Глава 17

Элементы логики предикатов

Логика предикатов представляет собой обобщение логики высказываний.

17.1. Предикаты

Логика высказываний оперирует с высказываниями, простыми и сложными (составленными из простых). Простое высказывание представляет собой повествовательное предложение, которое может быть истинным либо ложным. В соответствии с этим простые высказывания рассматриваются в логике высказываний как переменные, принимающие значения из множества $\{и, л\}$. В логике высказываний рассматривается структура составных высказываний, но внутренняя структура простых высказываний при этом никак не учитывается. Между тем она служит объектом анализа в логике предикатов, где роль переменных играют элементы, из которых состоят простые высказывания. Эти переменные многозначны и могут оказаться даже бесконечнозначными.

Основным понятием логики предикатов является *предикат* – логическая двузначная функция $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от многозначных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, называемых *предметными*. Множество возможных значений некоторого аргумента x_i предиката называется его *предметной областью* и обозначается M_i.

В зависимости от числа n аргументов предикаты называются *нульместными*, *одноместными*, *двухместными* и далее *n-местными*. Нульместные предикаты представляют собой простые высказывания. Предметная область n-местного предиката в целом представляет собой декартово произведение областей возможных значений его аргументов:

$$M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n.$$

Некоторые из множеств $M_1, M_2, \dots, M_n$ или все они могут совпадать. В последнем случае, когда все $M_i = N$, предметная область предиката представляет собой n-ю степень этого множества N^n.

Всякий предикат при присвоении конкретных значений его предметным переменным превращается в простое высказывание. Например, двухместный предикат «x больше y», предметной областью которого является множество натуральных чисел, при фиксации значений $x = 9$ и $y = 6$ превращается в высказывание «9 больше 6», имеющее значение *и* («истина»).

Одноместный предикат $P(x)$, определенный на предметной области M, задает некоторое свойство, присущее или не присущее элементам из M, соответственно в алгебре высказываний предикат $P(x)$ интерпретируется как высказывание «x обладает свойством P», и это высказывание в зависимости от x может быть истинным или ложным. Одноместному предикату $P(x)$ на множестве M можно поставить во взаимно однозначное соответствие унарное отношение или подмножество множества M, для которых $P(x)$ истинно.

Двухместный предикат $P(x, y)$ определяется на множестве $M_P = M_1 \times M_2$ и задает бинарное отношение между элементами из множеств M_1 и M_2, являющимися предметными областями для переменных x и y. В алгебре высказываний предикат $P(x, y)$ интерпретируется как высказывание «x находится в отношении P с y». При этом в множестве $M_1 \times M_2$ выделяется подмножество пар элементов $(m_{i1}, m_{i2}) \in M_1 \times M_2$, для которых $P(x, y)$ истинно.

В общем случае существует взаимно однозначное соответствие между n-местными предикатами и n-арными отношениями. Всякому n-местному предикату $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно поставить в соответствие n-арное отношение R, такое, что $(m_1, m_2, \dots, m_n) \in R$, если и только если $P(m_1, m_2, \dots, m_n) = и$, и любому n-арному отношению R можно поставить в соответствие предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, который определен на декартовом произведении $M_P = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ и который принимает значение $P(m_1, m_2, \dots, m_n) = и$, если и только если $(m_1, m_2, \dots, m_n) \in R$.

Всякий n-местный предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно рассматривать как одноместный предикат $P(x)$ на множестве наборов $(m_1, m_2, \dots, m_n) \in M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$.

Примеры одноместных предикатов:

«x – простое число» на множестве натуральных чисел;
«x – студент» на некотором множестве людей;
«x – ядовитый гриб» на множестве грибов.

Примеры двухместных предикатов:
«$x > y$» на множествах натуральных чисел;
«x женат на y» на множествах мужчин и женщин;
«x пересекается с y» на множествах прямых линий.

Примеры трехместных предикатов:
«$x + y = z$» на множествах натуральных чисел;
«x – сын y и z» на множествах M_1 и M_2 мужчин и M_3 женщин;
«x проходит через y и z» на множестве M_1 прямых и множествах M_2, M_3 точек.

17.2. Кванторы

Поскольку значением предиката является *и* или *л*, к предикатам могут применяться все операции логики высказываний. Кроме того, в логике предикатов имеются специфические для них операции. Они выражают утверждения о всеобщности и существовании, применимые ко всей предметной области некоторой переменной предиката, и представляются посредством соответствующих кванторов: общности ($\forall$) и существования ($\exists$).

Пусть $P(x)$ – некоторый одноместный предикат, принимающий значение *и* или *л* для каждого элемента из предметной области M.

Результат применения *квантора общности* $\forall$ (называемого также квантором всеобщности) к предикату $P(x)$ обозначается через $\forall x P(x)$ и представляет собой высказывание «для всех x из M имеет место $P(x)$». Таким образом, $\forall x P(x)$ представляет собой истинное высказывание, если $P(x)$ истинно для каждого элемента x из M:

$$\forall x P(x) = и, \text{ если } P(x) = и \text{ для всех } x \in M;$$
$$\forall x P(x) = л \text{ в противном случае.}$$

Из определения выражения $\forall x P(x)$ следует, что для любого предиката $P(x)$ и любого элемента m из его предметной области M справедливо

$$\forall x P(x) \Rightarrow P(m), \text{ т. е. } (\forall x P(x) \to P(m)) = u.$$

Приведем примеры использования квантора общности:

1. Утверждение «Всякое натуральное число является рациональным числом» запишется в виде $\forall x(N(x) \to R(x))$, где предикаты $N(x)$ и $R(x)$ следует читать как «x – натуральное число» и «x – рациональное число».

2. Утверждение «Студент сдал или не сдал экзамен» запишется в виде $\forall x(S(x) \to (P(x) \vee \overline{P}(x)))$, где через $S(x)$ и $P(x)$ обозначены высказывания «x – студент» и «x сдал экзамен».

Результат применения *квантора существования* $\exists$ к предикату $P(x)$ обозначается через $\exists x P(x)$ и представляет собой высказывание «существует x, для которого имеет место $P(x)$». Таким образом, $\exists x P(x)$ представляет собой истинное высказывание, если существует элемент x из M, для которого $P(x)$ истинно:

$$\exists x P(x) = u, \text{ если } P(x) = u \text{ хотя бы для одного } x \in M;$$
$$\exists x P(x) = л \text{ в противном случае.}$$

Из определения выражения $\exists x P(x)$ следует, что для любого предиката $P(x)$ и любого элемента m из его предметной области M справедливо

$$P(m) \Rightarrow \exists x P(x), \text{ т. е. } P(m) \to \exists x P(x) = u.$$

Приведем примеры использования квантора существования:

1. Утверждение «Некоторые рациональные числа являются натуральными числами» запишется в виде $\exists x(R(x) \wedge N(x))$.

2. «Существуют студенты, которые сдали экзамен» запишется в виде $\exists x(S(x) \wedge P(x))$.

Квантор (общности или существования) берется по одной переменной, но может применяться к предикату, зависящему от любого числа переменных. Переменная, по которой берется квантор, называется *связанной* переменной, а все остальные – *свободными*.

Применение квантора к n-местному предикату по какой-нибудь переменной превращает его в $(n-1)$-местный предикат. Например, следующие выражения представляют собой $(n-1)$-местные предикаты:

$$\forall x_i P(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = R(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n);$$
$$\exists x_i P(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = S(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

В этих выражениях переменная x_i является связанной переменной, а все остальные – свободными.

Применение квантора общности к одноместному предикату $P(x)$ порождает тождественно истинное высказывание (константу *и*), если $P(x) = и$ на всей предметной области M предиката, и тождественно ложное высказывание (константу *л*) в противном случае. Применение квантора существования к одноместному предикату $P(x)$ порождает тождественно ложное высказывание (константу *л*), если $P(x) = л$ на всей предметной области M предиката, и тождественно истинное высказывание (константу *и*) в противном случае.

Квантор общности можно рассматривать как обобщение конъюнкции, а квантор существования – как обобщение дизъюнкции. Пусть предметная область M некоторого предиката $P(x)$ конечна и состоит из элементов $m_1, m_2, \dots, m_n$. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\forall x P(x) = P(m_1) \wedge P(m_2) \wedge \dots \wedge P(m_n);$$
$$\exists x P(x) = P(m_1) \vee P(m_2) \vee \dots \vee P(m_n).$$

В случае бесконечной предметной области кванторы могут рассматриваться как конъюнкции и дизъюнкции с бесконечным числом членов.

17.3. Теоретико-множественная интерпретация предикатов

Пусть предикат $P(x)$ задан на предметной области M. Тогда ему можно поставить во взаимно однозначное соответствие подмножество M_P тех элементов $x^* \in M$, для которых значение $P(x^*)$ истинно:

$$P(x^*) = и \Leftrightarrow x^* \in M_P \text{ и } P(x^*) = л \Leftrightarrow x^* \in M \setminus M_P.$$

Аналогичным образом интерпретируется отрицание предиката $P(x)$:

$$\bar{P}(x^*) = и \Leftrightarrow x^* \in M \setminus M_P.$$

Для предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ при любом значении x^* предметной переменной x очевидны соотношения

$$P(x^*) \vee Q(x^*) = и \Leftrightarrow x^* \in M_P \cup M_Q;$$

$$P(x^*) \wedge Q(x^*) = и \Leftrightarrow x^* \in M_P \cap M_Q.$$

Пусть n-местный предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задан на предметной области M^n и x_i^* – некоторое значение предметной переменной x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Тогда предикату $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно поставить в соответствие подмножество M_P тех элементов $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \in M^n$, для которых значение $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ истинно. Таким образом, для любого набора значений $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеют место

$$P(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = и \Leftrightarrow (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \in M_P;$$
$$P(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = л \Leftrightarrow (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \in M^n \setminus M_P.$$

Рассмотрим теоретико-множественную интерпретацию кванторов. Пусть имеем

$$P(x) = \exists y Q(x, y),$$

где $Q(x, y)$ – предикат с предметной областью M^2. По аналогии с вышесказанным предикату $P(x)$ соответствует такое множество $M_P \subseteq M$, что $P(x^*) = и$ для любого $x^* \in M_P$. Последнее имеет место, если для данного x^* существует такое значение y^* переменной y, что $Q(x^*, y^*) = и$, т. е. пара (x^*, y^*) принадлежит множеству M_Q.

Элемент x^* в паре (x^*, y^*) является *проекцией* этой пары на x, что символически выражается как $x^* = пр_x(x^*, y^*)$.

Проекцией $пр_x A$ множества $A \subseteq M_Q$ пар вида (x^*, y^*) на x называется множество всех x^*, таких, что $пр_x(x^*, y^*) \in A$. Из определения проекции следует

$$M_P = пр_x M_Q .$$

Квантор общности $\forall x P(x)$ может быть выражен через квантор существования:

$$\forall x\, S(x) = \overline{\exists}\, x\ \overline{S}\,(x).$$

Тогда

$$P(x) = \forall\, y\; Q(x, y) = \overline{\exists}\, x\;\; \overline{Q}(x, y)\ .$$

Исходя из определения теоретико-множественной операции отрицания, имеем

$$M_P = M \setminus пр_x(M^{\,2} \setminus M_Q).$$

17.4. Формулы логики предикатов

Формальное определение понятия *формулы логики предикатов* дается путем указания множества исходных символов и способов их связывания знаками операций. В качестве исходных символов используются предметные переменные, обозначаемые строчными буквами (например, x, y, z), и предикатные переменные, обозначаемые прописными буквами (например, P, Q, R), за которыми в скобках следуют *предметные переменные*.

Определим понятие *формулы логики предикатов* следующим образом [17]:

1. Каждая предикатная переменная или константа считается формулой. Каждый отдельный предикат, во все места которого подставлены предметные переменные или константы, есть формула. Все переменные, входящие в предикат, считаются свободными.

2. Если A – формула логики предикатов, содержащая свободную переменную x, то $\forall x A$ и $\exists x A$ также являются формулами, где x – связанная переменная, а все остальные переменные имеют тот же характер, что и в A, т. е. связанные в A переменные остаются связанными, а свободные – свободными.

3. Если A и B – формулы, причем нет таких переменных, которые в одной из формул были свободными, а в другой – связанными, то формулами являются $\neg\ A$ и $A\ *\ B$, где $*$ – любая операция из множества $\{\wedge, \vee, \oplus, \sim, \rightarrow\}$, а все переменные в этих формулах имеют тот же характер, что и в формулах A и B.

4. Других формул в логике предикатов нет.

Всякая определенная таким образом формула представляет собой предикат от своих свободных переменных и не зависит от связанных переменных.

Областью (или зоной) действия квантора $\forall x$ или $\exists x$ в формулах $\forall x\ A$ или $\exists x\ A$ называется формула A. Если формула A, в свою очередь, содержит квантор, то последний называется подчиненным квантору, который действует на A. Квантор имеет *ранг* 1, если ему не подчинен ни один другой квантор, и ранг k, если максимальный ранг квантора, который ему подчинен, равен k - 1. Максимальный ранг квантора, входящего в формулу, называется *кванторной глубиной* формулы.

Например, кванторная глубина формулы

$$T = \exists x\ (\forall y\ P(x, y, z) \to \exists y\ Q(x, y)) \lor R(w)$$

равна двум. Областью действия квантора $\exists x$ является формула $\forall y\ P(x, y, z) \to \exists y\ Q(x, y)$. Переменная x связана квантором $\exists x$, y – кванторами $\forall y$ и $\exists y$, а w и z – свободные переменные. Ни одна переменная не входит в формулу T (в соответствии с п. 3 определения) одновременно в связанном и свободном виде. В целом вышеприведенная формула представляет собой двухместный предикат $T(w, z)$, зависящий от своих свободных переменных.

Из определения квантора следует, что значение предиката, представленного некоторой формулой, не изменится, если некоторую связанную переменную заменить любой другой буквой, не используемой для обозначения свободных переменных. Отсюда следует, что в формуле можно так переобозначить связанные переменные, чтобы все кванторы действовали на разные связанные переменные. Следует, однако, при этом сохранять предметные области, привязанные к месту аргумента в формуле предиката.

Например, при этом условии формулы

$$\exists x\,(\forall y\,P(x,y,z) \to \exists y\,Q(x,y)) \lor R(w);$$

$$\exists x\,(\forall y\,P(x,y,z) \to \exists v\,Q(x,v)) \lor R(w);$$

$$\exists x\,(\forall v\,P(x,v,z) \to \exists y\,Q(x,y)) \lor R(w);$$

$$\exists v\,(\forall y\,P(v,y,z) \to \exists y\,Q(v,y)) \lor R(w)$$

могут представлять один и тот же предикат.

Рассмотрим отношения между формулами. Предикаты P и Q называются *равными*, если они имеют одинаковые значения при всех значениях входящих в них переменных.

Формулы P и Q логики предикатов называются *равносильными* (эквивалентными), если они задают один и тот же предикат. Как и в логике высказываний, равносильные формулы взаимно заменяемы. О равносильности формул можно говорить относительно некоторой предметной области (тогда эти формулы равносильны на этой области) или безотносительно к любой предметной области (тогда они равносильны на любой области).

Все равносильности, имеющие место в логике высказываний, имеют место и в логике предикатов. Кроме этих равносильностей в логике предикатов имеются равносильности, связанные с кванторами. Рассмотрим основные свойства кванторов.

1. Связь между кванторами существования и общности:

$$\forall xP(x) = \overline{\exists}\, x\overline{P}\,(x); \quad \exists xP(x) = \overline{\forall}\, x\overline{P}\,(x). \tag{17.1}$$

Эти равносильности являются аналогами законов де Моргана логики высказываний. Кванторы общности и существования можно считать двойственными друг другу. Равносильности (17.1) позволяют заменять квантор общности квантором существования, и наоборот, а также переносить знак отрицания с квантора на формулу, находящуюся в зоне его действия, заменяя квантор на двойственный:

$$\overline{\exists} xP(x) = \forall\, x\ \overline{P}\,(x); \quad \overline{\forall} xP(x) = \exists\, x\ \overline{P}\,(x). \tag{17.2}$$

2. Коммутативность кванторов:

$$\forall x\forall yP(x, y) = \forall y\forall xP(x, y);\ \exists x\exists yP(x, y) = \exists y\exists xP(x, y).$$

Возможность перестановки местами одноименных кванторов следует из коммутативности конъюнкции и дизъюнкции, обобщением которых являются соответственно кванторы общности и существования.

Изменение порядка следования разноименных кванторов в общем случае недопустимо. Например, пусть $M_1 \times M_2$ – предметная область двухместного предиката $P(x, y)$, M_1 и M_2 – соответственно множества всех мужчин и женщин, состоящих в браке, а предикат $P(x, y)$ – «x женат на y». На множестве $M_1 \times M_2$ имеет место

$$\forall x\exists yP(x, y) = u.$$

При изменении же порядка следования кванторов получим

$$\exists y \forall x P(x, y) = л.$$

Содержательно эта запись означает, что существует y, состоящий в браке со всеми x, что является ложью.

3. Дистрибутивность квантора общности относительно конъюнкции:

$$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) = \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x).$$

Дистрибутивность квантора общности относительно дизъюнкции в общем случае не имеет места:

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \neq \forall x P(x) \vee \forall x Q(x),$$

но легко доказывается, что

$$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x)),$$

так как, для того чтобы предикат слева имел значение $и$, необходимо, чтобы или $P(x)$, или $Q(x)$ был истинен для всех x, а если это имеет место, то автоматически получает значение $и$ и предикат справа. Обратное не всегда имеет место, так как предикат справа имеет значение $и$ и тогда, когда для одного значения x истинен предикат $P(x)$ (а $Q(x)$ ложен), а для другого значения x истинен предикат $Q(x)$ (а $P(x)$ ложен).

4. Дистрибутивность квантора существования относительно дизъюнкции:

$$\exists x(P(x) \vee Q(x)) = \exists x P(x) \vee \exists x Q(x).$$

Дистрибутивность квантора существования относительно конъюнкции в общем случае не имеет места:

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \neq \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x),$$

но легко доказывается, что

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x),$$

так как для истинности левой части должен существовать x, для которого и $P(x)$, и $Q(x)$ истинны, для истинности же правой части значения x, для которых $P(x)$ и $Q(x)$ истинны, могут быть различными.

5. Равносильности с относительной константой.

Если предикат, стоящий под знаком квантора $\forall x$ или $\exists x$, не зависит от x, то он является константой относительно этого квантора. Относительную константу Q можно вынести из-под знака квантора:

$$\forall x(P(x) \wedge Q) = \forall x P(x) \wedge Q, \ \forall x(P(x) \vee Q) = \forall x P(x) \vee Q;$$

$$\exists x(P(x) \wedge Q) = \exists x P(x) \wedge Q, \ \exists x(P(x) \vee Q) = \exists x P(x) \vee Q.$$

Эти равносильности говорят о том, что дистрибутивные законы кванторов (и общности, и существования) относительно и конъюнкции, и дизъюнкции имеют место для случая относительных констант.

17.5. Нормальные формы логики предикатов

Любая формула логики предикатов может быть преобразована в формулу, определенную на множестве операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

Формула логики предикатов, в которой из операций логики высказываний имеются только конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, причем символ отрицания стоит только над предикатными переменными, называется *приведенной* (или почти нормальной) формулой [4]. Можно показать, что последовательное применение равносильностей (17.2) и выражение всех операций через $\wedge$, $\vee$ и $\neg$ позволяют привести к приведенной форме любую формулу логики предикатов.

Для примера преобразуем к приведенной форме следующую формулу:

$$T = \overline{\exists} x(\forall y P(x, y, z) \to \exists w Q(x, w)) \vee \forall z \ \overline{\forall} v \ (R(z) \vee S(v)).$$

Используя (17.2), получаем

$$T = \forall x \neg(\forall y P(x, y, z) \to \exists w Q(x, w)) \vee \forall z \exists v \neg (R(z) \vee S(v)).$$

Используя соотношение $x \to y = \bar{x} \vee y$ из гл. 16 и закон де Моргана, получаем

$$T = \forall x \neg(\neg \forall y P(x, y, z) \vee \exists w Q(x, w)) \vee \forall z \exists v \ (\overline{R}(z) \wedge \overline{S}(v)) =$$

$= \forall x\, (\forall y\, (P(x, y, z) \wedge \overline{\exists w\, Q\, (x, w)}) \vee \forall z\, \exists\, v\, (\overline{R}(z) \wedge \overline{S}(v)) =$
$= \forall x\, (\forall y P(x, y, z) \wedge \forall w\, \overline{Q}(x, w)) \vee \forall z\, \exists v\, (\overline{R}(z) \wedge \overline{S}(v)).$

Последний результат и есть приведенная форма заданной формулы T.

Эта формула может быть далее упрощена следующим образом. Ранее было сказано, что связанную переменную предиката можно обозначить другой буквой, не используемой для обозначения свободной переменной. Следовательно,

$$\forall w\, \overline{Q}(x, w) = \forall y\, \overline{Q}(x, y).$$

Отсюда

$$\forall x\, (\forall y\, P\, (x, y, z) \wedge \forall\, w\, \overline{Q}(x, w)) \vee \forall z\, \exists v\, (\overline{R}(z) \wedge \overline{S}(v)) =$$
$$= \forall x\, (\forall y\, (P(x, y, z) \wedge \forall y\, \overline{Q}(x, y)) \vee \forall t\, \exists v\, (\overline{R}(t) \wedge \overline{S}(v)).$$

Заметим, что связанная переменная z в последнем члене заменена на t с целью последующего вынесения связывающего ее квантора $\forall$ в левую часть, где будут собраны все кванторы.

Используя дистрибутивность квантора общности относительно конъюнкции, получаем следующую форму:

$$\forall x\, (\forall y\, (P(x, y, z) \wedge \overline{Q}(x, y))) \vee \forall t\, \exists v\, (\overline{R}(t) \wedge \overline{S}(v)).$$

Используя равносильности с относительными константами, окончательно получаем следующую форму:

$$\forall x\, \forall y\, \forall t\, \exists v\, (P(x, y, z) \wedge \overline{Q}(x, y) \vee \overline{R}(t) \wedge \overline{S}(v)).$$

Полученная форма, в которой все кванторы собраны слева, а формула, к которой применяются кванторы, является бескванторной, называется *нормальной формой* логики предикатов.

17.6. Конечные предикаты

Важный подкласс предикатов образуют конечные предикаты. *Конечные предикаты* – это двухзначные функции, аргументами которых служат переменные с ограниченным числом значений. Обозначим эти переменные, как и ранее, через $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пусть теперь они принимают значения соответственно из конечных множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$, прямое произведение которых $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ образует пространство M. Таким образом, конечным предикатом называется отображение $M \to \{0, 1\}$ множества M в двухэлементное множество $\{0, 1\}$.

При решении задач, связанных с использованием конечных предикатов, последние целесообразно представлять по возможности в более компактной форме. Здесь можно использовать опыт теории булевых функций, наиболее развитой применительно к тому случаю, когда рассматриваемые функции представляются в дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ). Именно для этой формы разработаны наиболее эффективные методы минимизации булевых функций и решения логических уравнений. Разумно обобщить эти методы на конечные предикаты.

Придерживаясь традиции, положим, что *элементарная конъюнкция* представляет характеристическую функцию некоторого интервала I пространства M, а интервал – это прямое произведение непустых подмножеств α_i, взятых по одному из каждого X_i:

$$I = \alpha_1 \times \alpha_2 \times \ldots \times \alpha_n, \ \alpha_i \subseteq X_i, \ \alpha_i \neq \varnothing, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда элементарная конъюнкция k представляется выражением

$$k = (x_1 \in \alpha_1) \wedge (x_2 \in \alpha_2) \wedge \ldots \wedge (x_n \in \alpha_n)$$

и определяется как конъюнкция произвольных, но отличных от нуля одноместных предикатов $x_i \in \alpha_i$ (x_i принимает значение из α_i, где α_i – множество-константа). При этом сомножители, для которых $\alpha_i = X_i$ (здесь предикат $x_i \in \alpha_i$ становится тождественно истинным), могут быть опущены.

Нетрудно убедиться в том, что в вырожденном случае, когда все аргументы оказываются двухзначными, это определение совпадает с определением элементарной конъюнкции в булевой алгебре.

Аналогичным образом определим *элементарную дизъюнкцию* d как дизъюнкцию одноместных предикатов, отличных от единицы:

$$d = (x_1 \in \alpha_1) \vee (x_2 \in \alpha_2) \vee \ldots \vee (x_n \in \alpha_n), \ \alpha_i \subset X_i,$$

$$\alpha_i \neq X_i, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

При $\alpha_i = \varnothing$ член $x_i \in \alpha_i$ в выражении элементарной дизъюнкции можно опустить, так как он представляет тождественно ложное высказывание.

Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы определяются стандартным образом: *ДНФ* – это дизъюнкция элементарных конъюнкций, а *КНФ* – конъюнкция элементарных дизъюнкций.

Характеристические функции элементов пространства M естественно представляются в форме *полных элементарных конъюнкций*, т. е. таких элементарных конъюнкций, в которых все множества α_i одноэлементны: $|\alpha_i| = 1$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. ДНФ, составленная из полных элементарных конъюнкций, называется *совершенной* (*СДНФ*). Число ее членов равно мощности характеристического множества M_φ предиката φ, представляемого данной СДНФ.

Поскольку применение ЭВМ для решения задач с конечными предикатами еще более насущно, чем при работе с булевыми функциями, целесообразно перейти к языку булевых векторов и матриц, непосредственно представимых в машине. А это значит, что все рассматриваемые объекты надо разлагать на некоторые двоичные элементы, которые будут соответствовать компонентам булевых векторов и матриц, а объекты надо представлять в виде комбинаций этих элементов.

Для представления таких комбинаций введем *секционированные булевы векторы*. Они разбиваются на *домены* (секции), поставленные во взаимно однозначное соответствие с аргументами. Компоненты доменов ставятся в соответствие со значениями аргументов. Единица в j-й компоненте i-го домена интерпретируется как высказывание «i-я переменная принимает j-е значение». Секционированные булевы векторы будем использовать для представления элементов и некоторых областей пространства M, а совокупности таких векторов – для представления любых конечных предикатов.

Элементы пространства M, т. е. конкретные наборы значений аргументов, будем представлять векторами ровно с одной единицей в каждом домене, определяя таким образом однозначно значения, принимаемые аргументами. Векторы более общего вида, которые могут содержать по несколько единиц в каждом домене, можно интерпретировать двояко. Их можно понимать либо как элементарные конъюнкции (конъюнкции одноместных предикатов или соответствующие им интервалы пространства M – прямые произведения непустых подмножеств, взятых по одному из X_1, X_2, …, X_n), либо как аналогично определяемые элементарные дизъюнкции, которые можно рассматривать как дополнения соответствующих элементарных конъюнкций. Будем называть такие векторы соответственно *конъюнктами* или *дизъюнктами*. В каждом домене конъюнкта должно быть не менее одной единицы, дизъюнкта – не менее одного нуля (в противном случае конъюнкт вырождается в нуль, дизъюнкт – в единицу).

Совокупности таких векторов-строк можно объединять в секционированные (по столбцам) булевы матрицы. Матрицы конъюнктов удобно интерпретировать как дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ) конечных предикатов, матрицы дизъюнктов – как конъюнктивные нормальные формы (КНФ). Ниже рассматриваются в основном КНФ.

Язык КНФ универсален. Это значит, что любой предикат φ можно задать в виде конъюнкции некоторых элементарных дизъюнкций d_1, d_2, …, d_m. Представим эту КНФ *секционированной булевой матрицей* $\boldsymbol{D}$, состоящей из строк-дизъюнктов $\boldsymbol{d}_1$, $\boldsymbol{d}_2$, …, $\boldsymbol{d}_m$. Столбцовые секции, или домены матрицы, будем обозначать через $\boldsymbol{d}^{\,j}$, отдельные столбцы – через $\boldsymbol{d}^{\,jk}$, строки в доменах – через $\boldsymbol{d}_i^{\,j}$, а элементы – через $d_i^{\,jk}$. Заметим, что структурные величины, составленные из более простых элементов, а именно векторы и матрицы, обозначаются полужирным шрифтом, в отличие от скалярных величин.

Матрицу $\boldsymbol{D}$ можно интерпретировать как систему дизъюнктивных уравнений

$$d_1 = 1,\ d_2 = 1,\ \ldots,\ d_m = 1.$$

Множество корней этой системы представляет собой не что иное, как характеристическое множество предиката φ, т. е. совокупность элементов пространства M, на которых φ принимает значение 1.

Соответствие между элементами секционированных векторов, с одной стороны, и аргументами и их значениями – с другой, будем задавать *трафаретом* – линейным перечнем аргументов и их значений (в пределах аргумента). Положим, что в рассматриваемых ниже примерах все векторы соразмерны, т. е. интерпретируются по единому трафарету, в данном случае по следующему:

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ 1\,2\,3 \,.\, & 1\,2\,3\,4 \,.\, & 1\,2 \end{array}$$

Например, если известно, что вектор

$$110\,.\,0101\,.\,01$$

представляет собой конъюнкт, то он интерпретируется как предикат, принимающий значение 1 при условии

$$((a = 1) \vee (a = 2)) \wedge ((b = 2) \vee (b = 4)) \wedge (c = 2) = 1,$$

а если же вектор рассматривается как дизъюнкт, то он интерпретируется как предикат, принимающий значение 1, если и только если

$$((a = 1) \vee (a = 2)) \vee ((b = 2) \vee (b = 4)) \vee (c = 2) = 1.$$

К примеру, матрица дизъюнктов

$$\boldsymbol{D} = \begin{array}{c} 001\,.\,0010\,.\,00 \\ 110\,.\,0011\,.\,01 \\ 010\,.\,1100\,.\,10 \\ 001\,.\,0100\,.\,01 \end{array}$$

интерпретируется как система уравнений

$$\begin{array}{l} (a = 3) \vee (b = 3) = 1, \\ (a = 1) \vee (a = 2) \vee (b = 3) \vee (b = 4) \vee (c = 2) = 1, \\ (a = 2) \vee (b = 1) \vee (b = 2) \vee (c = 1) = 1, \\ (a = 3) \vee (b = 2) \vee (c = 2) = 1. \end{array}$$

Множество корней этой системы представляется *матрицей элементов*

$$\boldsymbol{E} = \begin{array}{c} 010\,.\,0010\,.\,01 \\ 001\,.\,1000\,.\,01 \\ 001\,.\,0100\,.\,01 \\ 001\,.\,0010\,.\,10 \\ 001\,.\,0001\,.\,10 \end{array},$$

которую можно рассматривать как частный случай матрицы конъюнктов, представляющий совершенную ДНФ рассматриваемого предиката. Каждая строка этой матрицы задаёт некоторую элементарную конъюнкцию, принимающую значение 1 на соответствующем элементе пространства M.

Удобно пользоваться двойной интерпретацией введенных векторов и матриц. При одной из них они рассматриваются как упорядоченные совокупности двоичных величин, к которым применимы покомпонентные операции булевой алгебры: дизъюнкция, конъюнкция и отрицание. При другой интерпретации они трактуются как подмножества из пространства M, образованные из тех элементов, на которых принимает значение 1 представленный вектором или матрицей предикат. Тогда вектор-конъюнкт интерпретируется как некоторый интервал пространства M, вектор-дизъюнкт – как дополнение интервала, матрица конъюнктов – как объединение интервалов, а матрица дизъюнктов – как пересечение дополнений интервалов.

Нетрудно показать, что нахождение корней и построение матрицы элементов сводится к нахождению всех столбцовых покрытий секционированной булевой матрицы $\boldsymbol{D}$ – таких подмножеств её столбцов, которые содержат ровно по одному столбцу из каждого домена и в которых для каждой строки из $\boldsymbol{D}$ найдётся столбец, имеющий на пересечении с этой строкой значение 1. Для рассмотренного примера эта задача решается относительно легко, но с ростом числа уравнений и переменных в системе она становится весьма трудоемкой.

Несомненный практический интерес представляет задача минимизации конечного предиката. Под этим понимается получение его наиболее компактного описания. Во многих случаях можно ограничиться нахождением ДНФ с минимальным числом членов – кратчайшей ДНФ, представляющей предикат, заданный в некоторой исходной форме. Наряду с точным решением этой задачи практический интерес представляют и приближенные решения, получаемые при некоторых упрощениях (редукции) исходной матрицы, сохраняющих множество ее корней.

Пусть $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ – некоторые строки матрицы дизъюнктов $\boldsymbol{D}$, а $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ – некоторые ее столбцы. Положим, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ находятся в отношении $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{b}$, если это отношение выполняется покомпонентно (например, 011.0010.101 ≥ 010.0010.100).

Следующие правила редукции позволяют упрощать матрицу дизъюнктов $\boldsymbol{D}$ путем удаления некоторых строк или столбцов.

Правило 1. Если $\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{v}$, то строка $\boldsymbol{u}$ удаляется.

Правило 2. Если строка $\boldsymbol{u}$ содержит полный (без нулей) домен, то она удаляется.

Правило 3. Если столбец $\boldsymbol{p}$ пустой (без единиц), то он удаляется.

Правило 4. Если существует строка, содержащая единицы лишь в одном домене, то удаляются все столбцы этого домена, содержащие нули в данной строке.

Перечисленные правила задают простейшие преобразования эквивалентности, при которых множество корней матрицы не изменяется. Несложное доказательство этого утверждения предоставляется читателю. Наряду с данными правилами для упрощения матрицы $\boldsymbol{D}$ применимы и более сложные преобразования, основанные на поиске корней КНФ, представленной этой матрицей.

Если матрица дизъюнктов $\boldsymbol{D}$ задает некоторую КНФ D, то эквивалентная ей матрица элементов $\boldsymbol{E}$ представляет (своими строками) множество всех корней уравнения $D = 1$, т. е. множество всех элементов пространства M, на которых D принимает значение 1. В этом случае матрица $\boldsymbol{E}$ содержит все такие и только такие строки $\boldsymbol{e}_i$, которые, имея ровно по одной единице в каждом домене, пересекаются с каждой строкой $\boldsymbol{d}_j$ матрицы $\boldsymbol{D}$, т. е. их покомпонентная конъюнкция отлична от нуль-вектора: $\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{d}_j \neq \mathbf{0}$.

Векторы $\boldsymbol{e}_i$ выделяют в матрице $\boldsymbol{D}$ столбцовые миноры, покрывающие множество строк этой матрицы, т. е. содержащие по крайней мере одну единицу в каждой строке (благодаря чему и обеспечивается решение всех уравнений $\boldsymbol{d}_j = 1$). Таким образом, нахождение всех корней уравнения $D = 1$ сводится к поиску всех столбцовых покрытий матрицы $\boldsymbol{D}$, содержащих ровно по одному столбцу в каждом домене.

Задача эта весьма трудоемка, да и сама матрица $\boldsymbol{E}$ может оказаться довольно большой даже при малых размерах матрицы $\boldsymbol{D}$. К счастью, чаще приходится иметь дело с упрощенным вариантом этой задачи, в котором достаточно найти один корень, причем любой, или даже просто выяснить, существует ли хотя бы один корень. При положительном ответе на этот вопрос КНФ называется *выполнимой*, при отрицательном – *невыполнимой* (будем говорить, что в этом случае матрица $\boldsymbol{D}$ *вырождена*).

Но даже в такой постановке задача оказывается довольно трудоёмкой – легко показать, что она относится к классу NP-полных задач, примечательных тем, что время, которое приходится затрачивать на их решение, растет экспоненциально с ростом объема исходных данных. Достаточно заметить, что она представляет собой естественное обобщение известной задачи о выполнимости КНФ булевой функции, в связи с чем её также целесообразно назвать *задачей о выполнимости КНФ* (только не булевой функции, а конечного предиката).

Проверка выполнимости матрицы дизъюнктов $\boldsymbol{D}$ сводится к нахождению некоторого ее корня или доказательству того, что матрица не имеет корней. В общем случае решение этой задачи сопряжено с неизбежным перебором, который можно значительно сократить, используя комбинаторный метод обхода дерева поиска, нашедший широкое применение в компьютерной математике. Этот метод опирается на правила редуцирования (приведенные выше) и расщепления ситуаций, а также на правила возврата, нахождения решения или прекращения поиска. При проверке выполнимости матрицы дизъюнктов правила редуцирования можно дополнить еще одним правилом, применение которого иногда меняет множество корней, но не нарушает свойства выполнимости: выполнимая матрица остается выполнимой, невыполнимая – невыполнимой.

Правило 5. Если $\boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{q}$, причем столбцы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ принадлежат одному домену, то столбец $\boldsymbol{q}$ удаляется.

Наиболее полезными оказываются правила 1 и 5. Например, анализируя показанную ниже матрицу дизъюнктов $\boldsymbol{D}$, можно применить эти правила для удаления ряда столбцов и строк матрицы. Последовательно удаляются столбец $\boldsymbol{b}_1$ (покрываемый столбцом $\boldsymbol{b}_3$), столбец $\boldsymbol{c}_3$ (покрываемый столбцом $\boldsymbol{c}_1$), строка $\boldsymbol{d}_3$ (покрывающая теперь строку $\boldsymbol{d}_4$), столбец $\boldsymbol{c}_4$ (покрываемый столбцом $\boldsymbol{c}_2$), столбец $\boldsymbol{a}_3$

(покрываемый столбцом $\boldsymbol{a}_2$) и строка $\boldsymbol{d}_6$ (покрывающая $\boldsymbol{d}_1$ после уда- ления $\boldsymbol{a}_3$):

$$
\boldsymbol{D} = \begin{array}{l}
\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3\,\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3\,\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{c}_3\boldsymbol{c}_4 \\
011.001.0000 \quad \boldsymbol{d}_1 \\
100.101.0100 \quad \boldsymbol{d}_2 \\
101.010.1001 \quad \boldsymbol{d}_3 \\
100.010.1010 \quad \boldsymbol{d}_4 \\
011.010.0101 \quad \boldsymbol{d}_5 \\
010.101.1000 \quad \boldsymbol{d}_6
\end{array}.
$$

После выполнения этих сокращений получим более компакт- ную матрицу

$$
\begin{array}{l}
\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\,\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3\,\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2 \\
01.01.00 \quad \boldsymbol{d}_1 \\
10.01.01 \quad \boldsymbol{d}_2 \\
10.10.10 \quad \boldsymbol{d}_4 \\
01.10.01 \quad \boldsymbol{d}_5
\end{array}.
$$

Нетрудно убедиться в выполнимости этой матрицы. Например, она удовлетворяется вектором 10.01.01, представляющим одно из решений рассматриваемой системы дизъюнктивных уравнений (по- скольку минор, образованный тремя столбцами $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_3$ и $\boldsymbol{c}_2$, содержит не менее одной единицы в каждой строке). Следовательно, выпол- нима и исходная матрица $\boldsymbol{D}$.