LA2 Ukázkový zápočtový test

Příklad č. 15831: Definujte ortogonální a ortonormální soubor.
Ukažte, že je-li soubor $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ ortonormální, potom je lineárně nezávislý.

Def - Ortogonální soubor, když máme soubor vektorů $x = (x_1, \dots, x_k)$, který je z prehilbertova prostoru $x \in \mathcal{H}$. Tento soubor nazveme ortogonální $\iff$ každý vektor ze souboru je kolmý na ostatní vektory.
- Má-li zároveň každý vektor ze souboru normu rovnou 1., nazýváme tento soubor ortonormální.

Dk. $a = (x, y, z)$ je ON $\Rightarrow$ LN.

↳ Máme OG SV $x = (x_1 \dots x_k)$. Tedy máme LK dávající θ.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \theta \quad = "$$

$j \in \hat{n} \quad \hat{n} \in \mathbb{N}$

Tedy máme $\theta = \langle x_j | \theta \rangle = \langle x_j \mid \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \rangle =$ díky lin./homogenitě $\langle x_j | x_j \rangle$

$|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i| \cdot \underbrace{\langle x_j | x_i \rangle}_{0 \text{ pro } j \neq i} = x_j \neq \theta \rightarrow$ tedy $\alpha_j \cdot \|x_j\|^2 = 0$

tedy i jeho norma $\neq \theta$

tedy α_j musí být 0 pro všechna $j \in \hat{n}$

Tedy soubor je LN.

Příklad č. 15832: Definujte úhel mezi vektory. Určete úhel mezi vektory $(2,1,1)$ a $(2,-1,1)$ (netřeba vyčíslovat).
Jak lze spočítat úhel mezi dvěma nadrovinami v $\mathbb{R}^n$?

Def. Mějme dva vektory $x, y \in \mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$. Úhel definujeme vztahem.

$$\varphi = \arccos \frac{\langle x|y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}$$

$$\frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$x = (2,1,1)$, $y = (2,-1,1)$

úhel mezi x a y $= \arccos \frac{\langle (2,1,1)|(2,-1,1)\rangle}{\|(2,1,1)\|\cdot\|(2,-1,1)\|} = \arccos \frac{4}{\sqrt{12}} = \underline{\arccos \frac{2\sqrt{3}}{3}}$

Úhel mezi dvěma nadrovinami? P, Q

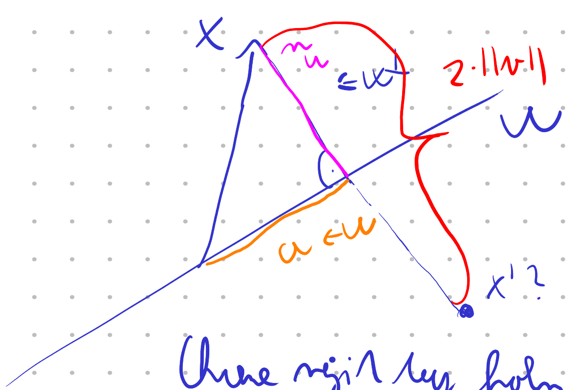
$$\varphi = \arccos \frac{|\langle n_P|n_Q\rangle|}{\|n_P\|\cdot\|n_Q\|}$$

$n_P, n_Q \to$ normálové vektory rovin.

Příklad č. 15834: Spočítejte vzdálenost vektoru $\overset{=x}{(1,2,3,4)}$ od nadroviny

$$W = \langle (0,1,2,1), (1,0,-1,1), (1,0,1,1)\rangle, .$$

Najděte také zrcadlový obraz tohoto bodu vůči „zrcadlu“ W.



$\|n_W\| \to$ vzdálenost bodu od nadroviny

báze $W = ((0,1,2,1),(1,0,-1,1),(1,0,1,1))$

Chceme najít kolmý vektor na W.
najdu $W^\perp$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \to S_0 = \langle(-1,-1,0,1)\rangle$$

Uděláme projekci tohoto bodu vůči tomu n_W

$$P_{(-1,-1,0,1)}(1,2,3,4) = \frac{\langle(-1,-1,0,1)|(1,2,3,4)\rangle}{\|(-1,-1,0,1)\|^2}\cdot(-1,-1,0,1) = \frac{1}{3}\cdot(-1,-1,0,1)$$

$$\left\| \frac{1}{3} \cdot (-1,-1,0,1) \right\| = \left|\frac{1}{3}\right| \, \|(-1,-1,0,1)\| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

[illegible]

Obraz x vůči u ..

$$\frac{\langle (-1,-1,0,1) \mid (1,2,3,4) \rangle}{\|(-1,-1,0,1)\|^2} \cdot (-1,-1,0,1)$$

$$= (1,2,3,4) - 2 \cdot P_{(-1,-1,0,1)}(1,2,3,4)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (-1,-1,0,1)$$

$$= (1,2,3,4) - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-1,-1,0,1) = \underline{\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, 0, \frac{10}{3}\right)}$$

Příklad č. 15835: Pokud existuje, spočítejte LU rozklad matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pokud nexistuje, proveďte pivotaci, abyste zaručili jeho existenci. Spočítejte indukovanou maticovou normu $\|\mathbf{A}\|_1$.

$PA = L \cdot U$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{r_3 - 3r_1}{\overset{r_2 + 2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} P \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

max součtu sloupců v abs.

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\|A\|_1 = \underline{8}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$6 \quad \underline{8} \quad 5$

Příklad č. 15833: Spočítejte redukovaný a úplný QR rozklad matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$3 \quad 2$

$\underset{3,2}{A} = \underset{3\,2}{\hat{Q}} \cdot \underset{2\,2}{\hat{R}}$

$q_1 \Rightarrow \|(1,-2,-2)\| = 3 \to q_1 = \frac{1}{3} \cdot (1,-2,-2)$

$q_2 = (2,2,2) - (q_1 \cdot (2,2,2))\, q_1 = (2,2,2) + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (1,-2,-2)$

$= \frac{1}{3} \cdot (8,2,2)$

$\langle \frac{1}{3} \cdot (1,-2,-2) \mid (2,2,2) \rangle = \frac{1}{3} \cdot (-6) = -2$

$\|\frac{1}{3} \cdot (8,2,2)\| = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{72} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot (8,2,2)$

$2 \cdot 4 \cdot 8 \quad 3^2 \cdot 2^3$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \underset{\hat{Q}}{\begin{pmatrix} 1/3 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -2/3 & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -2/3 & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}} \cdot \underset{\hat{R}}{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}}$

$\frac{1}{3} \cdot x + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 2\sqrt{2} = 2 \quad | \cdot 3$

$x = -2$

$\frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{18} = \frac{\sqrt{2}}{6}$

$\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}\right)$

$\frac{16}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{6}$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/3 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -2/3 & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -1/\sqrt{2} \\ -2/3 & \frac{1}{3\sqrt{2}} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{Q} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{R}$$

Chceme teraz nájsť ON vektor

$$x \perp \langle (1,-2,-2), (4,1,1) \rangle$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -9 & -9 & 0 \end{array}\right) \quad S_0 = \langle (0,-1,1) \rangle$$

norm.

$x = (0,-1,1)$

→ potrebujeme ho normalizovať. $1/\sqrt{2} \cdot (0,-1,1)$

$\|x\| = \sqrt{2} \rightarrow$