

#Úvod

Disclaimer: Toto pdf neslouží jako 1:1 bezmyšlenkovitý návod na počítání limit. Pořád je důležité vědět, co děláte, jaké jsou předpoklady atd.

#Důkazy

Viz <https://courses.fit.cvut.cz/BI-MA1/@master/textbook/index.html>

Vzorný čtenář si jistě dokáže sám :)

Dobře, pár definic si tu dáme.

Limita

- **Limita posloupnosti:** Mějme reálnou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a ta má limitu α , která je prvkem rozšířené reálné osy, tedy $\alpha \in \langle -\infty, +\infty \rangle$, právě tehdy když pro každé okolí bodu U_α bodu α lze nalézt $M \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\forall n \in \mathbb{N} \geq M$ platí, že $a_n \in U_\alpha$.
- *Neboli: α je limitou posloupnosti, právě když v každém jeho okolí od nějakého členu (to je to naše M) leží všechny členy posloupnosti.*
- Značíme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
- **Limita funkce:** Mějme funkci $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, a hromadný bod množiny A a bod $b \rightarrow a, b \in \mathbb{R}$. Funkce f má v bodě a limitu rovnou $b \iff$ pro každé okolí U_b bodu $b \exists$ okolí U_a bodu a takové, že pokud $x \in U_a \cup A$ a $x \neq a$ pak $f(x) \in U_b$.

Věty

#veta_o_limite_souctu/soucinu/podilu

- <https://courses.fit.cvut.cz/BI-MA1/@master/textbook/sec-derivace-ssp.html#thm-derivace-ssp>
#veta_o_slozene_funkci
- <https://courses.fit.cvut.cz/BI-MA1/@master/textbook/sec-veta-o-limite-slozene-funkce.html#thm-limita-slozene-funkce>
#vybrana_posloupnost
- https://courses.fit.cvut.cz/BI-MA1/@master/textbook/sec_vybrane_posloupnosti.html#def-vybrana-posloupnost

#heine

- <https://courses.fit.cvut.cz/BI-MA1/@master/textbook/sec-vlastnosti-limit.html#thm-heine>

#podilove_kriterium

- <https://courses.fit.cvut.cz/BI-MA1/@master/textbook/sec-podilove-kriterium-pro-posloupnosti.html#thm-podilove-kriterium>

#veta_o_sevrene_funkci_posloupnosti

- <https://courses.fit.cvut.cz/BI-MA1/@master/textbook/sec-nerovnosti-a-limity.html#thm-limita-sevrene-funkce>

#limity_a_asymptoticke_vztahy

- <https://courses.fit.cvut.cz/BI-MA1/@master/textbook/sec-limity-a-O.html#thm-vztah-limity-a-O>

Znamé limity

- <https://courses.fit.cvut.cz/BI-MA1/@master/textbook/sec-zname-limity.html>

Tricky

- #dosadit
- #vytknuti_nejrychlejsiho_clenu
- #odmocniny
- #doplneni_o_vhodnou_nulu
- #vynasobeni_vhodnou_jednickou
- #vyuziti_exponencialy
- #goniometricky_funkce

#dosadit

- Vždycky je dobré *dosadit*, nebo-li využít spojitosti. Je tím dobře vidět, které výrazy jsou problematické.
- Občas to i vyjde a rovnou nám to vyhodí výsledek.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(1)}{1} = \sin(1)$$

#vytknuti_nejrychlejsiho_clenu

- *nejrychleji rostoucí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + \pi^n + 3^n}{4^n - 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^n}{4^n} \cdot \frac{\frac{2^n}{\pi^n} + 1 + \frac{3^n}{\pi^n}}{1 - \frac{2^n}{4^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \cdot \frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^n + 1 + \left(\frac{3}{\pi}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n} = 0 \cdot \frac{0 + 1 + 0}{1 - 0} = 0$$

- *nejpomaleji klesající*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{-n} + 3^{-n}}{4^{-n} + 9^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{-n}}{4^{-n}} \cdot \frac{1 + \frac{3^{-n}}{2^{-n}}}{1 - \frac{9^{-n}}{4^{-n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \cdot \frac{1 + (\frac{2}{3})^n}{1 - (\frac{4}{9})^n} = +\infty \cdot \frac{1+0}{1-0} = +\infty$$

#odmocniny

- Zde je důležité si uvědomit, zda-li nám tato úprava o *vynásobení vhodnou jedničkou* pomůže. Většinou to jsou právě ty případy, kdy nám po dosazení vznikne výraz typu: $+\infty - (+\infty)$.
- pro druhou odmocninu: $\frac{a-b}{a^2+b^2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2]{a+b} - \sqrt[2]{c+b} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a+b) - (c+b)}{\sqrt[2]{a+b} + \sqrt[2]{c+b}}$$

- pro třetí odmocninu: $\frac{a-b}{a^2+ab+b^2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{a+b} - \sqrt[3]{c+b} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a+b) - (c+b)}{\sqrt[3]{(a+b)^2} + \sqrt[3]{a+b} \cdot \sqrt[3]{c+b} + \sqrt[3]{c+b}}$$

#doplneni_o_vhodnou_nulu

- motivace u těchto následujících metod je získání známých limit \rightarrow viz sekce *známé limity*.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x+1-1} - e}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} e \cdot \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} \rightarrow e$$

#vynasobeni_vhodnou_jednickou

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+2x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+2x) \cdot \frac{2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} 2x = +\infty$$

#vyuziti_exponencialy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x^2} \cdot \ln(1+\frac{2}{x})}, \text{exponent} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \cdot \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) \dots 0 \rightarrow e^0$$

- to jde kvůli tomu, že exponenciála je spojitá funkce, tak se můžeme dívat jen na to, jak se chová exponent.

#goniometricky_funkce

- následující vztahy jsou odvozeny ze součtových vzorců.
- $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
- $\cos(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

- $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
- $\sin(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
- $\cos(x) = \cos(-x)$
- $\sin(x) = -\sin(-x)$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} \cdot \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x)}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} \cdot \frac{1}{1 + \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} \cdot \frac{1}{1 + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \sin x} = \frac{1}{2}$$

- sevření gon. funkcí, omezit $\sin(x)/\cos(x)$ jejich oborem hodnot. $\rightarrow -1 \leq \cos/\sin \leq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2 + \sin(n)}$$

$$\frac{n}{2 + 1} \rightarrow \infty \leq \frac{n}{2 + \sin(n)} \leq \frac{n}{2 - 1} \rightarrow \infty$$

- zde je důležité ukázat platnost použitých nerovností.

#credits

- *moje psychické zdraví při počítání limit a techání* \rightarrow @Jace