

Wykład 1 - Analiza matematyczna II

Skrypt wykładu Krzysztofa Michalika

26 marca 2023

1 Całki niewłaściwe I rodzaju

Ustalamy liczbę $a \in \mathbb{R}$. Niech f będzie funkcją całkowalną na każdym przedziale w postaci $[a, T]$ gdzie $T > a$. Definiujemy całkę niewłaściwą pierwszego rodzaju z f na półprostej $[a, \infty]$ jako

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_a^T f(x) dx, \text{ gdy granica po prawej stronie istnieje}$$

Analogicznie, gdy f jest całkowalna na każdym przedziale postaci $[T, b]$, gdzie $T < b$. Definiujemy całkę niewłaściwą pierwszego rodzaju z f na półprostej $[-\infty, b]$ jako

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{T \rightarrow -\infty} \int_T^b f(x) dx, \text{ gdy granica po prawej stronie istnieje}$$

Terminologia dotycząca takich całek jest taka, jak dla ciągów. Są 3 przypadki :

1. Granica z prawej strony jest liczbą. Wtedy mówimy, że całka jest zbieżna.
2. Granica z prawej strony jest równa ∞ lub $-\infty$. Wtedy mówimy, że całka jest rozbieżna (odpowiednio do ∞ lub $-\infty$).
3. Granica z prawej strony nie istnieje. Wtedy mówimy, że całka jest rozbieżna.

Analogicznie dla $\int_{\infty}^b f(x) dx$

Przykłady :

$$\int_0^{\infty} \sin x dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \sin x dx = \lim_{T \rightarrow \infty} [-\cos x]_0^T = \lim_{T \rightarrow \infty} (-\cos T - (-\cos 0)) = \lim_{T \rightarrow \infty} (1 - \cos T)$$

Granica ta nie istnieje więc całka jest rozbieżna.

$$\int_{-\infty}^0 2^x dx = \lim_{T \rightarrow -\infty} \int_T^0 2^x dx = \lim_{T \rightarrow -\infty} \left[\frac{2^x}{\ln 2} \right]_T^0 = \lim_{T \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{2^T}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2}$$

Całka jest zbieżna do $\frac{1}{\ln 2}$.

Pozostaje przypadek $p = 1$. Wtedy

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \quad \int_a^T \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_a^T = \ln|T| - \ln|a|, \quad \int_a^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} (\ln|T| - \ln|a|) = \infty$$

Udowodniliśmy zatem ważny wynik

Twierdzenie

Gdy $a > 0$ to całka $\int_a^\infty \frac{1}{x^p} dx$ jest skończona dla $p > 1$ oraz nieskończona dla $p \leq 1$.

Podobnie można łatwo pokazać poniższy wynik

Twierdzenie

Gdy $a \in \mathbb{R}$ i $A > 0$ to całka $\int_a^\infty A^x dx$ jest skończona dla $0 < A < 1$ oraz nieskończona dla $A \geq 1$

Gdy $\int f(x) dx = F(x) + C$ to

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} F(T) - \lim_{S \rightarrow \infty} F(S)$$

przy czym przynajmniej jedna z granic z prawej strony nie istnieje lub zachodzi przypadek $\infty - \infty$ to $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ jest rozbieżna, a w pozostałych przypadkach całka ma wartość wynikającą z arytmetyki granic.

W przypadku kiedy całki nie da się obliczyć w sposób dokładny można to zrobić w sposób przybliżony, pod warunkiem, że wiemy, że jest zbieżna.

Kryteria zbieżności to twierdzenia opisujące warunki dostateczne zbieżności lub rozbieżności danej klasy całek. Najczęściej mają postać implikacji ale NIE równoważności.

Oznacza to zwykle własności postaci

warunek zachodzi \Rightarrow całka jest zbieżna/rozbieżna

warunek nie zachodzi \Rightarrow nic nie wiemy o zbieżności/rozbieżności całki

Popularne kryteria zbieżności całek z ∞

0. Warunek konieczny zbieżności całki

Jeżeli całka $\int_a^\infty f(x) dx$ jest zbieżna to $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ jest równa 0 lub nie istnieje.

Transpozycja twierdzenia daje następujący wynik:

Jeżeli $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ istnieje i jest różna od 0 to całka $\int_a^\infty f(x) dx$ nie jest zbieżna, przy czym

- gdy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) > 0$ to $\int_a^\infty f(x) dx = \infty$,
- gdy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) < 0$ to $\int_a^\infty f(x) dx = -\infty$,

Uwaga. Warunek konieczny to tylko implikacja!

Jeżeli $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ jest równa 0 lub nie istnieje to jeszcze **NIC NIE WIEMY** o całce,

Na przykład całki $\int_a^\infty \frac{1}{x^p} dx$, $a > 0$, mają $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^p} = 0$ dla wszystkich $p > 0$ ale niektóre z tych całek są zbieżne, a niektóre rozbieżne

Ważna klasa całek - całki z funkcji nieujemnych

$$\int_a^\infty f(x) dx, \quad f \geq 0$$

Wtedy $\int_a^T f(x) dx = F(T) - F(a)$ jest funkcją niemalejącą zmiennej T zatem całka $\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_a^T f(x) dx$ zawsze istnieje. Może być to liczba lub ∞ .

Zatem brak zbieżności takich całek oznacza rozbieżność do ∞ .

Dla całek z funkcji nieujemnych mamy dwa kolejne kryteria zbieżności.

1. Kryterium porównawcze
2. Kryterium ilorazowe

Twierdzenie(kryterium porównawcze)

Dane są dwie całki $\int_a^\infty f(x) dx$ oraz $\int_a^\infty g(x) dx$. Wtedy zachodzą następujące własności

1. (Przypadek zbieżności). Gdy $\forall x \geq x_0 \geq a \quad 0 \leq f(x) \leq g(x)$ i $\int_a^\infty g(x) dx$ jest zbieżna to $\int_a^\infty f(x) dx$ też jest zbieżna. Ponadto $0 \leq \int_a^\infty f(x) dx \leq \int_a^\infty g(x) dx$

2. (Przypadek rozbieżności) Gdy $\forall x \geq x_0 \geq a \quad 0 \leq g(x) \leq f(x)$ i $\int_a^\infty g(x) dx$ jest rozbieżna (więc równa ∞) to $\int_a^\infty f(x) dx$ też jest rozbieżna (do ∞).
3. (**Przypadek wątpliwy**) Gdy $\forall x \geq x_0 \geq a \quad 0 \leq f(x) \leq g(x)$ ale $\int_a^\infty g(x) dx$ jest rozbieżna to **NIC NIE WIEMY** o zbieżności $\int_a^\infty f(x) dx$.
4. (**Przypadek wątpliwy**) Gdy $\forall x \geq x_0 \geq a \quad 0 \leq g(x) \leq f(x)$ ale $\int_a^\infty g(x) dx$ jest zbieżna to **NIC NIE WIEMY** o zbieżności $\int_a^\infty f(x) dx$.

Uwagi:

- $\int_a^\infty f(x) dx$ jest całką z zadania, $\int_a^\infty g(x) dx$ tworzymy sami.
- Porównujemy najczęściej z całkami $\int_a^\infty A^x dx$ lub $\int_a^\infty \frac{1}{x^p} dx$. Wtedy f często ma postać ułamków i możemy spróbować wziąć g jako :
C - iloraz najwyższych potęg z licznika i mianownika f
- Trzeba uważać aby nierówność między f i g była prawdziwa i nie zapomnieć przypadku wątpliwego, bo wtedy **trzeba zaczynać od nowa**.
- Warto sprawdzić opisany wyżej iloraz najwyższych potęg i na tej podstawie przewidzieć czy chcemy udowodnić zbieżność czy rozbieżność. To pomaga skonstruować odpowiednią nierówność między f i g .

Popularny błąd - odpowiedź na podstawie przypadku wątpliwego

Na przykład dla całki $\int_1^\infty \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$:

”Mamy $0 \leq \frac{1}{x + \sqrt{x}} \leq \frac{1}{x}$ i całka $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ jest rozbieżna **zatem całka $\int_1^\infty \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$ jest rozbieżna.**”

GAME OVER... To jest przypadek nr 3 (wątpliwy)

Przykład

$$\int_4^\infty \frac{2x-3}{x^3-1} dx$$

Przewidywanie zbieżności/rozbieżności

Najwyższe potęgi sugerują, że mając

$$\frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}, \quad \text{a} \quad \int_4^{\infty} \frac{1}{x^2} dx < \infty, \quad \text{bo} \quad 2 > 1$$

Dowodzimy zbieżność. Trzeba mieć

$$0 \leq \frac{2x-3}{x^3-1} \leq g(x) = C \cdot \frac{x}{x^3}$$

Jak w twierdzeniu o 3 ciągach

$$0 \leq \frac{2x}{x^3 - \frac{1}{2}x^3} = 4 \cdot \frac{x}{x^3} = 4 \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$\int_4^{\infty} \frac{4}{x^2} dx = 4 \int_4^{\infty} \frac{1}{x^2} dx < \infty \quad \left(\frac{1}{2}x^3 > 1 \text{ dla } x \geq 4 \right)$$

Twierdzenie(kryterium ilorazowe)

Dane są dwie całki $\int_a^{\infty} f(x) dx$ oraz $\int_a^{\infty} g(x) dx$. Ponadto

$$\forall x \geq x_0 \geq a \quad f(x), g(x) > 0$$

Jeżeli istnieje granica $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ i jest liczbą dodatnią to wtedy obie całki są zbieżne albo obie rozbieżne do ∞ .

Uwagi

- Funkcję g tworzymy podobnie jak dla kryterium porównawczego
- Nie ma problemu z nierównościami :) ale za to trzeba umieć liczyć granice
- Granica nie może być ani 0 ani ∞ : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$
- Rozwiązanie **musi zawierać wniosek** "granica ilorazu jest liczbą dodatnią więc obie całki są zbieżne lub obie rozbieżne" - bez tego będzie niepełne.
- Kryterium zwykle jest wygodniejsze niż porównawcze ale są przykłady, które "idą" z porównawczego ale nie z ilorazowego, bo granica ilorazu nie istnieje

$$\text{Np. } \int_1^{\infty} \frac{2 + \sin x}{x} dx$$

Przykłady

Poprzedni przykład raz jeszcze

$$\int_4^{\infty} \frac{2x-3}{x^3-1} dx$$

$$f(x) = \frac{2x-3}{x^3-1}, \quad x \geq 4$$

$$g(x) = \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(2x-3)}{x^3-1} = 2$$

Obie całki zbieżne lub obie rozbieżne do ∞

Przykłady o postaci funkcji złożonej $\int_a^{\infty} f(g(x)) dx$ gdzie $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0^+$ oraz $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0^+$

Nową całką jest całka z funkcji wewnętrznej $\int_a^{\infty} g(x) dx$

Liczmy granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(g(x))}{g(x)} = \lim_{t=g(x) \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

przy użyciu granic podstawowych lub reguły de l'Hospitala.

Na przykład $\int_1^{\infty} \left(2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1\right) dx$

$$\int_1^{\infty} \left(2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1\right) dx$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$$

$$f(x) = 2^x - 1 > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2^t - 1}{t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \ln 2 \in (0, \infty)$$

Obie całki zbieżne lub obie rozbieżne

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \infty \quad \text{bo} \quad \frac{1}{2} \leq 1$$

Wartość główna całki niewłaściwej I rodzaju

Całka $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$ jest rozbieżna, gdyż jako suma całek prowadzi do symbolu $\infty - \infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dx = \int_{-\infty}^0 x dx + \int_0^{\infty} x dx = -\infty + \infty$$

Intuicyjnie oczekiwilibyśmy jednak, że jest ona równa 0 - funkcja podcałkowa jest nieparzysta czyli mamy "tyle funkcji na + co na -", a więc wszystko powinno się wzajemnie zrównoważyć. Aby taka całka miała sens trzeba nieco zmodyfikować jej definicję i wprowadzić pojęcie wartości głównej całki niewłaściwej (obustronnej).

Definicja. Wartość główna całki $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ to wielkość

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f(x) dx$$

o ile powyższa granica istnieje.

Oznacza to, że przybliżamy całkę po \mathbb{R} całkami po przedziale symetrycznym względem 0. P.V. jest skrótem od angielskiego "Principal Value".

Na przykład

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} x dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T x dx = \lim_{T \rightarrow \infty} 0 = 0$$

Zauważmy, że gdy $\int f(x) dx = F(x) + C$ to

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} (F(T) - F(-T))$$

Jeżeli teraz ma sens wyrażenie $\lim_{T \rightarrow \infty} F(T) - \lim_{T \rightarrow \infty} F(-T)$ to biorąc $S = -T \rightarrow -\infty$ dostajemy

$$\begin{aligned} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \lim_{T \rightarrow \infty} (F(T) - F(-T)) = \lim_{T \rightarrow \infty} F(T) - \lim_{T \rightarrow \infty} F(-T) = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} F(T) - \lim_{S \rightarrow -\infty} F(S) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \end{aligned}$$

Udowodniliśmy zatem poniższe twierdzenie.

Jeżeli całka $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ istnieje w zwykłym sensie (jako suma odpowiednich całek jednostronnych jest liczbą lub jedną z nieskończoności) to również jej wartość główna istnieje i jest równa tej całce.

Natomiast może się zdarzyć, że wartość główna całki istnieje ale sama całka jest rozbieżna (był przykład).

W szczególności gdy funkcja jest na \mathbb{R} ciągła i nieparzysta to wartość główna całki z tej funkcji jest zawsze 0 niezależnie od zbieżności samej całki.

2 Całki niewłaściwe II rodzaju

Ustalamy liczby $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Niech f będzie funkcją całkowalną na każdym przedziale postaci $[a, T]$, gdzie $a < T < b$. Definiujemy całkę niewłaściwą drugiego rodzaju z f na przedziale $[a, b)$ jako

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{T \rightarrow b^+} \int_a^T f(x) dx, \quad \text{gdy granica po prawej stronie istnieje.}$$

Analogicznie, gdy f jest całkowalna na każdym przedziale postaci $[T, b]$, gdzie $a < T < b$, to definiujemy całkę niewłaściwą pierwszego rodzaju z f na przedziale $(a, b]$ jako

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{T \rightarrow a^+} \int_T^b f(x) dx, \quad \text{gdy granica po prawej stronie istnieje.}$$

Terminologia dotycząca takich całek jest taka, jak dla całek niewłaściwych 1 rodzaju. Są 3 przypadki :

1. Granica z prawej strony jest liczbą. Wtedy całka jest zbieżna (do tej granicy).
2. Granica z prawej strony jest równa ∞ lub $-\infty$. Wtedy całka jest rozbieżna do ∞ lub $-\infty$.
3. Granica z prawej strony nie istnieje. Wtedy mówimy, że całka jest rozbieżna.

Interpretacja geometryczna.

Podobnie jak dla zwykłej całki oznaczonej, jeżeli $f \geq 0$ na $(a, b]$ lub $[a, b)$ to całka niewłaściwa 2 rodzaju $\int_a^b f(x) dx$ daje pole obszaru ograniczonego osią X, wykresem f oraz prostymi $x = a$ oraz $x = b$.

Najczęściej definiujemy tego typu całkę w przypadku gdy f ma asymptotę pionową $x = a$ lub $x = b$. Wtedy ten obszar nie jest ograniczony z góry bądź z dołu.

Na przykład

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{T \rightarrow 0^+} \int_T^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{T \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_T^1 = \lim_{T \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{T}) = 2$$

Całka jest zbieżna do 2.

Wersja całki obustronnej

Ustalamy liczby $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$. Niech f będzie funkcją całkowalną na każdym przedziale postaci $[a, T]$, $T < c$, oraz $[T, b]$, $T > c$. Definiujemy całkę niewłaściwą 2 rodzaju z f na zbiorze $[a, c) \cup (c, b]$ jako sumę dwóch całek niewłaściwych. tzn.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

przy czym gdy przynajmniej jedna z całek z prawej strony nie istnieje lub zachodzi przypadek $\infty - \infty$ to $\int_a^b f(x) dx$ jest rozbieżna, a w pozostałych przypadkach całka ma wartość wynikającą z arytmetyki granic.

Najczęściej takie całki pojawiają się, gdy f ma asymptotę w $x = c$.

Twierdzenie

Istnieją podstawienia, które każdą całkę niewłaściwą 2 rodzaju sprowadzają do przypadku całki niewłaściwej 1 rodzaju.

W szczególności

- dla całki $(a, b]$ możemy wziąć $t = \frac{1}{x-a}$ co daje $x = a + \frac{1}{t}$ oraz

$$\int_a^b f(x) dx = \int_C^\infty \frac{1}{t^2} f\left(a + \frac{1}{t}\right) dt \quad , \text{ gdzie } C = \frac{1}{b-a}$$

- dla całki na $[a, b)$ możemy wziąć $t = \frac{1}{b-x}$ co daje $t = b - \frac{1}{t}$ oraz

$$\int_a^b f(x) dx = \int_C^\infty \frac{1}{t^2} f\left(b - \frac{1}{t}\right) dt \quad , \text{ gdzie } C = \frac{1}{b-a}$$

Na przykład dla $p > 0$ biorąc $t = \frac{1}{x}$ mamy

$$\int_0^b \frac{1}{x^p} dx = \int_{\frac{1}{b}}^\infty \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^p} dt = \int_{\frac{1}{b}}^\infty \frac{1}{t^{2-p}} dt$$

Podstawienie to oznacza też, że mamy analogiczne kryteria zbieżności dla całek 2 rodzaju - porównawcze i ilorazowe, przy czym dla kryterium ilorazowego liczymy granicę ilorazu funkcji w odpowiednim końcu zadanego przedziału.

Na koniec, wartość główna całki $\int_a^b f(x) dx$ na $[a, c) \cup (c, b]$ to wielkość

$$\text{P.V.} \int_a^b f(x) dx = \lim_{T \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{c-T} f(x) dx + \int_{c+T}^b f(x) dx \right)$$

o ile powyższa granica istnieje.

Oznacza to, że odpowiednie końce przedziałów całkowania są w jednakowej odległości od c i zbiegają do c .

Zbieżność bezwzględna całek niewłaściwych

Definicja. Całka $\int_a^\infty f(x) dx$ jest zbieżna bezwzględnie, gdy zbieżna jest całka $\int_a^\infty |f(x)| dx$.

Analogiczne definicje mamy dla pozostałych całek 1 rodzaju oraz dla całek 2 rodzaju.

Uwagi

- Gdy f jest nieujemna to mamy $\int_a^\infty f(x) dx = \int_a^\infty |f(x)| dx$ i definicja nie wnosi nic nowego. Sytuacja się zmienia, gdy są przedziały na którym f ma różne znaki.
- Nierówność $\left| \int_a^T f(x) dx \right| \leq \int_a^T |f(x)| dx$ daje $\left| \int_a^\infty f(x) dx \right| \leq \int_a^\infty |f(x)| dx$ ale gdy są przedziały na którym f ma różne znaki to równość nie zachodzi. Zatem, ogólnie, $\left| \int_a^\infty f(x) dx \right|$ i $\int_a^\infty |f(x)| dx$ **to nie to samo**.

Twierdzenie

Jeżeli całka niewłaściwa jest bezwzględnie zbieżna to jest zbieżna (w zwykłym sensie).

Transpozycja tego twierdzenia daje warunek równoważny :

Jeżeli całka $\int_a^\infty f(x) dx$ nie jest zbieżna to również nie jest zbieżna bezwzględnie,

co oznacza $\int_a^\infty |f(x)| dx = \infty$.

Analogicznie dla pozostałych typów całek niewłaściwych.

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Są całki zbieżne ale nie bezwzględnie, np. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$.

Takie całki to tzw. całki zbieżne warunkowo.

Są więc 3 możliwe sytuacje - 3 rozłączne podzbiory całek niewłaściwych:

Rozbieżne i rozbieżne bezwzględnie

Zbieżne ale nie bezwzględnie –
tylko warunkowo

Zbieżne i zbieżne
bezwzględnie

Przykład

Całka $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}} dx$ jest zbieżna bezwzględnie, bo biorąc $\int_1^{\infty} \left| \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}} \right| dx$ i używając kryterium porównawczego mamy

$$0 \leq \left| \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}} \right| = \frac{|\sin x|}{x^{\frac{4}{3}}} \leq \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$$

a całka $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} dx$ jest zbieżna bo $\frac{4}{3} > 1$. Zatem $\int_1^{\infty} \left| \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}} \right| dx$ jest zbieżna, a stąd $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}} dx$ też jest zbieżna.

3 Szeregi liczbowe

Dany jest ciąg liczbowy $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

Tworzymy jego ciąg sum częściowych :

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Jeżeli istnieje granica $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ (skończona lub nieskończona) to oznaczamy ją symbolem

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

W ogólnym przypadku możemy wziąć ciąg, który zaczyna się od dowolnej liczby całkowitej $n_0 : a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots, a_n, \dots$ i jego sum częściowych

$$S_n = a_{n_0}, \quad S_{n_0+1} = a_{n_0} + a_{n_0+1}, \quad S_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_n = \sum_{k=n_0}^n a_k, \quad n \geq n_0$$

$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ jest oznaczana przez $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$.

Definicja. Dla ustalonego $n_0 \in \mathbb{Z}$ obiekt $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ nazywamy szeregiem liczbowym, a wartość S (gdy istnieje) jego sumą, oznaczaną także przez $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$. Mamy wtedy

$$S_n = a_{n_0}, \quad S_{n_0+1} = a_{n_0} + a_{n_0+1}, \quad S_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_n + \dots = \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n_0}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

gdzie

- S_n to n - ta suma szeregu,
- a_n to n - ty wyraz szeregu.

Terminologia dotycząca sumy S jest taka, jak dla ciągów. Są 3 przypadki :

1. S jest liczbą. Wtedy dany szereg jest zbieżny (do S).
2. $S = \infty$ lub $S = -\infty$. Wtedy dany szereg jest rozbieżny (do ∞ lub $-\infty$).
3. $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ nie istnieje. Wtedy dany szereg jest rozbieżny.

Przykłady

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \text{szereg zbieżny do } 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{szereg rozbieżny do } \infty$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n - \text{szereg rozbieżny}$$

Uwaga. Każdy szereg zaczynający się od indeksu $n_0 \in \mathbb{Z}$ można przekształcić tak, by zaczynał się od indeksu 1. Wynika to z równości

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+n_0-1}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

Obliczanie sum szeregów

Jest to zadanie trudne, a najczęściej niemożliwe, gdyż trudno jest znaleźć bezpośredni wzór na sumy częściowe S_n .

Niektóre przypadki szczególne.

1. Ciąg geometryczny i szereg geometryczny.

- $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, gdzie q jest ilorazem ciągu (czyli $a_{n+1} = a_n \cdot q$, $n \geq 1$).

Wtedy

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, q \neq 1 \text{ oraz } S_n = na_1, q = 1$$

To oznacza, że dla $a_1 \neq 0$,

- szereg jest zbieżny dla $-1 < q < 1$ i jego suma jest $S = \frac{a_1}{1 - q}$,
- szereg jest rozbieżny do ∞ lub $-\infty$ dla $q \geq 1$, znak zależy od znaku a_1 ,
- szereg jest rozbieżny (suma nie istnieje) dla $q \leq -1$

Stąd np.

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1, \text{ bo tutaj } a_1 = q = \frac{1}{2}$$

2. Szeregi o wyrazie ogólnym postaci

$a_n = f(n+1) - f(n)$ lub $a_n = f(n) - f(n+1)$, gdzie f jest pewną funkcją.

W bardziej ogólnej postaci

$a_n = f(n+k) - f(n)$ lub $a_n = f(n) - f(n+k)$, gdzie $k \in \mathbb{N}^+$ to tzw. krok.

Takie szeregi to tzw. szeregi teleskopowe (telescoping series).

Przykłady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \text{tutaj } f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - \text{tutaj } f(x) = \sqrt{x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\arctg(n) - \arctg(n+2)) - \text{tutaj } f(x) = \arctg x$$

Dla takich szeregów łatwo wyznacza się wzór na S_n . Wyrazy wewnętrzne się upraszczają i zostaje:

suma k pierwszych wartości, f suma k ostatnich wartości f (lub na odwrót)

Na przykład dla $\sum_{n=1}^{\infty} (f(n) - f(n+1))$ mamy

$$S_n = f(1) - \textcolor{red}{f(2)} + \textcolor{red}{f(2)} - \textcolor{blue}{f(3)} + \textcolor{blue}{f(3)} - \textcolor{green}{f(4)} + \dots + \textcolor{red}{f(n)} - f(n+1) = f(1) - f(n+1)$$

Jeżeli istnieje granica $G = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ to mamy

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(1) - f(n+1)) = f(1) - G$$

Przykład. Wyznaczyć sumę $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$

Wyraz ogólny nie ma postaci różnicy więc trzeba ją stworzyć.

Używając rozkładu na ułamki proste dostajemy

$$\frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \dots = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

I to daje

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$$

Własności szeregów zbieżnych

Twierdzenie

Jeżeli szeregi $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ są zbieżne to zbieżne są szeregi $\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n + b_n)$

oraz $\sum_{n=n_0}^{\infty} (c \cdot a_n)$, $c \in \mathbb{R}$.

Ponadto

- $\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$
- $\sum_{n=n_0}^{\infty} (c \cdot a_n) = c \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$

Prawdziwe są także analogiczne twierdzenia prowadzące do arytmetyki granic nieskończonych, gdy nie pojawiają się symbole nieoznaczone. Na przykład gdy $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \infty$ oraz $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$ to

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n = \infty$$

Natomiast gdy $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n = \infty$ to $\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n - b_n)$ może być zarówno zbieżny jak i rozbieżny i nie ma sensu równość

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n - \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$$

Twierdzenie

Zmiana wartości n_0 nie wpływa na zbieżność/rozbieżność szeregu $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

Może mieć wpływ na wartość jego sumy.

Stąd wynika np., że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=100}^{\infty} a_n$ są albo oba zbieżne albo oba rozbieżne do ∞ lub $-\infty$ albo oba rozbieżne.

To też oznacza, że na podstawie kilku pierwszych wyrazów ciągu/szeregu

NIC NIE MOŻNA POWIEDZIEĆ o jego zbieżności

Popularny błąd

"Liczymy wartości a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 . Wychodzi ciąg malejący i dodatni.

Zatem szereg jest zbieżny". **GAME OVER...**

Twierdzenie

Dla ustalonego $n_0 \in \mathbb{N}^+$ i $p \in \mathbb{R}$ szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ jest zbieżny dla $p > 1$ i rozbieżny do ∞ dla $p \leq 1$.

W przypadku kiedy sumy szeregu nie da się wyznaczyć w sposób dokładny można to zrobić w sposób przybliżony, pod warunkiem, że wiemy, że szereg jest zbieżny.

Kryteria zbieżności to twierdzenia opisujące warunki dostateczne zbieżności lub rozbieżności danej klasy szeregów. Najczęściej mają postać implikacji ale **NIE** równoważności.

Oznacza to zwykle własności postaci

warunek zachodzi \Rightarrow szereg jest zbieżny/rozbieżny,

warunek nie zachodzi \Rightarrow nic nie wiemy o zbieżności/rozbieżności szeregu

Popularne kryteria zbieżności szeregów

0. Warunek konieczny zbieżności szeregów

Twierdzenie

Jeżeli szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Dowód

Dla $n \geq n_0 + 1$ mamy $S_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_{n-1} + a_n$ oraz $S_{n-1} = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_{n-1}$,
Stąd

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

Jeżeli szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny to $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S \in \mathbb{R}$. To daje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Transpozycja tego twierdzenia daje warunek równoważny do zastosowania praktycznego :

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ to szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ nie jest zbieżny przy czym

- gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$ to $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \infty$
- gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 0$ to $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = -\infty$

Uwaga. To jest tylko implikacja!

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ to jeszcze **NIC NIE WIEMY** o szeregu.

Na przykład szeregi $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ mają $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$ dla wszystkich $p > 0$ ale niektóre z tych szeregów są zbieżne, a niektóre rozbieżne.

Popularny błąd

” $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ zatem szereg jest zbieżny”. **GAME OVER...**

DZIURA W SKRYPCIE

Podobnie dla szeregów o wyrazach niedodatnich $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, $a_n \leq 0$, suma zawsze istnieje i rozbieżność oznacza rozbieżność do $-\infty$.

Dla szeregów o wyrazach nieujemnych mamy dwa kolejne kryteria zbieżności.

1. Kryterium porównawcze
2. Kryterium ilorazowe

Twierdzenie (kryterium porównawcze)

Dane są dwa szeregi $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$. Wtedy zachodzą następujące własności.

1. (Przypadek zbieżności) Gdy $\forall n \geq k \geq n_0 \quad 0 \leq a_n \leq b_n$ i $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ jest zbieżny to $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ też jest zbieżny. Ponadto $0 \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$
2. (Przypadek rozbieżności) Gdy $\forall n \geq k \geq n_0 \quad 0 \leq b_n \leq a_n$ i $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny to $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ też jest rozbieżny. Ponadto $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n = \infty$
3. (Przypadek wątpliwy). Gdy $\forall n \geq k \geq n_0 \quad 0 \leq a_n \leq b_n$ ale $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny to **NIC**
NIE WIEMY o zbieżności $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$
4. (Przypadek wątpliwy). Gdy $\forall n \geq k \geq n_0 \quad 0 \leq b_n \leq a_n$ ale $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ jest zbieżny to **NIC**
NIE WIEMY o zbieżności $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$

Uwagi

- $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ jest szeregiem z zadania, $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ tworzymy sami
- Porównujemy najczęściej z szeregiem geometrycznym $\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n$ lub z szeregami $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.
Wtedy a_n często ma postać ułamków i możemy spróbować wziąć b_n jako
C · iloraz najwyższych potęg z licznika i mianownika a_n
- Trzeba uważać aby nierówność między a_n i b_n była prawdziwa i nie zapomnieć o dolnym ograniczeniu (0). Ma być tak jak w twierdzeniu o trzech ciągach
- Kryterium nie zawsze jest wygodne w użyciu i trzeba uważać, by nie dostać przypadku wątpliwego, bo wtedy **trzeba zaczynać od nowa**

- Warto sprawdzić opisany wyżej iloraz najwyższych potęg i na tej podstawie przewidzieć czy chcemy udowodnić zbieżność czy rozbieżność. To pomaga skonstruować odpowiednią nierówność między a_n i b_n .

Popularny błąd : odpowiedź na podstawie przypadku wątpliwego

Na przykład dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n}}$:

”Mamy $0 \leq \frac{1}{n + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{n}$ i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny **zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n}}$ jest rozbieżny**”.

GAME OVER... To jest przypadek nr 3 (wątpliwy)

Przykład

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2n-3}{n^3-1}$$

Przewidywanie zbieżności/rozbieżności:

Iloraz najwyższych potęg licznika i mianownika to $\frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$, a szereg $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny, bo $2 > 1$. Zatem chcemy udowodnić zbieżność (przypadek 1).

Potrzebujemy więc $\sum_{n=4}^{\infty} b_n$ i nierówności $0 \leq \frac{2n-3}{n^3-1} \leq b_n$.

Chcemy zwiększyć wyrażenie $\frac{2n-3}{n^3-1}$ ale tak, by **zostały najwyższe potęgi**.

Można zwiększyć licznik oraz zmniejszyć mianownik.

Zwiększamy licznik poprzez wyrzucenie 3.

Zmniejszamy mianownik poprzez zastąpienie 1 czymś większym : wyrażeniem z najwyższą potęgą. Nie można jednak wziąć całego n^3 , bo będzie 0 w mianowniku.

Wygrywa wzięcie $C \cdot n^3$ np. $\frac{1}{2}n^3$, bo dla $n \geq 4$ mamy $\frac{1}{2}n^3 \geq 1$.

To wszystko daje dla $n \geq 4$

$$0 \leq \frac{2n-3}{n^3-1} \leq \frac{2n}{n^3 - \frac{1}{2}n^3}$$

Czyli

$$b_n = \frac{2n}{n^3 - \frac{1}{2}n^3} = 4 \cdot \frac{1}{n^2}$$