ПЗ11.

№1. а) $\forall x \forall y\ (P(x) \wedge P(y) \wedge P(x,y) \rightarrow (x=y))$;

„Для всех x и y, где x и y – простые числа и x делится на y, следует, что x равен y."

Зона действия кванторов:

$\forall x$ действует на $\forall y\ (P(x) \wedge P(y) \wedge P(x,y) \rightarrow (x=y))$

ранг = 2 т.к. в подчинённой ф-ле есть ещё один квантор $\forall y$.

$\forall y$ действует на $P(x) \wedge P(y) \wedge P(x,y) \rightarrow (x=y)$

ранг = 1 т.к. нет подчинённых ещё кванторов.

Кванторная глубина формулы = 2 т.к. величина наиб. квантора равна 2.

б) $\forall x\ (\overline{\exists} y [E(y,z) \rightarrow Q(x,y)])$

„Для всех x не существует такого, что исходя из чётности y и z следует, что x и y рациональные числа"

Зона действия:

$\forall x$ действует на $\overline{\exists} y [E(y,z) \rightarrow Q(x,y)]$

ранг = 2 т.к. в подчинённой ф-ле есть квантор $\overline{\exists} y$

$\overline{\exists} y$ действует на $[E(y,z) \rightarrow Q(x,y)]$

ранг = 1 т.к. нет подчинённых кванторов

Кванторная глубина = 2

№2: 1) „Детали, входящие в оба механизма, выполнены из чугуна":

$\forall d_i\, P(d_i),\ d_i \in (D_1 \cap D_2)$

2) „Во втором механизме нет деталей из чугуна";

$\overline{\forall} d_i\, P(d_i),\ d_i \in D_2$

N3: 1). „По крайней мере один студент не имеет друзей в группе"

$\exists x \forall y\ (\bar{P}(x,y),\ x \neq y)$

2). „По крайней мере один студент явл. другом для всех студентов группы".

$\exists x \forall y\ (P(x,y),\ x \neq y)$;

N4. 1). „Каждый человек имеет хотя бы одного друга"

$\forall x \exists y\ (P(x,y),\ x \neq y)$

2) „Число a наз. пределом..."

$a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon,\ \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

3) „Ф-ия непрерывна..."

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0,\ |f(x_1..x_n) - f(x'_1..x'_n)| < \varepsilon \Leftarrow |x_1 - x'_1| < \delta, \ldots, |x_n - x'_n| < \delta.$

N5: 1) $\forall x\ \overline{(\forall y\, U(x,y) \wedge \exists z\, V(x,z))}$

$\forall x\ (\overline{\forall y}\, U(x,y) \vee \overline{\exists z}\, V(x,z))$

$\forall x\ (\exists y\, \overline{U}(x,y) \vee \forall z\, \overline{V}(x,z))$

2) $\forall x\ \overline{(\forall y\, U(x,y) \to \exists z\, V(x,z) \to \exists a\, P(x,a))}$

$\forall x\ (\overline{\forall y}\, U(x,y) \hookrightarrow \overline{\exists z}\, V(x,z) \hookrightarrow \exists a\, P(x,a))$

обратная импликация

$\forall x\ (\exists y\, \overline{U}(x,y) \hookrightarrow \forall z\, \overline{V}(x,z) \hookrightarrow \exists a\, P(x,a))$

3) $\forall x\ (\overline{\forall y}\, U(x,y) \to \overline{\exists z}\, V(x,z))$

$\forall x\ (\exists y\, \overline{U}(x,y) \to \forall z\, \overline{V}(x,z))$ (замена импл. на дизъюнкцию);

2) Второй вариант: [illegible]

2) $\forall x\, \overline{(\forall y\, H(x,y) \to \exists z\, V(x,z) \to \overline{\exists a}\, P(x,a)})$

$\forall x\, (\overline{\forall y}\, H(x,y) \to \overline{\exists z}\, V(x,z) \to \exists a\, P(x,a))$

$\forall x\, (\forall y\, H(x,y) \vee \overline{\overline{\exists z}}\, V(x,z) \vee \exists a\, P(x,a))$

$\forall x\, (\forall y\, H(x,y) \vee \exists z\, V(x,z) \vee \exists a\, P(x,a))$

3) $\forall x\, (\overline{\forall y}\, H(x,y) \to \overline{\exists z}\, V(x,z))$

$\forall x\, (\forall y\, H(x,y) \vee \overline{\exists z}\, V(x,z))$

$\forall x\, (\forall y\, H(x,y) \vee \forall z\, \overline{V}(x,z))$

№6. 1) $\forall x \forall y\, P(x,y)$

$M_x = \{a, b\}$

$M_y = \{0, 1\}$;

$P(a,0) \wedge P(b,0) \wedge P(a,1) \wedge P(b,1)$

2) $\forall x \exists y\, P(x,y)$

$(P(a,1) \vee P(a,0)) \wedge (P(b,1) \vee P(b,0))$

3) $\exists x \exists y\, P(x,y)$

$(P(a,1) \vee P(a,0)) \vee (P(b,1) \vee P(b,0))$

№7. 1) $(\exists x P(x) \to \forall y Q(y)) \to R(z)$;

Зоны действия кванторов:

$\exists x$ зона дей-я $P(x)$; ранг 1

$\forall y$ зона дей-я $Q(y)$; ранг 1

Связанные переменные: x, y т.к. они есть в кванторах;

Свободная переменная: z

Кванторная глубина ф-лы: 1.

Преобразование к пред. норм. виду.

1) Избавимся от импликации:

$(\overline{\exists x} P(x) \vee \forall y Q(y)) \to R(z)$

$\overline{(\overline{\exists x} P(x) \vee \forall y Q(y))} \vee R(z)$

$(\exists x P(x) \wedge \overline{\forall y} Q(y)) \vee R(z)$

$(\exists x P(x) \wedge \exists y \overline{Q}(y)) \vee R(z)$

$\exists x \exists y\, (P(x) \wedge \overline{Q}(y)) \vee R(z)$

2) $\exists x \forall y (\exists z\, P(x,z) \land P(y,z)) \to \exists u\, R(x,y,u)$

Зона действия кванторов:

$\exists x$ действует на $\forall y (\exists z\, P(x,z) \land P(y,z))$; ранг 3;

$\forall y$ действует на $(\exists z\, P(x,z) \land P(y,z))$; ранг 2

$\exists u$ действует на $R(x,y,u)$; ранг 1.

Связанные переменные: x, y, z, u

Свободных: нет.

Кванторная глубина ф-лы: 3.

Пред. норм-я форма:

$\exists x \forall y \overline{(\exists z\, P(x,z) \land P(y,z))} \lor \exists u\, R(x,y,u)$

$\exists x \forall y (\overline{\exists z}\, P(x,z) \lor \overline{P}(y,z)) \lor \exists u\, R(x,y,u)$

$\exists x \forall y (\forall z\, \overline{P}(x,z) \lor \overline{P}(y,z)) \lor \exists u\, R(x,y,u)$

и.