c)} = \underset{P^{\perp}}{(d-b)} \Rightarrow a - c \in P \cap P^{\perp} \Rightarrow a - c = \theta \Rightarrow a = c$$

$$b - d \in P \cap P^{\perp} \Rightarrow b - d = \theta \Rightarrow b = d$$

$\square$

Příklad č. 15643: Uvažujme $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem a P podprostor. Najděte ortonormální báze P a $P^{\perp}$ a najděte $\mathbf{a} \in P$ a $\mathbf{b} \in P^{\perp}$ tak, že $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, kde:

1. $P = \langle (1,0,1), (2,0,1) \rangle$ a $\mathbf{x} = (1,1,0)$,
2. $P = \langle (1,0,1,0), (1,0,0,1) \rangle$ a $\mathbf{x} = (1,1,0,1)$.

$\langle \overset{u}{(1,0,1)}, \overset{v}{(2,0,1)} \rangle \Rightarrow$ báze P

báze $P^{\perp}$

a $y, z \in \langle y, z \rangle$

stačí pouze na dva tyto vektory, nejprve vektor x: $x \perp u \wedge x \perp v$, tak platí

$\langle x \mid \alpha \cdot y + \beta \cdot z \rangle \overset{\text{díky linearitě}}{=} \alpha \cdot \underbrace{\langle x \mid y \rangle}_{0} + \beta \cdot \underbrace{\langle x \mid z \rangle}_{0}$ $\qquad x = (x_1, x_2, x_3)$

$x \cdot (1,0,1) = x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 1 = 0$

$x \cdot (2,0,1) = x_1 \cdot 2 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 1 = 0$; tedy hledáme řešení této soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \cdot (-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \dim S_0 = n - r(A) = 1$$

volná proměnná

$S_0 = \langle (0,1,0) \rangle$

① způsob

$P^\perp = \langle (0,1,0) \rangle$; . Báze $\mathbb{R} = (P, P^\perp)$

$X = (1,1,0)$; $X = \underset{P}{a} + \underset{P^\perp}{b}$

$(1,1,0) = \overset{-1}{\alpha}\cdot(1,0,1) + \overset{1}{\beta}\cdot(2,0,1) + \overset{1}{\gamma}\cdot(0,1,0)$

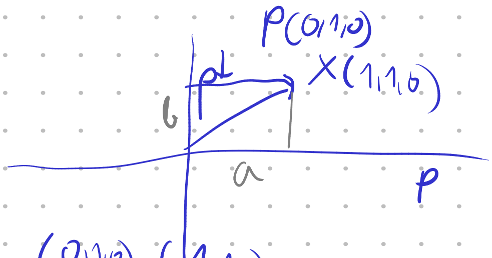
$(1,1,0) = (\underbrace{\alpha+2\beta, \gamma, \alpha+\beta}_{\in P})\ \underbrace{}_{\in P^\perp}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} \gamma = 1 \\ \beta = 1 \\ \alpha = -1 \end{array}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Řeš. } a = (1,0,0),\ b = (0,1,0)}$

② způsob

$P^\perp = \langle (0,1,0) \rangle$



$b = P_{(0,1,0)}(1,1,0) = \frac{(0,1,0)\cdot(1,1,0)}{(0,1,0)\cdot(0,1,0)}\cdot(0,1,0) = \underline{(0,1,0)}$

$a = X - b = (1,1,0) - (0,1,0) = \underline{(1,0,0)}$ $\qquad (b = x - a = (0,1,0))$

$a = P_{(1,0,1)}X + P_{(1,0,1)}X$

$\langle \overset{u}{(1,0,1)}, \overset{v}{(2,0,1)} \rangle \to$ báze P

OG báze – GSOG

$z_1 = (1,0,1)$

$z_2 = (2,0,1) - \frac{(1,0,1)\cdot(2,0,1)}{(1,0,1)\cdot(1,0,1)}\cdot(1,0,1) = (2,0,1) - \frac{3}{2}\cdot(1,0,1) = (1/2, 0, -1/2)$

OG B $= ((1,0,1), (1/2, 0, -1/2))$; ON $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$

$(1,0,-1)$

② $P = \langle (1,0,1,0), (1,0,0,1) \rangle \quad x = (1,1,0,1)$

OB , GSOB

$z_1 = (1,0,1,0)$

$$z_2 = (1,0,0,1) - \frac{(1,0,1,0)\cdot(1,0,0,1)}{(1,0,1,0)\cdot(1,0,1,0)} \cdot (1,0,1,0) = (1,0,0,1) - \frac{1}{2}\cdot(1,0,1,0) =$$

$$= (1/2, 0, -1/2, 1) \cdot 2$$

$$OBP = ((1,0,1,0),(1,0,-1,2)) \; ; \; ON \to \left(\left(\tfrac{1}{\sqrt2}, 0, \tfrac{1}{\sqrt2}, 0\right), \left(\tfrac{1}{\sqrt6}, 0, \tfrac{-1}{\sqrt6}, \tfrac{2}{\sqrt6}\right)\right)$$

$P^\perp$

OB báze

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to S_0 = \langle (0,1,0,0), (-1,0,1,1) \rangle$$

$$ON \; \langle (0,1,0,0), \left(\tfrac{-1}{\sqrt3}, 0, \tfrac{1}{\sqrt3}, \tfrac{1}{\sqrt3}\right) \rangle$$

$$x = \hat{\alpha}\cdot(1,0,1,0) + \hat{\beta}\cdot(1,0,0,1) + \gamma\cdot(0,1,0,0) + \hat{\rho}\cdot(-1,0,1,1)$$

Příklad č. 15644:

všechny sloupce tvoří ortonormální soubor

Dokažte, že pro ortogonální matici $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$ platí následující:

1. pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ a pro standardní skalární součin platí $\langle \mathbf{Qx} | \mathbf{Qy} \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle$,
2. pro všechna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a pro Eukleidovskou normu platí $\|\mathbf{Qx}\| = \|\mathbf{x}\|$,
3. $\det \mathbf{Q} = \pm 1$,
4. pro vlastní číslo λ matice $\mathbf{Q}$ platí $|\lambda| = 1$.

$$Q^{-1} = Q^T \iff Q^T Q = E = Q Q^T \qquad x \cdot y = x^T \cdot y$$

1) $Qx \cdot Qy = (Qx^T) \cdot Qx = x^T \cdot Q^T \cdot Qy = \langle x^T | y \rangle$

2) $\| Qx \| = \sqrt{\langle Q | x \rangle} = \sqrt{\langle x | x \rangle} \overset{E}{=} \| x \|$

3) $Q \cdot Q^T = E \qquad \det Q \cdot Q^T = \det Q \cdot \det Q = \det(Q)^2 = \det Q = \pm 1$

4) Q OB $\lambda \overset{\mathbb{R}/\mathbb{C}}{\iff} |\lambda| = 1 \qquad x =$ vlastní vektor

$Qx = \lambda x \; , \; Qx \cdot Qx = \| Qx \| = \| x \| \quad x \neq 0$

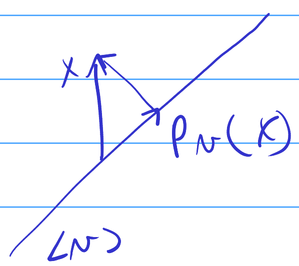
$\lambda x \cdot \lambda x = \| \lambda x \| = |\lambda| \cdot \| x \|$

$\to 1$

2.

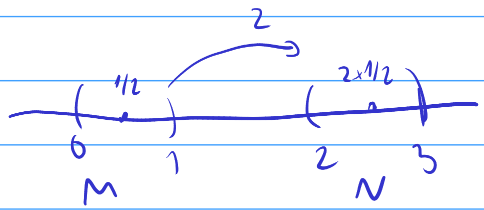
Def. $v \neq 0$, zobrazení P_v : $P_v(z) = \frac{v \cdot z}{\langle v | v \rangle} \cdot v$, $z \in \mathbb{R}$

projekce z na přímku v



Def. Dvě množiny M a $N \subset \mathbb{R}^n$, vzdálenost M od N:

$$d(M,N) := \overset{\min}{\inf} \{ \|x-y\| \mid x \in M, y \in N \}$$



Tvr. posunutí nemění vzdálenost, $v \in \mathbb{R}^n$

$d(M,N) = d(v+M, v+N)$

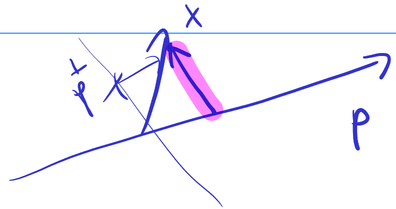
nadrovina $\subset \mathbb{R}^n$ $a+P$, $z \in \mathbb{R}^n$ $d(z, a+P) = d(z-a, P)$

Def. Je-li $P \subseteq \mathbb{R}^n$, potom $OG^-(P^\perp)$, množina všech vektorů kolmých na v. z P

$$P^\perp := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall v \in P).(\langle x | v \rangle = 0) \}$$

Věta. vektor x, $P \subset\subset \mathbb{R}^n \Rightarrow$ existují vektory $v \in P$, $w \in P^\perp$: $x = v + w$

$d(x,P) = \|w\| = \|x\|$



$(x_1,\dots,x_k)$

Def. Je-li SV OG báze $P \le \mathbb{R}^n$ => můžeme OG projekci na podprostor P

$$P_p(z) = P_{x_1}(z) + \dots + P_{x_k}(z)$$

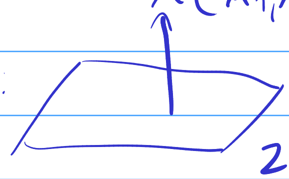
Def. normálový vektor nadroviny n_w $\quad$ w – nadrovina

$w = a + P$

$\{n_w\}^\perp = P$; $P^\perp = \langle n_w \rangle$

$(n_1, n_2 \dots)$

u:

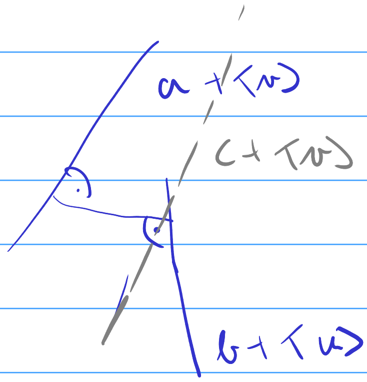


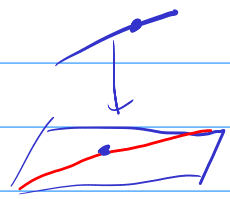
$a \cdot x = 0$

$u: a_1x_1 + a_2x_2 \dots a_nx_n = b$ $\quad$ $Z(u): a_1x_n + a_n x_n = 0$

Věta: mějme variety $M = a + \langle x_1,\dots,x_r\rangle$ a $N = b + \langle x_1,\dots,x_l\rangle$ =>

$$d(M,N) = d(a-b, \langle x_1 \dots x_k, y_1,\dots,y_l\rangle)$$



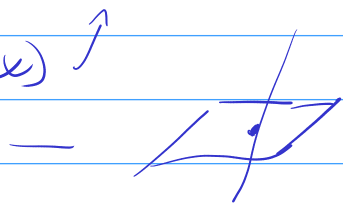


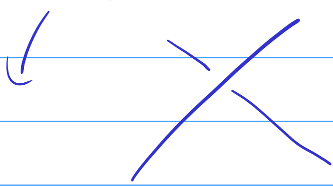
Def. mějme variety W, U, potom jsou

$=$ $\quad Z(W) \subseteq Z(U) \vee Z(U) \subseteq Z(W)$

$\times$ $\quad$ nejsou $=$ $\wedge\ W \cap U \neq \emptyset$

$/\backslash$ $\quad$ nejsou $\times$ $\wedge\ W \cap U = \emptyset$





Def. úhel vektorů $x, y \in \mathbb{R}^n$:

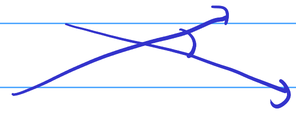
$\langle 0, \pi)$

$\arccos \frac{\langle x|y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}$ $\qquad$ $x \perp y$ $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$

Def. Mějme dvě přímky $p = a + \langle v \rangle$ $q = b + \langle u \rangle$, nadroviny n_u $P, Q \Rightarrow$ úhle:

1) mezi přímkami

$$\arccos \frac{|\langle u | v \rangle|}{\|u\| \cdot \|v\|}$$



2) mezi přímkou a nadrovinou

$$\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{|\langle u | n_p \rangle|}{\|u\| \cdot \|n_p\|}$$

3. nadroviny

$$\arccos \frac{|\langle n_p | n_q \rangle|}{\|n_p\| \cdot \|n_q\|}$$

Def. Máme-li vektor $u \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$ potom zobrazení pro $x \in \mathbb{R}^n$
$T_u(x) = x + u \Rightarrow$ nazýváme translací o vektor u
(není lineární) $T_u(x) = A x$
$(x, y) = (x, y, 1)$ $\qquad (0,0) \Rightarrow (0,0,1)$
$\leftarrow$ homogenní souřadnice $\in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{pmatrix} & X & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & & X & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x = (x_1 \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (x_1, \ldots, x_n, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$

Poz. Lze každé lin. zob. A na $\mathbb{R}^2$ nebo $\mathbb{R}^3$ reprezentované $A = {}^{\mathcal{E}}A^{\mathcal{E}}$ aplikovat na vektory s homogenní souřadnicí

$$\begin{pmatrix} A & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} X & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} X & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad č. 15645: V prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem jsou dány vektory $\mathbf{u} = (2, -1, -2), \mathbf{v} = (1, 1, -4)$.
Určete jejich vzdálenost. Spočtěte velikosti těchto vektorů, úhel mezi nimi a nalezněte všechny vektory, které jsou kolmé na $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$. Ověřte platnost trojúhelníkové nerovnosti na součtu těchto vektorů.

velikosti vektorů

$$\|u\| = \sqrt{(2,-1,-2)\cdot(2,-1,-2)} = \sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2} = 3$$

$$\|v\| = \sqrt{1^2+1^2+(-4)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

úhel:

$$\arccos \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|} = \arccos \frac{9}{3\cdot 3\sqrt{2}} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

najít vektory kolmé na u, v

$$x \cdot u = 0 = (x_1, x_2, x_3)\cdot(2,-1,-2) = 2x_1 - x_2 - 2x_3$$

$$x \cdot v = 0 = (x_1, x_2, x_3)\cdot(1,1,4) = x_1 + x_2 + 3x_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & | & 0 \\ 2 & -1 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & | & 0 \\ 0 & -3 & 6 & | & 0 \end{pmatrix} \to S_0 = \{u, v\}^\perp = \langle (2,2,1) \rangle$$

trojúhelníková nerovnost

$$u + v = (3, 0, -6) \to \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$$

$$3\sqrt{5} \le 3 + 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{5} \le 1 + \sqrt{2} \quad |^2 \to \text{kladná čísla}$$

$$5 \le 1 + 2\sqrt{2} + 2$$

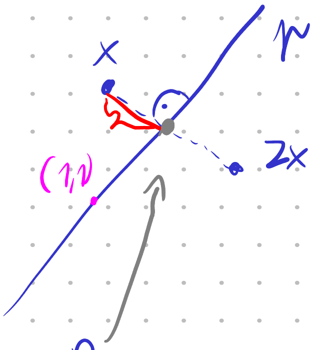
$$3 \le 2\sqrt{2}$$

$$2 \le 2\sqrt{2}$$

$$1 \le \sqrt{2} \checkmark$$

Příklad č. 15646: V prostoru $\mathbb{R}^2$ najděte zrcadlové obrazy bodů $(1,1)$ a $(0,0)$ vzhledem k „zrcadlu“ zadanému přímkou

$$p\colon\ 3x + 4y = 7.$$



$P_p(x)$

$n_p = (3,4)$ ← řešení homog. rce

$z + p \Rightarrow z(p)$

$3x + 4y = 0$

$(3,4) \cdot (x,y)$

$(1,1) + \alpha(3,4) \in P$

$(1+3\alpha,\ 1+4\alpha) \in P$

$3\cdot(1+3\alpha) + 4\cdot(1+4\alpha) = 7$

$3 + 9\alpha + 4 + 16\alpha = 7$

$25\alpha = 0$

$\alpha = 0 \rightarrow$ (1,1) leží na přímce, tedy i obraz leží na přímce.

$(0,0) + \alpha\cdot(3,4) \in P$

$(3\alpha,\ 4\alpha) \in P$

$3\cdot(3\alpha) + 4\cdot(4\alpha) = 7$

$25\alpha = 7$

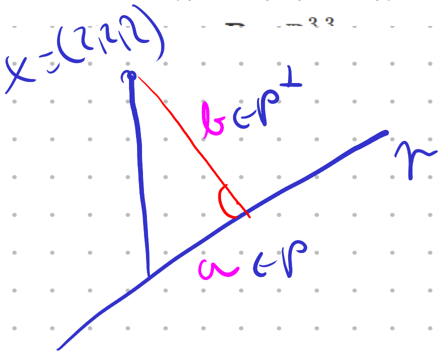
$\alpha = \frac{7}{25}$

$(0,0) + \frac{7}{25}\cdot(3,4) \in P$

$(0,0) + 2\cdot\frac{7}{25}(3,4) \rightarrow$ obraz

obraz $(0,0)$ $\frac{14}{25}(3,4)$

Příklad č. 15647: V prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem spočítejte vzdálenost bodu $\mathbf{b} = (2,2,2)$ od podprostoru $\langle (1,0,1), (0,1,2) \rangle$. $= P$



$x = a + b\ ;\ d(B,p) = \|b\|$

1) P má báz $\langle (1,0,1), (0,1,2) \rangle$

$P^\perp$ má báz $= (-1,-2,-1)$

báze $\mathbb{R}^3 = ((1,0,1), (0,1,2), (-1,-2,-1))$

$$P^\perp = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow S_0 = \langle(-1,-2,1)\rangle$$

$$\underline{x} = \alpha\cdot(1,0,1) \overbrace{+ \beta\cdot(0,1,2)}^{\in P \ = a} + \gamma\cdot\overbrace{(-1,-2,-1)}^{\in P^\perp}$$

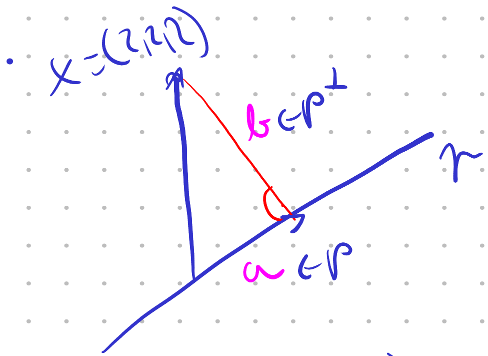
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \gamma = -2/3 \\ \beta = 2/3 \\ \alpha = 4/3 \end{array}$$

kolmo

$$\|-\tfrac{2}{3}\cdot(-1,-2,-1)\| = |-2/3|\cdot\|(-1,-2,-1)\| = 2/3\cdot\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-1)^2} = \underline{2/3\cdot\sqrt{6}}$$

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$

(2)



P má bázi $\langle(1,0,1),(0,1,2)\rangle$ $\quad$ báze $\mathbb{R}^3 = ((1,0,1),(0,1,2),(-1,-2,-1))$

$P^\perp$ má bázi $=(-1,-2,-1)$

$-2-4-2$

$$b = P_{(-1,-2,-1)}(2,2,2) = \frac{(-1,-2,+1)\cdot(2,2,2)}{(-1,-2,1)\cdot(-1,-2,1)}\cdot(-1,-2,1) = -\frac{4}{6}\cdot(-1,-2,1)$$

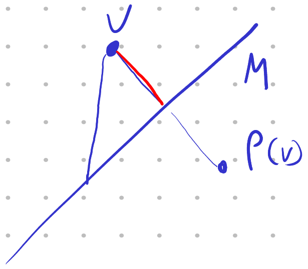
$$\|b\| = \underline{2/3\cdot\sqrt{6}}$$

(3) $a = P_P(x)$, $b = x - a$

Museli jsme spočítat OB P !!!! (jinak nemáme čím projektovat)

Příklad č. 15648: Najděte matici $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{3,3}$ takovou, že pro každé $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ je $\mathbf{Pv}$ rovno zrcadlovému obrazu $\mathbf{v}$ vzhledem k „zrcadlu" danému rovnicí nadroviny

$$x + y - z = 0. = M$$



báze $M = (1\ 1\ -1|0) = \langle(1,-1,0),(1,0,1)\rangle$

báze $M^\perp = \langle(1,1,-1)\rangle$

$${}_X P^{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}_{\varepsilon} P_{\varepsilon} = \underline{{}_X P^{\varepsilon} \cdot {}_{\varepsilon} E_X} \rightarrow \text{dopočítat} \ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P = E - \frac{2}{\|m\|^2} \cdot m \cdot m^T}$$

$m = (1,1,-1)$

$\|m\|^2 = 3$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2/3$$

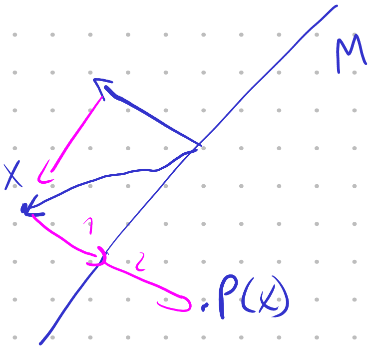
$$m \cdot m^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2/3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{\ldots}\ldots$$

Příklad č. 15649: Najděte obecný předpis pro matici zrcadlení v $\mathbb{R}^n$ podle nadroviny s normálovým vektorem $\mathbf{n}$. Tedy matici $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n,n}$ takovou, že pro každé $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ je $\mathbf{P}\mathbf{v}$ zrcadlový obraz $\mathbf{v}$ vzhledem k nadrovině zadané rovnicí

$$\mathbf{n}^T \mathbf{x} = 0.$$

Je výsledná matice symetrická a ortogonální?



$$Px = x - 2P_n(x) \qquad x \cdot y = x^T y$$

$$= x - 2 \cdot \frac{n \cdot x}{n \cdot n} \cdot n$$

$$= x - \frac{2}{\|n\|^2} \cdot (n^T \cdot x) \odot n$$

skalár, skalární násobek

$$= x - \frac{2}{\|n\|^2} \cdot n^T, n \cdot x$$

matic násob.

$$= Ex - \frac{2}{\|n\|^2} \cdot n \cdot n^T \cdot x$$

$$= \left(E - \frac{2}{\|n\|^2} \cdot n \cdot n^T\right) \cdot x \qquad \mathbb{P} = E - \frac{2}{\|n\|^2} \cdot n \cdot n^T$$

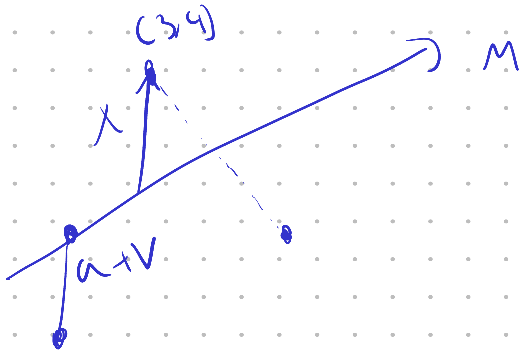
Příklad č. 15650: V prostoru $\mathbb{R}^2$ najděte matici $\mathbf{P}$ zrcadlení podle přímky dané rovnicí

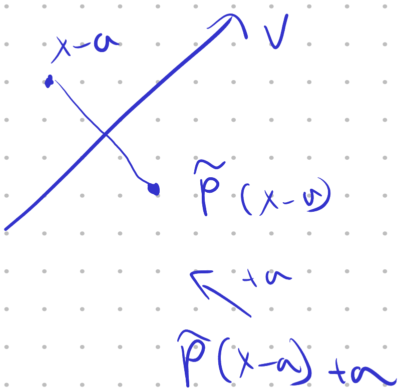
$$3x + 4y = 7. \quad - M$$

Využijte homogenní souřadnice.

Aplikujte spočtenou matici k zjištění zrcadlových obrazů vektorů $(1, 1)$ a $(0, 0)$.

nadrovina → podprostor





← potřebujeme zpět 3 zobrazení   sym.

1) $a \in M \quad a = (1,1)$

$$T_{-a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot (3,4) = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{P} = E - \frac{2}{\|n\|^2} \cdot n \cdot n^T = \tilde{P}^{2,2}$$

→ teď chci udělat matici vzhledem k homogenním souřadnicím

vzhledem (3,4) = 25

$$\left(\begin{matrix} \tilde{p} & 0 \\ & 0 \\ 0 \; 0 & 1 \end{matrix}\right) \quad ; \quad 2) \; T_{a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3)

$$\tilde{p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{matrix} \tilde{p} & 0 \\ & 0 \\ 0 \; 0 & 1 \end{matrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$P\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$ obrez

(3)

Def. Pro nějakou vekt. normu $\|\cdot\|$ na $\mathbb{R}^n$ definujeme přidruženou lineární maticovou normu $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$\|A\| := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq \theta}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$ všechny možné obrazy u vektoru

úprava ↳

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq \theta}} \left\| A \cdot \frac{x}{\|x\|_n} \right\|_m = \sup_{\substack{z \in \mathbb{R}^n \\ \|z\|_n = 1}} \|Az\|_m$$

↑ obraz normovaných vektorů

↳

Tvz. $\|E\| = 1 \rightarrow \sup \|Ez\| = \sup \|z\| = 1$

$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Věta: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se složkami a_{ij}

1). norma $\|A\|_1$ je rovna maximu součtu ve sloupci abs. hodnot

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

operátorová norma

2) $\|A\|_\infty$ je rovna maximu součtu v řádku abs. hodnot

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

3) druhá norma $\|A\|_2$ je rovna odmocnině z největšího vlastního čísla matice $A^T \cdot A$ $(A \cdot A^T)$

- Frobeniova norma / Hilbertova-Schmidtova norma

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

Srandy

$A x = b$ $\qquad \delta b = b + \text{chyba}$

$\qquad\qquad \delta x = x + \text{způsobená chyba}$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

Def. číslo $\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ -> číslo podmíněnosti matice A ku $\|\cdot\|$

Fakto. $A = LU$ ← upper $\qquad$ L - dolní troj. matice s 1 diagonálou

↑ lower $\qquad$ U - horní troj. matice

$A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ \ast & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ast & & \ast \\ & \ddots & \\ 0 & & \ast \end{pmatrix}$, budeme brát A regulární

$Ax = b$

$L\underbrace{Ux}_{y} = b$

$Ly = b \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & b \\ \ast & & 1 & \end{array}\right)$

$U\underline{x} = y \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} \ast & & \ast & \\ & \ddots & & y \\ 0 & & \ast & \end{array}\right)$

$PA = LU$

↑ permutuje řádky

$\begin{pmatrix} — & 1 & — \\ & 1 & \end{pmatrix}$ mezi 1 1

Příklad č. 15651: Mějme $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ s prvky a_{ij}.

1. Definujte maticovou normu $\|\mathbf{A}\|_\infty$ přidruženou k vektorové normě $\|\mathbf{x}\|_\infty$.
2. Ukažte, že platí

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \quad = b$$

3. Ověřte, že $\|\mathbf{A}\|_\infty$ je skutečně normou.

1) $\|A\|_\infty = \sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \dfrac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ PFF iss lord :(

2) $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| \to$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to 2+3=5 \\ \to 1+2=3 \\ \to |1|+|-1|=2 \end{array}$

$M = \left\{ \dfrac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \;\middle|\; x\in\mathbb{R}^n \wedge x\neq 0 \right\}$ $\|A\|_\infty = \sup M$

1) $\le b$ 2) $b \in M$

↳ na tohle nemám nolím sem

TBA

Příklad č. 15652: Mějme matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad \in \mathbb{R}^{3,2}$$

Určete $\|\mathbf{A}\|_1$, $\|\mathbf{A}\|_\infty$, $\|\mathbf{A}\|_2$, a $\|\mathbf{A}\|_F$.

součet sloupců   řádky

$$\left\|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right\|_\infty \begin{matrix} \to 3 \\ \to 2 \\ \to 2 \end{matrix} = \underline{3}$$

$$\left\|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right\|_1 = \underline{4}$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 \end{matrix}$$

součet prvků^2 $\sqrt{\ }$

$$\left\|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right\|_F = \sqrt{2^2+(-1)^2+0^2+1^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{11}$$

$$\left\|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right\| \quad \sqrt{\lambda} \qquad A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

sym.

$$= \det(A - E\cdot\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 1 & 6-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\chi_{A^TA} = (5-\lambda)\cdot(6-\lambda) - 1 = 30 - 5\lambda - 6\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 11\lambda + 29$$

$$\lambda_{1,2} \begin{cases} \dfrac{11+\sqrt{5}}{2} \\[2ex] \dfrac{11-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \qquad \|A\|_2 = \sqrt{\frac{11+\sqrt{5}}{2}}$$

Příklad č. 15653: Definujte číslo podmíněnosti matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ vzhledem k maticové normě přidružené k $\|\cdot\|_1$.
Určete číslo podmíněnosti pro

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\kappa(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 = 6 \cdot \frac{5}{2} = \underline{15}$$

$$\|A\|_1 = 6$$

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left\|\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right\|_1 = 5/2$$

($Ax = b$ a b chyba 5%
a v čísla max $5 \cdot 15\% = 75$:))

Příklad č. 15654: Najděte LU rozklady matic (bez pivotace)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}2&4&3\\4&9&8\\2&3&6\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix}2&1&0\\4&5&1\\-6&3&4\end{pmatrix}.$$

1) "normální" GEMING

$$\begin{pmatrix}2&4&3\\4&9&8\\2&3&6\end{pmatrix} \sim \underbrace{\begin{pmatrix}2&4&3\\0&1&2\\0&0&5\end{pmatrix}}_{U}$$

$\exists P$ regul: $\underbrace{P}_{P\,\triangledown} A = U$

$A = P^{-1}U$

$L = P^{-1}$

$(A|E) \sim (PA|PE)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&4&3&1&0&0\\4&9&8&0&1&0\\2&3&6&0&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}2&4&3&1&0&0\\0&1&2&-2&1&0\\0&-1&3&-1&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}2&4&3&1&0&0\\0&1&2&-2&1&0\\0&0&5&-3&1&1\end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-3&1&1\end{pmatrix} = L^{-1}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-3&1&1\end{pmatrix}^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}}_{L}$$

2) alg

$R_3 \cdot R_2 \cdot R_1 \cdot A = U$

$$A = \underbrace{R_1^{-1} R_2^{-1} R_3^{-1}}_{L} \underbrace{R_3 \cdot R_2\, R_1 \cdot A}_{U}$$

$$R_1 = \begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \to R_1^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix} \to R_2^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$R_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix} \to R_3^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

$A = E \cdot R_1^{-1} R_2^{-1} R_3^{-1} R_3 \cdot R_2 R_1 \cdot A$

$A = E\ R^{-1} \cdot R \cdot A$

$A = E\ R^{-1} R^{-2} \cdot R^{2} \cdot R^{1} A$

$A\ E\ R^{-1} R^{-2} \cdot R^{-3} \cdot R^{3} \cdot R^{2} \cdot R^{1} \cdot A$

$$\begin{pmatrix}2&4&3\\4&9&8\\2&3&6\end{pmatrix} \underset{R_1\cdot}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix}2&4&3\\0&1&2\\2&3&6\end{pmatrix} \underset{R_2\cdot}{\overset{r_3-r_1}{\sim}} \begin{pmatrix}2&4&3\\0&1&2\\0&-1&3\end{pmatrix} \underset{R_3\cdot}{\overset{r_3+r_2}{\sim}} \begin{pmatrix}2&4&3\\0&1&2\\0&0&5\end{pmatrix} = U \qquad E = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \cdot \quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix} \cdot \quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix} = L$$

$$\cdot \begin{pmatrix}1&0&0\\+2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \cdot \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix} \quad \cdot \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix}2&1&0\\4&5&1\\-6&3&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&1&0\\4&5&1\\-6&3&4\end{pmatrix} \overset{r_2-2r_1}{\sim} \begin{pmatrix}2&1&0\\0&3&1\\-6&3&4\end{pmatrix} \overset{r_3+3r_1}{\sim} \begin{pmatrix}2&1&0\\0&3&1\\0&6&4\end{pmatrix} \overset{r_3-2r_2}{\sim} \underset{U}{\begin{pmatrix}2&1&0\\0&3&1\\0&0&2\end{pmatrix}}$$

$$E = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix}1&0&\\+2&1&0\\-3&+2&1\end{pmatrix}$$

Příklad č. 15655: Najděte LU rozklad matice (bez pivotace)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

a využijte jej k výpočtu det $\mathbf{A}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow U$$

$M_2 - 2M_1$
$M_2 - 4M_1$
$M_3 - 3M_1$

$M_3 - 3M_2$
$M_4 - 4M_2$

$M_4 - M_3$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad č. 15656: Najděte LU rozklad s částečnou pivotací matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 13 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 11 & 11 \\ 2 & 6 & 14 & 10 \end{pmatrix}$$

částečná pivotace

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 13 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 11 & 11 \\ 2 & 6 & 14 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 8 & 13 & 9 \\ 1 & 5 & 11 & 11 \\ 2 & 6 & 14 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 12 & 6 \\ 0 & 3 & 10 & 8 \\ 0 & 2 & 12 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$M_2 - 1/2 M_1$
$M_3 - 1/2 M_1$
$M_4 - M_1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$M_3 - 1/2 M_2$
$M_4 - 1/3 M_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 1/3 & & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = U$$

$r_4 - 1/2\, r_3$

$$P \cdot A = L \cdot U$$

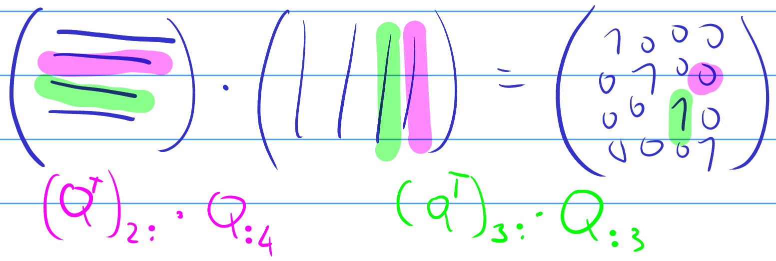
SNAD xD

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 8 & 13 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 11 & 11 \\ 2 & 6 & 14 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

4.

Def. Ortogonální matice: $A \in \mathbb{R}^{n,n} \iff A^T = A^{-1}$

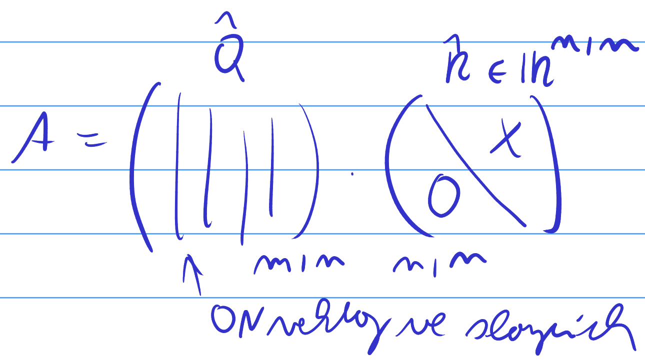
$\iff Q^T \cdot Q = E = Q \cdot Q^T$



$\iff$ Q má ve sloupcích ON bázi $\mathbb{R}^n$

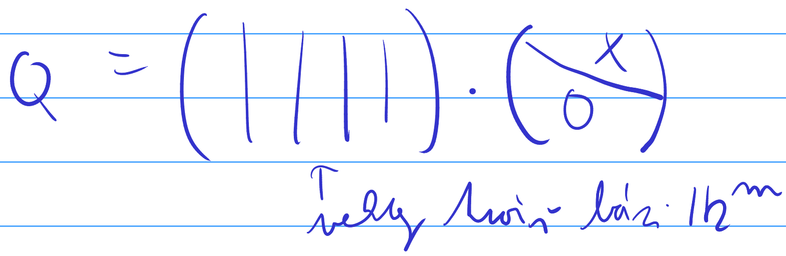
Def. RQR rozklad: $A \in \mathbb{R}^{m,n}$.

$A = \hat{Q} \cdot \hat{R}$, kde $\hat{Q}$ je matice s ON sloupci a $\hat{R}$ horní trojúh. matice



Def. QR rozklad: $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $Q \in \mathbb{R}^{m,m}$, $R \in \mathbb{R}^{m,n}$

$A = Q \cdot R$



Věta:

$$\left(a_1 \middle| a_2 \middle| \cdots \middle| a_m\right) = \left(q_1 \middle| q_2 \middle| \cdots \middle| q_m\right) \cdot \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ & r_{22} & \cdots & \vdots \\ & & \ddots & \\ & & & r_{mm} \end{pmatrix}$$

$A \qquad\qquad Q \qquad\qquad R$

$v \in \mathbb{R}^n$

$z_1 = x_1$ $\qquad q_1 = \frac{z_1}{\|z_1\|}$

$z_2 = x_2 - (q_1 \cdot x_2)\, q_1$ $\qquad q_2 = \frac{z_2}{\|z_2\|}$

$z_3 = x_3 - (q_1 \cdot x_3)\, q_1 - (q_2 \cdot x_3) \cdot q_2$ $\qquad q_3 = \frac{z_3}{\|z_3\|}$

$\vdots$

$z_m = x_m - (q_1 \cdot x_m)\, q_1 - \dots - (q_{m-1} \cdot x_m)\, q_{m-1}$ $\qquad q_n = \frac{z_n}{\|z_n\|}$

Věta: Každá matice má QR rozklad (tzv RQR) $(m \geq n)$

Věta: RQR je jednoznačný

$A = QR$

$Q^T A = R$

*

def Householderova triangularizace

$F = E - 2 \cdot \frac{vv^T}{v^T v}$

def Givensova triangularizace

$G = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

* $Q_1 \dots Q_k$ buď OG

věta Q, P - OG $\rightarrow$ $Q \cdot P$ je OG

↳ $(QP)^T \cdot QP = P^T \underbrace{Q^T Q}_{E} \cdot P = P^T \cdot P = E$

$QP \cdot (QP)^T \dots\dots$ $-\|-$

věta

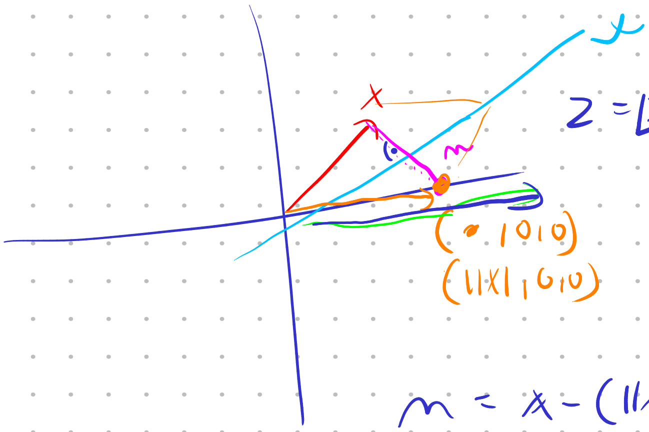
je-li Q OG $\Rightarrow Q^{-1}(Q^T)$ je OG

↳ $Q^T \cdot Q = E$, $(Q^T \cdot Q)^T = E^T = E \Rightarrow Q^T (Q^T)^T = E$

$(Q^T)^T \cdot Q = E \Rightarrow (Q^T)^{-1} \cdot (Q^T)^T = OG$

HHT

$$A \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$



$$Z = E - 2\frac{1}{\|m\|^2} m \cdot m^T$$

$$m = x - (\|x\|, 0, 0)$$
$$= (2, 1, -1), (\sqrt{6}, 0, 0)$$

Q OG

$$\|Qx\| = \|x\|$$

$$Qx \cdot Qy = x \cdot y$$

$$ZA = \left(Z\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, Z\begin{pmatrix} 3 \\ \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & \cdot \\ 0 & \cdot \\ 0 & \cdot \\ & 0 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|v\| \\ 0 \end{pmatrix}$$

Příklad č. 15657: Pomocí Gramova-Schmidtova algoritmu určete redukovaný a úplný QR rozklad následujících matic z $\mathbb{R}^{3,2}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ "udělat GS" na sloupce

$(1,0,1) \to \|(1,0,1)\| = \sqrt{2}$ $\quad y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1,0,1)$

$(0,1,0) \to \|(0,1,0)\| = 1$ $\quad y_2 = (0,1,0)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}}_{\hat{Q}\ 3\ 2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{2\ 2\ \hat{R}} \to \text{RQR}$$

$x \perp \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (0,1,0) \right\rangle = \langle (1,0,1), (0,1,0) \rangle^{\perp}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = S_0 = \langle (-1,0,1) \rangle \to$ normalizovat

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ OG báze $\qquad \uparrow$ ON báze

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{Q\ 3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{R\ 2}$$

$1/\sqrt{2} \cdot (2) = \sqrt{2}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\|(1,0,1)\| = \sqrt{2} \to q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1,0,1) \qquad \frac{2}{\|2\|}$

$\|(2,1,0)\| = (2,1,0) - (q_1 \cdot (2,1,0))\, q_1$

$= (2,1,0) - \cancel{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} (1,0,1)\right) = (1,1,-1) \to$

$q_2 = 1/\sqrt{3} \cdot (1,1,-1)$

$$B = \underbrace{\begin{array}{cc} q_1 & q_2 \end{array} \atop \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}}_{\hat{Q}\ 3\ 2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}}_{\hat{R}\ 2\ 2} \quad \text{RQR}$$

$3,2$

QR

$x \perp \langle (1,0,1), (1,1,-1) \rangle^{\perp}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to S_0 = \langle (-1,2,1) \rangle \to x = (-1,2,1)$ normalizovat

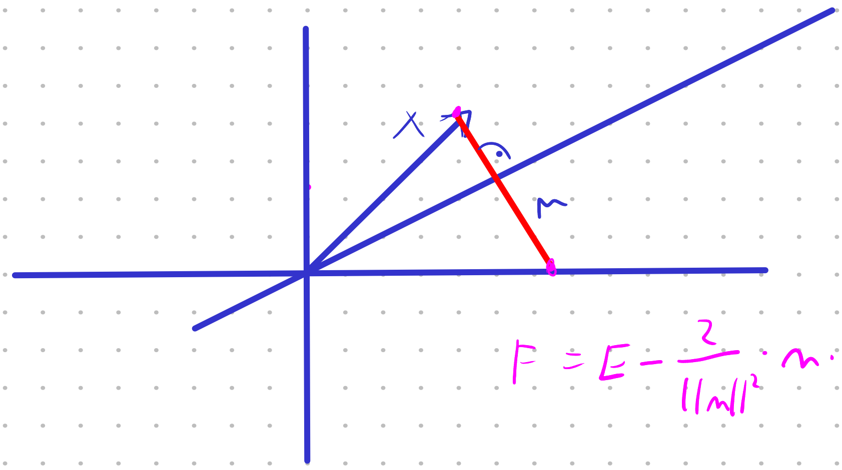
$\|x\| = \sqrt{6} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (-1, 2, 1)$

$$\begin{array}{ccc} & Q & R \\ B = & \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} & \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$3 \backslash 2$ $\quad$ $3 \backslash 3$ $\quad$ $3 \backslash 2$

$\uparrow$ ON báze

Příklad č. 15658: Najděte vlastní čísla a vlastní vektory Householderova reflektoru podle nadroviny-podprostoru s normálovým vektorem **v**.
Rozmyslete si také jejich geometrický význam.



$F = E - \frac{2}{\|n\|^2} \cdot n \cdot n^T$

$\mathbb{R}^k$

$Fn = -n$; n je vlastní vektor k $\lambda = -1$

$W = n^\perp$; $\dim W = k-1$; $F(W) = W$

$(x_1, \dots, x_{k-1})$ báze $W \Rightarrow x_1, \dots, x_k$ $\; Fx_i = x_i$

$x_1 \dots x_{k-1}$ jsou vlastní vekty k $\lambda = 1$

$\nu_g(-1) \geq 1$ $\quad \nu_g(1) \geq k-1 \quad k \leq \nu_g(1) + \nu_g(-1) \leq k$

$\underline{=1}$ $\quad = k-1$

$F = E - \frac{2}{\|n\|} \cdot n \cdot n^T$; F je sym., OG $\rightarrow \lambda \in \sigma(F)$ $\; |\lambda| = 1$

$\Downarrow$ spektrum $\quad \Downarrow$

$\sigma(F) \subseteq \mathbb{R}$ $\quad \sigma(F) = \{\mp 1\}$

$Fn = -n$

$Fn = \left(E - \frac{2}{\|n\|^2} n \cdot n^T\right) \cdot n$

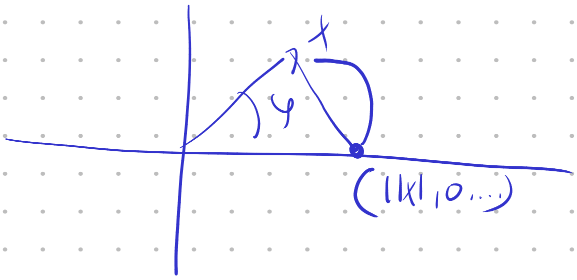
$= n - \frac{2}{\|n\|^2}$

TBA

Příklad č. 15659: Pomocí Givensovy rotace spočítejte QR rozklad matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$A = QR$



$G = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow GA = R$

$\searrow$ je OG

$A \cdot R^{-1}$

$Q^{-1} = Q^T$

$G = Q^{-1}$

$$\varphi \to \arccos \frac{(1,1)\cdot(1,0)}{\|(1,1)\| \cdot \|(1,0)\|} = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ$$

$$G \cdot A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 6/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = R$$

$A = QR$

1:10:00