Неплохо и, главное, коротко о предикатах и кванторах

https://spravochnick.ru/informatika/algebra_logiki_logika_kak_nauka/predikaty_i_kvantory/#kvantory

1. Прочитать выражения, указать зоны действия кванторов, перечислить связанные и свободные предметные переменные формул:

$\exists x(E(x) \wedge P(x)) \wedge \overline{\exists} x\{[E(x) \wedge P(x)] \wedge \exists y[(x \neq y) \wedge E(y) \wedge P(y)]\}$, где предикат $P(x)$ обозначает «x – простое число», $E(x)$ – «x – четное число»;

Решение.

Данное выражение читается следующим образом:

«Среди всех чисел существует простое число, являющееся чётным, и не существует двух одновременно простых и чётных чисел. »

Зоны действия кванторов:

$\exists \boldsymbol{x}$ действует на $E(x) \wedge P(x)$; ранг квантора – 1, т.к. нет подчинённых ему кванторов.

$\overline{\exists} \boldsymbol{x}$ действует на $\{[E(x) \wedge P(x)] \wedge \exists y[(x \neq y) \wedge E(y) \wedge P(y)]$, ранг квантора – 2, т.к. в подчиненной формуле присутствует ещё одни квантор $\exists y$.

$\exists \boldsymbol{y}$ действует на $[(x \neq y) \wedge E(y) \wedge P(y)]$, ранг квантора равен 1, т.к. нет подчинённых ему кванторов.

Кванторная глубина формулы

$\exists x(E(x) \wedge P(x)) \wedge \overline{\exists} x\{[E(x) \wedge P(x)] \wedge \exists y[(x \neq y) \wedge E(y) \wedge P(y)]\}$

будет величина её наибольшего квантора, т.е. в данном случае кванторная глубина формулы равна 2.

Для самостоятельного решения:

$\forall x\ \forall y\ (P(x) \wedge P(y) \wedge R(x,y) \rightarrow (x = y))$, где предикат $P(x)$ обозначает «x – простое число», $R(x,y)$ – «x делится на y»;

$\forall x\ (\overline{\exists} y[E(y,z) \rightarrow Q(x,y)])$;

$\forall x\ (P(x) \rightarrow \exists y\ (S(y, z) \vee Q))$.

2. Пусть D_1 и D_2 – множества деталей d_i двух механизмов, предикат $P(d_i)$ обозначает «деталь d_i – выполнена из чугуна». Записать на языке логики предикатов следующие высказывания:

– «Все детали первого механизма выполнены из чугуна»;

Решение

Слово «все» в данном высказывании подразумевает использования квантора общности ∀. Значит, выражение, записанное в терминах логики предикатов будет выглядеть следующим образом:

$\forall \boldsymbol{d_i}\ \boldsymbol{P(d_i)},\ \boldsymbol{d_i \in D_1}$

$\boldsymbol{P(d_i)}$ **–** одноместный предикат, т.к. зависит только от одной переменной и принимает значение *истина*, если деталь сделана из чугуна.

– «Все детали второго механизма выполнены из чугуна»;

–

$\forall \boldsymbol{d_i}\ \boldsymbol{P(d_i)},\ \boldsymbol{d_i \in D_2}$

– «Хотя бы одна деталь, входящая в первый механизм, выполнена из чугуна»;

Слова «хотя бы одна деталь» в данном высказывании подразумевает использования квантора существования ∃. Другими словами это можно выразить: существуют такие детали или существует деталь или есть хотя бы одна деталь. Значит, выражение, записанное в терминах логики предикатов будет выглядеть следующим образом:

$\exists \boldsymbol{d_i}\ \boldsymbol{P(d_i)},\ \boldsymbol{d_i \in D_1}$

Для самостоятельного решения:

– «Детали, входящие в оба механизма выполнены из чугуна»;

– «Во втором механизме нет деталей из чугуна»;

– «Хотя бы одна деталь, входящая в какой-нибудь механизм выполнена из чугуна».

3. Дан предикат $P(x,y)$, где x и y студенты из одной группы: $P(x,y) = и$, если x и y являются друзьями. Выразить следующие высказывания формулами логики предикатов:

– «Каждый студент имеет хотя бы одного друга в своей группе»;

Решение

$P(x,y)$ – двухместный предикат, т.к. его значение зависит от двух переменных. «Каждый» подразумевает использование квантора общности, «хотя бы одного» - квантора существования. Следовательно, выражение будет выглядеть так:

$\forall x \exists y (P(x,y),\ x \neq y)$

Для самостоятельного решения:

– «По крайней мере один студент не имеет друзей в группе»;

– «По крайней мере один студент является другом для всех студентов группы».

4. Выразить формулами логики предикатов:

– «Существуют люди, не имеющие друзей»;

Решение

За x и y обозначим людей из множества всех людей. $P(x,y) = u$, если x и y – друзья. Если немного перефразировать данное утверждение, то можно записать:

«Существуют такие люди x, для которых НЕ существует ни одного такого человека y, чтобы x и y были друзьями.» Таким образом мы сразу понимаем, какие кванторы нам предстоит использовать. В первом и во втором случае – это кванторы существования, но во втором случае квантор существования будет использоваться с отрицанием.

$$\exists x \overline{\overline{\exists}} y P(x,y)$$

Для самостоятельного решения:

– «Каждый человек имеет хотя бы одного друга»;

– «Число a называется пределом числовой последовательности $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_ε, зависящий от ε, такой что для любого $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$»;

– «Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непрерывна в точке $M'(x_1', x_2', \ldots, x_n')$, если по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1', x_2', \ldots, x_n')| < \varepsilon$ лишь только $|x_1 - x_1'| < \delta, \ldots, |x_n - x_n'| < \delta$ ».

5. Снять отрицания над квантором:

$$\forall x(\overline{\forall y U(x, y) \to \exists z V(x, z)}).$$

Решение

Сначала избавляемся от импликации по формуле $x \to y = \bar{x} \lor y$

$$\forall x(\overline{\overline{\forall} y U(x, y) \lor \exists z V(x, z)}).$$

Теперь применим закон де Моргана:

$$\forall x(\forall y U(x, y) \land \overline{\exists} z V(x, z)).$$

Остаётся избавиться от отрицания над квантором существования. Это делается по формуле $\overline{\exists} x P(x) = \forall x\, \overline{P}(x)$

Получаем:

$$\forall x(\forall y U(x, y) \wedge \forall z \overline{V}(x, z)).$$

Для самостоятельного решения:

$$\forall x\overline{(\forall y U(x, y) \wedge \exists z V(x, z))}.$$

$$\forall x\overline{(\forall y U(x, y) \to \exists z V(x, z) \to \neg\exists a P(x, a))}.$$

$$\forall x(\neg\forall y U(x, y) \to \neg\exists z V(x, z)).$$

6. Выразить следующие формулы логики предикатов в виде формул логики высказываний, если предметные области M_x = {a,b} M_y = {0,1}:

– $\exists y \forall x P(x,y)$;

Решение

Решается данный пример подстановкой в предикаты всех возможных вариантов значений из предметной области, а квантор общности и квантор существования заменяются соответственно на конъюнкцию и дизъюнкцию.

$$\boldsymbol{P(a,0)P(b,0) \vee P(a,1)P(b,1)}$$

Это обозначает, что в предметной области M_y существуют такие элементы, что для всех элементов области M_x значение выражения будет истинным. Т.е. хотя бы одна из конъюнкций должна принять значение истины, а примет она его только в том случае, если оба предиката, входящие в конъюнкцию, будут истинными.

Для самостоятельного решения:

– $\forall x \forall y P(x,y)$;

– $\forall x \exists y P(x,y)$;

– $\exists x \exists y P(x,y)$.

7. Указать зоны действия кванторов, ранги кванторов, кванторную глубину формулы, перечислить связанные и свободные предметные переменные формул. Преобразовать формулы к почти нормальному виду и предваренной нормальной форме:

– $\overline{\exists} x(\forall y P(x,y,z) \to \forall u Q(x,u))$;

Решение.

Зоны действия кванторов:

$\overline{\exists}\boldsymbol{x}$ зона действия $(\forall y P(x,y,z) \to \forall u Q(x,u))$, ранг 2

$\forall\boldsymbol{y}$ зона действия $P(x,y,z)$, ранг 1

$\boldsymbol{\forall u}$ зона действия $Q(x,u)$, ранг 1

Связанные переменные ***x, y, u*** (потому что они есть в кванторах)
Свободная переменная ***z.***
Кванторная глубина формулы = 2.

Теперь преобразуем формулу к почти нормальному виду. На человеческом языке это обозначает, что нам нужно избавиться от всего, что не входит в базис отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, а так же опустить отрицания на предикаты, т.е. убрать их с кванторов или формулы путём тождественных преобразований.

$\overline{\exists} x(\forall y P(x,y,z) \to \forall u Q(x,u))$ – изначальная формула.

Избавляемся от импликации (см. задание 5)

$$\overline{\exists} x(\overline{\forall} y P(x,y,z) \lor \forall u Q(x,u));$$

Избавляемся от отрицания над первым квантором, и оно переходит на всю область действия квантора:

$$\forall x(\overline{\overline{\forall} y P(x,y,z) \lor \forall u Q(x,u)})$$

Избавляемся от отрицания над формулой по закону де Моргана:

$$\forall x(\forall y P(x,y,z) \land \overline{\forall} u Q(x,u))$$

Спускаем отрицание с квантора на предикат:

$$\boldsymbol{\forall x(\forall y P(x,y,z) \land \exists u \overline{Q}(x,u))}$$

Теперь приведём получившееся выражение к предваренной нормальной форме. Для этого нам нужно вынести все кванторы перед формулой. В данной формуле нет ни одной переменной, которая бы в неё входила как в свободном, так и в связанном виде (переменная ***x*** связана квантором $\boldsymbol{\forall x}$ в обоих предикатах), поэтому просто выносим кванторы за скобки перед формулой и получаем:

$$\boldsymbol{\forall x \forall y \exists u\, (P(x,y,z) \land \overline{Q}(x,u))}$$

В примере в методичке рассматривается случай, когда переменная входит в формулу, как в свободном, так и в связанном виде, поэтому происходит её замена на другую букву. Обратите внимание на то, как это делается.

Для самостоятельного решения:

– $(\exists x P(x) \to \forall y Q(y)) \to R(z)$;

– $\neg(\exists x \forall y P(x,y) \land \exists x \forall y Q(x,y)$;

- $\exists x \forall y(\exists z(P(x,z) \wedge P(y,z)) \to \exists u R(x,y,u)$;
- $\exists x \forall y P(x,y) \vee \overline{\forall} x \exists y Q(x,y)$;
- $\neg(\forall x \forall y(\exists z(P(x,z) \wedge Q(y,z))) \to \exists u R(x,y,u)$;
- $\overline{\exists} u P(u) \to \neg(\forall y \forall u Q(y,u)) \to \forall x R(x)$;
- $\overline{\exists} x(\forall y P(x,y,z) \vee \forall u Q(x,u))$;
- $\overline{\forall} x(\exists y P(x,y,z) \to \exists u Q(x,u))$.