Příklad 1. (4b) Určete, zda je posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zadaná předpisem

$$a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

rostoucí, ostře rostoucí, klesající, ostře klesající, monotónní nebo ryze monotónní. Svá tvrzení dokažte.

n	1	2	3
a_n	0	$3/5$	$\frac{8}{10}$

→ odhaduji: že by mohla být ostře >

$a_n \; ? \; a_{n+1}$;

$$\frac{n^2-1}{n^2+1} < \frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2+1}$$

$$(n^2-1)\cdot(\underbrace{(n+1)^2+1}_{n^2+2n+2}) < (\underbrace{(n+1)^2-1}_{n^2+2n})\cdot(n^2+1)$$

$$\cancel{n^4}+\cancel{2n^3}+2n^2-n^2-2n-2 < \cancel{n^4}+n^2+\cancel{2n^3}+2n$$

$$\cancel{n^2}-2n-2 < \cancel{n^2}+2n$$

$-\frac{1}{2} < n$ → platí pro $n \in \mathbb{N}$;

↳ tedy posloupnost je ostře rostoucí ⇒ tedy je ryze monotónní.

Příklad 2. (4b) Mějme dvě posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ zadané předpisy

$$a_n = 2^n + n^2, \quad b_n = 2^n + (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$a_n = \mathcal{O}(b_n)$

Rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé

a) $a_n = o(b_n)$ ✗, b) $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ ✓, c) $b_n = o(a_n)$ ✗, d) $b_n = \mathcal{O}(a_n)$ ✓ pro $n \to \infty$.

Svá tvrzení vysvětlete.

Využiji zde větu o vztahu limit s asym. mezemi: ($\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ $\begin{cases} f(x) = \mathcal{O}(g(x)) & \mathbb{R} \\ f(x) = o(g(x)) & 0 \end{cases}$)

↳ Díky Heineho větě můžu v této větě mít posloupnosti.

a) $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \left|\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+n^2}{2^n+(-1)^n}\right| = \left|\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n}\cdot\frac{1+\frac{n^2}{2^n}}{1+\frac{(-1)^n}{2^n}}\right| = \left|\frac{1+0}{1+0}\right| = 1$$

$\frac{+\infty}{+\infty}$ → neurčitý výraz

$\frac{n^2}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ věta o lim + l.

$\frac{(-1)^n}{2^n}$ ↳ $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Vedle si spočítám

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}$ zde použiji podílovým kritériem =

$q<1 \to \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$q>1 \to \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

$$q := \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\,\cancel{2^n}}{\cancel{2^{n+1}}\cdot n^2} = \frac{\lim_{n\to\infty} n^2+2n+1}{2\cdot n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}\cdot\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{2} =$$

věta o lim + l

$1\cdot\frac{1+0+0}{2}=\frac{1}{2}$; když $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}=0$

Příklad 3. (4b) Vypočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\sqrt[n]{n}}-e}{\sqrt[n]{n}-1}.$$

Svá tvrzení dokažte.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{\sqrt[n]{n}}-e}{\sqrt[n]{n}-1}=$ subs $\sqrt[n]{n}=t$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

[illegible]? [illegible].

$\frac{+\infty}{+0}$ → neurčitý výraz

známá limita (credits to: leo)

$\lim\limits_{n\to1}\frac{e^{t}-e}{t-1}=\lim\limits_{n\to1}\frac{e^{t-1+1}-e}{t-1}=$

$=\lim\limits_{n\to1}\frac{e\cdot(e^{t-1}-1)}{t-1}=e\cdot1=\underline{\underline{e}}$

$\lim\limits_{n\to1}t-1=0$

věta o lim $+\cdot/$

Příklad 5. (4b) Vypočtěte limitu funkce

$$\lim_{x\to1}x^{\frac{2}{x-1}}.$$

Své kroky vysvětlete.

$\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{2}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1}e^{\frac{2}{x-1}\cdot\ln x}$; $a^b=e^{b\cdot\ln a}$; $\lim\limits_{x\to1}e^2=\underline{\underline{e^2}}$

$1^{\frac{2}{0}}$ = neurčitý výraz

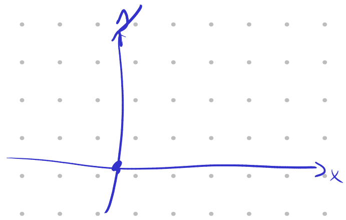
díky tomu, že e^x je rostoucí fce a je spojitá, tak nás zajímá chování v exponentu.

$\lim\limits_{x\to1}\frac{2}{x-1}\cdot\ln x=\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}\cdot2=\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(1+(x-1))}{x-1}\cdot2=1\cdot2=\underline{2}$

věta o lim $+\cdot/$ a známé limity

Příklad 4. (4b) Najděte všechny hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x}, & x > 0, \\ 1 + \frac{a}{x+2}, & x \leq 0. \end{cases}$$



byla spojitá na celém svém definičním oboru.

fce je spojitá $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin(ax)}{x} = \lim_{x \to 0-} 1 + \frac{a}{x+2}$$

a její jednostranné lim se rovnají

chceme $\frac{\sin x \cdot a}{x \cdot a}$

nemá lim + 1 $\quad 1 + \frac{a}{2}$

$$\lim_{x \to 0-} 1 + \frac{a}{x+2} = \lim_{x \to 0+} \frac{\sin(xa)}{x}$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin(xa)}{x} \cdot \frac{a}{a} = 1 \cdot \frac{a}{1} = a$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{1 + \frac{a}{2} = a}$$

$$\Downarrow$$

$$a = 2$$