#Úvod

Disclaimer: Toto pdf neslouží jako 1:1 bezmyšlenkovitý návod na počítání limit. Pořád je důležité vědět, co děláte, jaké jsou předpoklady atd.

#Důkazy

Viz https://courses.fit.cvut.cz/BI-MA1/@master/textbook/index.html
Vzorný čtenář si jistě dokáže sám :)

Dobře, pár definic si tu dáme.

Limita

- **Limita posloupnosti:** Mějme reálnou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a ta má limitu α , která je prvkem rozšířené reálné osy, tedy $\alpha \in \langle -\infty, +\infty \rangle$, právě tehdy když pro každé okolí bodu U_α bodu α lze nalézt $M \in N$ takové, že pro $\forall n \in N \geq M$ platí, že $a_n \in U_\alpha$.

- *Neboli: α je limitou posloupnosti, právě když v každém jeho okolí od nějakého členu (to jeto naše M) leží všechny členy posloupnosti.*

- Značíme $\lim_{n \to \infty} a_n$

- **Limita funkce:** Mějme funkci $f : A \to R$, a hromadný bod množiny A a bod $b \to a, b \in R$. Funkce f ma v bodě a limitu rovnou b ⇔ pro každé okolí U_b bodu b ∃ okolí U_a bodu a takové, že pokud $x \in U_a \cup A$ a $x \neq a$ pak $f(x) \in U_b$.

Věty

#veta_o_limite_souctu/soucinu/podilu

- https://courses.fit.cvut.cz/BI-MA1/@master/textbook/sec-derivace-ssp.html#thm-derivace-ssp
  #veta_o_slozene_funkci
- https://courses.fit.cvut.cz/BI-MA1/@master/textbook/sec-veta-o-limite-slozene-funkce.html#thm-limita-slozene-funkce
  #vybrana_posloupnost
- https://courses.fit.cvut.cz/BI-MA1/@master/textbook/sec_vybrane_posloupnosti.html#def-vybrana-posloupnost

#heine
- https://courses.fit.cvut.cz/BI-MA1/@master/textbook/sec-vlastnosti-limit.html#thm-heine

  #podilove_kriterium
- https://courses.fit.cvut.cz/BI-MA1/@master/textbook/sec-podilove-kriterium-pro-posloupnosti.html#thm-podilove-kriterium

  #veta_o_sevrene_funkci/posloupnosti
- https://courses.fit.cvut.cz/BI-MA1/@master/textbook/sec-nerovnosti-a-limity.html#thm-limita-sevrene-funkce

  #limity_a_asymptoticke_vztahy
- https://courses.fit.cvut.cz/BI-MA1/@master/textbook/sec-limity-a-O.html#thm-vztah-limity-a-O

Známé limity

- https://courses.fit.cvut.cz/BI-MA1/@master/textbook/sec-zname-limity.html

Tríčky

- #dosadit
- #vytknuti_nejrychlejsiho_clenu
- #odmocniny
- #doplneni_o_vhodnou_nulu
- #vynasobeni_vhodnou_jednickou
- #vyuziti_exponencialy
- #goniometricky_funkce

#dosadit

- Vždycke je dobré *dosadit*, nebo-li využít spojitosti. Je tím dobře vidět, které výrazy jsou problematické.
- Občas to i vyjde a rovnou nám to vyhodí výsledek.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x)}{x}=\frac{\sin(1)}{1}=\sin(1)$$

#vytknuti_nejrychlejsiho_clenu

- *nejrychleji rostoucí*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+\pi^n+3^n}{4^n-2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^n}{4^n}\cdot\frac{\frac{2^n}{\pi^n}+1+\frac{3^n}{\pi^n}}{1-\frac{2^n}{4^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n\cdot\frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^n+1+\left(\frac{3}{\pi}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}=0\cdot\frac{0+1+0}{1-0}=$$

- *nejpomaleji klesající*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{-n}+3^{-n}}{4^{-n}+9^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{-n}}{4^{-n}} \cdot \frac{1+\frac{3^{-n}}{2^{-n}}}{1-\frac{9^{-n}}{4^{-n}}} = \lim_{n\to\infty} 2^n \cdot \frac{1+(\frac{2}{3})^n}{1-(\frac{4}{9})^n} = +\infty \cdot \frac{1+0}{1-0} = +\infty$$

#odmocniny

- Zde je důležité si uvědomit, zdali nám tato úprava o *vynásobení vhodnou jedničkou* pomůže. Většinou to jsou právě ty případy, kdy nám po dosazení vznikne výraz typu: $+\infty - (+\infty)$.
- pro druhou odmocninu: $\frac{a-b}{a^2+b^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2]{a+b} - \sqrt[2]{c+b} \to \lim_{n\to\infty} \frac{(a+b)-(c+b)}{\sqrt[2]{a+b}+\sqrt[2]{c+b}}$$

- pro třetí odmocninu: $\frac{a-b}{a^2+ab+b^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{a+b} - \sqrt[3]{c+b} \to \lim_{n\to\infty} \frac{(a+b)-(c+b)}{\sqrt[3]{(a+b)^2}+\sqrt[3]{a+b}\cdot\sqrt[3]{c+b}+\sqrt[3]{c+b}}$$

#doplneni_o_vhodnou_nulu

- motivace u těchto následujících metod je získání známých limit $\to$ viz sekce *známé limity*.

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{e^{x+1-1} - e}{x-1} = \lim_{x\to 1} e \cdot \frac{e^{x-1}-1}{x-1} \to e$$

#vynasobeni_vhodnou_jednickou

$$\lim_{x\to 0} \ln(1+2x) = \lim_{x\to 0} \ln(1+2x) \cdot \frac{2x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} 2x = +\infty$$

#vyuziti_exponencialy

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{x^2}\cdot\ln(1+\frac{2}{x})}, exponent: \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^2} \cdot \ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \ldots 0 \to e^0$$

- to jde kvůli tomu, že exponenciála je spojitá funkce, tak se můžeme dívat jen na to, jak se chová exponent.

#goniometricky_funkce

- následující vztahy jsou odvozeny ze součtových vzorců.
- $\cos(x) = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$
- $\cos(x) = -\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

- $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
- $\sin(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
- $\cos(x) = \cos(-x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2} \cdot \frac{1+\sin x}{1+\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2} \cdot \frac{1}{1+\sin x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2} \cdot \frac{1}{1+\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\sin x} = \frac{1}{2}$$

- sevření gon. funkcí, omezit $\sin(x)/\cos(x)$ jejich oborem hodnot. $\to -1 \le \cos/\sin \le 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2+\sin(n)}$$

$$\frac{n}{2+1} \to \infty \le \frac{n}{2+\sin(n)} \le \frac{n}{2-1} \to \infty$$

- zde je důležité ukázat platnost použitých nerovností.
  #credits
- *moje psychické zdraví při počítání limit a techání → @Jace*