Булевы функции.
Минимизация булевых функций.

Элементарные булевы функции и их алгебраические формы

x	0	1
$f_0 = 0$	0	0
$f_1 = x$	0	1
$f_2 = \overline{x}$	1	0
$f_3 = 1$	1	1

Двухместные булевы функции

p	0	0	1	1
q	0	1	0	1
$f_0 = 0$	0	0	0	0
$f_1 = p \wedge q$	0	0	0	1
$f_2 = \overline{f_{13}}$	0	0	1	0
$f_3 = p$	0	0	1	1
$f_4 = \overline{f_{11}}$	0	1	0	0
$f_5 = q$	0	1	0	1
$f_6 = p \oplus q$	0	1	1	0
$f_7 = p \vee q$	0	1	1	1
$f_8 = p \circ q$	1	0	0	0
$f_9 = p \sim q$	1	0	0	1
$f_{10} = \overline{q}$	1	0	1	0
$f_{11} = q \to p$	1	0	1	1
$f_{12} = \overline{p}$	1	1	0	0
$f_{13} = p \to q$	1	1	0	1
$f_{14} = p \mid q$	1	1	1	0
$f_{15} = 1$	1	1	1	1

Определение основных двухместных функций

Аргумент p Аргумент q	0 0 1 1 0 1 0 1
Дизъюнкция $p \vee q$	0 1 1 1
Конъюнкция $p \wedge q$ или pq	0 0 0 1
Дизъюнкция с исключением $p \oplus q$	0 1 1 0
Эквиваленция $p \sim q$	1 0 0 1
Импликация $p \to q$	1 1 0 1
Функция Пирса $p \circ q = \neg(p \vee q)$	1 0 0 0
Функция Шеффера $p \mid q = \neg(p \wedge q)$	1 1 1 0

Примеры выполнения операций над булевыми векторами

- Даны два булевых вектора:
  - $\boldsymbol{x}_i =$ 1 1 0 0 1 1 0 0;
  - $\boldsymbol{x}_j =$ 1 0 1 0 1 0 1 0,
- Рассмотрим выполнение некоторых операций над ними.
- $\boldsymbol{x}_i \wedge \boldsymbol{x}_j$ = 1 0 0 0 1 0 0 0
- $\boldsymbol{x}_i \vee \boldsymbol{x}_j$ = 1 1 1 0 1 1 1 0

$$x_i \oplus x_j = 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0;$$
$$x_i \to x_j = 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1;$$
$$x_i \sim x_j = 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1.$$

Все операции над булевыми векторами выполняются покомпонентно. Точно так же можно выполнять все эти операции над функциям, заданными в векторном виде. Т.е. если, например, есть некая функция

$$\boldsymbol{f} \quad = \quad \mathbf{0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0},$$

тогда операция отрицания, выполненная над ней будет:

$$\overline{\boldsymbol{f}} = \mathbf{1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1}\ ;$$

Операции над троичными векторами

- С вводом интервалов области задания булевой функции мы перешли, по существу, к рассмотрению троичных переменных. Подготавливая почву для дальнейшего изложения, введем серию операций над троичными переменными, определив их как такое обобщение соответствующих булевых операций, при котором значение «–» интерпретируется как символ неопределенности двоичного значения, т. е. считается, что рассматриваемая переменная принимает одно из двух значений: 0 или 1, но какое именно – неизвестно.

Аргумент p Аргумент q	0 0 0 – – – 1 1 1 0 – 1 0 – 1 0 – 1
Отрицание $\bar{p}$	1 1 1 – – – 0 0 0
Дизъюнкция $p \vee q$	0 – 1 – – 1 1 1 1
Конъюнкция $p \wedge q$ или pq	0 0 0 0 – – 0 – 1
Дизъюнкция с исключением $p \oplus q$	0 – 1 – – – 1 – 0
Эквиваленция $p \sim q$	1 – 0 – – – 0 – 1
Импликация $p \rightarrow q$	1 1 1 – – 1 0 – 1
Функция Пирса $p \circ q = \neg(p \vee q)$	1 – 0 – – 0 0 0 0
Функция Шеффера $p \mid q = \neg(p \wedge q)$	1 1 1 1 – – 1 – 0

- Рассмотрим пример. Даны два троичных вектора
- $p = 0 - - 0 - 1 - - 1$
- $q = 1\ 1\ 1 - - 1\ 0 - 0$
- $p \vee q =$

$$\begin{array}{ll} & 0 - - 0 - 1 - - 1 \\ \vee & 1\ 1\ 1 - - 1\ 0 - 0 \\ = & 1\ 1\ 1 - - 1 - - 1 \end{array}$$

- $p \oplus q =$

$$
\begin{array}{cl}
 & 0\,-\,-\,0\,-\,1\,-\,-\,1 \\
\oplus & 1\,1\,1\,-\,-\,1\,0\,-\,0 \\
= & 1\,-\,-\,-\,-\,0\,-\,-\,1
\end{array}
$$

- $p \wedge q =$

$$
\begin{array}{cl}
 & 0\,-\,-\,0\,-\,1\,-\,-\,1 \\
\wedge & 1\,1\,1\,-\,-\,1\,0\,-\,0 \\
= & 0\,-\,-\,0\,-\,1\,0\,-\,0
\end{array}
$$

- $p \rightarrow q =$

$$
\begin{array}{l}
\quad 0 - - 0 - 1 - - 1 \\
\rightarrow \; 1\,1\,1 - - 1\,0 - 0 \\
= \; 1\,1\,1\,1 - 1 - - 0
\end{array}
$$

- $p \sim q =$

$$
\begin{array}{l}
\quad 0 - - 0 - 1 - - 1 \\
\sim \; 1\,1\,1 - - 1\,0 - 0 \\
= \; 0 - - - - 1 - - 0
\end{array}
$$

Минимизация булевых функций

Визуальный метод на карте Карно

- Для минимизации функций относительно небольшого числа переменной (не более шести) наиболее простым и наглядным является графический метод, использующий карты Карно.

- При заполнении карты Карно в ее клетки проставляют значения функции для соответствующих наборов, которые являются координатами клеток. Например, для функции двух переменных A и B карта Карно имеет вид

Номер набора	A	B	C
0	0	0	1
1	0	1	1
2	1	0	0
3	1	1	1

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	№ 0	№ 1
A	№ 2	№ 3

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	1	1
A	0	1

Рис. 5. Карта Карно для булевой функции двух переменных

- Единицы, представленные в клетках, обозначают конституенты единицы рассматриваемой функции. Отыскание минимальной ее формы сводится к определению варианта, при котором все конституенты единицы накрываются (охватываются контурами покрытия) наименьшим числом наиболее коротких импликант. Объединение клеток на карте эквивалентно выполнению операции склеивания.

- Всегда нужно стремиться к минимальному количеству контуров и максимальной площади каждого из них, руководствуясь следующими правилами:

- площадь контура покрытия должна быть $S_k = 2^{m-i}$ клеток, где – целое число, m – число переменных. Если, например, m = 3, то S_k = 1, 2, 4, или 8 клеток;

- число сокращаемых переменных $N_{перем.} = \log_2 S_k$, т.е. при $S_k = 1$ не сокращается ни одна переменная, при $S_k = 2$ сокращается одна переменная и т.д.

- В примере на рисунке пара единиц верхней строки охватывается импликантой $\bar{A}$ (т.е. обе клетки) имеют общий аргумент $\bar{A}$). Пара единиц правого столбца накрывается импликантой *B*, как общей для обеих клеток. Следовательно, минимальная ДНФ функции $F(A,B) = \bar{A} \vee B$.
- Если имеется несколько вариантов объединения конституент контурами, то можно получить несколько различных эквивалентных минимальных ДНФ функции, одна из которых выбирается для реализации в цифровом устройстве.

- Карту Карно удобно использовать и для минимизации функций, заданных в алгебраической форме, например,

$$F(A,B,C) = AB\overline{C} \vee \overline{A}B\overline{C} \vee \overline{A}BC \vee A\overline{B}C \vee A\overline{B}\,\overline{C} \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$$

- Построим карту Карно для этой функции:

	$\overline{B}$		B	
	1	0	1	1
A	1	1	0	1
	$\overline{C}$	C		$\overline{C}$

Рис. 6. Карта Карно для функции трех переменных

- При охвате единиц контурами склеивания карту Карно можно сворачивать в цилиндр, как вдоль горизонтальной, так и вертикальной оси. В результате все четыре единицы, расположенные в углах Карты, охватываются контуром с общей импликан-той. Такой минимизации соответствует выражение

$$F(A, B, C) = \overline{C} \vee \overline{A}B \vee A\overline{B}$$

- Минимизируем функцию четырех переменных, заданную совокупностью наборов, на которых функция принимает единичные значения:

0000
1000
0101
1101
0011
0111
0010
1110
1010

X1X2 \ X3X4	00	01	11	10
00	1		1	1
01		1	1	
11		1		1
10	1			1

- Склеивание дает 4 минтерма (слагаемого):

Не зависит от $\boldsymbol{x}_1$

Не зависит от $\boldsymbol{x}_2$

Не зависти от $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_3$

- В итоге функция принимает вид
- $\boldsymbol{x}_2\,\overline{\boldsymbol{x}}_3\,\boldsymbol{x}_4 \vee \overline{\boldsymbol{x}}_1\,\boldsymbol{x}_3\,\boldsymbol{x}_4 \vee \boldsymbol{x}_1\,\boldsymbol{x}_3\,\overline{\boldsymbol{x}}_4 \vee \overline{\boldsymbol{x}}_2\,\overline{\boldsymbol{x}}_4$

Минимизация булевых функций методом Квайна – Мак Класки

- Все конституанты единицы из СДНФ булевой функции *f* записываются их двоичными номерами.
- Все номера разбиваются на непересекающиеся группы. Признак образования *i*-й группы: *i* единиц в каждом двоичном номере конституенты единицы.
- Склеивание производят только между номерами соседних групп. Склеиваемые номера отмечаются каким-либо знаком (зачеркиванием, цветом).
- Склеивания производят всевозможные. Неотмеченные после склеивания номера являются простыми импликантами.

$x_4x_3x_2x_1$	f
0000	0
0001	**1**
0010	0
0011	**1**
0100	0
0101	**1**
0110	0
0111	**1**
1000	0
1001	0
1010	0
1011	0
1100	0
1101	0
1110	**1**
1111	**1**

- В СДНФ функции f заменим все конституенты единицы их двоичными номерами:

- $f = 0001 \vee 0011 \vee 0101 \vee 0111 \vee 1110 \vee 1111.$

- Образуем группы двоичных номеров. Признаком образования *i* - й группы является *i* единиц в двоичном номере конституенты единицы

Номер группы	Двоичные номера конституент единицы
0	—
1	**0001**
2	**0011, 0101**
3	**0111, 1110**
4	**1111**

- Склеим номера из соседних групп таблицы. Склеиваемые номера вычеркнем (выделяем цветом). Результаты склеивания занесем в таблицу.

Номер группы	Двоичные номера конституент единицы
1	**00*1, 0*01**
2	**0*11, 01*1**
3	*111, 111*

- Склеим номера из соседних групп таблице. Склеиваться могут только номера, имеющие звездочки в одинаковых позициях. Склеиваемые номера вычеркнем. Результаты склеивания занесем в таблицу.

Номер группы	Двоичные номера конституент единицы
1	0**1

- Имеем три простые импликанты: *111, 111*, 0**1.
- Строим импликантную матрицу. По таблице определяем совокупность простых импликант - 0**1 и 111*, соответствующую минимальной ДНФ. Почему мы выбрали именно эти простые импликанты? Потому что они составляют кратчайшее покрытие матрицы, и поэтом импликанта *111 является лишней. Для восстановления буквенного вида простой импликанты достаточно выписать произведения тех переменных, которые соответствуют сохранившимся двоичным цифрам.

Простые импликанты	Конституенты единицы					
	0001	0011	0101	0111	1110	1111
01**	**X**	**X**	**X**	**X**		
*111				**X**		**X**
111*					**X**	**X**

$0{*}{*}1 \rightarrow \bar{x}_1 x_4;$

$111{*} \rightarrow x_1 x_2 x_3.$

$$\boldsymbol{f = \bar{x}_1 x_4 \vee x_1 x_2 x_3}$$

Пример 2

В этом примере мы разберём минимизацию функции сначала методом Квайна – Мак Класки, а потом при помощи карты Карно.

$x_4x_3x_2x_1$	f
0000	**1**
0001	**1**
0010	0
0011	**1**
0100	0
0101	**1**
0110	0
0111	0
1000	**1**
1001	**1**
1010	**1**
1011	0
1100	**1**
1101	0
1110	**1**
1111	**1**

- $f = \mathbf{0000} \vee \mathbf{0001} \vee \mathbf{0011} \vee \mathbf{0101} \vee \mathbf{1000} \vee \mathbf{1001} \vee \mathbf{1010} \vee \mathbf{1100} \vee \mathbf{1110} \vee \mathbf{1111}$

Номер группы	Двоичные номера конституент единицы
0	**0000**
1	**0001, 1000**
2	**0011, 0101, 1001, 1010, 1100**
3	**1110**
4	**1111**

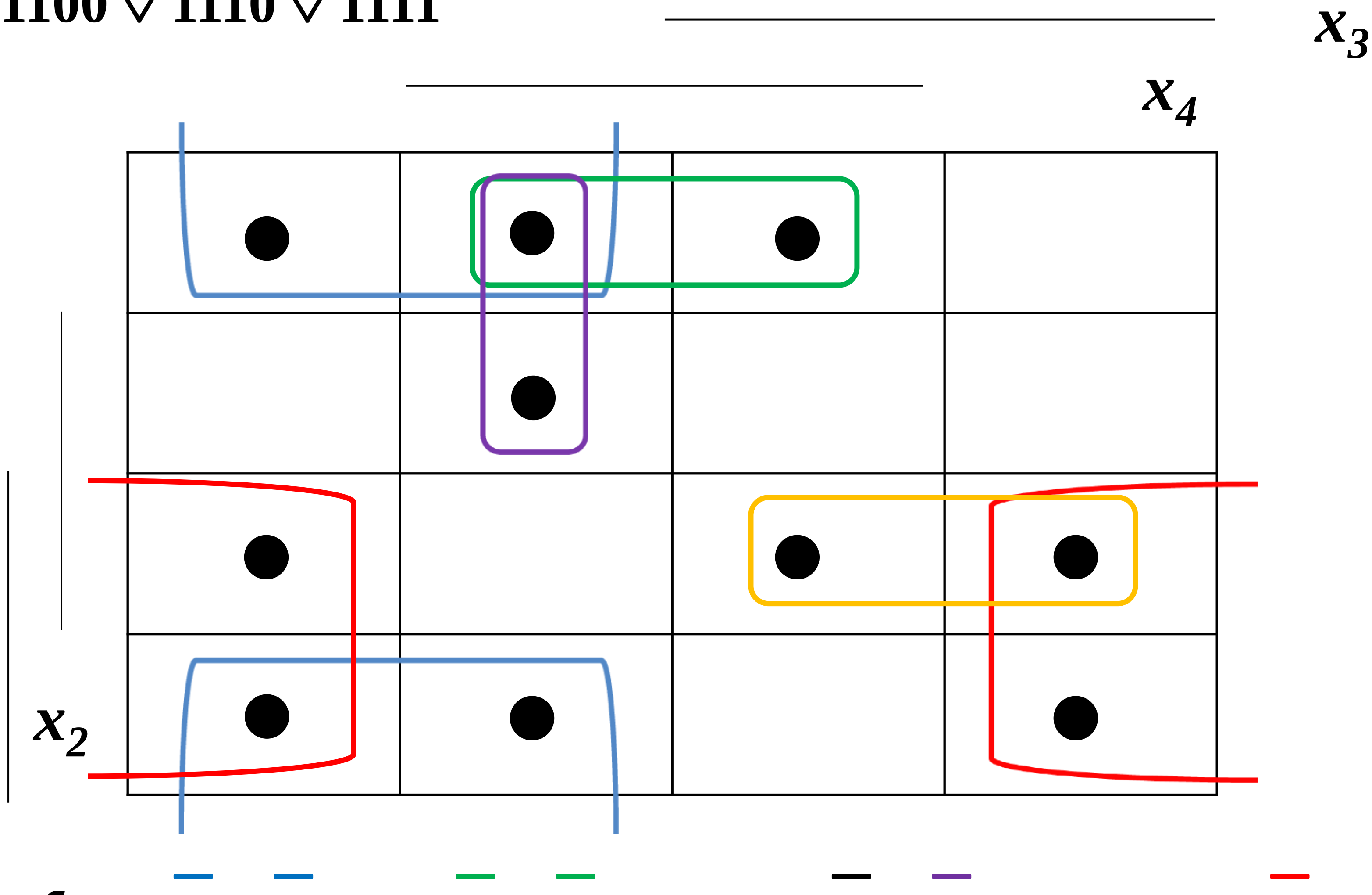
Номер группы	Двоичные номера конституент единицы
0	**000*, *000**
1	**00*1, 0*01, *001, 100*, 10*0 , 1*00**
2	**1*10, 11*0**
3	**111***

Номер группы	Двоичные номера конституент единицы
0	***00***
1	**00*1, 0*01, 1**0**
2	**-**
3	**111***

Простые импликанты	Конституенты единицы									
	0000	0001	0011	0101	1000	1001	1010	1100	1110	1111
00	X	X			X	X				
00*1		X	X							
0*01		X		X						
1**0					X		X	X	X	
111*									X	X

- $f = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 x_3$

- $f = 0000 \vee 0001 \vee 0011 \vee 0101 \vee 1000 \vee 1001 \vee 1010 \vee 1100 \vee 1110 \vee 1111$



- $f = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee x_1\bar{x}_4 \vee x_1x_2x_3$