LA2 - 1

VP -> Množina splňující 7 axiomů:

↳ . uzavřená sčítání dva vektory $\oplus: V \times V \to V$ $(x + x$

↳ -> $\odot: T \times V \to V$

1. sčítání komutativní. $\forall x, y \in V: x \oplus y = y \oplus x$
2. -"- asoc. $\forall x, y, z \in V: (x+y)+z = x+(y+z)$
3. násobení skalárem asoc. $\forall \alpha, \beta \in T\ \forall x \in V: \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$
4. násobení distributivní zleva $\forall \alpha \in T\ \forall x, y \in V: \alpha(x+y) = (\alpha x) + (\alpha y)$
5. zprava $(\forall \alpha \in T)(\forall x, y \in V): (x+y)\alpha = \alpha x + \alpha y$
6. neutrální prvek vůči násobení $\forall x \in V: 1 \cdot x = x$
7. existence nulového prvku $\forall x \in V: 0 \cdot x = \Theta$

1) LN -> $(x_1 \dots x_n) \Leftrightarrow \forall \alpha_1 \dots \alpha_n \in T$; $\alpha_1 x_1 \dots \alpha_n x_n = \Theta \Rightarrow \alpha_1 \dots \alpha_n = 0$

kolik existuje řešení:

a) $= ((2,1,2), (1,0,1), (1,1,1)$; $\alpha \cdot (2,1,2) + \beta \cdot (1,0,1) + \gamma \cdot (1,1,1) = (0,0,0)$

$(2\alpha + \beta + \gamma, \alpha + \gamma, 2\alpha + \beta + \gamma) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \gamma + \alpha = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$ existuje více řešení

$\Rightarrow$ existuje netriviální řešení $\Rightarrow$ LZ

b) $\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$; kolik existuje řešení?

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2\alpha + \beta & \alpha + \beta + 2\gamma \\ 2\alpha + \gamma & \alpha + \beta + 2\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases} \quad \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \dots$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

$\rightarrow$ dvě volné nezn. $\rightarrow$ LZ $\rightarrow$ není báze

c) $(x^2+x+1,\ x+1,\ x^2+1)$; kolik existuje řešení.

vyjádření $N(x)$

$$\alpha\cdot(x^2+1x+1)+\beta\cdot(x+1)+\gamma\cdot(x^2+1)=0\ ?$$

$$(\alpha x^2+\alpha x+\alpha)+(\beta x+\beta)+(\gamma x^2+\gamma)=0$$

$$x^2\cdot(\alpha+\gamma)+x\cdot(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta+\gamma)=0 \quad (0x^2+0x+0)$$

$$\begin{aligned}(\alpha+\gamma)&=0\\ \alpha+\beta&=0\\ \alpha+\beta+\gamma&=0\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

pouze triv. kombinace dává 0

soubor je LN

je báze $\Rightarrow$ není $x^2 \notin \langle x^2+x+1,\ x+1,\ x^2+1\rangle$

2) $(x_1,\dots,x_m)$; $z\in\langle x_1,\dots x_2\rangle \rightarrow$ tedy zjistit se dá zakombinovat pomocí vektorů z LO ; $z=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\dots+\alpha_m x_2$?

a) $z=(1,2,1)$; $\langle(1,2,3),(-1,2,1),(1,0,1)\rangle \in \mathbb{R}^3$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

Jestliže vektor z dá zakombinovat

$$\alpha(1,2,3)+\beta\cdot(-1,2,1)+\gamma(1,0,1)=(1,2,1)$$

$$(\alpha-\beta+\gamma,\ 2\alpha+2\beta,\ 3\alpha+\beta+\gamma)=(1,2,1)$$

$$\begin{aligned}\alpha-\beta+\gamma&=1\\ 2\alpha+2\beta&=2\\ 3\alpha+\beta+\gamma&=1\end{aligned} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \rightarrow$$

nemá řešení, vektor z nepatří do LO.

soubor LN

b) $z = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$; $\langle \overset{x_1}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}, \overset{x_2}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \overset{x_3}{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} \rangle$

zjistíme $z \in LO \Rightarrow$ pak max. ...

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta & \alpha + \beta + 2\gamma \\ \alpha + \gamma & \alpha + \beta + 2\gamma \end{pmatrix}$$

$2\alpha + \beta = 0$

$\alpha + \beta + 2\gamma = 4$

$\alpha + \gamma = -2$

$\alpha + \beta + 2\gamma = -1$

3) Nalezněte bázi VP $\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle \in \mathbb{Z}_3^{2,2}$

souřadnice $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ vůči bázi:

Hy LK: $\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \delta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} \alpha+\beta+\delta & 2\beta+2\gamma & & & 0 & 0 \\ 2\alpha+2\beta+\delta & \alpha+2\beta+\gamma & & & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{+}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{+}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cancel{0} \end{array}\right) \rightarrow$$ více řeš. $\rightarrow$ soustava je LZ

$\uparrow$ x_3

$x_3 \in \langle x_1, x_2 \rangle$

generující obal $\leftarrow \langle x_1, x_2, x_4 \rangle \rightarrow$ je LN

$$\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix} = \alpha\cdot x_1 + \beta\cdot x_2 + \gamma\cdot x_3$$

$\Downarrow$

4) Nalezněte bázi: $\left(\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\2&2\end{pmatrix}, \text{gen. } \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right)$

doplníme standardní bázi $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$$\alpha\cdot\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}1&0\\2&2\end{pmatrix}+\gamma\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\delta\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\varphi\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+\xi\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2\alpha+\beta+\gamma & \alpha+\delta & 0 & 0\\ \alpha+2\beta+\varphi & \alpha+2\beta+\xi & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}\alpha&\beta&\gamma&\delta&\varphi&\xi\end{array}\\ \left(\begin{array}{cccccc|c}2&1&1&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&0&0\\1&2&0&0&1&0&0\\1&2&0&0&0&1&0\end{array}\right)\end{array} \sim \left(\begin{array}{cccccc|c}2&1&1&0&0&0&0\\0&1&1&1&0&0&0\\0&0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1&0\end{array}\right)\begin{array}{l}\cdot 2\\ +\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}2&1&1&0&0&0&0\\0&1&1&1&0&0&0\\0&0&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&2&1&0\end{array}\right)$$

$\delta, \xi \in \langle \alpha, \beta, \gamma, \varphi\rangle$

$\left(\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\2&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ je LN

$\dim \mathcal{R}^{2,2}_3 = 4$

5) (x, y, z) je LN ve VP nad $\mathbb{R}$

a) $(x+y, 2x, y+z)$ je LN/LZ

Kolik možných řešení?

$$\alpha(x+y)+\beta\cdot(2x)+\gamma\cdot(y+z)=\theta$$

$$\alpha x+\alpha y+2\beta x+\gamma y+\gamma z=\theta$$

$$(\alpha+2\beta)\cdot x+(\alpha+\gamma)\cdot y+(\gamma)\cdot z=\theta$$

(x, y, z) je LN

$\Leftrightarrow$ LK. je $\theta \Leftrightarrow (\alpha, \beta, \gamma)=0$

$\alpha + 2\beta = 0$
$\alpha + \gamma = 0$
$\gamma = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\Downarrow$ pomocí Tr. LK. dává 0

b) $(x+2y+z,\ 2x+y+5z,\ 3x+y+8z)$

6. Máme vektory x, y, z z VP V nad T : $z \in \langle x, y \rangle$

$\langle x, y \rangle = \langle x, y, z \rangle$

Dk.: $\langle x, y \rangle \subseteq \langle x, y, z \rangle$

$v \in \langle x, y \rangle \Rightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2 \in T \ v = \alpha_1 x + \alpha_2 y \Rightarrow v = \alpha_1 x + \alpha_2 y + 0 \cdot z \in \langle x, y, z \rangle$

$\langle x, y, z \rangle \subseteq \langle x, y \rangle$

$u \in \langle x, y, z \rangle \Rightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in T : z = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z_3$

$z \in \langle x, y \rangle \Rightarrow \exists \beta_1, \beta_2 \in T \ z = \beta_1 x + \beta_2 y$

$u = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 \cdot (\beta_1 x + \beta_2 y)$

$= (\alpha_1 + \alpha_3 \cdot \beta_1) x + (\alpha_2 + \alpha_3 \cdot \beta_2) y \in \langle x, y \rangle \quad \square$

7. $M \subset\subset VP$

$\hookrightarrow$ 1) $M \neq \emptyset$; 2) $\forall x, y \in M : x + y \in M$; 3) $\forall x \in M \ \forall \alpha \in T \ \alpha x \in M$

Máme dánu $A \in \mathbb{R}^{2/2}$ $\quad M := \{ X \in \mathbb{R}^{2/2} \mid A \cdot X = X A \}$

$M \subset\subset \mathbb{R}^{2/2}$ $\quad$ 1) je $M \neq \emptyset$? $\quad$ (A, Θ)

$E \in \mathbb{R}^{2/2}$ $\quad A \cdot E = E \cdot A$

$E \in M \Rightarrow M \neq \emptyset$

2) $x \in M : Ax = xA$
$y \in M \quad Ay = yA \overset{?}{\Rightarrow} x + y \in M$

$A(x+y) = Ax + Ay = xA + yA = (x+y) \cdot A \Rightarrow x + y \in M$

3) $X \in M$ i $\alpha \in \mathbb{R}$: $AX = XA \Rightarrow \alpha X \in M$

$A \cdot (\alpha X) = \alpha \cdot (AX) = \alpha (XA) = (\alpha X) \cdot A \Rightarrow \alpha X \in M$

$M \subset\subset \mathbb{R}^{2\times 2}$

$M = \{ X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid AX = XA \}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & a+b \\ 2c & c+d \end{pmatrix}$

$2a+c = 2a \Rightarrow c = 0$

$2b$

$a-b-d = 0$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) =$

$S = \langle (1,1,0,0), (+1,0,0,1) \rangle$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$M = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

LA2 - 2

Lineární zobrazení: Mějme P, Q VP nad T, pak zobrazení $A: P \to Q$ nazveme lineární $\Leftrightarrow$ platí:

1) aditivita: $(\forall x, y \in P)(A(x+y) = Ax + Ay$

(obraz součtu je součet obrazů)

2) homogenita $(\forall \alpha \in T)(\forall x \in P)(A(\alpha x) = \alpha Ax$

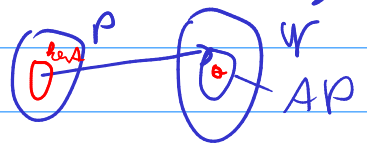
(obraz násobku ve $\to$ násobkem obrazu)

Množina LZ ob. $L(P, Q)$

$A(\langle x_1, \dots, x_n \rangle) = \langle Ax_1, \dots, Ax_n \rangle$

obr LO lin. obal obrazů

Hodnost zobrazení je $h(A) = \dim P$ (obraz. hodnost)



Jádro zobrazení je množina $= \ker A := \{x \in P \mid Ax = \theta_Q\}$

množina všech vektorů, které se zobrazí na θ

vzor θ vektoru $A^{-1}\{\{1\}\}$

Defekt je dimenze jádra $d(A) = \dim \ker A$

$\hookrightarrow A \in L(P, Q)$ A je prostá $\Leftrightarrow \ker A = \{\theta_P\}$

$\hookrightarrow$

? věta o dim

$A \in L(P, Q) \Rightarrow h(A) + d(A) = \dim P$

(1) Jestli zobrazení je Lin.?

a) $A(a,b) = (\overset{1.}{a+b}, \overset{2.}{2b}, a)$; $a,b \in \mathbb{R}$

$A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

↳ 1) $A(x+y) = A(x) + A(y)$ $\forall x,y \in P$ ✓ zobrazení je lin.

2) $A(\alpha x) = \alpha A(x)$ $\forall x \in P, \forall \alpha \in$ ✓

1)

Mějme dva lib. vektory $x = (a,b) \in \mathbb{R}^2$; $y = (c,d) \in \mathbb{R}^2$

$A(x+y) = A(\overset{1.\text{ složka}}{a+c}, \overset{2.\text{ složka}}{b+d}) = (a+c+b+d ; 2\cdot(b+d) ; a+c) =$

$= (a+b+c+d, 2b+2d, a+c)$

$=$ ✓

$A(x) + A(y) = A((a,b)) + A((c,d)) = (a+b, 2b, a) + (c+d, 2d, c)$

2) Mějme lib. $x = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ libovolné

$A(\alpha x) = A(\alpha a, \alpha b) = (\alpha a + \alpha b ; 2\cdot(\alpha b) ; \alpha a) =$

$\alpha \cdot (a+b), 2b, a) = \alpha A(x)$ ✓

b) $A: \mathbb{R}^{2/2} \to P$

$A\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b)x^2 + 2c + d$; $a,b,c,d \in \mathbb{R}$

1) aditivita $A(x+y) = A(x) + A(y)$ ✓

$x,y \in \mathbb{R}^{2/2}$

Mějme dva lib. matice $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2/2}$ a $y = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2/2}$

$A(x+y) = A\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} = \underline{(a+e+b+f)\cdot x^2 + 2\cdot(c+g) + d + h}$

$A(x) + A(y) = (a+b)\cdot x^2 + 2c + d + (e+b)\cdot x^2 + 2g + h$

$= ax^2 + bx^2 + ex^2 + bx^2 + 2c + 2g + d + h$

$= \underline{(a+b+e+b)\cdot x^2 + (c+g)\cdot 2 + d + h}$ //

2) homogeniteta $A(\alpha X) = \alpha A(X)$; ✓ $X \in P$

Možne lib. matrike $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ in $\alpha \in T$

$A(\alpha X) = (\alpha a + \alpha b) \cdot x^2 + 2\alpha c + \alpha d = \alpha \cdot ((a+b) x^2 + 2c + d) =$
$= \alpha A(X)$

$\alpha A(X)$

c) $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$A(a,b) = (|a|, b)$ $a, b \in \mathbb{R}$

1) aditivnost $A(x+y) = A(x) + A(y)$
Možno dve lib. dvojici $x = (a,b)$, $y = (c,d) \in \mathbb{R}^2$.

$|a+c| \leq |a| + |c|$

$A(x+y) = A(a+c, b+d) = (|a+c|, b+d)$ $\neq$

$A(x) + A(y) = (|a|, b) + (|c|, d) = (|a| + |c|, b+d)$

2) homogeniteta $A(\alpha X) = \alpha A(X)$

Možne lib. dvojici $X = (a,b)$ in $\alpha \in R$

$A(\alpha X) = A(\alpha a, \alpha b) = (|\alpha a|, \alpha b) = (|\alpha| \cdot |a|, \alpha b)$ $\neq$

$\alpha A(X) = \alpha \cdot (|a|, b) = (\alpha |a|, \alpha b)$

Dk:

1) $A \in \mathcal{L}(P,Q)$ a $M \subset\subset Q \Rightarrow A(M) \subset\subset Q$

obraz podprostoru je podprostorem

↳ dk:

1) neprázdnost

$A(\Theta_P) = \Theta_Q \qquad \Theta_Q \in A(M)$

$\exists p \in M$

$A(\Theta_P) = A(0 \cdot \Theta_P) = 0 \cdot A(\Theta_P) = \Theta_Q$

2) $x, z \in A(M) \overset{?}{\Rightarrow} x + z \in A(M)$

↳ $\exists v \in M \; Av = x$; obraz součtu se musí rovnat součtu line-

$\exists w \in M \; A(w) = z \Rightarrow$ dále $A(\underbrace{v + w}_{\in M}) = A(v) + A(w) = x + z$

$\Rightarrow x + z \in M$

$v + w \in M \qquad M \subset\subset$

3) x lin vektor $A(M) \; \exists v : A(v) = x$

$\alpha \in T \Rightarrow \alpha x \in A(M)$?

↳ $A(\alpha v) = \alpha \underbrace{A(v)}_{\in M} = \alpha x$

Ref. $\Rightarrow \alpha x \in A(M)$

b) obraz lin ob je lin. obrazů

$A(\langle x_1, \dots x_n \rangle) = \langle A(x_1), \dots A(x_n) \rangle$?

$A(\langle x_1, \dots, x_n \rangle) \subseteq \langle A(x_1), \dots, A(x_n) \rangle$

mějme $v \in A(\langle x, y \rangle) \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in T : A(\alpha x + \beta y) \Rightarrow$

$\Leftrightarrow$ NC

ve sedí dílčí lin. rozpsat jako $A(\alpha x) + A(\beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$

$\Rightarrow$ to je vektor $z \in \langle A(x), A(y) \rangle$

$\langle A(x), A(y)\rangle \subseteq A(\langle x,y\rangle)$?

↳ hodnotíme jako LK.

vyberu libovolný prvek $w \in \langle A(x), A(y)\rangle$; $\exists_{\alpha,\beta}$ $w = \alpha A(x) + \beta A(y)$

$w = A(\alpha x + \beta y) \in \langle x,y\rangle \Rightarrow \langle x,y\rangle \subseteq A(\langle x,y\rangle)$ □

napsat jako obraz

Př. ker, d, báze obrazu hodnost, hodnost

jádro $\ker A \overset{\text{je vzor}}{=} A^{-1}(\Theta_Q)$

a) $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$A(a,b,c) = (2a - c, b + c)$, $a,b,c \in \mathbb{R}$

$A(a,b,c) = (2a-c, b+c) = (0,0)$

$2a - c = 0$

$b + c = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$S = \langle (1,-2,2) \rangle$

$d(A) = 1$

$\dim \ker(A) = \underline{1}$

$\dim \mathbb{R}^3 = h(A) + d(A)$

$3 = h(A) + 1$

$h(A) = 2$

$A(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}^2$

$\dim A(\mathbb{R}^3) = 2$ $\Rightarrow$ $A(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2$ → báze obrazu je lib báze

b)

$A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$A(a,b) = (a+b, a-b, 2a) \quad a,b \in \mathbb{R}$

$\ker(A) = A^{-1}(\Theta_Q)$

$A(a,b) = (a+b, a-b, 2a) = (0,0,0)$

$a+b=0$
$a-b=0$
$2a=0 \to$

$a=0$
$b=0$ $\Rightarrow$ $\ker A = \Theta = \{(0,0)\}$
$d(A) = 0$

zřejmě odtud

$h(A) = 2$

$\dim \mathbb{R}^2 - d(A) = h(A)$ $\qquad$ $\dim A(\mathbb{R}^2) = 2$

$2 - 0 = 2$

dost hodně

chci najít obraz kanonických vektorů

$A(\mathbb{R}^2) = A(\langle (1,0),(0,1)\rangle) = \langle A(1,0), A(0,1)\rangle =$

$= \langle (1,1,2),(1,-1,0)\rangle \Rightarrow LN$

generují obraz, generují obraz $\Rightarrow$ tvoří bázi

c)

$A: \mathbb{R}^{2\times 2} \to P$

$A\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b)\cdot x^2 + c + d \quad ; a,b,c,d \in \mathbb{R}$

jádro $\ker A = A^{-1}(\Theta_Q)$ $\qquad$ $h(k) = 0$

vzor když se zobrazí na Θ.

$A\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b)\cdot x^2 + 0x + d \quad - \quad 0x^2 + 0x + 0\cdot 1$

$a+b=0$
$2c+d=0$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $\Rightarrow$ řešení je lin obal dvou vektorů

$S = \langle (-1,1,0,0),(0,0,1,-2)\rangle \neq \ker A$

$\subset \mathbb{R}^{2\times 2}$

$\Downarrow$

$\times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\ker A = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$d(A) = 2$ $\qquad \dim \mathbb{R}^{2\times 2} = d(A) + h(A)$

$4 = 2$

$\in$

$A(\mathbb{R}^{2\times 2}) = A\left(\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right) =$

$\left\langle A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle =$

$= \langle x^2, x^2, x, 1 \rangle = \underline{\langle x^2, 1 \rangle}$ LN

báze $(x^2, 1)$ je báze $A(\mathbb{R}^{2\times 2})$

$h(A) = 0$

(2)

$A: \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^2$; na bázi: $A(1,2) = (2,3)$; $A(2,1) = (1,1)$

$\beta = ((1,2),(2,1))$

→ vyjádřím si (a,b)

$(a,b) = \alpha\cdot(1,2) + \beta(2,1)$

$\alpha = 3a + 4b$

$\beta = 4a + 3b$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 2 & 3a+b \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \alpha & \beta \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3a+4b \\ 0 & 1 & 4a+3b \end{array}\right) \end{array}$$

$A(a,b) = A(\alpha(1,2), \beta(2,1)) = \alpha\cdot A(1,2) + \beta(2,1) =$

$= \alpha\cdot(2,3) + \beta\cdot(1,1) = (3a+4b)(2,3) + (4a+3b)(1,1) =$

$= \underline{\underline{(b, 3a)}}$ → předpis

$\left({}^{\varepsilon}A^{\varepsilon} = {}^{x}A^{\varepsilon}_{E^{y}}\right)$

$A(\mathbb{R}) = A_{\mathbb{R}}$

$\downarrow$

$A = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ $\quad A\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A(1\ 0)$

LA2 (3)

Df: Nechť $A \in \mathcal{L}(P,Q)$, $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$ báze P a $\mathcal{Y} = (y_1, \dots, y_n)$ báze Q, tak matici ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} \in T^{m \times n}$, definovanou po sloupcích pro $\forall i \in \hat{n}$: $({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})_{:i} := (A(x_i)_{\mathcal{Y}})$ nazveme maticí lin. zobr. A vzhledem k bázím $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$. $({}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{X}} = {}^{\mathcal{X}}A)$

$${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \left((A(x_1)_{\mathcal{Y}} \; A(x_2)_{\mathcal{Y}} \dots A(x_n)_{\mathcal{Y}} \right) \in T^{m \times n}$$

věta: $(\forall r \in P)\left(A(r)_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} \cdot (r)_{\mathcal{X}} \right)$

↳ vektor r je vzorem vektoru w $(r \in A^{-1}(w) = A(r) = w) \iff$ $({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} \mid (w)_{\mathcal{Y}})$ (r je řešením soustavy)

↳ Je-li $r = (r_1, \dots, r_n) \in T^n \Rightarrow r = r_1 \cdot e_1 + \dots + r_n \cdot e_n$ $(r)_{\mathcal{E}} = r$

↓ ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}} = \left(A(x_1)_{\mathcal{E}} \dots A(x_n)_{\mathcal{E}} \right) = \left(A(x_1) \dots A(x_n) \right)$

věta: $h(A) = h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})$

↳ $A^{-1}(\{0\}) = \ker A$

Př. 1

Nechť je $A \in \mathcal{L}(P, Q)$

$A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$A(a,b,c) = (a+2b,\ a+2b+c)$; $a,b,c \in \mathbb{R}$.

Nalézt matici lin. zobr. vůči $\mathcal{E}$

↳ obraz vektoru $(2,1,0)$ ○

↳ vzor vektoru $(1,2)$ □

$\mathcal{E}_3 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$

$\mathcal{E}_2 = ((1,0),(0,1))$

$$_{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2} = \left(\overset{\text{obraz}}{A(e_1)_{\mathcal{E}_2}}\ A(e_2)_{\mathcal{E}_2}\ A(e_3)_{\mathcal{E}_2} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$A(\overset{e_1}{1,0,0}) = (1,1)$

$A(\overset{e_2}{0,1,0}) = (2,2)$

$A(\overset{e_3}{0,0,1}) = (0,1)$

vstup

○ $\quad {}_{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2} \cdot (r)_{\mathcal{E}_3} = (A \cdot (r))_{\mathcal{E}_2} = A(r)$

výstup

$$A(2,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

□ $\quad {}_{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2} \cdot r = A(r) = (1,2)$

$A \cdot x = b \qquad b$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \bar{x} = (0,1,0) \\ S_0 = \langle (-2,1,0) \rangle \end{matrix}$$

vzor $= (0,1,0) + \langle (-2,1,0) \rangle$

$A^{-1}(1,2)$

Př. 2 $A(a,b) = (a+2b, a+2b, b)$; $a,b \in \mathbb{R}$

$A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; matici, obraz $(1,2)$, vzor $(1,1,0)$

$${}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{E}_3} = \left(A(e_1)_{\mathcal{E}} \quad A(e_2)_{\mathcal{E}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A(1,0) = (1,1,0)$

$A(0,1) = (2,2,1)$

$${}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{E}_3} \cdot (r)_{\mathcal{E}_2} = (A(r))_{\mathcal{E}_3} = A(r)$$

$$A(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftarrow \text{obraz}$$

$${}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{E}_3} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to J = \{(1,0)\}$$

$A \cdot x = b$

$= A^{-1}(1,1,0)$

Př. 3 $A: \mathbb{Z}_3^2 \to \mathbb{Z}_3^3$; def. pomocí B obrazů $X = ((1,2),(2,0))$

$A(1,2) = (2,2,2)$, $A(2,0) = (1,1,1)$

${}^{X}A^{\mathcal{E}_3}$; $h(A), d(A), \ker(A)$

$${}^{X}A^{\mathcal{E}_3} = \left(A(x_1)_{\mathcal{E}_3} \quad A(x_2)_{\mathcal{E}_3} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ({}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2})$$

- $h(A) = h({}^{X}A^{\mathcal{E}_3})$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h(A) = 1 \Rightarrow \dim \mathbb{Z}_3^2 = d(A) + h(A)$$

z. věta

$2 = d(A) + 1$

$d(A) = 1$ (1 vektor)

vzor Θ vektor

jádro $A^{-1}(\{\Theta\})$

${}^{X}A^{\mathcal{E}_3}(r)_X = (Ar)_{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

obraz vůči $\mathcal{E}_3$ bude $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$A \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$

$r = \alpha x_1 + \beta x_2$!

$\Updownarrow$

$(r)_X = (a, b)$

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $S = \langle (1,1) \rangle$ $\neq$ jádro A

$\ker A = \langle 1 \cdot x_1 + 1 x_2 \rangle = \langle (0,2) \rangle$

Př 4

$A : P_2 \to \mathbb{R}^{2,2}$, $A(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ b+c & a+c \end{pmatrix}$

$a=1$ $b=-2$ $c+3$

např. obraz $A(x^2 - 2x + 3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$B = (1, x, x^2)$; $\mathcal{E}_{2,2} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{E}_{2,2}} \to (a, b, c, d)$

${}^B A^{\mathcal{E}_{2,2}} = \left(A(1)_{\mathcal{E}_{2,2}} \quad A(x)_{\mathcal{E}_{2,2}} \quad A(x^2)_{\mathcal{E}_{2,2}} \right) =$

$A(1)_{\mathcal{E}_{2,2}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}_{22}} = (0, 0, 1, 1)$

$A(x)_{\mathcal{E}_{2,2}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}_{2,2}} = (1, 1, 1, 0)$

$A(x^2)_{\mathcal{E}_{2,2}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}_{2,2}} = (1, 1, 0, 1)$

${}^B A^{\mathcal{E}_{2,2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$h(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$h(A) = 3$

iz. věta o dimenzi

${}^B A^{\mathcal{E}_{2,2}} \cdot (2)_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}_{2,2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b$ dim

$A \cdot x = b$ $\quad x \Rightarrow (r)_B$

$S = \{(0)\} = \{0, 0, 0\} \Rightarrow \ker A = \{0 \cdot 1 + 0x + 0x^2\} = \{0\}$

Pr. 5

$X = (x_1, x_2, x_3)$, $A: P \to P$, VP-P

$Ax_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $Ax_2 = x_2 + 2x_3$, $Ax_3 = x_1 - x_3$

$${}^X A^X = \left((Ax_1)_X \ (Ax_2)_X \ (Ax_3)_X \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$(Ax_1)_X = (\overset{1}{x_1} + \overset{1}{x_2} + \overset{1}{x_3})_X = (1,1,1)$

$(Ax_2)_X = (0,1,2)$

$(Ax_3)_X = (1,0,-1)$

$$h(A) = h({}^X A^X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad = 2$$

$\dim P - h(A) = 1 = d(A)$

$${}^X A^X \cdot (r)_X = (Ar)_X = \Theta_X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad S = \langle (-1,1,1) \rangle = \quad x = (r)_X$$

$\ker A = \langle -x_1 + x_2 + x_3 \rangle$

LA2-4

Def: Nechť $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ a $Y=(y_1,\dots,y_n)$ jsou báze P.
Matici identického operátoru ${}^{X}E^{Y}$ - matice přechodu z X do Y. $Ex=x$ $\in T^{n,n}$

$${}^{X}E^{Y} = \left((x_1)_Y \dots (x_n)_Y \right) \quad {}^{X}A^{Y} = \left((A(x_1))_Y \dots (A(x_n))_Y \right)$$

věta: X, Y a Z jsou báze P, $\dim P < \infty$:

1. matice ${}^{X}E^{Y}$ je regulární a platí
$({}^{X}E^{Y})^{-1} = {}^{Y}E^{X}$ $\qquad$ $({}^{X}A^{Y})^{-1} = {}^{Y}A^{X}$

2. pro libovolné $x \in P$ platí:
${}^{X}E^{Y} \cdot (x)_X = (x)_Y$ $\qquad$ $(Ar)_Y = {}^{X}A^{Y} (r)_X$

$E^{-1} = E$

3. ↳ ${}^{Y}E^{Z} \cdot {}^{X}E^{Y} = {}^{X}E^{Z}$ $\qquad$ ${}^{X}(AB)^{U} = {}^{Y}A^{U} \cdot {}^{X}B^{Y}$

$${}^{X}E^{\varepsilon_n} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_n \end{pmatrix} \in T^{n,n}$$

$${}^{\varepsilon_n}E^{X} = ({}^{X}E^{\varepsilon_n})^{-1} = ((x_1\ x_2 \dots x_n))^{-1}$$

$${}^{X}E^{Y} = {}^{\varepsilon_n}E^{Y} \cdot {}^{X}E^{\varepsilon_n} = ({}^{Y}E^{\varepsilon_n})^{-1} \cdot {}^{X}E^{\varepsilon_n}$$

věta: ↳ ${}^{\tilde{X}}A^{\tilde{Y}} = {}^{Y}E^{\tilde{Y}} \cdot {}^{X}A^{Y} \cdot {}^{\tilde{X}}E^{X}$

Př. 1

báze $\mathbb{R}^2$, $X = (\overset{x_1}{(1,2)}, \overset{x_2}{(2,2)})$, $Y = ((1,0),(-1,1))$

matice přechodu ${}^{X}E^{\mathcal{E}_2}$, ${}^{Y}E^{\mathcal{E}_2}$, ${}^{X}E^{Y}$, $r = 2x_1 - 3x_2$ $(r)_Y$

$${}^{X}E^{\mathcal{E}_2} = \left(A(x_1)_{\mathcal{E}_2} \quad A(x_2)_{\mathcal{E}_2} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$${}^{Y}E^{\mathcal{E}_2} = \left(A(y_1)_{\mathcal{E}_2} \quad A(x_2)_{\mathcal{E}_2} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$$

$${}^{X}E^{Y} = {}^{Y}E^{\mathcal{E}_2} \cdot {}^{X}E^{\mathcal{E}_2} \qquad {}^{\mathcal{E}_2}E^{Y} = \left({}^{Y}E^{\mathcal{E}_2}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$${}^{X}E^{Y} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(souřadnice = koeficienty)

$(r)_Y$? ; $(r)_X = (2,-3)$

$${}^{X}E^{Y} \cdot (r)_X = (r)_Y$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (r)_Y \Rightarrow r = -6 \cdot y_1 - 2y_2$$

Př. 2

$A: \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$; $A(a,b,c) = (a+b+c, b+2c)$; $a,b,c \in \mathbb{Z}$

${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2}$, ${}^{X}A^{\mathcal{E}_2}$, ${}^{X}A^{Y}$; $X = ((1,2,1),(2,0,1),(0,0,1))$

$Y = ((1,1),(3,2))$

$\mathcal{E}_3 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$, $\mathcal{E}_2 = ((1,0),(0,1))$

$${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2} = \left(A(e_1)_{\mathcal{E}_2} \quad A(e_2)_{\mathcal{E}_2} \quad A(e_3)_{\mathcal{E}_2} \right)$$

$${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$${}^{X}A^{\mathcal{E}_2} = {}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2} \cdot {}^{X}E^{\mathcal{E}_3} \quad \Big| \; {}^{X}A^{\mathcal{E}_3} = \left((A(x_1))_{\mathcal{E}_3} \; (A(x_2))_{\mathcal{E}_3} \; A(x_3)_{\mathcal{E}_3} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$${}^{X}A^{Y} = {}^{\mathcal{E}_3}E^{Y} \cdot {}^{X}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$${}^{\mathcal{E}_3}E^{Y} = \left({}^{Y}E^{\mathcal{E}_3}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$${}^{\mathcal{E}_3}E^{Y} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Př. 3.

$$A: \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^3 \qquad X = (\overset{x_1}{(1,1)}, \overset{x_2}{(3,2)}), \; Y = ((1,0,1), (2,1,1), (0,1,1))$$

$${}^{X}A^{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad {}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{E}_3}; \; A(a,b) = ?, \; \ker, \; h, \; d$$

$$h(A) = h({}^{X}A^{Y}) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h(A) = 1$$

Z. věta o dimenzi

$$\dim \mathbb{Z}_5^2 = h(A) + d(A) \Rightarrow 2 = 1 + d(A) \Rightarrow d(A) = 1$$

$$\ker A \Rightarrow {}^{X}A^{Y} \cdot (z)_X = (Az)_Y = \underset{\text{deskriptivní obraz}}{0_Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A \cdot x = b$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad S = \langle (1,2) \rangle \neq \ker A \; !$$

tohle jsou souřadnice $(z)_X$

$$z = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2$$

$$\ker A = \langle (1,1) + 2 \cdot (3,2) \rangle$$

$$= \underline{\langle (2,0) \rangle}$$

musím to obložit vhodnými maticemi přechodu

$$ {}^{\varepsilon_2}A^{\varepsilon_3} = {}^{Y}E^{\varepsilon_3} \cdot {}^{X}A^{Y} \cdot {}^{\varepsilon_2}E^{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = * $$

$$ {}^{Y}E^{\varepsilon_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^{\varepsilon_2}E^{X} = \left({}^{X}E^{\varepsilon_2}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim $$

$$ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) $$

$$ {}^{\varepsilon_3}E^{X} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} $$

$$ * \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ Az = {}^{\varepsilon_2}A^{\varepsilon_3} \cdot z = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4b \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow (4b, 0, b) $$

${}^{\varepsilon_2}z = (a, b)$ — když tomu dáme obecný vektor z, tak získáme jeho obraz

$$ A(a, b) = (4b, 0, b) $$

<u>Př. 4</u> $A: P_2 \to R^{2,2}$

$$ A(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a+b+c \end{pmatrix}, \quad {}^{X}A^{Y} = ? $$

$$ X = (\overset{x_1}{x^2+1}, \overset{x_2}{x+1}, \overset{x_3}{1}) \qquad \varepsilon_{2,2} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right. $$

$$ Y = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) $$

$$ A(x^2+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A(x+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ {}^{X}A^{\varepsilon_{2,2}} = \left((Ax_1)_{\varepsilon_{2,2}} \quad A(x_2)_{\varepsilon_{2,2}} \quad A(x_3)_{\varepsilon_{2,2}} \right) $$

$$ = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right)_{\varepsilon} = (1, 0, 1, 2) $$

$$ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} $$

$${}^{Y}_{\otimes}A = {}^{\varepsilon_{212}}E^{Y} \; {}^{\varepsilon_{212}}_{\otimes}A$$ z tohoto výsledek

$${}^{\varepsilon_{212}}E^{Y} = \left({}^{Y}E^{\varepsilon_{212}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots\cdots \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Př. 5

$$A : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$$

$$X = \big(\overset{x_1}{(1,2,1)}, \overset{x_2}{(2,1,1)}, \overset{x_3}{(1,0,0)}\big)$$

$$(2,4,2) \qquad (1,3,3) \qquad (0,0,0)$$

$${}^{X}A^{\varepsilon_3} = \big(A(x_1) \;\; A(x_2) \;\; A(x_3)\big) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^{\varepsilon_3}A^{\varepsilon_3} = {}^{X}A^{\varepsilon_3} \cdot {}^{\varepsilon_3}E^{X} = \begin{array}{c} Ae_1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$${}^{\varepsilon_3}E^{X} = \left({}^{X}E^{\varepsilon_3}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Az = {}^{\varepsilon_3}A^{\varepsilon}\cdot z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (b, 2c, 4b+2c)$$ (špatně)

$(b, 2c+b, 4b+4c)$

$(1,2,1)$ ✓

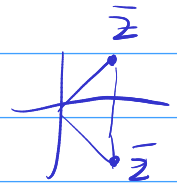
$(2,4,2)$

$z = (a,b,c)$

1

Def. Skalární součin – V – VP nad $T = \mathbb{R}/\mathbb{C}$, tak SS je zobrazení $\langle \cdot | \cdot \rangle$
$V \times V \to T$ $\wedge$ platí 3 axiomy

- 1) zobrazení je lineární v druhém argumentu
  $\langle x | y + z \rangle = \langle x | y \rangle + \langle x | z \rangle$
  $\langle x | \alpha \cdot y \rangle = \alpha \cdot \langle x | y \rangle$
- 2) hermitovská symetrie platí
  $\langle x | y \rangle = \overline{\langle y | x \rangle}$ → v $\mathbb{C}$
  $z = a + bi$
  $\bar{z} = a - bi$



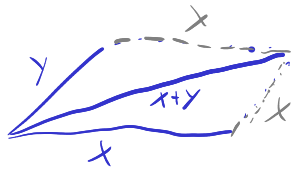
- 3) zobrazení je pozitivně definitní
  $\langle x | x \rangle \geq 0 \wedge (\langle x | x \rangle = 0 \Rightarrow x = \theta)$

↳ Dvojici $(V, \langle x | y \rangle)$ nazýváme VP se SS / prehilbertův prostor $\mathcal{H}$

Poz. pro libovolné $x, y, z \in \mathcal{H}$ a $\alpha \in T$:
1) platí sdružená linearita v prvním argumentu
   $\langle x + y | z \rangle = \langle x | z \rangle + \langle y | z \rangle$
   $\langle \alpha x | z \rangle = \bar{\alpha} \cdot \langle x | z \rangle$ pouze v $\mathbb{C}$
2) SS s θ
   $\langle x | \theta \rangle = \langle \theta | x \rangle = 0$

Def. Na T^n definujeme standardní SS:
$$x \cdot y := \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j \cdot y_j \qquad (a, b) \cdot (c, d) = a \cdot c + b \cdot d$$

Def. **Norma**: V – VP nad $T = \mathbb{R}/\mathbb{C}$ – velikost vektoru, $\|x - y\|$ – vzdálenost vektorů
Zobrazení $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, pokud pro lib. $x, y \in V$ a $\alpha \in T$ platí:
axiomy
- 1) norma je vždy nezáporná
  $\|x\| \geq 0$
- 2) pouze θ má normu 0
  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
- 3) norma je homogenní v $|x|$
  $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$



④ △ nerovnost

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Def. V $\mathcal{H}$ s SS mějme zobrazení $\|\cdot\| : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{H}$ dáno předpisem $\|x\| := \sqrt{\langle x|x\rangle}$.

norma přidružená k SS, neboli euklidovská norma

Věta: pro každé $x, y \in \mathcal{H}$ platí:

$|\langle x|y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

↳ rovnost ⟺ jeden vektor je násobkem druhého

Def. • Nechť máme $\mathcal{H}$ s SS a $x, y \in \mathcal{H}$. Vektor x nazýváme ortogonální na y :(nebo také kolmý na y) ⟺ $\langle x|y\rangle = 0$

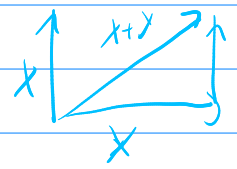
Def • Mějme SV $(x_1 \dots x_n) \in \mathcal{H}$, SV nazveme OG ⟺ každý vektor $\in$ SV je OG na ostatní. $\forall i, j \in \hat{n} \wedge i \neq j$ $\langle x_i, x_j\rangle = 0$

Def. SV je ortonormální ⟺ je OG ∧ každý vektor má velikost 1.

$i, j \in \hat{n}$ $\langle x_i|x_j\rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

Věta: Pythagorova věta - Nechť $x, y \in \mathcal{H}$ a x je OG na y, tak potom pro normu indukovanou SS platí

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$



Věta: OG SV je LN. Speciálně ON je LN

Věta: Nechť SV je ON báze z $\mathcal{H}$ ⇒ pro každé $z \in \mathcal{H}$:

$z = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i|z\rangle x_i$ | $(z)_x = (\langle x_1|z\rangle, \langle x_2|z\rangle \dots)$

↳ souřadnice

Jestli je báze pouze OG $\Rightarrow z = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x_i | z \rangle \cdot x_i}{\langle x_i | x_i \rangle}$

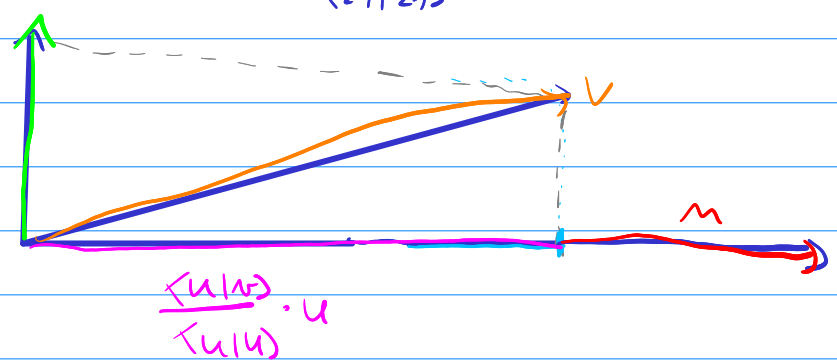
Pozn. Každý konečně dim. prostor má OG/ON bázi (o SJ)

Věta: Gramova-Schmidtova ortogonalizace:
Nechť $X = (x_1, \dots, x_n) \subseteq \mathcal{H}$ je LN SV.
Potom existuje ON SV $Y = (y_1, \dots, y_n) \subset \mathcal{H}$ takových, že $\forall k \in \hat{n}$
$\langle x_1, \dots, x_k \rangle = \langle y_1, \dots, y_k \rangle$

(žádné tam zápisy)

- 1 vektor $z_1 = x_1$ – OG B, je nenulový, je $\perp$ na ostatní vektory
- 2 vektory $z_2 = x_2 - \frac{\langle z_1 | x_2 \rangle}{\langle z_1 | z_1 \rangle} \cdot z_1$

$v - \frac{\langle u | v \rangle}{\langle u | u \rangle} \cdot u$



– n vektorů $z_n = x_n - \frac{\langle z_1 | x_n \rangle}{\langle z_1 | z_1 \rangle} z_1 - \dots x_{n-1} \frac{\langle z_{n-1} | x_n \rangle}{\langle z_{n-1} | z_{n-1} \rangle} \cdot z_{n-1}$

$\Rightarrow (z_1, \dots, z_n)$ je OG báze $\Rightarrow \left(\frac{z_1}{\|z_1\|}, \dots, \frac{z_n}{\|z_n\|} \right)$ ON báze

$z \to \alpha \cdot z = 1 \Rightarrow |\alpha| \cdot \|z\| = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\|z\|}$

$\frac{z}{\|z\|}$

$$\left(\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= x_2 - P_{z_1}(x_2) \\ z_3 &= x_3 - P_{z_1}(x_2) - P_{z_1}(x_3) \end{aligned} \right)$$

(zkrácený zápis)

Př. 1

Příklad č. 15637: Určete, která z následujících zobrazení jsou skalárním součinem na $\mathbb{R}^2$.
Pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ definujeme: *

1. $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = 2x_1y_2 + 1$,
2. $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 4x_2y_1$
3. $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = 2x_1y_2 + 2y_1x_2 + 2x_2y_2$,
4. $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = 8x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2$.

Pokud je zobrazení skalárním součinem, najděte všechny vektory ortogonální (kolmé) na vektor $(1, 1)$.

*1) je lineární 2) je symetrické? 3) je + definitní?

a) $\langle (1,0) | (0,0) \rangle = 2 \cdot 1 \cdot 0 + 1 = 1$ $\quad 1 \neq 0$

* díky lin.

$\langle (1,0) | 0 \cdot (0,0) \rangle = 0 \cdot \langle (1,0), (0,0) \rangle = 0 \cdot 1 = 0$

↳ není SS, není lin.

b) je lin, není sym.

$\langle x | y \rangle = x_1 y_1 + 2x_1 \cdot y_2 + 4x_2 \cdot y_1$

$= \langle y | x \rangle = y_1 \cdot x_1 + 2y_1 x_2 + 4y_2 \cdot x_1$

$\langle (1,0), (0,1) \rangle = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \cdot 0 = 2$ $\quad 2 \neq 4 \Rightarrow$ nejde o SS

$\langle (0,1), (1,0) \rangle = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4$

($x_1 x_1$, $x_2 x_2$)

d) $\langle x | y \rangle = 8x_1 \cdot y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 2 \cdot x_2 \cdot y_2$

1) je lineární?

$\langle x | y + z \rangle = \langle x | y \rangle + \langle x | z \rangle$

mějme libo vektory $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1 + y_2)$, $z = (z_1 + z_2)$

$\langle x | y + z \rangle = \langle (x_1, x_2) | (y_1 + z_1, y_2 + z_2) \rangle = 8 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 \cdot (y_2 + z_2) +$

$+ 2 \cdot (y_2 + z_2) + 2 \cdot (y_1 + z_1) \cdot x_2 + 2 \cdot (y_1 + z_1) \cdot (y_2 + z_2)$

($x_1 x_1$, $x_2 y_2$)

$\langle x | y \rangle + \langle x | z \rangle = \langle (x_1, x_2) | (y_1, y_2) \rangle + \langle (x_1, x_2) | (z_1, z_2) \rangle =$

$= 8 \cdot (x_1) \cdot y_1 + 2 \cdot x_1 \cdot y_2 + 2 \cdot$ — // — prostě se to bude rovnat

$\langle x | \alpha y \rangle = \alpha \langle x | y \rangle$ → udělá se analogicky

$\parallel$

2) symetrie

$\langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle$ → vyjde, protože se jen prohodí písmenka

3) positivní definitnost

$$\langle x | x \rangle = 8x_1 x_1 + 2x_1 x_2 + 2x_2 x_1 + 2x_2 \cdot x_2 = \overset{>0}{8x_1^2} + \overset{?}{4x_1 x_2} + \overset{>0}{2x_2^2}$$

↳ doplnit na čtverec

$$= \underbrace{4x_1^2 + 4x_1^2 + 4x_1 \cdot x_2 + x_2^2}_{(2x_1 + x_2)^2} + x_2^2$$

≥ 0 $\quad \langle (0,0) \rangle = 0$

⇒ je positivně definitní

je to SS

$$8 \cdot \left(x_1^2 + \frac{1}{2} x_1 \cdot x_2 + \frac{1}{4} x_2^2 \right) =$$

$$= 8 \cdot \left(x_1^2 + 2 \cdot \left(x_1 + \frac{1}{4} x_2\right) + \frac{1}{16} x_2^2 - \frac{1}{16} x_2^2 + \frac{1}{4} x_2^2 \right)$$

$$= 8 \cdot \left(x_1 + \frac{1}{4} x_2\right)^2 + \frac{3}{2} x_2^2$$

Vektory kolmé na $(1,1)$

$\langle (1,1) | (x_1, x_2) \rangle = 0 = 8 \cdot 1 \cdot x_1 + 2 \cdot 1 \cdot x_2 + 2 \cdot 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 =$

$= 5x_1 + 2x_2 = 0$

$\langle (-2, 5) \rangle$ → LO kolmé vektory

Příklad č. 15638: Dokažte, že maximová norma (nebo též ∞-norma) definovaná pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ předpisem

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\left\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\right\}$$

je skutečně normou.
Platí Pythagorova věta i pro tuto normu?

1) $\|x\| \geq 0$ $\quad \max\{\underset{\geq 0}{|x_1|}, \underset{\geq 0}{|x_2|}, \ldots\} \to \max \geq 0$

2) $\|x\| = 0 \iff x = \Theta$

$\|x_\infty\| = 0 \to 0 \leq |x_i| \leq \|x\|_\infty = 0 \Rightarrow$ všechny jsou 0 $|x_i| = 0 \to x = \Theta$

$x = \Theta$ $\quad \|\Theta\|_\infty = \max\{|0|, |0|\} = 0$

3) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

$\|\alpha x\| = \max\{\underset{|\alpha| \cdot |x|}{|\alpha x_1|}, |\alpha x_2|, \ldots, |\alpha x_n|\} = \alpha \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = |\alpha| \cdot \|x\|_\infty$

4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\|x+y\|_\infty = \max\{|x_1+y_1|, \ldots, |x_n+y_n|\} \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

jedná se o normu

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ $\quad x \cdot y = 0$

$(1,1) = \|(1,1)\|_\infty^2 = 1 \neq \|(1,0) + (0,1)\|^2 = 1 + 1 = 2$

Příklad č. 15639: V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem najděte všechny vektory, které jsou ortogonální na všechny vektory podprostoru $\langle \underbrace{(3,2,1,4)}_{u}, \underbrace{(1,1,0,1)}_{v} \rangle$.

stačí kolmost na $(3,2,1,4)$ a $(1,1,0,1)$ i je-li $x \perp u \wedge x \perp v \Rightarrow$

$\langle x \mid \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \cdot \underbrace{\langle x \mid y \rangle}_{0} + \beta \cdot \underbrace{\langle x \mid z \rangle}_{0} = 0 \Rightarrow$ hledaný vektor

$x \cdot (3,2,1,4) = x_1 \cdot 3 + x_2 \cdot 2 + x_3 \cdot 1 + x_4 \cdot 4 = 0$

$x \cdot (1,1,0,1) = x_1 + x_2 + x_4 = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$\dim S_0 = n - h(A)$

$S_0 = \langle (-1,1,1,0), (-2,1,0,1) \rangle$

S_0 obsahuje vše OB vektory

Příklad č. 15640: Buď $P \neq \emptyset$ podmnožina prehilbertova vektorového prostoru V nad tělesem $\mathbb{R}$. Definujme množinu

$$P^{\perp} = \{\mathbf{x} \in V \mid \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = 0 \text{ pro všechny } \mathbf{y} \in P\},$$

kde $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle$ je skalární součin.
Dokažte, že množina $P^{\perp}$, která se nazývá **ortogonální doplněk**, tvoří podprostor V.

1) neprázdnost $\theta \in P^{\perp}$ $\langle \theta \mid y \rangle = 0$ pro každé $y \in P$

$\Rightarrow P \neq \emptyset$

2) uzavřený na součet

$x, z \in P^{\perp} \Rightarrow x + z \in P^{\perp}$

$\langle (x+z) \mid y \rangle = 0$ $\langle x \mid y \rangle + \langle z \mid y \rangle = 0 + 0 = 0$

$y \in P$ $\Rightarrow x + z \in P^{\perp}$

3) uzavřenost na násobek

$x \in P^{\perp}, \alpha \in P$ $\langle \alpha x \mid y \rangle = \alpha \cdot \langle x \mid y \rangle = \alpha \cdot 0 = 0$

$\alpha \cdot x \in P^{\perp}$

Příklad č. 15641: Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem najděte ortogonální bázi podprostoru

$$P = \langle \overset{x_1}{(1,0,1,0)}, \overset{x_2}{(1,1,1,1)}, \overset{x_3}{(0,0,1,1)} \rangle.$$

Najděte také bázi $P^\perp$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to S_0 = \langle (1,-1,-1,1) \rangle$$

Báze $P^\perp = ((1,-1,-1,1))$

$z_1 = (1,0,1,0)$

$$z_2 = (1,1,1,1) - \frac{\langle (1,0,1,0) | (1,1,1,1) \rangle}{\langle (1,0,1,0) | (1,0,1,0) \rangle} \cdot (1,0,1,0) = (0,1,0,1)$$

$$z_3 = (0,0,1,1) - P_{z_2}(0,0,1,1) - P_{z_3}(0,0,1,1) = (-1/2, -1/2, 1/2, 1/2)$$

Ob báze je (z_1, z_2, z_3)

Příklad č. 15642: Uvažujme $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem. Buď P podprostor a $P^\perp$ jeho ortogonální doplněk. Dokažte, že platí následující:

1. $P \cap P^\perp = \{\theta\}$,
2. $\dim P + \dim P^\perp = n$, dim
3. pro každý vektor $\mathbf{x}$ existují jednoznačně určené vektory $\mathbf{a} \in P$ a $\mathbf{b} \in P^\perp$ tak, že $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

1) $x \in P \wedge x \in P^\perp \Rightarrow x \cdot x = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = \theta$

2) $\dim P = 0 \quad P = \{\theta\} \Rightarrow \{\theta\}^\perp = P^\perp = \mathbb{R}^n \Rightarrow \dim P + \dim P^\perp = \dim n$

$\dim P = k \Rightarrow$ bázové ve $P^\perp$ mu vektory z B $(x_1, \dots, x_k)$ $k \in P$

$\left(\begin{array}{c|c} x_1 & \\ x_2 & 0 \\ \vdots & \\ x_k & \end{array}\right) \to$ Frobeniova věta

$\dim S_0 = n - h(A) = n - k$

3) a) existence

$P = \{0\} \quad P^\perp = \mathbb{R}^n \Rightarrow x = \underset{P}{\theta} + \underset{P^\perp}{x}$

$\dim P = k \neq 0$

$P = \langle (x_1, \dots, x_k) \rangle \xrightarrow{OG} (z_1, \dots, z_k)$ OG báze P

$a = P_{z_1}(x) + P_{z_2}(x) + \dots + P_{z_k}(x) =$

$b = x - a \to x = a + b$, $b \in P^\perp$, tedy $z_i \cdot b = 0 =$

$= z_i \cdot (x - a) = z_i \cdot x - \left(z_i \cdot \sum_{j=1}^{m} \frac{z_j \cdot x}{z_j \cdot z_j} \cdot z_j \right) \to z_i \cdot z_j = 0 \Leftrightarrow i \neq j$

$= z_i \cdot x - \frac{z_i \cdot x_i}{\cancel{z_i \cdot z_i}} \cdot \cancel{z_i \cdot z_i} = 0$

b) jednoznačnost

$x = \underset{\in P}{a} + \underset{\in P^\perp}{b} = \underset{\in P}{c} + \underset{\in P^\perp}{d}$

$\underset{\in P}{(a-c)} = \underset{\in P^\perp}{(d-b)} \Rightarrow a - c \in P \cap P^\perp \to a - c = 0 \Rightarrow a = c$

$b - d \in P \cap P^\perp \to b - d = 0 \Rightarrow b = d$

$\square$

Příklad č. 15643: Uvažujme $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem a P podprostor. Najděte ortonormální báze P a $P^\perp$ a najděte $\mathbf{a} \in P$ a $\mathbf{b} \in P^\perp$ tak, že $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, kde:

1. $P = \langle (1,0,1), (2,0,1) \rangle$ a $\mathbf{x} = (1,1,0)$,
2. $P = \langle (1,0,1,0), (1,0,0,1) \rangle$ a $\mathbf{x} = (1,1,0,1)$.

$\langle \overset{u}{(1,0,1)}, \overset{v}{(2,0,1)} \rangle \to$ báze P

báze $P^\perp$

ověří pouze na dva tyto vektory, a mějme vektor x: $x \perp u \wedge x \perp v$, tak platí

a $y, z \in \langle y, z \rangle$

$\langle x | \alpha \cdot y + \beta \cdot z \rangle \overset{\text{díky linearitě}}{=} \alpha \cdot \underset{0}{\langle x | y \rangle} + \beta \cdot \underset{0}{\langle x | z \rangle}$ $\quad x = (x_1, x_2, x_3)$

$x \cdot (1,0,1) = x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 1 = 0$

$x \cdot (2,0,1) = x_1 \cdot 2 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 1 = 0$ i tedy hledáme řešení této soustavy

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \cdot 2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \to \dim S_0 = n - h(A) = 1$

volná proměnná

$S_0 = \langle (0,1,1,0) \rangle$

① způsob

$P^\perp = \langle (0,1,0) \rangle$; . Báze $\mathbb{R} = (P, P^\perp)$

$x = (1,1,0)$; $x = \underset{P}{a} + \underset{P^\perp}{b}$

$$(1,1,0) = \overset{-1}{\alpha} \cdot (1,0,1) + \overset{1}{\beta} \cdot (2,0,1) + \overset{1}{\gamma} \cdot (0,1,0)$$

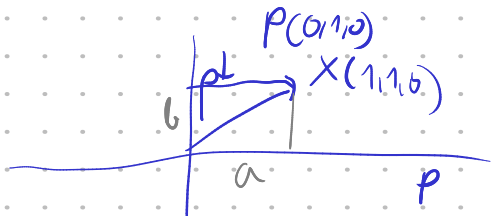
$$(1,1,0) = \underbrace{(\alpha + 2\beta, \gamma, \alpha + \beta)}_{\in P} \qquad \underbrace{}_{\in P^\perp}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} \gamma = 1 \\ \beta = 1 \\ \alpha = -1 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{tedy } a = (1,0,0) \\ b = (0,1,0) \end{array}}$$

② způsob

$P^\perp = \langle (0,1,0) \rangle$



$$b = P_{(0,1,0)}(1,1,0) = \frac{(0,1,0)\cdot(1,1,0)}{(0,1,0)\cdot(0,1,0)} \cdot (0,1,0) = \underline{(0,1,0)}$$

$$a = x - b = (1,1,0) - (0,1,0) = \underline{(1,0,0)} \qquad (b = x - a = (0,1,0))$$

$$a = P_{(1,0,1)} x + P_{(1,0,1)} x$$

$\langle \overset{u}{(1,0,1)}, \overset{v}{(2,0,1)} \rangle \to$ báze P

Ob lin – GSOG

$z_1 = (1,0,1)$

$$z_2 = (2,0,1) - \frac{(1,0,1)\cdot(2,0,1)}{(1,0,1)\cdot(1,0,1)} \cdot (1,0,1) = (2,0,1) - \frac{3}{2}\cdot(1,0,1) = (1/2, 0, -1/2)$$

Ob $B = ((1,0,1), (1/2, 0, -1/2))$; ON $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$

$(1, 0, -1)$

② $P = \langle (1,0,1,0), (1,0,0,1) \rangle \quad x = (1,1,0,1)$

OG, GSOG

$z_1 = (1,0,1,0)$

$$z_2 = (1,0,0,1) - \frac{(1,0,1,0)\cdot(1,0,0,1)}{(1,0,1,0)\cdot(1,0,1,0)} \cdot (1,0,1,0) = (1,0,0,1) - \frac{1}{2}\cdot(1,0,1,0) =$$

$$= (1/2, 0, -1/2, 1) \cdot 2$$

$$OGP = \left((1,0,1,0), (1,0,-1,2) \right) \; ; \; ON \to \left(\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\tfrac{1}{\sqrt{6}}, 0, \tfrac{-1}{\sqrt{6}}, \tfrac{2}{\sqrt{6}}\right) \right)$$

$P^\perp$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to S_0 = \langle (0,1,0,0), (-1,0,1,1) \rangle$$

OG báze

ON $\langle (0,1,0,0), (\tfrac{-1}{\sqrt{3}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}) \rangle$

$$x = \alpha \cdot (1,0,1,0) + \beta \cdot (1,0,0,1) + \gamma \cdot (0,1,0,0) + \delta \cdot (-1,0,1,1)$$

Příklad č. 15644:

Dokažte, že pro ortogonální matici $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$ platí následující:

vždy sloupce tvoří ortonormální soubor

1. pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ a pro standardní skalární součin platí $\langle \mathbf{Qx} | \mathbf{Qy} \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle$,
2. pro všechna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a pro Eukleidovskou normu platí $\|\mathbf{Qx}\| = \|\mathbf{x}\|$,
3. $\det \mathbf{Q} = \pm 1$,
4. pro vlastní číslo λ matice $\mathbf{Q}$ platí $|\lambda| = 1$.

$$Q^{-1} = Q^T \iff Q^T Q = E = Q Q^T \qquad x \cdot y = x^T \cdot y$$

1) $Qx \cdot Qy = (Qx)^T \cdot Qx = x^T \cdot \underbrace{Q^T \cdot Q}_{E} y = \langle x^T | y \rangle$

2) $\|Qx\| = \sqrt{\langle Qx | Qx \rangle} = \sqrt{\langle x | x \rangle} = \|x\|$

3) $Q \cdot Q^T = E \qquad \det Q \cdot Q^T = \det Q \cdot \det Q = \det (Q)^2 = \det Q = \pm 1$

4) Q OG $\lambda \in \mathbb{R}/\mathbb{C} \Rightarrow |\lambda| = 1 \qquad x$ = vlastní vektor

$Qx = \lambda x, \quad Qx \cdot Qx = \|Qx\| = \|x\| \quad x^0$

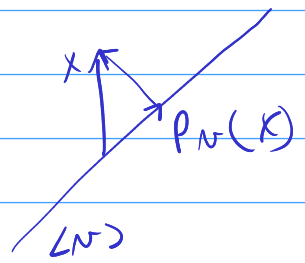
$\lambda x \cdot \lambda x = \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

$\searrow 1$

2.

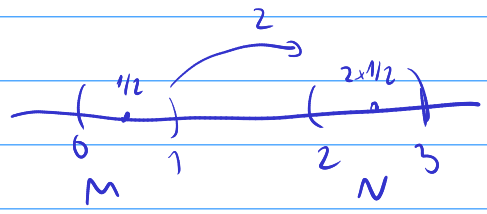
Def. $v \neq 0$, zobrazení P_v: $P_v(z) = \frac{v \cdot z}{\langle v | v \rangle} \cdot v$; $z \in \mathbb{R}$

↳ projekce z na přímku v



Def. Dvě množiny M a $N \subset \mathbb{R}^n$, vzdálenost M od N:

$$d(M,N) := \overset{\text{min}}{\inf} \{ \|x-y\| \mid x \in M, y \in N \}$$



Tvr. posunutí nemění vzdálenost ; $v \in \mathbb{R}^n$

$d(M,N) = d(v+M, v+N)$

!

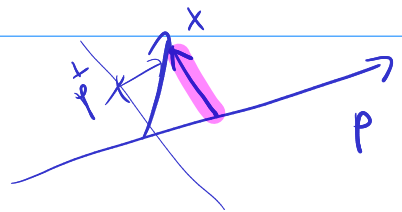
pro vektor $a \in \mathbb{R}^n$; $a+P$, $z \in \mathbb{R}^n$ $d(z, a+P) = d(z-a, P)$

Def. Je-li $P \subseteq \mathbb{R}^n$, potom $OG^-(P^\perp)$, množina všech vektorů kolmých na v. z P

$$P^\perp := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall v \in P) . (\langle x | v \rangle = 0) \}$$

Věta. vektor x $P \subset\subset \mathbb{R}^n$ ⇒ existují vektory $v \in P$, $w \in P^\perp$: $x = v + w$

$d(x,P) = \|w\| = \|x\|$



Def. Je-li SV OG báze $\langle\langle P \leftarrow \mathbb{R}^n \Rightarrow$ mějme OG projekci na podprostor P

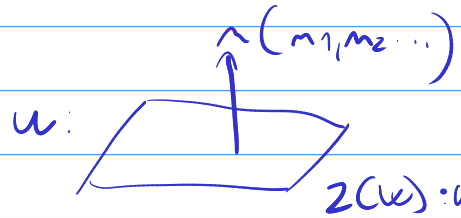
$(x_1, \dots, x_l)$

$$P_P(z) = P_{x_1}(z) + \dots + P_{x_l}(z)$$

Def. normálový vektor nadroviny n_u $\quad u$ – nadrovina

$u = a + P$

$\{n_u\}^\perp = P$; $P^\perp = \langle n_u \rangle$

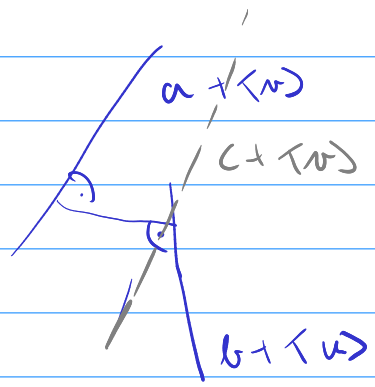


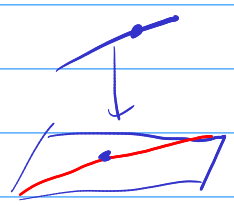
$a \cdot x = 0$

$u : a_1 x_1 + a_2 x_2 \dots a_n x_n = b$ $\quad Z(u): a_1 x_n + a_n x_n = 0$

Věta: Mějme variety $M = a + \langle x_1, \dots, x_r \rangle$ a $N = b + \langle x_1, \dots, x_l \rangle \Rightarrow$

$$d(M, N) = d(a - b, \langle x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_l \rangle)$$



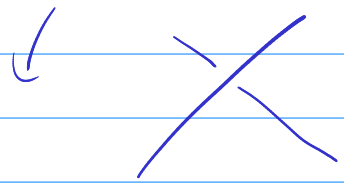


Def. Mějme variety u, U, potom jsou

$=$ $\quad Z(u) \subseteq Z(U) \vee Z(U) \subseteq Z(u)$

$\times$ nejsou $= \wedge u \cap U \neq \emptyset$

$\backslash\backslash$ nejsou $\times \wedge u \cap U = \emptyset$



Def. úhel vektorů $x, y \in \mathbb{R}^n$:

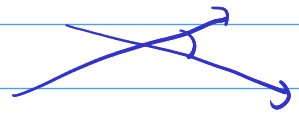
$\langle 0, \pi \rangle$

$$\arccos \frac{\langle x | y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \qquad x \perp y \quad \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

Def. Mějme dvě přímky $p = a + \langle v \rangle$, $q = b + \langle u \rangle$, nadraviny n_u, $P, Q \Rightarrow$ úhly:

1) mezi přímkami

$$\arccos \frac{|\langle u | v \rangle|}{\|u\| \cdot \|v\|}$$



2) mezi přímkou a nadrovinou

$$\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{|\langle u | n_p \rangle|}{\|u\| \cdot \|n_p\|}$$

3. nadrovinami

$$\arccos \frac{|\langle n_p | n_q \rangle|}{\|n_p\| \cdot \|n_q\|}$$

Def. Máme-li vektor $u \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$ potom zobrazení pro $x \in \mathbb{R}^n$
$T_u(x) = x + u \Rightarrow$ nazýváme translací o vektor u
(není lineární) $T_u(x) = Ax$

$(x, y) = (x, y, 1)$ $\qquad (0,0) \to (0,0,1)$

← homogenní souřadnice $\in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{pmatrix} & & \\ & X & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & \\ & X & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (x_1, \dots, x_n, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$

Pozn. Lze každý lin. zob. A na $\mathbb{R}^2$ resp. $\mathbb{R}^3$ reprezentované $A = {}^{\mathcal{E}}A^{\mathcal{E}}$ aplikovat na vektory s homogenní souřadnicí

$$\begin{pmatrix} A & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} X & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} X & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad č. 15645: V prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem jsou dány vektory $\mathbf{u} = (2, -1, -2)$, $\mathbf{v} = (1, 1, -4)$.
Určete jejich vzdálenost. Spočtěte velikosti těchto vektorů, úhel mezi nimi a nalezněte všechny vektory, které jsou kolmé na $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$. Ověřte platnost trojúhelníkové nerovnosti na součtu těchto vektorů.

velikosti vektorů

$$\|u\| = \sqrt{(2,-1,-2)\cdot(2,-1,-2)} = \sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2} = 3$$

$$\|v\| = \sqrt{1^2+1^2+(-4)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

úhel: $\arccos \frac{\langle u|v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|} = \arccos \frac{9}{3\cdot 3\sqrt{2}} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

najít vektory kolmé na u, v

$x \cdot u = 0 = (x_1, x_2, x_3)\cdot(2,-1,-2) = 2x_1 - x_2 - 2x_3$

$x \cdot v = 0 = (x_1, x_2, x_3)\cdot(1,1,4) = x_1 + x_2 + 3x_4$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right) \to S_0 = \{u, v\}^{\perp} = \langle (2,2,1) \rangle$$

trojúhelníkova nerovnost

$u + v = (3, 0, -6) \to \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

$3\sqrt{5} \leq 3 + 3\sqrt{2}$

$\sqrt{5} \leq 1 + \sqrt{2} \quad |^2 \to$ kladná čísla

$5 \leq 1 + 2\sqrt{2} + 2$

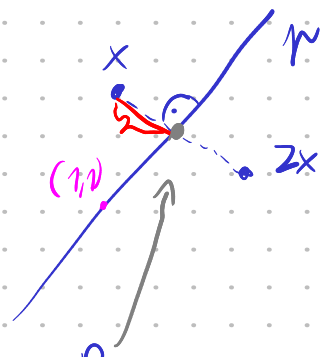
$3 \leq 2\sqrt{2}$

$2 \leq 2\sqrt{2}$

$1 \leq \sqrt{2}$ ✓

Příklad č. 15646: V prostoru $\mathbb{R}^2$ najděte zrcadlové obrazy bodů $(1,1)$ a $(0,0)$ vzhledem k „zrcadlu“ zadanému přímkou

$$p: \; 3x + 4y = 7.$$



$P_p(x)$

$n_p = (3,4)$ řešení homog. rce

$z \perp p \Rightarrow z(p)$

$3x + 4y = 0$

$(3,4) \cdot (x,y)$

$(1,1) + \alpha(3,4) \in P$

$(1+3\alpha, 1+4\alpha) \in P$

$3\cdot(1+3\alpha) + 4\cdot(1+4\alpha) = 7$

$3 + 9\alpha + 4 + 16\alpha = 7$

$25\alpha = 0$

$\alpha = 0 \rightarrow$ $(1,1)$ leží na přímce, tedy i obraz leží na přímce.

$(0,0) + \alpha\cdot(3,4) \in P$

$(3\alpha, 4\alpha) \in P$

$3\cdot(3\alpha) + 4\cdot(4\alpha) = 7$

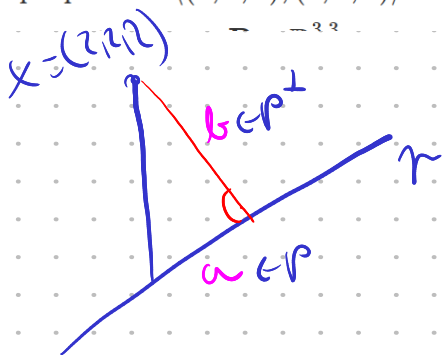
$25\alpha = 7$

$\alpha = \frac{7}{25}$

$(0,0) + \frac{7}{25}\cdot(3,4) \in P$

$(0,0) + \underbrace{2\cdot\frac{7}{25}(3,4)}_{\text{obraz } (0,0) \quad \frac{14}{25}(3,4)} \rightarrow$ obraz

Příklad č. 15647: V prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem spočítejte vzdálenost bodu $\mathbf{b} = (2,2,2)$ od podprostoru $\langle (1,0,1), (0,1,2) \rangle$. $= P$



$x = a + b$; $d(B,p) = \|b\|$

1) P má bázi $((1,0,1),(0,1,2))$

$P^\perp$ má bázi $= (-1,-2,-1)$

báze $\mathbb{R}^3 = ((1,0,1),(0,1,2),(-1,-2,-1))$

$$P^\perp = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to S_0 = \langle (-1,-2,1) \rangle$$

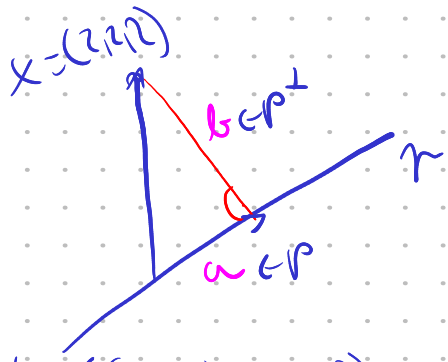
$$\underline{x} = \alpha \cdot \underbrace{(1,0,1)}_{\in P = a} + \beta \cdot (0,1,2) + \gamma \cdot \underbrace{(-1,-2,-1)}_{\in P^\perp}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \gamma = -2/3 \\ \beta = 2/3 \\ \alpha = 4/3 \end{array}$$

$$\underbrace{\|-2/3 \cdot (-1,-2,-1)\|}_{\text{hmm}} = |-2/3| \cdot \|(-1,-2,-1)\| = 2/3 \cdot \sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-1)^2} = \underline{2/3 \cdot \sqrt{6}}$$

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$$

2



P má bázi $((1,0,1),(0,1,2))$ $\quad$ báze $\mathbb{R}^3 = ((1,0,1),(0,1,2),(-1,-2,-1))$

$P^\perp$ má bázi $= (-1,-2,-1)$

$-2-4-2$

$$b = P_{(-1,-2,-1)}(2,2,2) = \frac{(-1,-2,-1)\cdot(2,2,2)}{(-1,-2,-1)\cdot(-1,-2,-1)} \cdot (-1,-2,-1) = -\frac{4}{6} \cdot (-1,-2,-1)$$

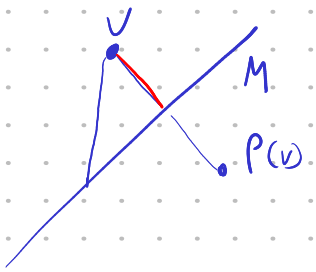
$$\|b\| = \underline{2/3 \cdot \sqrt{6}}$$

3 $\quad a = P_P(x)$, $b = x - a$

Museli jsme spočítat OG P !!!! (jinak nemáme dobrou projekci)

Příklad č. 15648: Najděte matici $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{3,3}$ takovou, že pro každé $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ je $\mathbf{P}\mathbf{v}$ rovno zrcadlovému obrazu $\mathbf{v}$ vzhledem k „zrcadlu“ danému rovnicí nadroviny

$$x + y - z = 0. = M$$



báze $M = (1\ 1\ -1 \mid 0) = \langle (1,-1,0),(1,0,1) \rangle$

báze $M^\perp = \langle (1,1,-1) \rangle$

${}^{K}P^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

${}^{\mathcal{E}}P^{\mathcal{E}} = \underline{{}^{K}P^{\mathcal{E}} \cdot {}^{\mathcal{E}}E^{K}}$ → dopočítat $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{P = E - \frac{2}{\|n\|^2} \cdot n \cdot n^T}$$

$n = (1,1,-1)$

$\|n\|^2 = 3$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2/3$

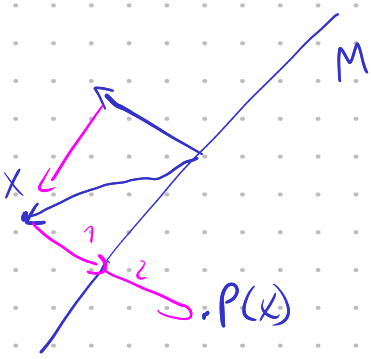
$n \cdot n^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (1\ 1\ -1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2/3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \ldots$

Příklad č. 15649: Najděte obecný předpis pro matici zrcadlení v $\mathbb{R}^n$ podle nadroviny s normálovým vektorem $\mathbf{n}$. Tedy matici $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n,n}$ takovou, že pro každé $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ je $\mathbf{Pv}$ zrcadlový obraz $\mathbf{v}$ vzhledem k nadrovině zadané rovnicí

$$\mathbf{n}^T\mathbf{x} = 0.$$

Je výsledná matice symetrická a ortogonální?



$$Px = x - 2P_n(x) \qquad x \cdot y = x^T y$$

$$= x - 2 \cdot \frac{n \cdot x}{n \cdot n} \cdot n$$

$$= x - \frac{2}{\|n\|^2} \cdot (n^T \cdot x) \cdot n$$

skalár

skalární násobek

$$= x - \frac{2}{\|n\|^2} \cdot n^T \cdot n \cdot x$$

matice násob.

$$= Ex - \frac{2}{\|n\|^2} \cdot n \cdot n^T \cdot x$$

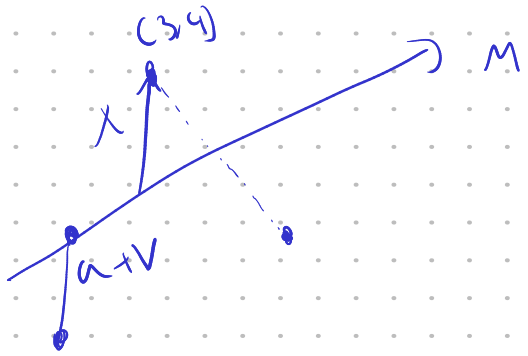
$$= \left(E - \frac{2}{\|n\|^2} \cdot n \cdot n^T\right) \cdot x \qquad \mathbb{P} = E - \frac{2}{\|n\|^2} \cdot n \cdot n^T$$

Příklad č. 15650: V prostoru $\mathbb{R}^2$ najděte matici $\mathbf{P}$ zrcadlení podle přímky dané rovnicí

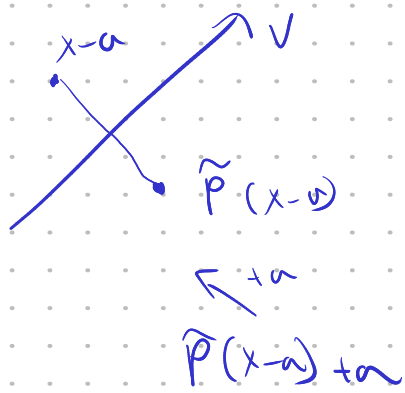
$$3x + 4y = 7. \quad = M$$

Využijte homogenní souřadnice.

Aplikujte spočtenou matici k zjištění zrcadlových obrazů vektorů $(1, 1)$ a $(0, 0)$.



udělám posunutím



← potřebujeme spojit 3 zobrazení

sym.

1) $a \in M \quad a = (1,1)$

$$T_{-a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot (3,4) = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{P} = E - \frac{2}{\|n\|^2} \cdot n \cdot n^T = \tilde{P}^{2,2}$$

vzhledem (3,4) = → 25

→ tedy chci udělat matici vzhledem k homogenním souřadnicím

$$\begin{pmatrix} \tilde{P} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 \; 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \quad 2)\; T_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3)

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{P} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 \; 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$P\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$ obvez

3

Def. Pro zvolenou vekt. normu $\|\cdot\|$ na $\mathbb{R}^n$ definujeme přidruženou / indukovanou maticovou normu $A \in \mathbb{R}^{m,n}$:

$$\|A\| := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq \theta}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

všechny možné obrazy ω vektoru

↳ význam

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq \theta}} \left\| A \cdot \frac{x}{\|x\|_n} \right\|_m = \sup_{\substack{z \in \mathbb{R}^n \\ \|z\|_n = 1}} \|Az\|_m$$

obraz normovaných vektorů

↳

Tvr. $\|E\| = 1 \rightarrow \sup \|Ez\| = \sup \|z\| = 1$

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

věta: $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ se složkami a_{ij}

1). norma $\|A\|_1$ je rovna maximu součtu ve sloupci abs. hodnot

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

operátorová norma

2) $\|A\|_\infty$ je rovna maximu součtu v řádku abs. hodnot

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

3) druhá norma $\|A\|_2$ je rovna odmocnině z největšího vlastního čísla matice $A^T \cdot A$ $(A \cdot A^T)$

- Frobeniova norma / Hilbertova – Schmidtova norma

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

Srandy $Ax = b$ $\quad \delta b = b + \text{chyba}$

$\delta x = x + \text{opočtená chyba}$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

Def. Číslo $k(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ -> číslo podmíněnosti matice A kn $\|\cdot\|$

Fakto. $A = LU$ ← upper $\quad$ L – dolní trop. matice s 1 diagonálou

U – horní trg. matice

lower

$A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ \sim & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \diagdown & \sim \\ 0 & \diagdown \end{pmatrix}$, tvrdíme brát A regulární

$Ax = b$

$L\underbrace{Ux}_{y} = b$

$Ly = b \quad \left(\begin{array}{c|c} \diagdown & 0 \\ \sim & \diagdown \end{array} \middle| b \right)$

$Ux = y \quad \left(\begin{array}{c|c} \diagdown & \sim \\ 0 & \diagdown \end{array} \middle| y \right)$

$PA = LU$

permutace řádky

$\begin{pmatrix} - & 1 & - \\ & 1 & \end{pmatrix}$ mat 1 1

Příklad č. 15651: Mějme $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ s prvky a_{ij}.

1. Definujte maticovou normu $\|\mathbf{A}\|_\infty$ přidruženou k vektorové normě $\|\mathbf{x}\|_\infty$.
2. Ukažte, že platí

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. = b$$

3. Ověřte, že $\|\mathbf{A}\|_\infty$ je skutečně normou.

1) $\|A\|_\infty = \sup\limits_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \dfrac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ PEF ins lord :)

2) $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| \rightarrow$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow 2+3=5$, $\rightarrow 1+2=3$, $\rightarrow |1+(-1)| = 2$

$M = \left\{ \dfrac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^n \wedge x \neq 0 \right\}$ $\|A\|_\infty$ sup M

1) $\le b$ 2) $b \in M$

↳ na kolik mu sedí

TBA

Příklad č. 15652: Mějme matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\in \mathbb{R}^{3/2}$

Určete $\|\mathbf{A}\|_1$, $\|\mathbf{A}\|_\infty$, $\|\mathbf{A}\|_2$, a $\|\mathbf{A}\|_F$.

součet sloupců řádky

$$\left\|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right\| = 3$$

$$\left\|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right\|_1 = 4$$

3 4

součet prvků ² v √

$$\left\|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right\|_F = \sqrt{2^2+(-1)^2+0^2+1^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{11}$$

$$\left\|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right\| \quad \sqrt{\lambda}$$

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

sym.

$$= \det(A - E\cdot\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 1 & 6-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$v_{A^TA} = (5-\lambda)\cdot(6-\lambda) - 1 = 30 - 5\lambda - 6\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 11\lambda + 29$$

$$\lambda_{1,2} \begin{cases} \frac{11+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{11-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \qquad \|A\|_2 = \sqrt{\frac{11+\sqrt{5}}{2}}$$

Příklad č. 15653: Definujte číslo podmíněnosti matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ vzhledem k maticové normě přidružené k $\|\cdot\|_1$.
Určete číslo podmíněnosti pro

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\kappa(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 = 6 \cdot \frac{5}{2} = \underline{15}$$

$$\|A\|_1 = 6$$

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left\|\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right\|_1 = 5/2$$

($Ax = b$ v b chyba 5%
v v chyba mat 5·15% = 75 :))

Příklad č. 15654: Najděte LU rozklady matic (bez pivotace)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 9 & 8 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -6 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1) "ručně" GEMING

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 9 & 8 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \to U$$

$\exists P$ regul.: $\underbrace{P}_{P} A = U$

$A = P^{-1} U$

$L = P^{-1}$

$(A|E) \sim (PA|PE)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to L$$

$\| \; L^{-1}$

2) aly

$R_3 \cdot R_2 \cdot R_1 \cdot A = U$

$$A = \underbrace{R_1^{-1} \cdot R_2^{-1} \cdot R_3^{-1}}_{L} \underbrace{R_3 \cdot R_2 \cdot R_1 \cdot A}_{U}$$

$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to R_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to R_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to R_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A = E \cdot R_1^{-1} \cdot R_2^{-1} \cdot R_3^{-1} R_3 \cdot R_2 \cdot R_1 \cdot A$

$A = E \; R^{-1} \cdot R \cdot A$

$A = E \; R^{-1} R^{-2} \cdot R^{2} \cdot R^{1} A$

$A \; E \; R^{-1} R^{-2} R^{-3} \cdot R^{3} R^{2} \cdot R^{1} \cdot A$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 9 & 8 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \underset{R_1}{\overset{M_2-2M_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \underset{R_2}{\overset{M_3-M_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \underset{R_3}{\overset{M_3+M_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = U \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = L$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ +2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \overset{M_2-2M_1}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \overset{M_3+3M_1}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \overset{M_3-2M_2}{\sim} \underset{U}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ +2 & 1 & 0 \\ -3 & +2 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad č. 15655: Najděte LU rozklad matice (bez pivotace)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

a využijte jej k výpočtu det $\mathbf{A}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \to U$$

$r_2 - 2r_1$
$r_2 - 4r_1$
$r_3 - 3r_1$

$r_3 - 3r_2$
$r_4 - 4r_2$

$r_4 - r_3$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad č. 15656: Najděte LU rozklad s částečnou pivotací matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 13 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 11 & 11 \\ 2 & 6 & 14 & 10 \end{pmatrix}$$

částečná pivotace

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 13 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 11 & 11 \\ 2 & 6 & 14 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 8 & 13 & 9 \\ 1 & 5 & 11 & 11 \\ 2 & 6 & 14 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 12 & 6 \\ 0 & 3 & 10 & 8 \\ 0 & 2 & 12 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$r_2 - 1/2 r_1$
$r_3 - 1/2 r_1$
$r_4 - r_1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$r_3 - 1/2 r_2$
$r_4 - 1/3 r_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 1/3 & & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = U$$

$z_4 - \frac{1}{2} z_3$

$$P \cdot A = L \cdot U$$

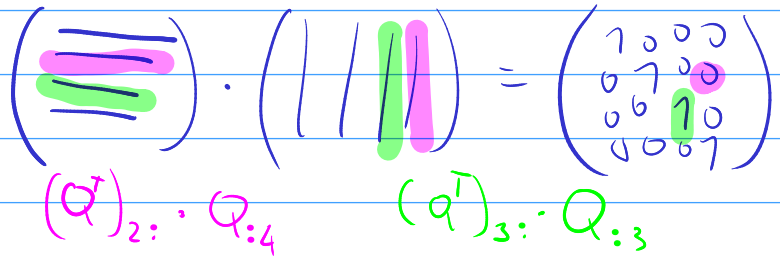
SMAD xb

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 8 & 13 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 11 & 11 \\ 2 & 6 & 14 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

4.

Def. Ortogonální matice: $A \in \mathbb{R}^{n,n} \iff A^T = A^{-1}$

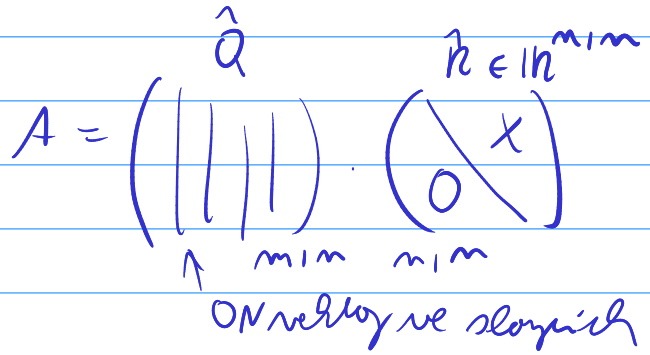
$\iff Q^T \cdot Q = E = Q \cdot Q^T$



$\iff$ Q má ve sloupcích ON bázi $\mathbb{R}^n$

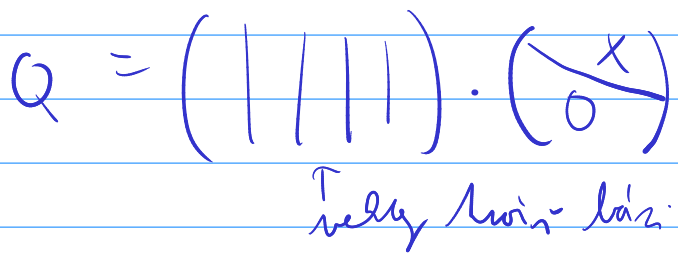
Def. RQR rozklad: $A \in \mathbb{R}^{m,n}$:

$A = \hat{Q} \cdot \hat{R}$, kde $\hat{Q}$ je matice s ON sloupci a $\hat{R}$ horní trop. matice



Def. QR rozklad: $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $Q \in \mathbb{R}^{m,m}$, $R \in \mathbb{R}^{m,n}$

$A = Q \cdot R$



věta:

$$\underset{A}{\left(a_1 \middle| a_2 \middle| \dots \middle| a_n\right)} = \underset{Q}{\left(q_1 \middle| q_2 \middle| \dots \middle| q_n\right)} \cdot \underset{R}{\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \\ & & & r_{nn} \end{pmatrix}}$$

$v \in \mathbb{R}^n$

$$z_1 = x_1 \qquad q_1 = \frac{z_1}{\|z_1\|}$$

$$z_2 = x_2 - (q_1 \cdot x_2)\, q_1 \qquad q_2 = \frac{z_2}{\|z_2\|}$$

$$z_3 = x_3 - (q_1 \cdot x_3)\, q_1 - (q_2 \cdot x_3) \cdot q_2 \qquad q_3 = \frac{z_3}{\|z_3\|}$$

$$\vdots$$

$$z_n = x_n - (q_1 \cdot x_n)\, q_1 - \dots - (q_{n-1} \cdot x_n)\, q_{n-1} \qquad q_n = \frac{z_n}{\|z_n\|}$$

Věta: Každá matice má QR rozklad (bez RQR) $(m \geq n)$

Věta: RQR je jednoznačný

$A = QR$

$Q^T \cdot A = R$

*

def Householderova triangularizace

$$F = E - 2 \cdot \frac{vv^T}{v^T v}$$

def Givensova triangularizace

$$G = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

*

$Q_1, \dots, Q_k$ byly OG

věta Q, P – OG $\rightarrow$ $Q \cdot P$ je OG

$\hookrightarrow$ $(QP)^T \cdot QP = P^T \underbrace{Q^T \cdot Q}_{E} \cdot P = P^T \cdot P = E$

$QP \cdot (QP)^T \dots\dots$ —//—

věta

je-li Q OG $\Rightarrow Q^{-1}(Q^T)$ je OG

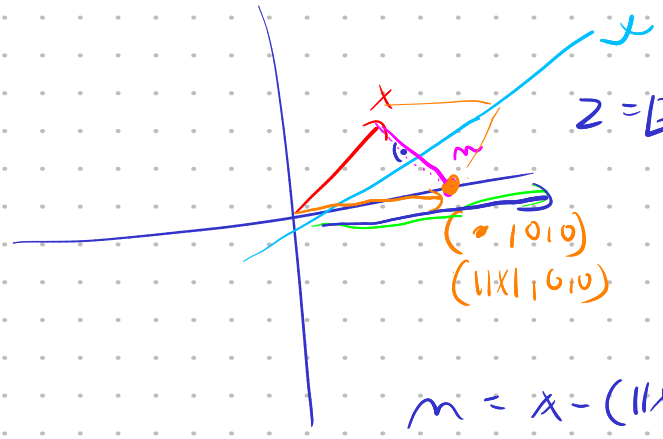
$\hookrightarrow$

$Q^T \cdot Q = E$, $(Q^T \cdot Q)^T = E^T = E \rightarrow Q^T (Q^T)^T = E$

$(Q^T)^T \cdot Q = E \rightarrow (Q^T)^{-1} \cdot (Q^T)^T = OG$

HHT

$$A \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$



$$Z = E - 2\frac{1}{\|m\|^2} m \cdot m^T$$

$$m = x - (\|x\|,0,0)$$
$$= (2,1,-1) - (\sqrt{6},0,0)$$

Q OG

$$\|Qx\| = \|x\|$$

$$Qx \cdot Qy = x \cdot y$$

$$ZA = \left(Z\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, Z\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & \bullet \\ 0 & \bullet \\ 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|v\| \\ 0 \end{pmatrix}$$

Příklad č. 15657: Pomocí Gramova-Schmidtova algoritmu určete redukovaný a úplný QR rozklad následujících matic z $\mathbb{R}^{3,2}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ "udělat GS" na sloupce

$(1,0,1) \to \|(1,0,1)\| = \sqrt{2}$ $\quad y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1,0,1)$

$(0,1,0) \to \|(0,1,0)\| = 1$ $\quad y_2 = (0,1,0)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}}_{\hat{Q}\ 3\ 2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{2\ 2\ \hat{R}} \longrightarrow \text{RQR}$$

$$x \perp \left\langle \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right), (0,1,0) \right\rangle = \langle (1,0,1), (0,1,0) \rangle^{\perp}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = J_0 = \langle (-1,0,1) \rangle \xrightarrow{\text{normalizovat}}$$

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

OB báze $\qquad$ ON báze

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{Q\ 3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{R\ 2} \qquad 1/\sqrt{2} \cdot (2) = \sqrt{2}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\|(1,0,1)\| = \sqrt{2} \to q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1,0,1) \qquad \frac{z}{\|z\|}$

$\|(2,1,0)\| = (2,1,0) - (q_1 \cdot (2,1,0))\, q_1$

$= (2,1,0) - \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (1,0,1)\right) = (1,1,-1) \to$

$q_2 = 1/\sqrt{3} \cdot (1,1,-1)$

$$B = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}}_{\hat{Q}\ 3\ 2\ (q_1\ q_2)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}}_{\hat{R}\ 2\ 2} \qquad \text{RQR}$$

$$x \perp \langle (1,0,1), (1,1,-1) \rangle^{\perp}$$

QR

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to J_0 = \langle (-1,2,1) \rangle \to x = (-1,2,1) \text{ normalizovat}$$

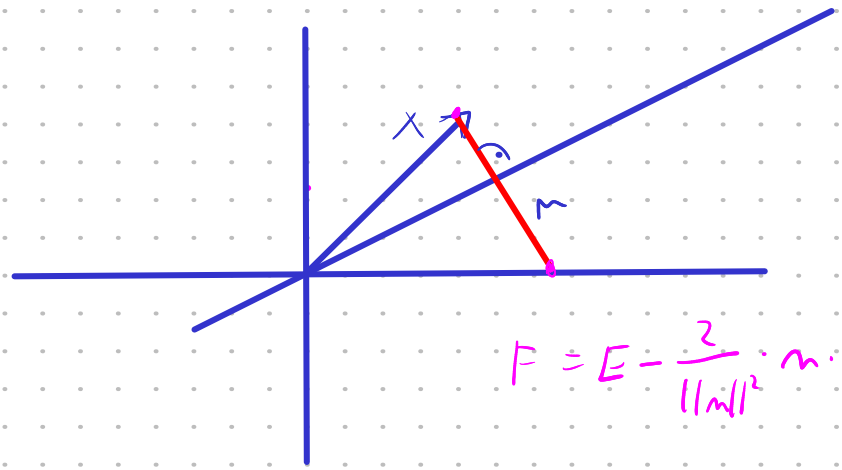
$\|x\| = \sqrt{6} \to \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (-1, 2, 1)$

$$B = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}}_{Q} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{R}$$

$3 \times 2 \qquad 3 \times 3 \qquad 3 \times 2$

ON báze

Příklad č. 15658: Najděte vlastní čísla a vlastní vektory Householderova reflektoru podle nadroviny-podprostoru s normálovým vektorem **v**.
Rozmyslete si také jejich geometrický význam.



$F = E - \frac{2}{\|n\|^2} \cdot n \cdot n^T$

$\mathbb{R}^k$

$Fn = -n$; n je vlastní vektor k $\lambda = -1$

$U = n^\perp$; $\dim U = k-1$; $F(U) = U$

$(x_1, \dots, x_{k-1})$ báze $U \Rightarrow x_1, \dots, x_k$ $\quad Fx_i = x_i$

$x_1, \dots, x_{k-1}$ jsou vlastní vekt. k $\lambda = 1$

$\nu_g(-1) \geq 1$, $\underline{= 1}$ $\quad \nu_g(1) \geq k-1$, $= k-1$ $\quad k \leq \nu_g(1) + \nu_g(-1) \leq k$

$F = E - \frac{2}{\|n\|} \cdot n \cdot n^T$; F je sym, OG $\to \lambda \in \sigma(F)$ $|\lambda| = 1$

$\Downarrow$ $\qquad \Downarrow$

$\sigma(F) \subseteq \mathbb{R}$ (reálné) $\qquad \sigma(F) = \{\pm 1\}$

$Fn = -n$

$Fn = \left(E - \frac{2}{\|n\|^2} n \cdot n^T\right) \cdot n$

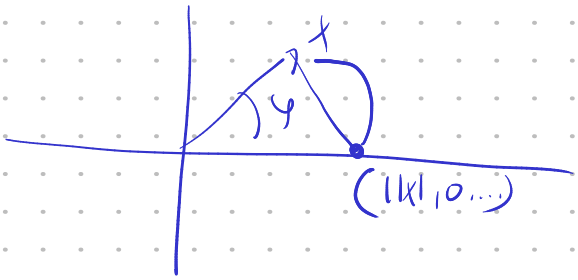
$= n - \frac{2}{\|n\|^2}$

TBA

Příklad č. 15659: Pomocí Givensovy rotace spočítejte QR rozklad matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$A = QR$



$G = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow GA = R$

$\nearrow$ ze OG

$A \cdot R^{-1}$

$Q^{-1} = Q^T$

$G = Q^{-1}$

$$\varphi \Rightarrow \arccos \frac{(1,1)\cdot(1,0)}{\|(1,1)\| \cdot \|(1,0)\|} = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ$$

$$G \cdot A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 6/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = R$$

$A = QR$

1:10:00