Булево пространство

Основные понятия

- Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ – некоторые *булевы переменные*, т. е. переменные, принимающие значение из двухэлементного множества $E = \{0, 1\}$. Упорядоченную совокупность булевых переменных $(x_1, x_2, ... , x_n)$ можно рассматривать как n-компонентный *булев вектор* $\boldsymbol{x}$. Число компонент вектора определяет его длину, или *размерность*. При фиксации значений всех переменных получается *набор значений* переменных $(x_1, x_2, ..., x_n)$, задаваемый булевым вектором длины n, состоящим из констант 0 и 1.

- Совокупность различных n-компонентных булевых векторов $\boldsymbol{x}$ образует множество $E^{n} = E$ ´ E ´ … ´ E (n-ю степень множества E). Это множество называется *булевым пространством* (размерности n). Нетрудно подсчитать, что булево пространство размерности n содержит 2^n n-компонентных булевых вектора $\boldsymbol{x}$, т. е. мощность $|E^{n}|$ булева пространства E^{n} равна 2^n.
- Например, при $n = 3$ имеем $2^3 = 8$ различных булевых векторов, образующих булево пространство E^{3}:

- $\boldsymbol{x}_0 = 000$;
- $\boldsymbol{x}_1 = 001$;
- $\boldsymbol{x}_2 = 010$;
- $\boldsymbol{x}_3 = 011$;
- $\boldsymbol{x}_4 = 100$;
- $\boldsymbol{x}_5 = 101$;
- $\boldsymbol{x}_6 = 110$;
- $\boldsymbol{x}_7 = 111$.

- Подмножество некоторого множества $X = \{ x_1, x_2, ..., x_n\}$ может быть представлено булевым вектором размерности n (гл. 1). Например, булев вектор 1010 задает подмножество $\{ x_1, x_3\}$ множества $\{ x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Соответственно булево пространство размерности n может рассматриваться как множество всех подмножеств множества X.

- *Мерой булева пространства* является расстояние между любыми его элементами. Расстояние между двумя элементами определяется числом одноименных компонент пары сравниваемых элементов, имеющих несовпадающие значения (его принято называть *расстоянием по Хэммингу*). Чтобы найти расстояние в булевом пространстве между двумя булевыми векторами $\boldsymbol{x}_i$ и $\boldsymbol{x}_j$, необходимо взять покомпонентную дизъюнкцию с исключением (сумму по модулю два) этих векторов и подсчитать число единиц в ней. Это число и будет расстоянием по Хэммингу между булевыми векторами $\boldsymbol{x}_i$ и $\boldsymbol{x}_j$.
- Например, расстояние по Хэммингу между булевыми векторами $\boldsymbol{x}_i = 1\ 1\ 0\ 0$ и $\boldsymbol{x}_j = 1\ 0\ 0\ 1$ равно 2, так как

- $1\ 1\ 0\ 0 \oplus 1\ 0\ 0\ 1 = 0\ 1\ 0\ 1.$

- Элементы, расстояние между которыми равно 1, называются *соседними*. Соседние элементы (и соответственно булевы векторы) отличаются ровно одной компонентой.
- Например, булевы векторы 1 1 0 0 и 1 0 0 0 являются соседними, 1 1 0 0 и 1 0 1 0 – нет.

Отношения между булевыми векторами

Считая, что единица больше нуля (1 > 0), можно определить следующие отношения между булевыми векторами одной размерности:
равенства: $\boldsymbol{x}_p = \boldsymbol{x}_q$, если их одноименные компоненты равны,
т.е. $x_p^i = x_q^i$ для всех i;не меньше: $\boldsymbol{x}_p \geq \boldsymbol{x}_q$, если $x_p^i \geq x_q^i$ для всех i;больше: $\boldsymbol{x}_p > \boldsymbol{x}_q$,
если $x_p^i \geq x_q^i$ для всех i и существует такое j,что $x_p^j > x_q^j$.
Аналогично определяются отношения «не больше» ($\boldsymbol{x}_p \leq \boldsymbol{x}_q$) и «меньше» ($\boldsymbol{x}_p < \boldsymbol{x}_q$).
Например, булев вектор 0 1 1 больше векторов 0 0 0, 0 0 1, 0 1 0,
но меньше вектора 1 1 1 и не сравним с векторами 1 0 0, 1 0 1, 1 1 0.

Интервалы булева пространства

- Троичный вектор *u* интерпретируется как совокупность $I(u)$ всех таких булевых векторов, которые получаются из него всевозможными подстановками значений 0 и 1 вместо неопределенного значения «–». Если в троичном векторе имеется *k* значений «–», то он порождает таким образом 2^k булевых вектора.
- Например, троичный вектор – – 0 0 при такой интерпретации рассматривается как интервал пространства четырех булевых переменных, состоящий из следующих элементов:
- **0 0** 0 0 (минимальный элемент интервала);
- **0 1** 0 0;
- **1 0** 0 0;
- **1 1** 0 0 (максимальный элемент интервала).

- Троичный вектор $\boldsymbol{u}$ задает некоторую элементарную конъюнкцию, которая легко находится, если принять, что значениями 0 и 1 в векторе отмечены переменные, входящие в конъюнкцию соответственно со знаком отрицания и без него, а значением «–» отмечены переменные, отсутствующие в конъюнкции. Соответствующий вектору $\boldsymbol{u}$ интервал $I(\boldsymbol{u})$ булева пространства является характеристическим множеством этой элементарной конъюнкции. Элементарная конъюнкция i-го ранга (содержащая i букв) представляется интервалом i-го ранга. Таким образом, *ранг* интервала определяется числом компонент его векторного представления, имеющих значение 1 или
- 0. Например, интервал, представляемый троичным вектором – – 0 – 1, имеет ранг 2 и задает конъюнкцию x_3 x_5. Интервал ранга m булева пространства E^n состоит из 2^{n-m} элементов. Он задается $(n – m)$-мерным подкубом на n-мерном гиперкубе.

Отношения между векторами и интервалами.

- Отношение *равенства* векторов $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ определяется стандартным образом как покомпонентное равенство.
- Троичные векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ ортогональны по i-й компоненте, если и только если i-я компонента принимает значение 0 в одном из векторов и значение 1 – в другом. Векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ *ортогональны* ($\boldsymbol{u}$ ort $\boldsymbol{v}$), если они ортогональны, по крайней мере, по одной из компонент. Если же векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ неортогональны, то они находятся в отношении *пересечения* ($\boldsymbol{u}$ ins $\boldsymbol{v}$). В частности, неравные булевы векторы всегда ортогональны. Например,

- 0 – 1 1– – –0 0 ort 0 1 0 1 – 0 – 1 0,
- 0 – 1 1– – –0 0 ins 0 1 1 – – 0 – – 0,
- 0 – 1 1– – –0 0 ort 0 – 0 1 – 0 – 0 0,
- 0 – 1 1– – –0 0 ins 0 0 1 1 0 1 0 0 0.

- Вектор ***u*** *поглощает* вектор ***v*** (***u*** abs ***v***), если и только если все компоненты вектора ***u***, значения которых отличны от «–», совпадают с соответствующими компонентами вектора ***v***. Можно заметить, что если компонента поглощаемого вектора имеет значение «–», то соответствующая компонента поглощающего вектора также имеет значение «–». Например,
- 0 – 1 1 – – – 0 0 abs 0 1 1 1 – 0 – 0 0,
- 0 – 1 1 – – – 0 0 abs 0 – 1 1 – – – 0 0,
- 0 – 1 1 – – – 0 0 abs 0 0 1 1 1 0 1 0 0.

- В общем случае троичный вектор ***u*** поглощает все векторы (и только их), которые образуются из него подстановкой на места всех символов «–» всевозможных комбинаций из 0, 1 и «–». Таким образом, если в троичном векторе имеется k значений «–», то он поглощает 3^k различных вектора (булевых и троичных). Например, вектор 0 1 – – поглощает векторы

- 0 1 **– –**,
- 0 1 **– 0**,
- 0 1 **– 1**,
- 0 1 **0 –**,
- 0 1 **1 –**,
- 0 1 **0 0**,
- 0 1 **0 1**,
- 0 1 **1 0**,
- 0 1 **1 1**.

- Будем говорить, что векторы ***u*** и ***v*** находятся в отношении *смежности* (***u*** adj ***v***), если и только если они ортогональны и притом только по одной из компонент. В некоторых случаях, если есть необходимость в уточнении этого отношения, говорят, что векторы ***u*** и ***v*** смежны по *i*-й компоненте ($\boldsymbol{u}\ \mathrm{adj}_i\ \boldsymbol{v}$).
- Если векторы ***u*** и ***v*** смежны по некоторой *i*-й компоненте и, кроме того, равны по значениям всех остальных компонент, то они находятся в отношении *соседства* (***u*** nei ***v***) или соседства по *i*-й компоненте ($\boldsymbol{u}\ \mathrm{nei}_i\ \boldsymbol{v}$).

- Например,
- $0 - 1\ 1 - - - 0\ 0 \quad \mathrm{adj} \quad 0\ 1\ 1\ 1 - 0 - 1\ 0$;
- $0 - 1\ 1 - - - 0\ 0 \quad \mathrm{adj}_3 \quad 0 - 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0$;
- $0 - 1\ 1 - - - 0\ 0 \quad \mathrm{nei} \quad 0 - 1\ 1 - - - 0\ 1$;
- $0 - 1\ 1 - - - 0\ 0 \quad \mathrm{nei}_4 \quad 0 - 1\ 0 - - - 0\ 0$.

- Рассмотрим примеры.
- Пусть даны два булевых вектора 00010101 и 00101111. Определить в каких отношениях (равенства, больше, меньше, ортогональности, соседства, смежности) находятся данные векторы.

0	0	0	1	0	1	0	1
=	=	$<$	$>$	$<$	=	$<$	=
0	0	1	0	1	1	1	1

- Векторы несравнимы, т.к. стрелочки смотрят в разные стороны.

0	0	***0***	***1***	***0***	1	***0***	1
0	0	***1***	***0***	***1***	1	***1***	1

Векторы ортогональны по 4-м компонентам (3, 4, 5, 7).

Т.к. векторы ортогональны по нескольким компонентам, то они не являются ни смежными, ни находятся в состоянии соседства.

Пусть даны два булевых вектора 01010001 и 00010001

0	1	0	1	0	0	0	1
=	>	=	=	=	=	=	=
0	0	0	1	0	0	0	1

Первый вектор больше второго.

0	***1***	0	1	0	0	0	1
0	***0***	0	1	0	0	0	1

Векторы ортогональны по второй компоненте (ort).
Т.к. векторы ортогональны только по одной компоненте, то они находятся в отношении смежности – смежны по второй компоненте adj_2.
Т.к. векторы смежны по одной компоненте, и остальные их компоненты равны, то они находятся в отношении соседства по 2й компоненте, т.е. nei_2.

Теперь рассмотрим пример с троичными векторами.

- Даны два вектора 0 – – – 1 1– – и 1–10 – 0 0 1. Определить, в каких отношениях (равенства, пересечения, ортогональности, поглощения, соседства, смежности) они находятся.

0	–	–	–	1	***1***	–	–
1	–	1	0	–	***0***	0	1

Ортогональны ort по двум компонентам (отсюда следует, что НЕ соседние и НЕ смежны), не равны.

Даны два вектора 0 – – – 1 1– – и 0–10 1 1 0 1.

0	–	–	–	***1***	***1***	–	–
0	–	1	0	***1***	***1***	0	1

Векторы не равны, не ортогональны, а значит не соседние и не смежные и пересекаются (ins). Находятся в отношении поглощения (abs), т.к. все явные компоненты (красным) равны, а неопределенная компонента второго вектора соответствует неопределённой компоненте первого вектора.

Рассмотрим пример на определение интервала.

- Даны несколько векторов. Нужно определить, образуют ли они интервал, и, если да, то какой?

- {1 0 0 1, 1 1 0 1, 1 0 0 0, 1 1 0 0}

- Чтобы решить этот пример, нужно просто выделить одинаковые компоненты во всех векторах. В данном случае это первая и третья компоненты. Первая равна 1, третья – 0. Таким образом, троичный вектор, который мы можем построить, исходя из наших данных, будет выглядеть следующим образом:

- 1 – 0 –

- Ещё один пример:
- {1 0 0 1, 1 1 1 1, 1 0 0 0, 0 1 0 0}
- Эти векторы не образуют интервал, т.к. хотя бы в одном из них есть компонета, которая не совпадёт с другими на той же позиции.
- Ещё один пример:
- {1 0 0 1, 1 1 1 1, 1 0 0 0, 1 1 1 0}
- Эти векторы образуют интервал, т.к. первая компонента совпадает у них у всех. Троичный вектор, соответствующий интервалу, запишется следующим образом:
- 1 – – –

Способы представления булевых функций

- *Табличная форма*. Это уже знакомая нам форма представления булевой функции, когда мы записываем все возможные значения аргументов и сами значения функции.
- Возьмём функцию

  $f(x, y) = x \oplus y$
- Табличная форма:

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- *Матричная форма*. Это когда берутся только те значения аргументов, при которых функция принимает значение 1. Функция $f(x, y) = x \oplus y$,заданная в матричной форме будет выглядеть:

x	y
0	1
1	0

- Рассмотрим ещё один пример.
- Пусть $f(x, y, z) = (x \oplus y) \vee z$
- Табличная форма:

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

- Матричная форма:

x	y	z
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	1

Троичная матрица:

x	y	z
–	–	1
–	–	0

или

x	y	z
0	–	–
1	–	–

- Представление булевой функции троичной матрицей не однозначно: для одной и той же булевой матрицы существует в общем случае не одна эквивалентная ей троичная матрица.
- Две троичные матрицы *эквивалентны*, если они эквивалентны одной и той же булевой матрице, т. е. если они представляют одну и ту же булеву функцию.

• *Векторное задание*. При фиксированном упорядочении наборов значений аргументов (как правило, они упорядочиваются в соответствии с их позиционными двоичными кодами) булева функция полностью определяется второй частью ее табличного задания – вектор-столбцом ее значений, т. е. булева функция n аргументов задается посредством 2^n-компонентного булева вектора.

• Например, функция $f(x, y, z) = (x \oplus y)\, z$ в векторном виде будет выглядеть так:

• 0 0 0 1 0 1 0 0

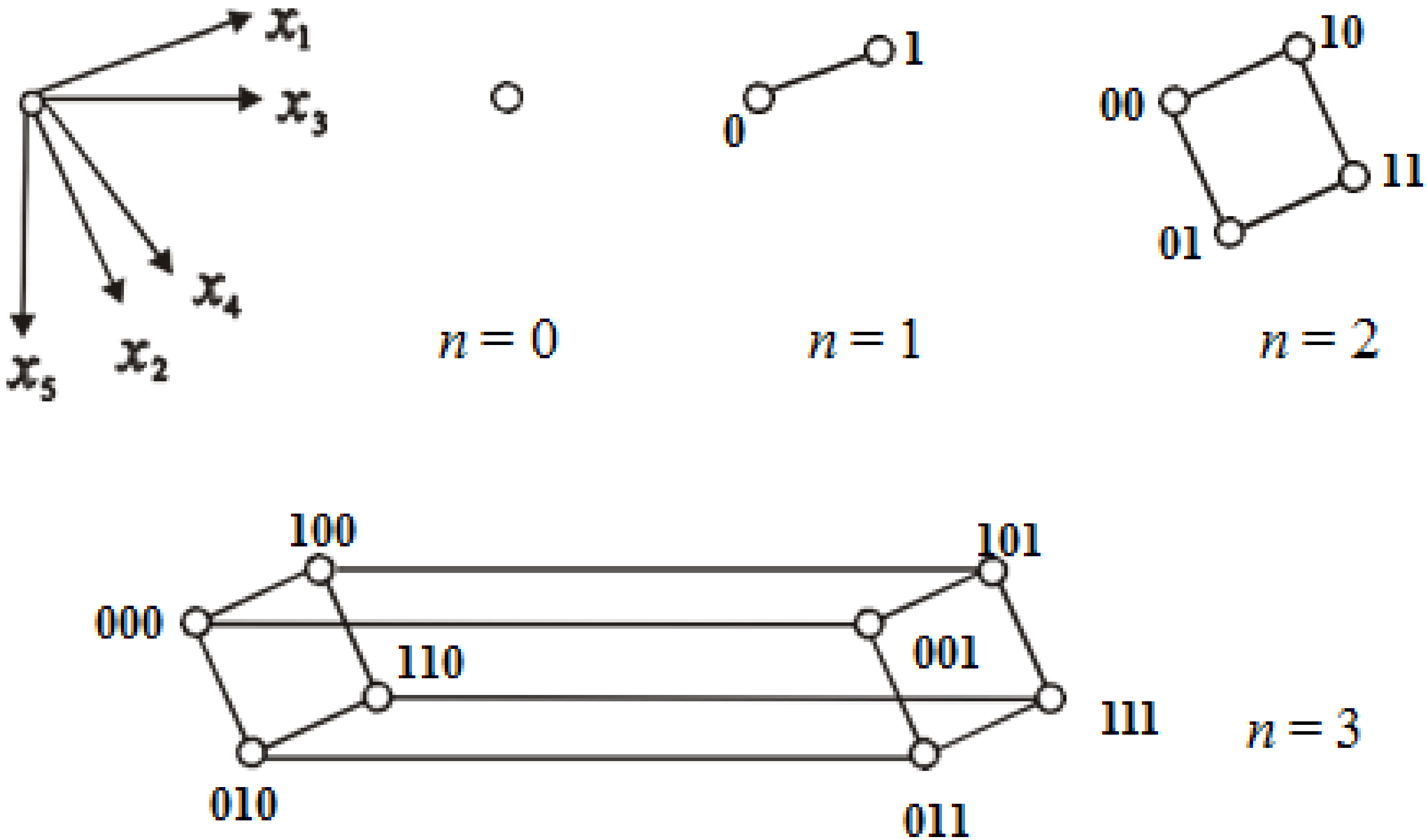
Гиперкуб

- Булево пространство E^n можно представить в виде n-мерного куба – *гиперкуба*. 2^n вершин гиперкуба задают элементы булева пространства E^n, а $n\,2^{n-1}$ ребер связывают соседние элементы.

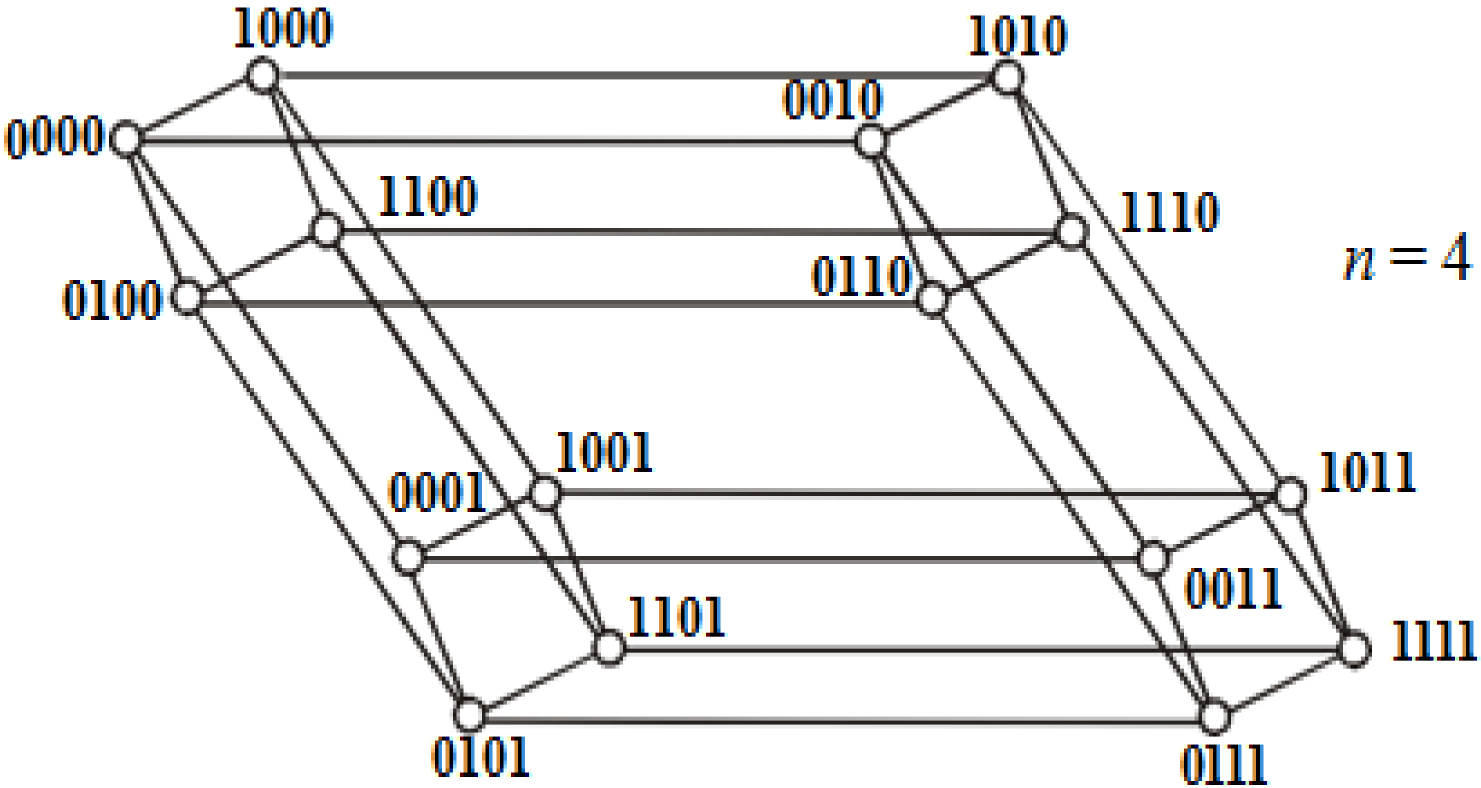
Получение графического изображения гиперкуба.

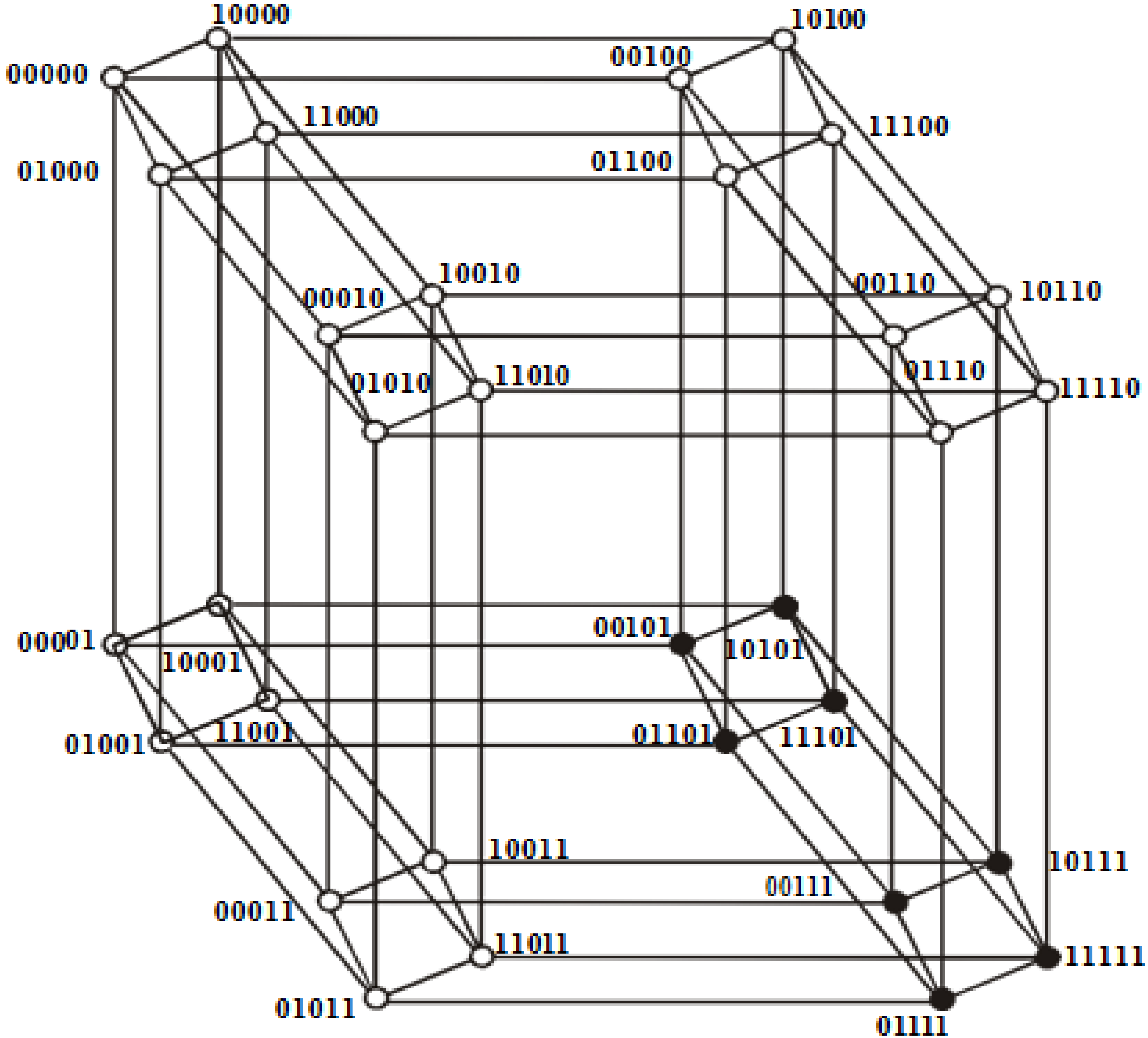
- Графическое изображение гиперкуба получается итерационным методом удвоения размерности, начиная с 0-мерного куба. 0-мерный куб представляется одной вершиной, одномерный куб имеет две вершины, соответствующие элементам 0 и 1 булева пространства E^1 и соединенные ребром.

- Двумерный куб имеет четыре вершины (в два раза больше, чем одномерный), соответствующие элементам 0 0, 1 0, 1 1 и 0 1 булева пространства E^2, и четыре $(2 \cdot 2^1)$ ребра, соединяющие вершины, представляющие соседние элементы (рис. 22.1). В общем случае изображение $(n + 1)$-мерного куба получается из изображения n-мерного куба смещением его в некотором направлении, условно ортогональном ранее использованным, и включением в новое изображение как исходного, так и смещенного изображения вместе с трассами вершин, проходимыми при смещении.



x_1
x_3
x_4
x_2
x_5
$n = 0$
0
1
$n = 1$
00
10
11
01
$n = 2$
100
101
000
001
110
111
010
011
$n = 3$

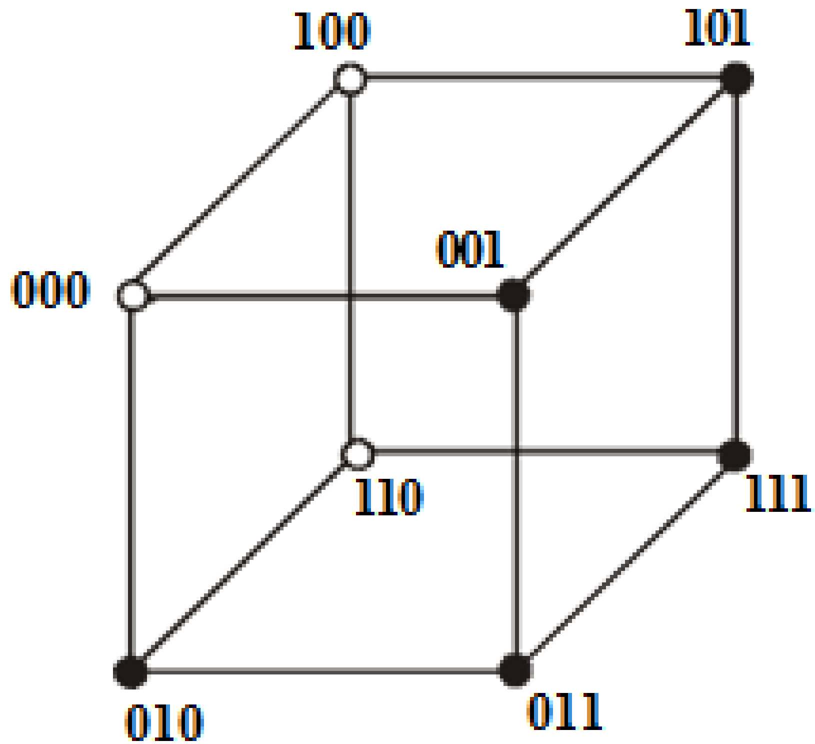

1000
1010
0000
0010
1100
1110
0100
0110
1001
1011
0001
0011
1101
1111
0101
0111
$n = 4$


10000
10100
00000
00100
11000
11100
01000
01100
10010
00010
00110
10110
01010
11010
01110
11110
00001
00101
10001
10101
01101
11101
11001
01001
10011
10111
00111
00011
11011
11111
01011
01111

- В левом верхнем углу показаны направления движения при переходе от одной вершины гиперкуба к другой, соседней с ней, и наименования компонент булева вектора $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, изменяющих свое значение с 0 на 1.

- В n-мерном кубе (для любого n) можно выделять подкубы – связные подмножества вершин. Наименьшим подкубом является любая вершина – 0-мерный подкуб n-мерного куба. Одномерный подкуб – пара вершин, связанных ребром, трехмерный подкуб – куб, состоящий из восьми (23) вершин. Наибольшим подкубом является сам n-мерный куб.
- Вершина n-мерного куба представляет n-мерный булев век- тор – элемент булева пространства E^n. Подкуб, в отличие от вершины, задает подмножество булевых векторов – элементов пространства E^n. Его удобно задавать n-мерным троичным вектором, в котором i-я компонента имеет определенное значение (0 или 1), если такое значение имеют i-компоненты векторов всех вершин подкуба, в противном случае i-й компоненте присваивается неопределенное значение «–», трактуемое как «0 или 1».
- Например, трехмерный подкуб, состоящий из зачерненных вершин пятимерного куба на рисунке выше, задается троичным вектором
- – – 1 – 1.

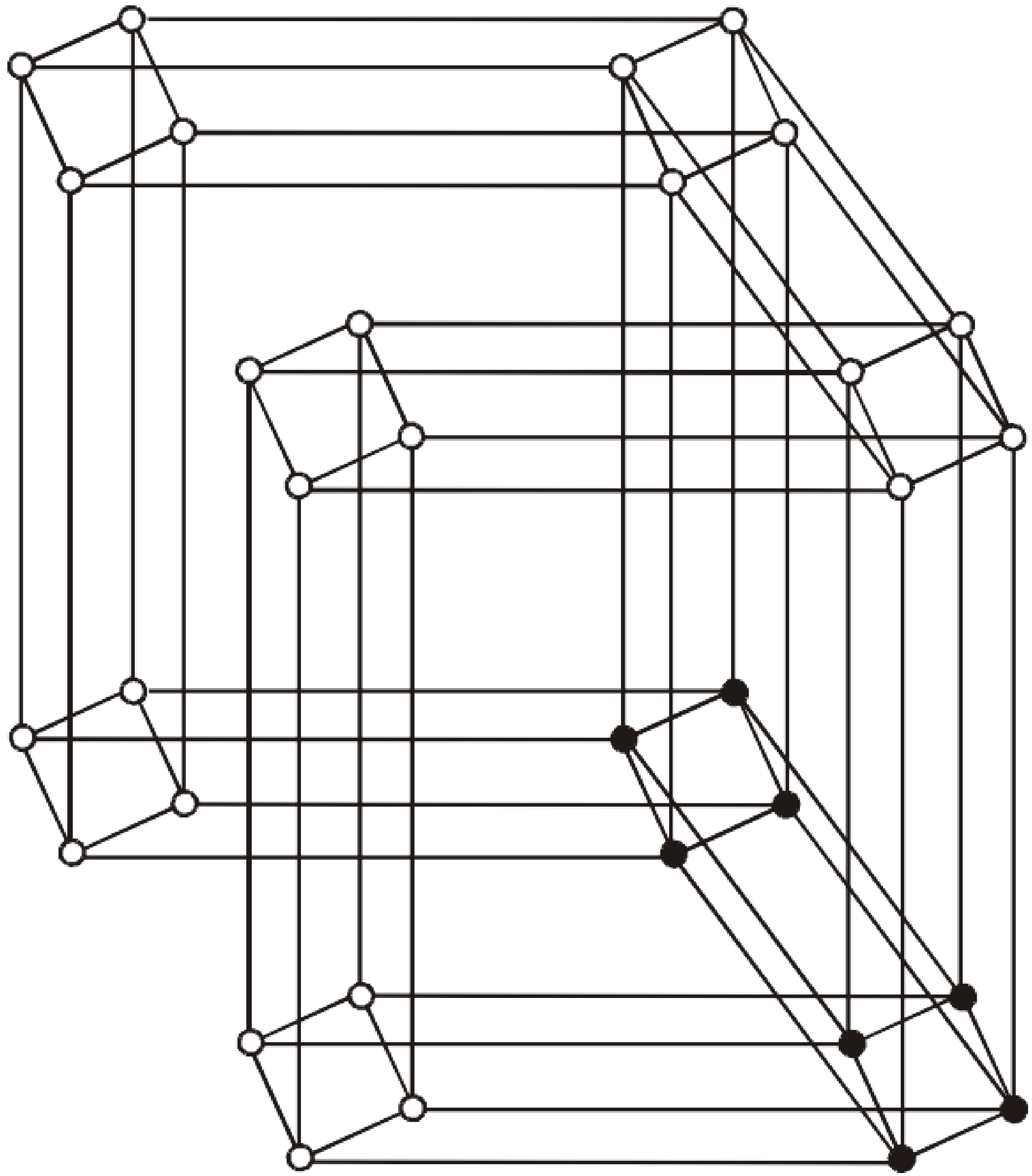
- Теперь мы добрались до ещё одного способа задания булевой функции.
- Задание функции на кубе.
-
- Дана функция $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$,
- Нужно задать её на кубе. Для этого нарисуем трёхмерный куб, т.к. переменных у нас три, поэтому размерность булева пространства будет 3.

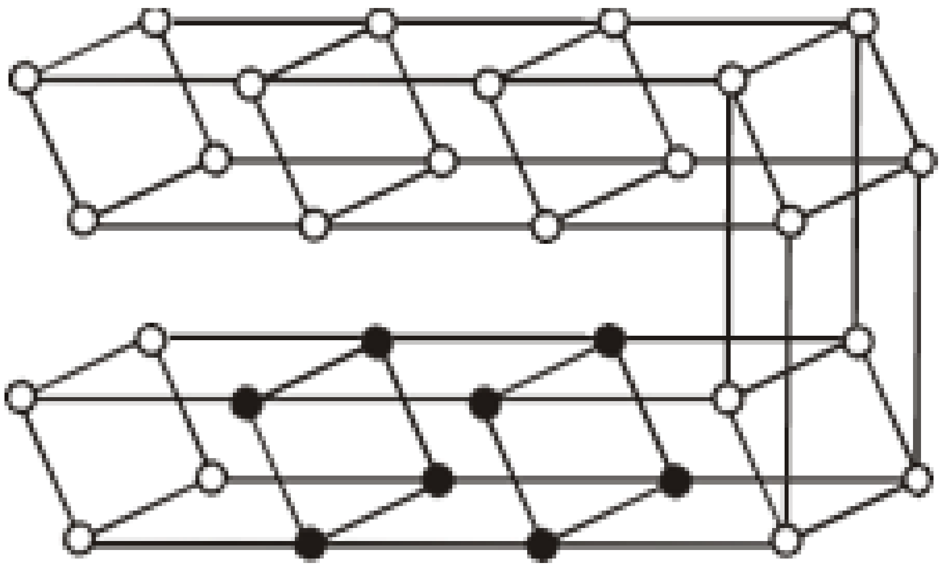


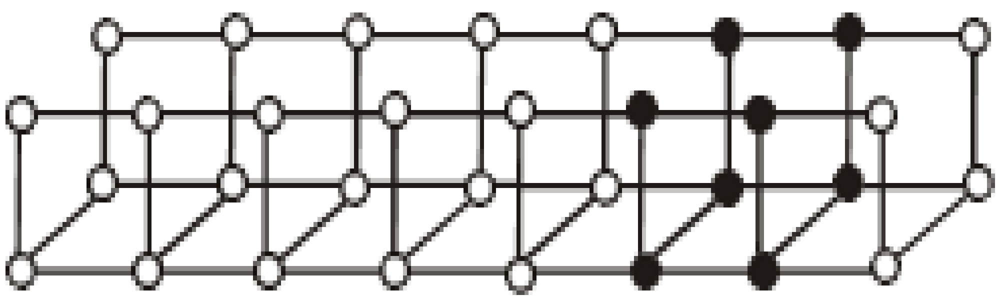
Чёрным выделены вершины куба, в которых функция равна 1. Т.е., обозначены элементарные полные конъюнкции.

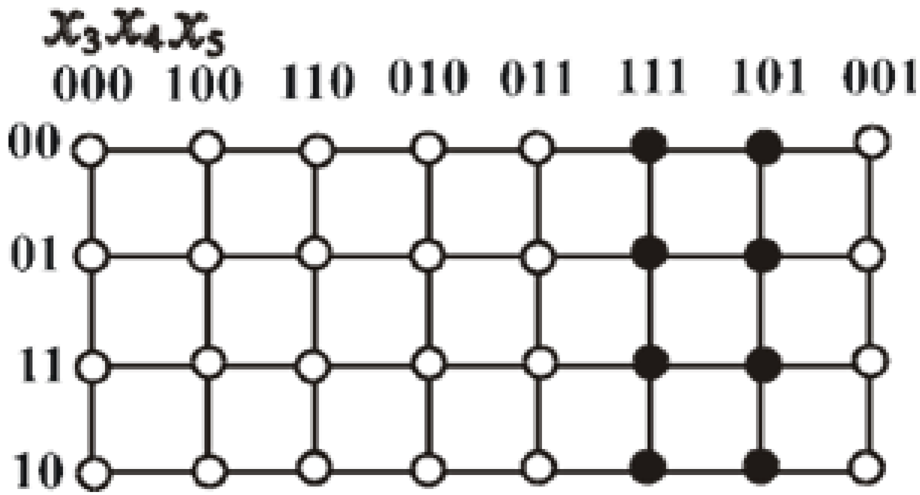
Карта Карно

- Двумерная таблица, которая является *разверткой гиперкуба* на плоскость, называется в литературе *картой Карно*. Карту Карно, представляющую развертку n-мерного гиперкуба, будем называть далее n-мерной. В каждой ее клетке показан соответствующий элемент булева пространства E^n.







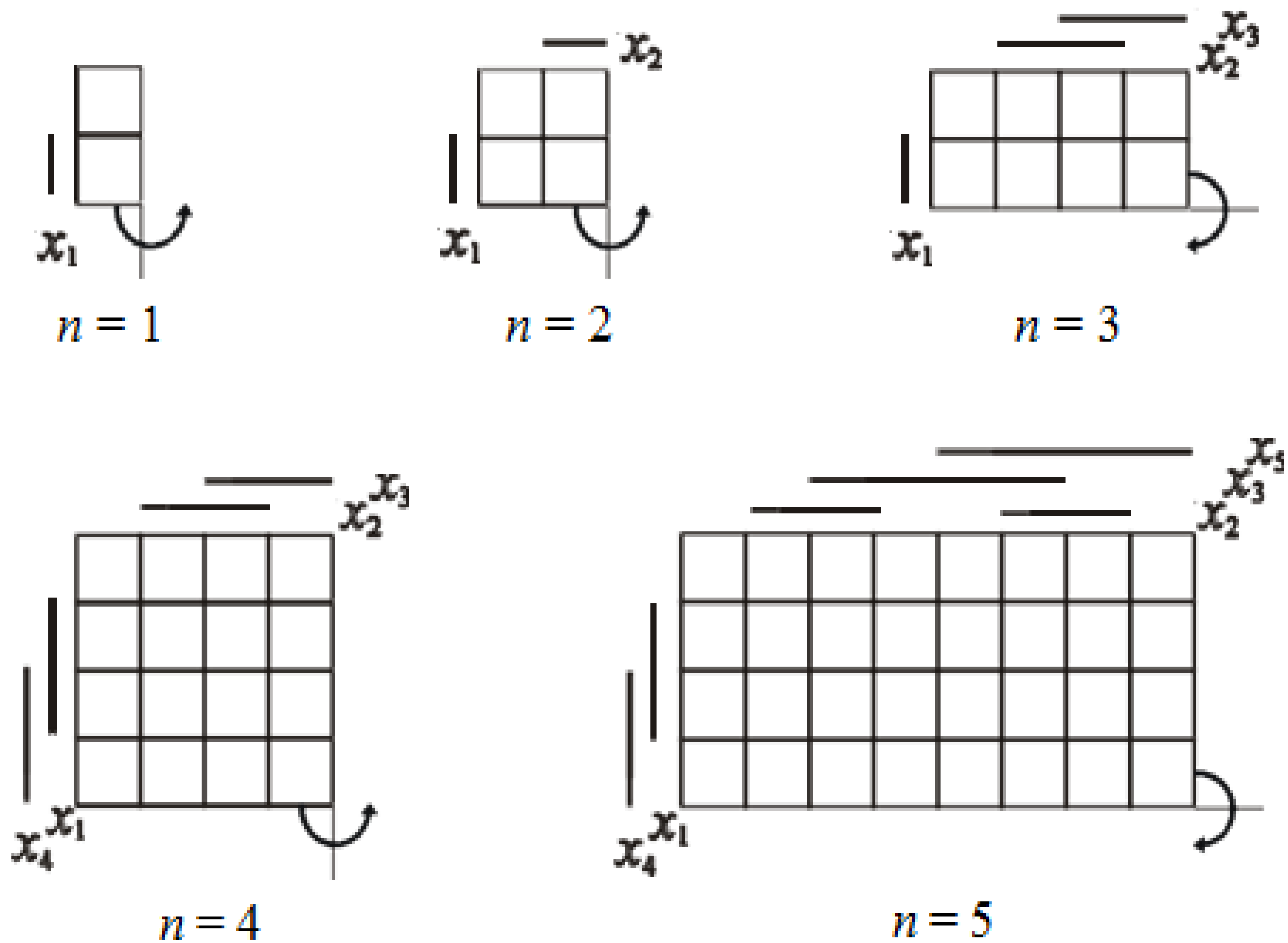


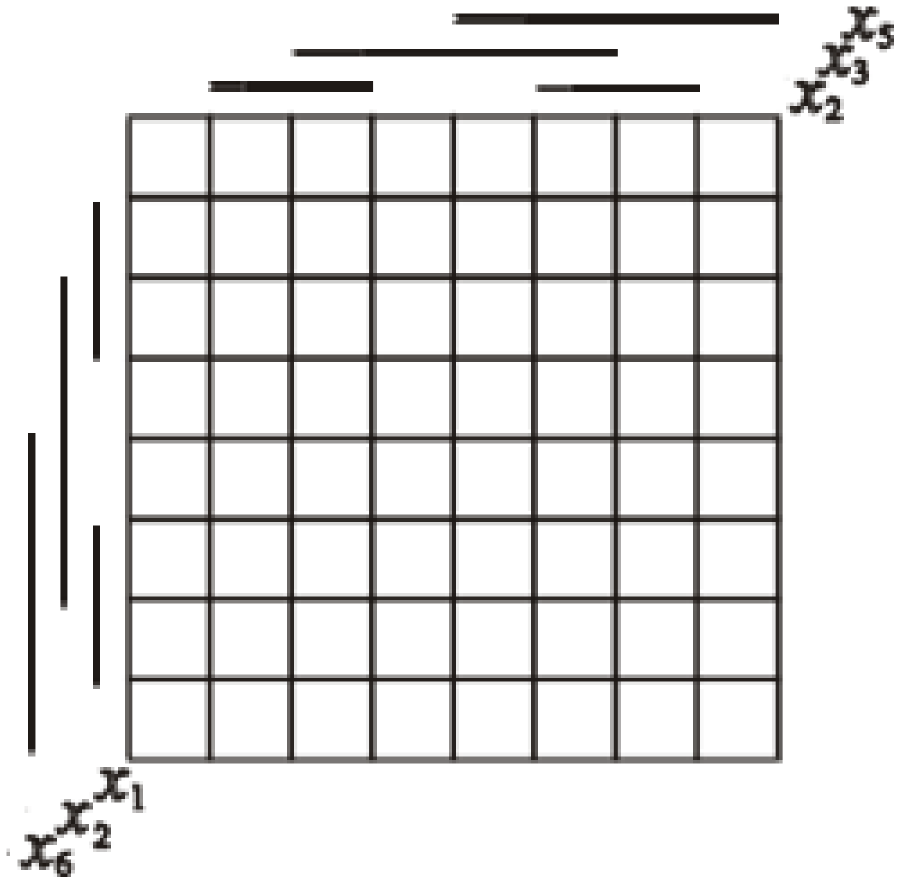
x_5 x_4 x_3

00000	00100	00110	00010	00011	00111	00101	00001
01000	01100	01110	01010	01011	01111	01101	01001
11000	11100	11110	11010	11011	11111	11101	11001
10000	10100	10110	10010	10011	10111	10101	10001

x_1 x_2

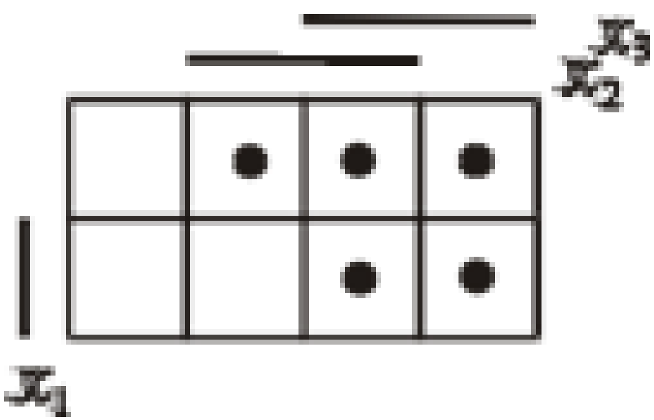
- n-мерная карта Карно может быть получена из (n-1)- мерной ее симметричным отображением:



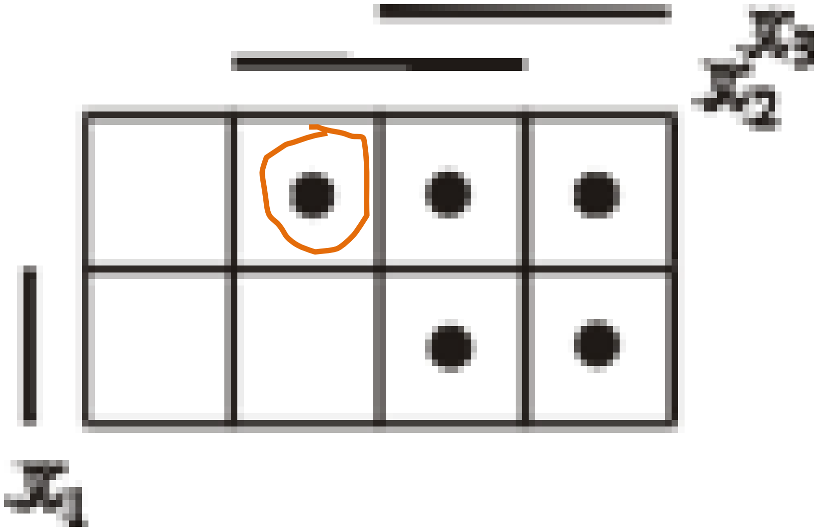


$n = 6$

- Ещё один способ задания функции – на карте Карно.
- Рассмотрим пример:
- $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$,
- На карте Карно эта функция будет выглядеть так:



- Там, где черта, обозначающая переменную, есть, там переменная принимает значение 1, если нет, то 0.



Клетка, выделенная оранжевым, представляет собой элементарную конъюнкцию $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$.