Příklad 1. (4b) Vypočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n! - 2^n}{2^n + n!},$$

nebo rozhodněte o její neexistenci.

Vydělíme, člen jde výraz $\frac{2^n}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!-2^n}{2^n+n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n!} \cdot \frac{1-\overbrace{\frac{2^n}{n!}}^{\xrightarrow{n\to\infty} 0}}{\underbrace{\frac{2^n}{n!}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0}+1} = \frac{1-0}{0+1} = \underline{1}$$

věta o limitě podílu, součtu

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!} \to \text{použiju podílové kritérium. } q := \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} q<1 & 0 \\ q>1 & +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^n}\cdot 2}{(n+1)\cdot \cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} =$$

věta o limitě podílu, součtu

$$= \frac{2}{+\infty+1} = \underline{0} \Rightarrow q = 0 < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$$

Příklad 2. (4b) Vypočtěte limitu funkce

$$\lim_{x\to 0-} \left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$\lim_{x\to 0^-} \left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^-} e^{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^-} e^{-\infty} = \underline{\underline{0}}$$

$\frac{1}{e^\infty}$

že spojitá hladká fce, tedy nás zajímá exponent

$$\lim_{x\to 0^-} \ln\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x^2} \cdot \frac{\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2x} = 1\cdot\frac{1}{0^-} = \underline{-\infty}$$

$x^2 \cdot a = \frac{x}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2x}$

věta o složené fci

vnější fce $\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x\to 0} 1$

vnitřní $\frac{x}{2} \xrightarrow{x\to 0^-} 0$

$x \neq 0$

známá limita

Příklad 3. (4b) Vypočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^{-n}+3^{-n}}{\frac{1}{4^n}-2^{-n}},$$

nebo rozhodněte o její neexistenci.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-2)^{-n}+3^{-n}}{\underbrace{4^{-n}}_{2^{-2n}}-2^{-n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-2)^{-n}}{2^{-n}} \cdot \frac{1+\frac{3^{-n}}{-2^{-n}}}{2^{-n}-1} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \frac{1+\left(-\frac{3}{3}\right)^{n}}{2^{-n}-1}$$

$n\to\infty$: $\left(-\frac{3}{3}\right)^{n} \to 0$, $1 + \ldots \to 1$, $2^{-n} \to 0$

← limita nebude existovat

pro n sudé $(-1)^n$ bude $\underline{1}$

ale pro n liché bude $(-1)^n$ $\underline{-1}$ → tedy máme dvě vybrané posloupnosti, které mají různé limity.

Příklad 4. (4b) Určete hodnotu reálného parametru a tak, aby funkce

$$f(x) = \frac{e^{2x}+\sin(ax)-1}{\sin(x)}$$

měla v bodě 0 limitu rovnou 4.

$a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}+\sin(ax)-1}{\sin(x)} = 4 \quad | \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}+\sin(ax)-1}{\sin(x)} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^{2x}+\sin(x)-1}{x}}{\frac{\sin x}{x}} =$$

$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x\to 0} 1$ ↑ známá limita

$$= \frac{2+a}{1} = 2+a \Rightarrow 2+a=4 \Rightarrow \underline{\underline{a=2}}$$

rozpíšu si, řešíme pouze čitatel

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}+\sin(ax)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} \cdot \frac{2}{2} + \frac{\sin(ax)}{x} \cdot \frac{a}{a} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{2x} \cdot 2 + \frac{\sin(ax)}{ax} \cdot a$$ věta o lim. součin. součin $= 1\cdot 2 + 1\cdot a = 2+a$

věta o složených fcí

$f(x) = \frac{e^{x}-1}{x} \xrightarrow{x\to 0} 1$ ← známá limita

$g(x) = 2x \xrightarrow{x\to 0} 0$

$f(x) = \frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x\to 0} 1$ ← známá limita

$g(x) = ax \xrightarrow{x\to 0} 0$

Příklad 5. (4b) Určete definiční obor funkce

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+3x+2}\operatorname{sgn}(x-1).$$

V kterých bodech definičního oboru je spojitá? V kterých bodech mimo její definiční obor ji lze spojitě dodefinovat a jakou hodnotou?

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+3x+2} \cdot \operatorname{sgn}(x-1) = \frac{\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}\cdot(x+1)} \cdot \operatorname{sgn}(x-1)$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$$

$$\operatorname{sgn}(x-1) = \begin{cases} x>1 & \frac{1}{x+1} \\ x=1 & 0 \\ x<1 & -\frac{1}{x+1} \end{cases} \rightarrow \text{v } 1 \text{ není spojitá}$$

$$\lim_{x\to -1^+} -\frac{1}{x+1} = -\frac{1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} -\frac{1}{x+1} = -\frac{1}{0^-} = +\infty$$

$\Rightarrow$ v -1 fci nelze dodefinovat

$$\lim_{x\to -2^+} -\frac{1}{x+1} = -\frac{1}{-1} = 1$$

$$\lim_{x\to -2^-} -\frac{1}{x+1} = -\frac{1}{-1} = 1$$

$\rightarrow$ v -2 fci lze dodefinovat hodnotou 2.

…vypracujte na přiložené papíry. Součástí správného …stupu, tj. popis toho, jak jste se k svému výsledku dostali a co …

Příklad 1. (4b) Určete hodnotu reálného kladného parametru a tak, aby funkce

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & |x| \geq a, \\ e^{-2x^2/a^2}, & |x| < a, \end{cases}$$

…la spojitá na celém svém definičním oboru.

…klad 2. (4b) Vypočtěte limitu fu…

$$f(x) = \begin{cases} x^{-2} & |x| \geq a \\ e^{-2x^2/a^2} & |x| < a \end{cases}$$

$x > 0$

$$\begin{cases} x^{-2} & +x \geq a \\ e^{-2x^2/a^2} & +x < a \end{cases}$$

$x < 0$

$$\begin{cases} x^{-2} & -x \geq a \\ e^{-2x^2/a^2} & -x < a \end{cases}$$

$$\lim_{x \to a^-} x^{-2} = a^{-2}$$

$$\lim_{x \to a^+} e^{-2x^2/a^2} = e^{-2a^2/a^2} = e^{-2}$$

tedy ať $\underline{a = e}$

…svém definičním oboru.

(4b) Vypočtěte limitu funkce nebo rozhodněte o její neexistenci

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \cos(x^2) \right).$$

b) Vypočtěte limitu posloupnosti …

$x \to 0$ $\qquad$ $x \to +\infty$ není limita

$$\lim_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \cos(x^2) = 0$$

ale můžeme ho sevřít

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

$$\Downarrow$$

$$-1 \leq \cos(x^2) \leq 1$$

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot (-1) \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cos(x^2) \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot 1$$

$\downarrow x \to \infty$ $\qquad$ $\downarrow x \to \infty$

$0 \cdot (-1) = 0$ $\qquad$ $0 = 0 \cdot 1$

tedy by jsme sevřeli 0

...nosti nebo rozhodněte o její ne...

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{-2n}}{(n+1)^{-2n}}.$$

...nosti: ...

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{-2n}}{(n+1)^{-2n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-2n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{-2n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2} = \underline{\underline{e^2}}$$

↓

Heine $f(x) = x^2 \xrightarrow{x\to e} e^2$

$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e$

$x_n \in D_f = \mathbb{R}$

...jme dvě posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ zadané předpisy

$$a_n = 2^{2n}, \quad b_n = ne^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Rozhodněte, zda-li platí vztah $a_n = \mathcal{O}(b_n)$, $b_n = \mathcal{O}(a_n)$, nebo ani jeden z uvedených.

Příklad 5. (4b) V kterých bodech mimo definiční obor lze funk...

$a_n = 2^{2n}$ $\qquad$ $a_n = \mathcal{O}(b_n)$, $b_n = \mathcal{O}(a_n)$

$b_n = n \cdot e^n$

$n \in \mathbb{N}$

↓

využijeme větu o vztahu asymp. mezí s lim/posloupnosti

↓

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \begin{cases} \in \mathbb{R} & a_n = \mathcal{O}(b_n) \\ = 0 & a_n = o(b_n) \end{cases}$$

→ ale můžeme dát pryč, protože obě posl. jsou kladné

$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{n \cdot e^n}$ → použijeme podílové kritérium; $q := \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} <1 & \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \\ >1 & \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \end{cases}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{2(n+1)}}{(n+1)\cdot e^{n+1}}}{\frac{2^{2n}}{n\cdot e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\cancel{2n}+2}}{(n+1)\cdot \cancel{e^{n+1}}_{e}} \cdot \frac{n \cdot \cancel{e^n}}{\cancel{2^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{n \cdot e + e} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} \frac{4}{e + \frac{e}{n}} =$$

$$= \frac{4}{e+\infty} = 0$$

; tedy $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{n \cdot e^n} = 0$; tedy $\underline{a_n = o(b_n) \wedge a_n = \mathcal{O}(b_n)}$

...ete, zda-li platí vztah $a_n = \mathcal{O}(b_n)$, $b_n = \mathcal{O}(a_n)$, nebo ani jeden ... $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ zadané př...

$$a_n = 2^{2n}, \quad b_n = ne^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Příklad 5. (4b) V kterých bodech mimo definiční obor lze funkci

$$f(x) = \frac{\sin(2x-2)}{\ln(x)}$$

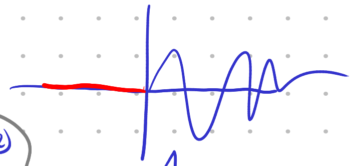
spojitě dodefinovat? Při výpočtu limit zde není ...

$$f(x) = \frac{\sin(2x-2)}{\ln(x)}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(2x-2)}{\ln(x)} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

$$D_f = (0,1) \cup (1,\infty)$$

pro $x \le 0 \to \cancel{\nexists = 0}$



$$\lim_{x\to 1^\pm} \frac{\sin(2x-2)}{\ln(x)} \; \left(\downarrow \tfrac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1^\pm} \frac{\sin(2x-2)}{\ln(1+(x-1))} \cdot \frac{\frac{1}{2x-2}}{\frac{1}{2x-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sin(2x-2)}{2x-2}}{\frac{\ln(1+(x-1))}{2x-2}} = \frac{1}{1\cdot\frac{1}{2}} = \underline{\underline{2}} \; *$$

$$\lim_{x\to 1^\pm} \frac{\ln(1+(x-1))}{2x-2} = \lim_{x\to 1^\pm} \frac{\ln(1+(x-1))}{x-1} \cdot \frac{1}{2}$$

věta o složené lim.

$$h(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{0^\pm} 1$$

$$g(x) = x-1 \xrightarrow{x\to 1^\pm} 0^\pm$$

věta o složené lim.

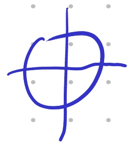
$$f(x) = \frac{\sin t}{x} \xrightarrow[x\to 1^\pm]{x\to 0} 1$$

$$g(x) = 2x-2 \to 0$$

* tedy v 1 lze dodefinovat hodnotou 2

Příklad 1. (4b) Vypočtěte limitu funkce

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (2x-\pi)\,\mathrm{tg}(x).$$



$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (2x-\pi)\cdot \mathrm{tg}(\pi) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(2x-\pi)}{\frac{1}{\mathrm{tg}(x)}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(2x-\pi)}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(2x-\pi)\cdot\sin x}{\cos x} \overset{l'H}{=}$$

↓ není def.

$0\cdot \mathrm{tg}(\frac{\pi}{2})$

↓ $\frac{0\cdot 1}{0}$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\cdot\sin x + (2x-\pi)\cdot\cos x}{-\sin x} = \frac{2\cdot 1 + 0\cdot 0}{-1} = -2$$

Příklad 2. (4b) Nalezněte všechny lokální extrémy funkce

$$f(x) = 8x^3 + 3x^4$$

$f(x) = 8x^3 + 3x^4$; $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 24x^2 + 12x^3 = 12x^2\cdot(2+x)$; $D_{f'} = \mathbb{R}$

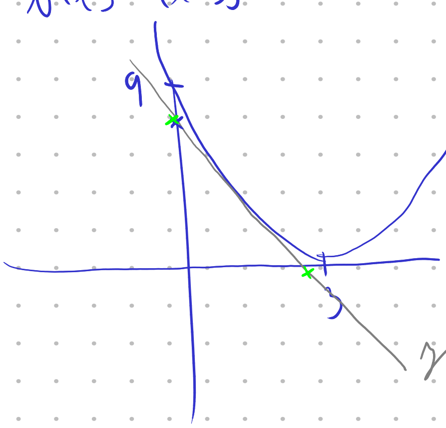
ptáme se, kdy $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = -2$

$x \in$	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,\infty)$
$\mathrm{sgn}(f'(x))$	$-$	$+$	$+$

; tedy $f(x)$ je celá rostoucí na $\langle 2,+\infty)$ a celá klesající na $(-\infty,-2)$ s tím lokálním a i globálním minimem v -2 o $f(-2) = -16$

Příklad 3. (4b) Uvažme trojúhelník, jehož strany jsou tvořeny osou x, osou y a tečnou grafu paraboly $f(x) = (x-3)^2$ v bodě $a \in (0,3)$. Pro jaké a dostaneme trojúhelník s maximálním možným obsahem?

$f(x) = (x-3)^2$



tečna ke grafu

$y = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$

$S_\Delta = \frac{a\cdot v_a}{2} =$

$x = 0$

$y = f(a) + f'(a)\cdot(0-a)$

$y = (a-3)^2 + 2\cdot(a-3)\cdot(-a)$

$y = a^2 - 6a + 9 - 2a^2 + 6a$

$y = -a^2 + 9$

$y = -(a^2-9)$

$y = 0$

$0 = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$

$0 = (a-3)^2 + 2(a-3)\cdot(x-a)$

$0 = a^2 - 6a + 9 + 2xa - 2a^2 - 6x + 6a$

$0 = -a^2 + 2xa - 6x + 9$

$a^2 - 9 = x\cdot(2a-6)$

$x = \frac{\cancel{(a-3)}\cdot(a+3)}{2\cdot\cancel{(a-3)}}$

$x = \frac{a+3}{2}$

$f(a) = (a-3)^2$

$f'(a) = 2(a-3)^1\cdot 1$

$S_\Delta = \frac{x\cdot y}{2}$

$$S_1 = \frac{\frac{a+3}{2}\cdot(-1)(a^2-9)}{2} = \frac{(a+3)\cdot(a^2-9)}{-4}$$

chceme najít maximum S

$S_1(a)' = -\left(\frac{1}{4}\cdot(a+3)\cdot(a^2-9)\right)' = -\frac{1}{4}\cdot\left(a^2-9+(a+3)\cdot 2a\right) = -\frac{1}{4}\cdot(a^2-9+2a^2+6a) = -\frac{1}{4}(3a^2+6a-9) =$

$= -\frac{3}{4}\cdot(a^2+2a-3)$

$S_1(a)' = 0 \Rightarrow a^2+2a-3=0$

$(a+3)\cdot(a-1)=0 \Rightarrow a=-3 \vee a=1 \Rightarrow$ ale chceme jen $a \in (0,3)$

$a \in$	$(0,1)$	$(1,3)$
f	$+$	$-$

tedy ostré lokální maximum je pro $a=1$, tedy i max. obsah

Příklad 4. (8b) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = (1-x)e^{-x}.$$

Tj. určete definiční obor, intervaly monotonie, konvexity/konkavity, nalezněte lokální extrémy a případné asymptoty. Na základě těchto informací načrtněte graf funkce f.

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = ((1-x)\cdot e^{-x})' = -1\cdot e^{-x} + (1-x)\cdot e^{-x}\cdot(-1) = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = -2e^{-x} + x\cdot e^{-x} =$

$= e^{-x}\cdot(-2+x)$

$f''(x) = (e^{-x}\cdot(-2+x))' = (-e^{-x}\cdot(-2+x) + e^{-x}\cdot 1) = 2e^{-x} - xe^{-x} + e^{-x} = 3e^{-x} - xe^{-x} =$

$= e^{-x}\cdot(3-x)$

$x \in$	$(-\infty,2)$	$(2,\infty)$
$\operatorname{sgn}(f'(x))$	$-$	$+$

$f(x)$ je ostře klesající na $(-\infty,2\rangle$ a ostře rostoucí na $\langle 2,\infty)$ s ostrým globálním minimem v 2: $f(2) = -e^{-2}$

	$(-\infty,3)$	$(3,\infty)$
$\operatorname{sgn}(f''(x))$	$+$	$-$

$f(x)$ je ostře konvexní na $(-\infty,3\rangle$ a ostře konkávní na $\langle 3,\infty)$.

$\frac{1}{e^{+\infty}}$ $\frac{1}{e^{-\infty}} \to e^{\infty}$

asymptoty:

není přímková asymptota.

asymptota v $\pm\infty$

$-2e^{-x}+xe^{-x}$

$-e^{-x}-e^{-x}+x\cdot e^{-x}$

$k_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(1-x)e^{-x}}{x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\pm\infty} -1\cdot e^{-x} + (1-x)\cdot(-1)\cdot e^{-x}$

$1+\infty$

$\frac{-\infty\cdot 0}{+\infty}$

$= \lim_{x\to\pm\infty} e^{-x}(-2+x).$

$x \to \dfrac{-2+x}{e^x} \overset{l'H}{=} \dfrac{1}{e^x} \quad \xrightarrow{x \to +\infty} 0, \quad \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$

| teda v $-\infty$ nemá asymptotu

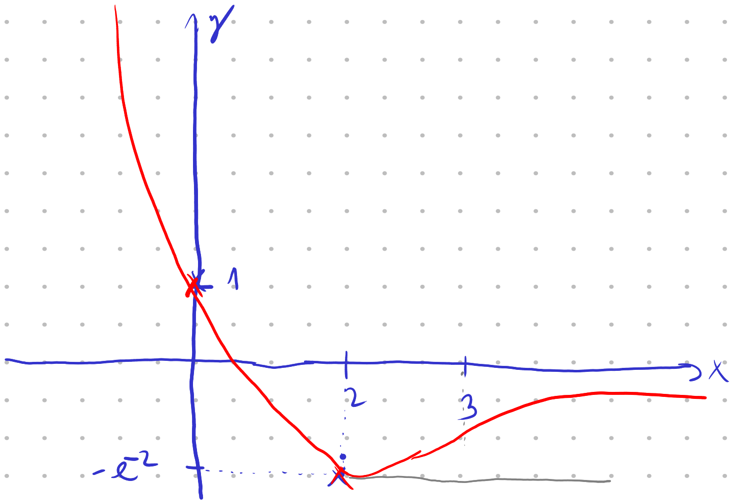
$q_+ = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - kx = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(1-x)}{e^x} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{e^x} = 0$

$\dfrac{-\infty}{\infty}$

teda v $+\infty$ má asym. $y = 0$

$\dfrac{(1-x)}{e^x} = y \quad \xrightarrow{x=0} 1 \qquad y=0 \to 1$

$f(0) = 1$



Příklad 1. (4b) Nalezněte maximální (co největší) intervaly konvexity/konkavity funkce

$$f(x) = x\ln(x^2) + x^2.$$

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f(x) = x \cdot \ln x^2 + x^2$

$f'(x) = (x\cdot \ln x^2 + x^2)' = \ln x^2 + x \cdot \frac{1}{x^2}\cdot 2x + 2x = \ln x^2 + 2x + 2$

$f''(x) = (\ln x^2 + 2x + 2)' = \frac{1}{x^2}\cdot 2x + 2 = \frac{2}{x} + 2 = \frac{2+2x}{x}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 2 + 2x = 0$

$x = -1$

$x \in$	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,+\infty)$
sgn$(f''(x))$	+	−	+

$f(x)$ je tedy konvexní na $(-\infty,-1\rangle$ a $(0,+\infty)$

$f(x)$ je tedy konkávní na $\langle -1,0)$

Příklad 2. (4b) Vypočtěte limitu funkce

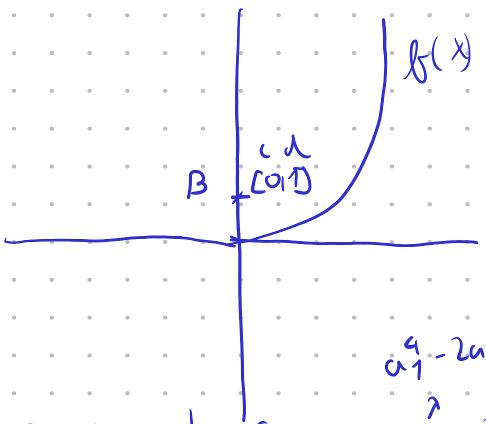
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{e^{x^2}-1}.$$

✓ na okolí $U_0(1)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{e^{x^2}-1} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^{x^2}\cdot 2x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{e^{x^2}\cdot 2x\cdot 2x + e^{x^2}\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$\frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ $\quad \frac{0}{1\cdot 2\cdot 0} = \frac{0}{0}$ $\quad \frac{1}{1\cdot 0 + 1\cdot 2}$

Příklad 3. (4b) Nalezněte bod na části paraboly $f(x) = x^2$, $x \in \langle 0,1\rangle$, který je nejblíže bodu o souřadnicích $(0,1)$. *Poznámka*: Vzdálenost dvou bodů o souřadnicích (a,b) a (c,d) je rovna $\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$.



nějaký bod na části paraboly $f(x)$ $A = [\overset{a}{a_1}, \overset{b}{a_2}]$

$a_2 = a_1^2$

$\rho(A,B) = \sqrt{(a_1-0)^2 + (a_2-1)^2} = \sqrt{a_1^2 + (a_1^2-1)^2}$

vzdálenost A od B a hledáme minimum

$a_1^4 - 2a_1^2 + 1$

$\rho(A,B)(a_1)' = \left(\left(a_1^2 + (a_1^2-1)^2\right)^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_1^2+(a_1^2-1)^2}}\cdot(2a_1 + 4a_1^3 - 4a_1)$

$\rho(A,B)(a_1) = 0 \Rightarrow -2a_1 + 4a_1^3 = 0$

$-2a_1\cdot(1-2a_1^2) = 0 \to a_1 = 0 \vee a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $(0,1)$

$a_1 \in$	$(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$
sgn	−	+

$\boxed{\text{tedy ostré lok. min. } \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{tedy bod } A = [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}]}$

Příklad 4. (8b) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}.$$

Tj. určete definiční obor, intervaly monotonie, konvexity/konkavity, nalezněte lokální extrémy a případné asymptoty. Na základě těchto informací načrtněte graf funkce f.

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}$

$D_f = (0, +\infty)$

$-1/2 \cdot x^{-3/2} + 1/2 \cdot x^{-1/2}$

$f'(x) = \left(x^{-1/2} + x^{1/2}\right)' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{-1 + x}{2x \cdot \sqrt{x}}$

$\sqrt{x^3} \to x \cdot \sqrt{x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

$x \in$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$sgn(f'(x))$	$-$	$+$

$f''(x) = \left(-1/2 \cdot x^{-3/2} + 1/2 \cdot x^{-1/2}\right)' =$

$= +\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^5}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{3 - x}{4x \cdot \sqrt{x^3}}$

$\sqrt{x^5} \to x\sqrt{x^3}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 3$

$x \in$	$(0,3)$	$(3,\infty)$
$sgn(f''(x))$	$+$	$-$

f(x) je ostře klesající na (0, 1⟩

f(x) je ostře rostoucí na ⟨1, ∞)

s ostrým lokálním min. v 1 f(x) = 2

f(x) je ostře konvexní na (0, 3⟩

f(x) je ostře konkávní na ⟨3, +∞)

asymptoty

svislá asymptota v 0

$\lim_{x \to 0^\pm} \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \to$ v 0^- není lim.

$\to x \to 0^+ \; +\infty \Rightarrow$ tedy v 0 má f(x) svislou limitu $x = 0$

v $\pm\infty$

$q^{\pm} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x \cdot \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 + x}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \cdot \frac{\frac{1}{x} + 1}{\sqrt{x}} =$

$= \xrightarrow{x \to +\infty} \frac{0+1}{+\infty} = 0 \; ; \xrightarrow{x \to -\infty} \frac{0+1}{} \;$ v $-\infty$ ta asymptota není

$q^+ = \lim_{x \to +\infty} f(x) - kx = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = +\infty \Rightarrow$ není ta asymptota v $+\infty$

$0 = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \emptyset$