Wykład - Analiza matematyczna II

(nieoficjalny) Skrypt wykładu Krzysztofa Michalika

2 maja 2023

Spis treści

0.1 Mały wstęp

Skrypt jest w większości przepisywany ze zdjęć zrobionych w wordzie z dysku ale w przypadku jakichś braków wykorzystywana jest prezka dr. Michalika.
W skrypcie mogą pojawić się błędy stąd najlepiej przed nauką pobrać z dysku najbardziej aktualną wersję zamieszczoną w folderze
Semestr II $->$ Analiza Matematyczna2 $->$ Michalik wykłady $->$ Skrypt_Wykład.pdf.
Data którą można zobaczyć na samym górze jest **datą ostatniej aktualizacji skryptu**.
Wszelkie uwagi, błędy (na pewno jakieś są) można pisać priv na discordzie :
Tomasz Strzelba#1454
Miłej nauki!

1 Całki niewłaściwe I rodzaju

Ustalamy liczbę $a \in \mathbb{R}$. Niech f będzie funkcją całkowalną na każdym przedziale w postaci $[a, T]$ gdzie $T > a$. Definiujemy całkę niewłaściwą pierwszego rodzaju z f na półprostej $[a, \infty]$ jako

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty} \int\limits_a^T f(x)\,dx \text{ , gdy granica po prawej stronie istnieje}$$

Analogicznie, gdy f jest całkowalna na każdym przedziale postaci $[T, b]$, gdzie $T < b$. Definiujemy całkę niewłaściwą pierwszego rodzaju z f na półprostej $[-\infty$, b] jako

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{T\to-\infty} \int\limits_T^b f(x)\,dx \text{ , gdy granica po prawej stronie istnieje}$$

Terminologia dotycząca takich całek jest taka, jak dla ciągów. Są 3 przypadki :

1. Granica z prawej strony jest liczbą. Wtedy mówimy, że całka jest zbieżna.

2. Granica z prawej strony jest równa ∞ lub $-\infty$. Wtedy mówimy, że całka jest rozbieżna (odpowiednio do ∞ lub $-\infty$).

3. Granica z prawej strony nie istnieje. Wtedy mówimy, że całka jest rozbieżna.

Analogicznie dla $\int\limits_{\infty}^{b} f(x)\,dx$

Przykład

$$\int\limits_{0}^{\infty} \sin x\,dx = \lim_{T\to\infty} \int\limits_{0}^{T} \sin x\,dx = \lim_{T\to\infty} [-\cos x]_0^T = \lim_{T\to\infty} (-\cos T-(-\cos 0)) = \lim_{T\to\infty} (1-\cos T)$$

Granica ta nie istnieje więc całka jest rozbieżna.

Przykład

$$\int\limits_{-\infty}^{0} 2^x\,dx = \lim_{T\to-\infty} \int\limits_{T}^{0} 2^x\,dx = \lim_{T\to-\infty} \left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_T^0 = \lim_{T\to-\infty} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{2^T}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}$$

Całka jest zbieżna do $\frac{1}{\ln 2}$.
Pozostaje przypadek $p = 1$. Wtedy

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|+C, \quad \int\limits_{a}^{T} \frac{1}{x}\,dx = [\ln|x|]_a^T = \ln|T|-\ln|a|, \quad \int\limits_{a}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{T\to\infty} (\ln|T|-\ln|a|) = \infty$$

Udowodniliśmy zatem ważny wynik

Twierdzenie

Gdy $a > 0$ to całka $\int\limits_{a}^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ jest skończona dla $p > 1$ oraz nieskończona dla $p \leqslant 1$.

Podobnie można łatwo pokazać poniższy wynik

Twierdzenie

Gdy $a \in \mathbb{R}$ i $A > 0$ to całka $\int\limits_{a}^{\infty} A^x\,dx$ jest skończona dla $0 < A < 1$ oraz nieskończona dla $A \geqslant 1$

Gdy $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ to

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty} F(T) - \lim_{S\to\infty} F(S)$$

przy czym przynajmniej jedna z granic z prawej strony nie istnieje lub zachodzi przypadek $\infty - \infty$ to $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ jest rozbieżna, a w pozostałych przypadkach całka ma wartość wynikającą z arytmetyki granic.

W przypadku kiedy całki nie da się obliczyć w sposób dokładny można to zrobić w sposób przybliżony, pod warunkiem , że wiemy, że jest zbieżna.
Kryteria zbieżności to twierdzenia opisujące warunki dostateczne zbieżności lub rozbieżności danej klasy całek. Najczęściej mają postać implikacji ale NIE równoważności.

Oznacza to zwykle własności postaci
warunek zachodzi $\Rightarrow$ całka jest zbieżna/rozbieżna
warunek nie zachodzi $\Rightarrow$ nic nie wiemy o zbieżności/rozbieżności całki

Popularne kryteria zbieżności całek z ∞

0. Warunek konieczny zbieżności całki

Jeżeli całka $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ jest zbieżna to $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ jest równa 0 lub nie istnieje.

Transpozycja twierdzenia daje następujący wynik:

Jeżeli $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ istnieje i jest różna od 0 to całka $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ nie jest zbieżna, przy czym

- gdy $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) > 0$ to $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \infty$,
- gdy $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) < 0$ to $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx = -\infty$,

Uwaga. Warunek konieczny to tylko implikacja!
Jeżeli $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ jest równa 0 lub nie istnieje to jeszcze **NIC NIE WIEMY** o całce,
Na przykład całki $\int\limits_{a}^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx,\ a > 0$, mają $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^p} = 0$ dla wszystkich $p > 0$ ale niektóre z tych całek są zbieżne, a niektóre rozbieżne

Ważna klasa całek - całki z funkcji nieujemnych

$$\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx,\ f \geqslant 0$$

Wedy $\int\limits_a^T f(x)\,dx = F(T) - F(a)$ jest funkcją niemalejącą zmiennej T zatem całka $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \lim\limits_{T\to\infty} \int\limits_a^T f(x)\,dx$ zawsze istnieje. Może być to liczba lub ∞.
Zatem brak zbieżności takich całek oznacza rozbieżność do ∞.

Dla całek z funkcji nieujemnych mamy dwa kolejne kryteria zbieżności.

1. Kryterium porównawcze
2. Kryterium ilorazowe

Twierdzenie(kryterium porównawcze)

Dane są dwie całki $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ oraz $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$. Wtedy zachodzą następujące własności

1. (Przypadek zbieżności). Gdy $\forall x \geqslant x_0 \geqslant a \;\; 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ i $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ jest zbieżna to $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ też jest zbieżna. Ponadto $0 \leqslant \int\limits_a^\infty f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^\infty g(x)\,dx$
2. (Przypadek rozbieżności) Gdy $\forall x \geqslant x_0 \geqslant a \;\; 0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$ i $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ jest rozbieżna (więc równa ∞) to $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ też jest rozbieżna (do ∞).
3. **(Przypadek wątpliwy)** Gdy $\forall x \geqslant x_0 \geqslant a \;\; 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ ale $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ jest rozbieżna to **NIC NIE WIEMY** o zbieżności $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.
4. **(Przypadek wątpliwy)** Gdy $\forall x \geqslant x_0 \geqslant a \;\; 0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$ ale $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ jest zbieżna to **NIC NIE WIEMY** o zbieżności $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.

Uwagi:

- $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ jest całką z zadania, $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ tworzymy sami.

- Porównujemy najczęściej z całkami $\int\limits_a^\infty A^x\,dx$ lub $\int\limits_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$. Wtedy f często ma postać ułamków i możemy spróbować wziąć g jako :

  C - iloraz najwyższych potęg z licznika i mianownika f

- Trzeba uważać aby nierówność między f i g była prawdziwa i nie zapomnieć przypadku wątpliwego, bo wtedy **trzeba zaczynać od nowa**.

- Warto sprawdzić opisany wyżej iloraz najwyższych potęg i na tej podstawie przewidzieć czy chcemy udowodnić zbieżność czy rozbieżność. To pomaga skonstruować odpowiednią nierówność między f i g.

Popularny błąd - odpowiedź na podstawie przypadku wątpliwego

Na przykład dla całki $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$:

"Mamy $0 \leqslant \frac{1}{x+\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{x}$ i całka $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ jest rozbieżna zatem całka $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$ jest rozbieżna."

GAME OVER... To jest przypadek nr 3 (wątpliwy)

Przykład

$$\int\limits_4^\infty \frac{2x-3}{x^3-1}\,dx$$

Przewidywanie zbieżności/rozbieżności

Najwyższe potęgi sugerują, że mając

$$\frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}, \quad \text{a} \quad \int\limits_4^\infty \frac{1}{x^2}\,dx < \infty, \quad \text{bo} \quad 2 > 1$$

Dowodzimy zbieżność. Trzeba mieć

$$0 \leqslant \frac{2x-3}{x^3-1} \leqslant g(x) = C \cdot \frac{x}{x^3}$$

Jak w twierdzeniu o 3 ciągach

$$0 \leqslant \frac{2x}{x^3 - \frac{1}{2}x^3} = 4 \cdot \frac{x}{x^3} = 4 \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$\int\limits_4^\infty \frac{4}{x^2}\,dx = 4\int\limits_4^\infty \frac{1}{x^2}\,dx < \infty \quad \left(\frac{1}{2}x^3 > 1 \text{ dla } x \geqslant 4\right)$$

Twierdzenie(kryterium ilorazowe)

Dane są dwie całki $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ oraz $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$. Ponadto

$$\forall x \geqslant x_0 \geqslant a \quad f(x), g(x) > 0$$

Jeżeli istnieje granica $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ i jest liczbą dodatnią to wtedy obie całki są zbieżne albo obie rozbieżne do ∞.

Uwagi

- Funkcję g tworzymy podobnie jak dla kryterium porównawczego
- Nie ma problemu z nierównościami :) ale za to trzeba umieć liczyć granice
- Granica nie może być ani 0 ani ∞: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$
- Rozwiązanie **musi zawierać wniosek** "granica ilorazu jest liczbą dodatnią więc obie całki są zbieżne lub obie rozbieżne" - bez tego będzie niepełne.
- Kryterium zwykle jest wygodniejsze niż porównawcze ale są przykłady, które "idą" z porównawczego ale nie z ilorazowego, bo granica ilorazu nie istnieje

  Np. $\int\limits_1^\infty \dfrac{2+\sin x}{x}\,dx$

Przykład

Poprzedni przykład raz jeszcze

$$\int\limits_4^\infty \frac{2x-3}{x^3-1}\,dx$$

$$f(x) = \frac{2x-3}{x^3-1}, \quad x \geqslant 4$$

$$g(x) = \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} > 0$$

$$\lim_{x\to\infty} = \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(2x-3)}{x^3-1} = 2$$

Obie całki zbieżne lub obie rozbieżne do ∞

Przykłady o postaci funkcji złożonej $\int\limits_a^\infty f(g(x))\,dx$ gdzie $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0^+$ oraz $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0^+$

Nową całką jest całka z funkcji wewnętrznej $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$

Liczymy granicę

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(g(x))}{g(x)}=\lim_{t=g(x)\to 0^+}\frac{f(t)}{t}\left[\frac{0}{0}\right]$$

przy użyciu granic podstawowych lub reguły de l'Hospitala.

Przykład

$$\int\limits_1^\infty\left(2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-1\right)dx$$

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}>0$$

$$f(x)=2^x-1>0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-1}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{2^t-1}{t}\left[\frac{0}{0}\right]=\ln 2\in(0,\infty)$$

Obie całki zbieżne lub obie rozbieżne

$$\int\limits_1^\infty\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\int\limits_1^\infty\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx=\infty\quad\text{bo}\quad\frac{1}{2}\leqslant 1$$

Wartość główna całki niewłaściwej I rodzaju

Całka $\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\,dx$ jest rozbieżna, gdyż jako suma całek prowadzi do symbolu $\infty-\infty$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\,dx=\int\limits_{-\infty}^{0}x\,dx+\int\limits_{0}^{\infty}x\,dx=-\infty+\infty$$

Intuicyjnie oczekwialibyśmy jednak, że jest ona równa 0 - funkcja podcałkowa jest nieparzysta czyli mamy "tyle funkcji na + co na -", a więc wszystko powinno się wzajemnie zrównoważyć. Aby taka całka miała sens trzeba nieco zmodyfikować jej definicję i wprowadzić pojęcie wartości głównej całki niewłaściwej (obustronnej).

Definicja

Wartość główna całki $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ to wielkość

$$\text{P.V.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty}\int\limits_{-T}^{T} f(x)\,dx$$

o ile powyższa granica istnieje.

Oznacza to, że przybliżamy całkę po $\mathbb{R}$ całkami po przedziale symetrycznym względem 0.
P.V. jest skrótem od angielskiego "Principal Value".

Przykład

$$\text{P.V.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \lim_{T\to\infty}\int\limits_{-T}^{T} x\,dx = \lim_{T\to\infty} 0 = 0$$

Zauważmy, że gdy $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ to

$$\text{P.V.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty}\int\limits_{-T}^{T} f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty}(F(T) - F(-T))$$

Jeżeli teraz ma sens wyrażenie $\lim\limits_{T\to\infty} F(T) - \lim\limits_{T\to\infty} F(-T)$ to biorąc $S = -T \to -\infty$ dostajemy

$$\text{P.V.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty}(F(T) - F(-T)) = \lim_{T\to\infty} F(T) - \lim_{T\to\infty} F(-T) =$$

$$= \lim_{T\to\infty} F(T) - \lim_{S\to-\infty} F(S) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

Udowodniliśmy zatem poniższe twierdzenie.

Twierdzenie

Jeżeli całka $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ istnieje w zwykłym sensie (jako suma odpowiednich całek jednostronnych jest liczbą lub jedną z nieskończoności) to również jej wartość główna istnieje i jest równa tej całce.

Natomiast może się zdarzyć, że wartość główna całki istnieje ale sama całka jest rozbieżna (był przykład).
W szczególności gdy funkcja jest na $\mathbb{R}$ ciągła i nieparzysta to wartość główna całki z tej funkcji jest zawsze 0 niezależnie od zbieżności samej całki.

2 Całki niewłaściwe II rodzaju

Definicja

Ustalamy liczby $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. Niech f będzie funkcją całkowalną na każdym przedziale postaci $[a, T]$, gdzie $a < T < b$.
Definiujemy całkę niewłaściwą drugiego rodzaju z f na przedziale $[a, b)$ jako

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{T \to b^+} \int_a^T f(x)\,dx, \quad \text{gdy granica po prawej stronie istnieje.}$$

Twierdzenie

Analogicznie, gdy f jest całkowalna na każdym przedziale postaci $[T, b]$, gdzie $a < T < b$. to definiujemy całkę niewłaściwą pierwszego rodzaju z f na przedziale $(a, b]$ jako

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{T \to a^+} \int_T^b f(x)\,dx, \quad \text{gdy granica po prawej stronie istnieje.}$$

Terminologia dotycząca takich całek jest taka, jak dla całek niewłaściwych 1 rodzaju. Są 3 przypadki :

1. Granica z prawej strony jest liczbą. Wtedy całka jest zbieżna (do tej granicy).
2. Granica z prawej strony jest równa ∞ lub $-\infty$. Wtedy całka jest rozbieżna do ∞ lub $-\infty$.
3. Granica z prawej strony nie istnieje. Wtedy mówimy, że całka jest rozbieżna.

Interpretacja geometryczna.

Podobnie jak dla zwykłej całki oznaczonej, jeżeli $f \geqslant 0$ na $(a, b]$ lub $[a, b)$ to całka niewłaściwa 2 rodzaju $\int_a^b f(x)\,dx$ daje pole obszaru ograniczonego osią X, wykresem f oraz prostymi $x = a$ oraz $x = b$.
Najczęściej definiujemy tego typu całkę w przypadku gdy f ma asymptotę pionową $x = a$ lub $x = b$. Wtedy ten obszar nie jest ograniczony z góry bądź z dołu.

Przykład

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{T \to 0^+} \int_T^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \lim_{T \to 0^+} [2\sqrt{x}]_T^1 = \lim_{T \to 0^+} (2 - 2\sqrt{T}) = 2$$

Całka jest zbieżna do 2.

Wersja całki obustronnej

Ustalamy liczby $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$. Niech f będzie funkcją całkowalną na każdym przedziale postaci $[a, T]$, $T < c$, oraz $[T, b]$, $T > c$. Definiujemy całkę niewłaściwą 2 rodzaju z f na zbiorze $[a, c) \cup (c, b]$ jako sumę dwóch całek niewłaściwych. tzn.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

przy czym gdy przynajmniej jedna z całek z prawej strony nie istnieje lub zachodzi przypadek $\infty - \infty$ to $\int_a^b f(x)\,dx$ jest rozbieżna, a w pozostałych przypadkach całka ma wartość wynikającą z arytmetyki granic.

Najczęściej takie całki pojawiają się, gdy f ma asymptotę w $x = c$.

Twierdzenie

Istnieją podstawienia, które każdą całkę niewłaściwą 2 rodzaju sprowadzają do przypadku całki niewłaściwej 1 rodzaju.
W szczególności

- dla całki $(a, b]$ możemy wziąć $t = \dfrac{1}{x-a}$ co daje $x = a + \dfrac{1}{t}$ oraz

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_C^\infty \frac{1}{t^2} f\left(a + \frac{1}{t}\right) dt \quad \text{, gdzie} \quad C = \frac{1}{b-a}$$

- dla całki na $[a, b)$ możemy wziąć $t = \dfrac{1}{b-x}$ co daje $t = b - \dfrac{1}{t}$ oraz

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_C^\infty \frac{1}{t^2} f\left(b - \frac{1}{t}\right) dt \quad \text{, gdzie} \quad C = \frac{1}{b-a}$$

Na przykład dla $p > 0$ biorąc $t = \dfrac{1}{x}$ mamy

$$\int_0^b \frac{1}{x^p}\,dx = \int_{\frac{1}{b}}^\infty \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^p} dt = \int_{\frac{1}{b}}^\infty \frac{1}{t^{2-p}}\,dt$$

Podstawienie to oznacza też, że mamy analogiczne kryteria zbieżności dla całek 2 rodzaju - porównawcze i ilorazowe, przy czym dla kryterium ilorazowego liczymy granicę ilorazu funkcji w odpowiednim końcu zadanego przedziału.

Na koniec, wartość główna całki $\int_a^b f(x)\,dx$ na $[a, c) \cup (c, b]$ to wielkość

$$\text{P.V.}\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{T\to 0^+}\left(\int\limits_a^{c-T} f(x)\,dx + \int\limits_{c+T}^b f(x)\,dx\right)$$

o ile powyższa granica istnieje.
Oznacza to, że odpowiednie końce przedziałów całkowania są w jednakowej odległości od c i zbiegają do c.

Zbieżność bezwzględna całek niewłaściwych

Definicja

Całka $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ jest zbieżna bezwzględnie, gdy zbieżna jest całka $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$.

Analogiczne definicje mamy dla pozostałych całek 1 rodzaju oraz dla całek 2 rodzaju.

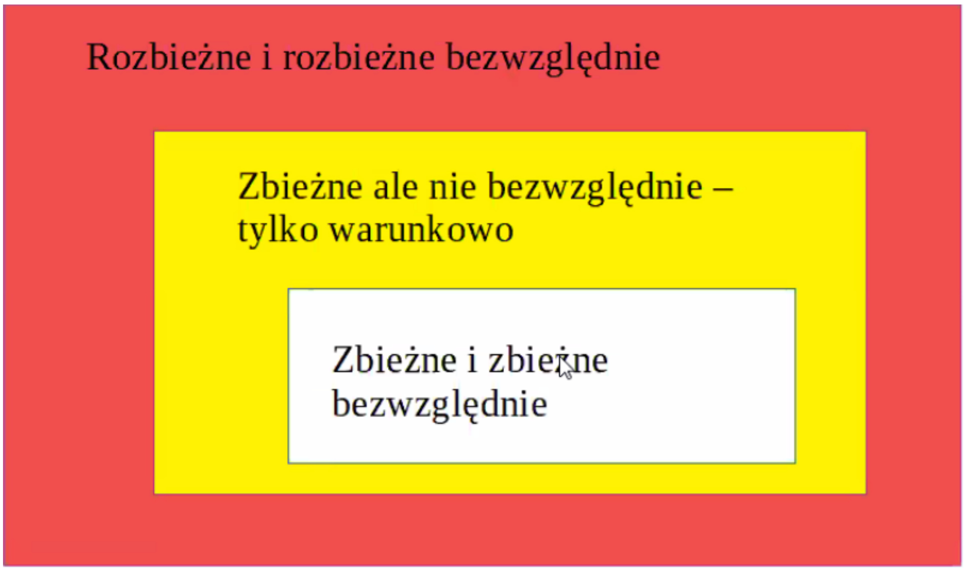
Uwagi

- Gdy f jest nieujemna to mamy $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ i definicja nie wnosi nic nowego. Sytuacja się zmienia, gdy są przedziały na którym f ma różne znaki.
- Nierówność $\left|\int\limits_a^T f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^T |f(x)|\,dx$ daje $\left|\int\limits_a^\infty f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^\infty |f(x)|dx$ ale gdy są przedziały na którym f ma różne znaki to równość nie zachodzi. Zatem, ogólnie, $\left|\int\limits_a^\infty f(x)\,dx\right|$ i $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ **to nie to samo**.

Twierdzenie

Jeżeli całka niewłaściwa jest bezwzględnie zbieżna to jest zbieżna (w zwykłym sensie).
Transpozycja tego twierdzenia daje warunek równoważny :
Jeżeli całka $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ nie jest zbieżna to również nie jest zbieżna bezwzględnie,
co oznacza $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx = \infty$.
Analogicznie dla pozostałych typów całek niewłaściwych.

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Są całki zbieżne ale nie bezwzględnie, np. $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$.
Takie całki to tzw. całki zbieżne warunkowo.
Są więc 3 możliwe sytuacje - 3 rozłączne podzbiory całek niewłaściwych:



Przykład

Całka $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}}\,dx$ jest zbieżna bezwzględnie, bo biorąc $\int\limits_1^\infty \left|\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}}\right| dx$ i używając kryterium porównawczego mamy

$$0 \leqslant \left|\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}}\right| = \frac{|\sin x|}{x^{\frac{4}{3}}} \leqslant \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$$

a całka $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}\,dx$ jest zbieżna bo $\frac{4}{3} > 1$. Zatem $\int\limits_1^\infty \left|\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}}\right| dx$ jest zbieżna, a stąd $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}}\,dx$ też jest zbieżna.

3 Szeregi liczbowe

Dany jest ciąg liczbowy $a_1, a_2, ..., a_n, ...$
Tworzymy jego ciąg sum częściowych :

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Jeżeli istnieje granica $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ (skończona lub nieskończona) to oznaczamy ją symbolem $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

W ogólnym przypadku możemy wziąć ciąg, który zaczyna się od dowolnej liczby całkowitej $n_0 : a_{n_0}, a_{n_0+1}, ..., a_n, ...$ i jego sum częściowych

$$S_n = a_{n_0}, \quad S_{n_0+1} = a_{n_0} + a_{n_0+1}, \quad S_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + ... + a_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k, \ n \geqslant n_0$$

$S = \lim_{n\to\infty} S_n$ jest oznaczana przez $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$.

Definicja

Dla ustalonego $n_0 \in \mathbb{Z}$ obiekt $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ nazywamy szeregiem liczbowym, a wartość S (gdy istnieje) jego sumą, oznaczaną także przez $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$. Mamy wtedy

$$S_n = a_{n_0}, \quad S_{n_0+1} = a_{n_0} + a_{n_0+1}. \quad S_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + ... + a_n + ... =$$
$$\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n_0}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n$$

gdzie

- S_n to n - ta suma szeregu,
- a_n to n - ty wyraz szeregu.

Terminologia dotycząca sumy S jest taka, jak dla ciągów. Są 3 przypadki :

1. S jest liczbą. Wtedy dany szereg jest zbieżny (do S).
2. $S = \infty$ lub $S = -\infty$. Wtedy dany szereg jest rozbieżny (do ∞ lub $-\infty$).
3. $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ nie istnieje. Wtedy dany szereg jest rozbieżny.

Przykład

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} \text{ - szereg zbieżny do 1}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ - szereg rozbieżny do } \infty$$

$$1-1+1-1+1-1+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \text{ - szereg rozbieżny}$$

Uwaga. Każdy szereg zaczynający się od indeksu $n_0 \in \mathbb{Z}$ można przekształcić tak, by zaczynał się od indeksu 1. Wynika to z równości

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+n_0-1}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum_{n=2}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$$

Obliczanie sum szeregów

Jest to zadanie trudne, a najczęściej niemożliwe, gdyż trudno jest znaleźć bezpośredni wzór na sumy częściowe S_n.

Niektóre przypadki szczególne.

1. Ciąg geometryczny i szereg geometryczny.

   - $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, gdzie q jest ilorazem ciągu (czyli $a_{n+1} = a_n \cdot q,\ n \geqslant 1$).
     Wtedy

     $$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1 \text{ oraz } S_n = na_1,\ q = 1$$

     To oznacza, że dla $a_1 \neq 0$,
   - szereg jest zbieżny dla $-1 < q < 1$ i jego suma jest $S = \dfrac{a_1}{1-q}$,
   - szereg jest rozbieżny do ∞ lub $-\infty$ dla $q \geqslant 1$, znak zależy od znaku a_1,
   - szereg jest rozbieżny (suma nie istnieje) dla $q \leqslant -1$

   Stąd np.

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1 \text{ , bo tutaj } a_1 = q = \frac{1}{2}$$

2. Szeregi o wyrazie ogólnym postaci
   $a_n = f(n+1) - f(n)$ lub $a_n = f(n) - f(n+1)$, gdzie f jest pewną funkcją.

   W bardziej ogólnej postaci
   $a_n = f(n+k) - f(n)$ lub $a_n = f(n) - f(n+k)$, gdzie $k \in \mathbb{N}^+$ to tzw. krok.

   Takie szeregi to tzw. szeregi teleskopowe (telescoping series).

   Przykład

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \text{ - tutaj } f(x) = \frac{1}{x}$$

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \text{ - tutaj } f(x) = \sqrt{x}$$

   $$\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{arc\,tg}(n) - \operatorname{arc\,tg}(n+2)) \text{ - tutaj } f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$$

   Dla takich szeregów łatwo wyznacza się wzór na S_n. Wyrazy wewnętrzne się upraszczają i zostaje:
   suma k pierwszych wartości, f suma k ostatnich wartości f (lub na odwrót)

Przykład

Dla $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (f(n) - f(n+1)))$ mamy

$S_n = f(1) - f(2) + f(2) - f(3) + f(3) - f(4) + ... + f(n) - f(n+1) = f(1) - f(n+1)$

Jeżeli istnieje granica $G = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ to mamy

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (f(1) - f(n+1)) = f(1) - G$$

Przykład

Wyznaczyć sumę $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$
Wyraz ogólny nie ma postaci różnicy więc trzeba ją stworzyć.
Używając rozkładu na ułamki proste dostajemy

$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = ... = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

I to daje

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$$

Własności szeregów zbieżnych

Twierdzenie

Jeżeli szeregi $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ są zbieżne to zbieżne są szeregi $\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n + b_n)$ oraz $\sum_{n=n_0}^{\infty} (c \cdot a_n)$, $c \in \mathbb{R}$.

Ponadto

- $\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$
- $\sum_{n=n_0}^{\infty} (c \cdot a_n) = c \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$

Prawdziwe są także analogiczne twierdzenia prowadzące do arytmetyki granic nieskończonych, gdy nie pojawiają się symbole nieoznaczone.

Na przykład gdy $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \infty$ oraz $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$ to

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n = \infty$$

Natomiast gdy $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n = \infty$ to $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} (a_n - b_n)$ może być zarówno zbieżny jak i rozbieżny i nie ma sensu równość

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n - \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$$

Twierdzenie

Zmiana wartości n_0 nie wpływa na zbieżność/rozbieżność szeregu $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

Może mieć wpływ na wartość jego sumy.

Stąd wynika np., że szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=100}^{\infty} a_n$ są albo oba zbieżne albo oba rozbieżne do ∞ lub $-\infty$ albo oba rozbieżne.
To też oznacza, że na podstawie kilku pierwszych wyrazów ciągu/szeregu
NIC NIE MOŻNA POWIEDZIEĆ o jego zbieżności

Popularny błąd

"Liczymy wartości a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 . Wychodzi ciąg malejący i dodatni.
Zatem szereg jest zbieżny". **GAME OVER...**

Twierdzenie

Dla ustalonego $n_0 \in \mathbb{N}^+$ i $p \in \mathbb{R}$ szereg $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ jest zbieżny dla $p > 1$ i rozbieżny do ∞ dla $p \leqslant 1$.

W przypadku kiedy sumy szeregu nie da się wyznaczyć w sposób dokładny można to zrobić w sposób przybliżony, pod warunkiem, że wiemy, że szereg jest zbieżny.

Kryteria zbieżności to twierdzenia opisujące warunki dostateczne zbieżności lub rozbieżności danej klasy szeregów. Najczęściej mają postać implikacji ale **NIE** równoważności.

Oznacza to zwykle własności postaci
warunek zachodzi $\Rightarrow$ szereg jest zbieżny/rozbieżny,
warunek nie zachodzi $\Rightarrow$ nic nie wiemy o zbieżności/rozbieżności szeregu

Popularne kryteria zbieżności szeregów

0. Warunek konieczny zbieżności szeregów

Twierdzenie

Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dowód
Dla $n \geqslant n_0 + 1$ mamy $S_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + ... + a_{n-1} + a_n$ oraz $S_{n-1} = a_{n_0} + a_{n_0+1} + ... + a_{n-1}$,
Stąd

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny to $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S \in \mathbb{R}$. To daje

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Transpozycja tego twierdzenia daje warunek równoważny do zastosowania praktycznego :
Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ to szereg $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ nie jest zbieżny przy czym

- gdy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$ to $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n = \infty$
- gdy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < 0$ to $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n = -\infty$

Uwaga. To jest tylko implikacja!
Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ to jeszcze **NIC NIE WIEMY** o szeregu.
Na przykład szeregi $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ mają $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ dla wszystkich $p > 0$ ale niektóre z tych szeregów są zbieżne, a niektóre rozbieżne.

Popularny błąd

"$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ zatem szereg jest zbieżny". **GAME OVER...**

Szeregi o wyrazach nieujemnych

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n, \;\; a_n \geqslant 0$$

Wtedy $S_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + ... + a_{n-1} + a_n$ jest ciągiem niemalejącym zatem suma szeregu $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ zawsze istnieje. Może być to liczba lub ∞.

Podobnie dla szeregów o wyrazach niedodatnich $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$, $a_n \leqslant 0$, suma zawsze istnieje i rozbieżność oznacza rozbieżność do $-\infty$.

Przykład

Następujące szeregi nie są zbieżne

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(n^2+2n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin n$$

Dla szeregów o wyrazach nieujemnych mamy dwa kolejne kryteria zbieżności.

1. Kryterium porównawcze
2. Kryterium ilorazowe

Twierdzenie (kryterium porównawcze)

Dane są dwa szeregi $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ oraz $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n$. Wtedy zachodzą nastepujące własności.

1. (Przypadek zbieżności) Gdy $\forall n \geqslant k \geqslant n_0 \quad 0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ i $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n$ jest zbieżny to $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ też jest zbieżny. Ponadto $0 \leqslant \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n \leqslant \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n$

2. (Przypadek rozbieżności) Gdy $\forall n \geqslant k \geqslant n_0 \quad 0 \leqslant b_n \leqslant a_n$ i $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny to $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ też jest rozbieżny. Ponadto $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n = \infty$

3. (Przypadek wątpliwy). Gdy $\forall n \geqslant k \geqslant n_0 \quad 0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ ale $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny to **NIC NIE WIEMY** o zbieżności $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$

4. (Przypadek wątpliwy). Gdy $\forall n \geqslant k \geqslant n_0 \quad 0 \leqslant b_n \leqslant a_n$ ale $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n$ jest zbieżny to **NIC NIE WIEMY** o zbieżności $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$

Uwagi

- $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ jest szeregiem z zadania, $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n$ tworzymy sami

- Porównujemy najczęściej z szeregiem geometrycznym $\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n$ lub z szeregami $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Wtedy a_n często ma postać ułamków i możemy spróbować wziąć b_n jako

  C · iloraz najwyższych potęg z licznika i mianownika a_n

- Trzeba uważać aby nierówność między a_n i b_n była prawdziwa i nie zapomnieć o dolnym ograniczeniu (0). Ma być tak jak w twierdzeniu o trzech ciągach

- Kryterium nie zawsze jest wygodne w użyciu i trzeba uważać, by nie dostać przypadku wątpliwego, bo wtedy **trzeba zaczynać od nowa**

- Warto sprawdzić opisany wyżej iloraz najwyższych potęg i na tej podstawie przewidzieć czy chcemy udowodnić zbieżność czy rozbieżność. To pomaga skonstruować odpowiednią nierówność między a_n i b_n.

Popularny błąd – odpowiedź na podstawie przypadku wątpliwego

Na przykład dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$:

"Mamy $0 \leqslant \frac{1}{n+\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{n}$ i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ jest rozbieżny".

GAME OVER... To jest przypadek nr 3 (wątpliwy)

Przykład

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2n-3}{n^3-1}$$

Przewidywanie zbieżności/rozbieżności:

Iloraz najwyższych potęg licznika i mianownika to $\frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$, a szereg $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny, bo $2 > 1$. Zatem chcemy udowodnić zbieżność (przypadek 1).

Potrzebujemy więc $\sum_{n=4}^{\infty} b_n$ i nierówności $0 \leqslant \frac{2n-3}{n^3-1} \leqslant b_n$.

Chcemy zwiększyć wyrażenie $\frac{2n-3}{n^3-1}$ ale tak, by **zostały najwyższe potęgi**.

Można zwiększyć licznik oraz zmniejszyć mianownik.

Zwiększamy licznik poprzez wyrzucenie 3.

Zmniejszamy mianownik poprzez zastąpienie 1 czymś większym : wyrażeniem z najwyższą potęgą. Nie można jednak wziąć całego n^3 , bo będzie 0 w mianowniku.

Wygrywa wzięcie $C \cdot n^3$ np. $\frac{1}{2}n^3$, bo dla $n \geqslant 4$ mamy $\frac{1}{2}n^3 \geqslant 1$.

To wszystko daje dla $n \geqslant 4$

$$0 \leqslant \frac{2n-3}{n^3-1} \leqslant \frac{2n}{n^3 - \frac{1}{2}n^3}$$

Czyli

$$b_n = \frac{2n}{n^3 - \frac{1}{2}n^3} = 4 \cdot \frac{1}{n^2}$$

DZIURA W SKRYPCIE

Twierdzenie (kryterium ilorazowe)

Dane są dwa szeregi $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$. Ponadto $\forall n \geqslant n_0 \; a_n, b_n > 0$.

Jeżeli istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ i jest **liczbą dodatnią** to wtedy oba szeregi są zbieżne albo oba rozbieżne do ∞.

Uwagi

- Ciąg b_n tworzymy podobnie jak dla kryterium porównawczego.
- Nie ma problemu z nierównościami :) ale za to trzeba umieć liczyć granice.
- Granica nie może być ani 0 ani ∞: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, \infty)$.

  Nie wystarczy warunek $L > 0$ bo ∞ także jest > 0.
- Rozwiązanie **musi zawierać wniosek** ”granica ilorazu jest liczbą dodatnią więc oba **szeregi** są zbieżne lub oba rozbieżne” - bez tego będzie niepełne

- Kryterium zwykle jest wygodniejsze niż porównawcze ale są przykłady, które pójdą z porównawczego ale nie z ilorazowego, bo granica ilorazu nie istnieje

  Np. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n}$.

Przykład

Poprzedni przykład raz jeszcze

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2n-3}{n^3-1}$$

Bierzemy $b_n = \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{2n-3}{n^3-1}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{2n^3-3n^2}{n^3-1} = \frac{2-\frac{3}{n}}{1-\frac{1}{n^3}}$$

Stąd $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 2$ - liczba dodatnia.
Zatem oba szeregi są zbieżne lub oba są rozbieżne.
Dalej już analiza $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ i wniosek jak w kryterium porównawczym :
$\sum\limits_{n=4}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny bo $2 > 1$. Zatem $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{2n-3}{n^3-1}$ też jest zbieżny.

Przykłady o postaci funkcji złożonej $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} f(b_n)$,
gdzie $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0^+$ oraz $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0^+$.
Nowym szeregiem jest szereg z funkcji wewnętrznej $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n$.
Liczymy granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n)}{b_n} = \lim_{x=b\to 0^+} \frac{f(x)}{x} \left[\frac{0}{0}\right]$$

przy użyciu granic podstawowych lub reguły de l'Hospitala.

Przykład

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$$

Mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{2}-1\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)$$

Więc bierzemy $b_n=\frac{1}{n}>0$.
Liczymy granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{x=\frac{1}{n}\to 0^+}\frac{2^x-1}{x}=\ln 2$$

Jest to liczba dodatnia więc oba szeregi są zbieżne lub oba są rozbieżne.
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$ więc $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{2}-1\right)=\infty$.

3. Kryterium Cauchy'ego.
4. Kryterium d'Alemberta

Działają dla szeregów o dowolnych wyrazach. Teza obu kryteriów jest taka sama ale liczymy granice innych wyrażeń.

Twierdzenie (kryterium Cauchy'ego)

Dany jest szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n$ taki, że istnieje granica $q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$. Wtedy

1. Gdy $0\leqslant q<1$ to szereg jest zbieżny.
2. Gdy $q>1$ to szereg jest rozbieżny
3. **(Przypadek wątpliwy)**. Gdy q = 1 to **NIC NIE WIEMY** o zbieżności szeregu.

Uwagi

- Do wyznaczenia q przydają się następujące własności granic
  a) Gdy $\lim_{n\to\infty}a_n$ jest **liczbą dodatnią** to $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$.
  b) $\forall p\in\mathbb{R}\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^p}=1$.
- q **nie może być ujemne**. q ujemne zwykle oznacza brak modułu na a_n.

Twierdzenie (kryterium d'Alemberta)

Dany jest szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n,\ a_n \neq 0$, taki, że istnieje granica $q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Wtedy

1. Gdy $0 \leqslant q < 1$ to szereg jest zbieżny.
2. Gdy $q > 1$ to szereg jest rozbieżny
3. **(Przypadek wątpliwy)**. Gdy q = 1 to **NIC NIE WIEMY** o zbieżności szeregu.

- q **nie może być ujemne**. q ujemne zwykle oznacza brak modułu na a_n.
- W obu kryteriach szerergi $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ pokazują, że $q = 1$ nic nie daje.

Przykład

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{20^n}{n!}$$

Tutaj $a_n = \frac{20^n}{n!} > 0$ oraz $a_{n+1} = \frac{20^{n+1}}{(n+1)!}$. Zatem z kryterium d'Alemberta

$$q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{20^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{20^n}{n!}}$$

Przykład

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 \arcsin \frac{1-n}{2n+1}\right)^n$$

Tutaj chcemy użyć kryterium Cauchy'ego.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\left(2 \arcsin \frac{1-n}{2n+1}\right)^n\right|} = \sqrt[n]{\left|2 \arcsin \frac{1-n}{2n+1}\right|^n} = \left|2 \arcsin \frac{1-n}{2n+1}\right|$$

$$= \left|2 \arcsin \frac{\frac{1}{n} - 1}{2 + \frac{1}{n}}\right|$$

Stąd

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \left|2 \arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)\right| = \left|2\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right| = \frac{\pi}{3}$$

$q > 1$ więc szereg jest rozbieżny.

Twierdzenie (kryterium całkowe)

Dany jest szereg $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$. Jeżeli na $[x_0, \infty)$, $x_0 \geqslant n_0$ istnieje funkcja f taka, że

- $f(n) = a_n,\ n \geqslant x_0,$
- f jest nieujemna na $[x_0, \infty)$,
- f jest nierosnąca na $[x_0, \infty)$,

to całka niewłaściwa $\int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx$ i szereg $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ są jednocześnie skończone lub jednocześnie rozbieżne do ∞.

Uwagi do kryterium

- Najczęściej $x_0 = n_0$.
- Kryterium jest ważne z punktu widzenia teorii, gdyż wiele innych własności szeregów z niego wynika. Na przykład, gdy $x_0 = n_0$ to
$$\int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leqslant a_{n_0} + \int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$$
To pozwala oszacować sumę szeregu.
- Sens użycia kryterium: nie umiemy policzyć sumy szeregu ale umiemy **obliczyć** całkę $\int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{T\to\infty} \int\limits_{x_0}^{T} f(x)\,dx$. Stosujemy to kryterium tylko wtedy, gdy zamierzamy liczyć tę całkę.
- Z praktycznego punktu widzenia kryterium jest najczęściej **najmniej wygodnie** do zastosowania. Opłaca się je stosować głównie wtedy, gdy szereg zawiera wyrażenie $\ln n$.

Przykład

Dla ustalonego $n_0 \in \mathbb{N}^+$ i $p > 0$ dowodzimy znany już wynik dla szeregu $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ zbieżny dla $p > 1$ oraz rozbieżny do ∞ dla $p \leqslant 1$.

Tutaj bierzemy po prostu $f(x) = \frac{1}{x^p},\ x \in [n_0, \infty)$.

Dla $p > 0$ f jest malejąca i nieujemna oraz $f(n) = \frac{1}{n^p}$

Spełnione są wiec warunki użycia kryterium. Liczymy całkę $\int\limits_{n_0}^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$.

Było to już robione wcześniej i wiemy, że dla $p > 1$ jest liczbą, a dla $p \leqslant 1$ jest równa ∞. Stąd szereg jest zbieżny dla $p > 1$ oraz rozbieżny do ∞ dla $0 < p \leqslant 1$. Dla $p \leqslant 0$ szereg jest rozbieżny, bo nie spełnia warunku koniecznego zbieżności.

Uwaga do szeregów z wyrażeniem $\ln n$.

Dla dowolnego $p > 0$ funkcja $\frac{\ln x}{x^p}$, $x \geqslant 2$, ma zbiór wartości $\left(0, \frac{1}{p \cdot e}\right]$. Zatem

$$\frac{\ln x}{x^p} \leqslant \frac{1}{p \cdot e} \Leftrightarrow \ln x \leqslant \frac{1}{p \cdot e} x^p$$

a stąd

$$\ln n \leqslant \frac{1}{p \cdot e} n^p$$

Z oszacowaniem dolnym jest gorzej, bo nie ma pojedynczej funkcji elementarnej mniejszej od $\ln x$ i pozostaje oszacowanie przez stałą np.

$$\ln n \geqslant \frac{1}{2}, \quad n \geqslant 2$$

To daje oszacowanie dla dowolnego $p > 0$:

$$\frac{1}{2} \leqslant \ln n \leqslant C \cdot n^p, \quad n \geqslant 2$$

Tutaj $C = \frac{1}{p \cdot e}$, a dla $p \geqslant \frac{1}{e}$ wystarczy wziąć $C = 1$.

Często to oszacowanie pozwala uniknąć kryterium całkowego i zastąpienie go porównawczym, potrzeba tylko wziąć odpowiednio małe p.

Przykład

Dla szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n \sqrt[5]{n}}$ z kryterium porównawczego mamy

$$0 < \frac{\ln n}{n \sqrt[5]{n}} \leqslant \frac{C n^p}{n \sqrt[5]{n}} = \frac{C n^p}{n \cdot n^{0,2}} = \frac{C}{n^{1,2-p}}$$

Wystarczy teraz wziąć $p < 0,2$ czyli np. $p = 0,1$ i zbadać szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{C}{n^{1,2-0,1}} = C \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C}{n^{1,1}} \quad \text{— zbieżny, bo } 1,1 > 1$$

Zatem wyjściowy szereg jest zbieżny

Zbieżność bezwzględna szeregów

Definicja

Szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ jest <u>zbieżny bezwzględnie</u>, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$.

Uwagi

- Gdy wszystkie wyrazy a_n są nieujemne to mamy $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ i definicja nie wnosi nic nowego. Sytuacja się zmienia gdy szereg ma zarówno wyrazy dodatnie jak i ujemne.
- Z nierówności $|S_n| = |a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots + a_n| \leqslant |a_{n_0}| + |a_{n_0+1}| + \ldots + |a_n|$ wynika nierówność $\left|\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ ale równość nie musi zachodzić.

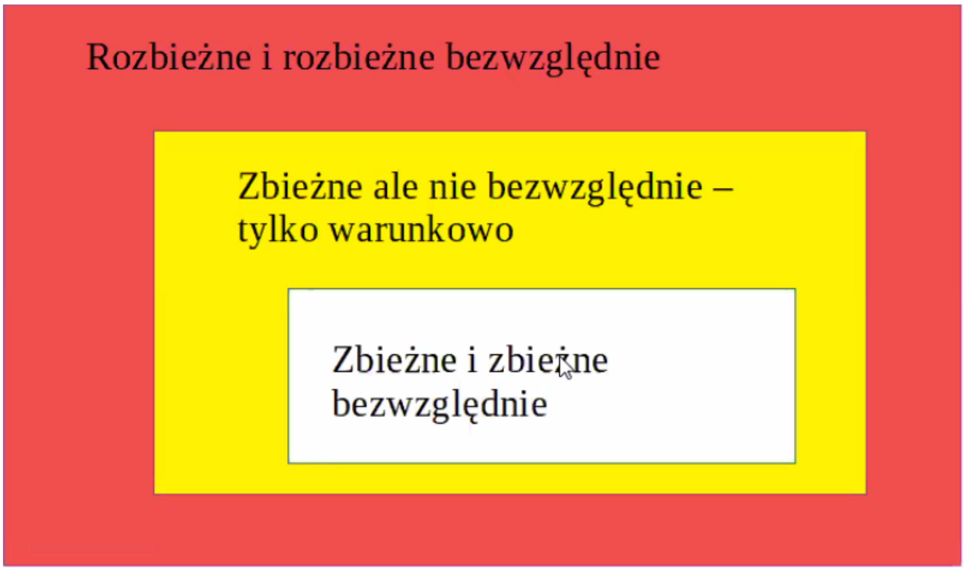
  Np. dla $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ mamy $\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\right| = \frac{2}{3}$ ale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| = 2$

  Zatem $\left|\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n\right|$ i $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ **to nie to samo**.

Twierdzenie

Jeżeli szereg jest bezwzględnie zbieżny to jest zbieżny (w zwykłym sensie).
Transpozycja tego twierdzenia daje warunek równoważny:
Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ nie jest zbieżny to również nie jest zbieżny bezwzględnie, co oznacza $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} |a_n| = \infty$.

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Są szeregi zbieżne ale nie bezwzględnie, np. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
Takie szeregi to tzw. szeregi zbieżne warunkowo.



Przykład

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^4}}$ jest zbieżny bezwzględnie, bo biorąc $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^4}}\right|$ i używając kryterium porównwawczego mamy

$$0 \leqslant \left|\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^4}}\right| = \frac{|\sin n|}{n^{\frac{4}{3}}} \leqslant \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$$

a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ jest zbieżny, bo $\frac{4}{3} > 1$.

Zatem $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^4}}\right|$, a stąd $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^4}}$ też jest zbieżny.

Szeregi naprzemienne

Są to szeregi, w których na zmianę dodajemy i odejmujemy wyrazy dodatnie:
$a_{n_0} - a_{n_0+1} + a_{n_0+2} - a_{n_0+3} + ...$ lub $-a_{n_0} + a_{n_0+1} - a_{n_0+2} + a_{n_0+3} + ...$ gdzie $a_n > 0$.

Postać ogólna :
$\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ lub $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$

Przykład

$$\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4} - \sqrt{5} + ... = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Twierdzenie

Szereg naprzemienny $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ lub $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$ nazywany jest szeregiem Leibnitza, jeżeli a_n jest ciągiem nierosnącym i zbieżnym do 0.

Na przykład $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ jest szeregiem Leibnitza, bo tutaj $a_n = \frac{1}{n}$ jest malejący i zbieżny do 0.

Twierdzenie (Leibnitz)

Każdy szereg Leibnitza jest zbieżny.

Uwagi

- Twierdzenie to daje tylko zbieżność warunkową, nie gwarantuje bezwzględnej
- Gdy ciąg a_n nie dąży do 0 to szereg naprzemienny $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n$ jest rozbieżny, gdyż $(-1)^n a_n$ też nie dąży do 0. Wynika to z twierdzenia

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(-1)^n a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$$

- Wystarczy, by ciąg a_n był nierosnący dla $\forall n \geqslant k \geqslant n_0$.
- Gdy ciąg a_n zbiega do 0 ale nie jest nierosnący to **NIC NIE WIEMY** o zbieżności szeregu.
- Do badania czy a_n jest nierosnący można próbować rozszerzyć a_n do funkcji f tak by $f(n) = a_n$. Potem — pochodna itd. Gdy szereg naprzemienny jest zbieżny bezwzględnie to tw. Leibnitza nie jest potrzebne.

Ważna uwaga
Poza twierdzeniem Leibnitza wszystkie pozostałe kryteria (porównawcze, ilorazowe, Cauchy'ego, d'Alemberta, całkowe, warunek konieczny) dają albo <u>dwie zbieżności</u> (zwykłą oraz bezwzględną) albo <u>dwie rozbieżności</u> (zwykłą oraz bezwzględną).
Nie pozwolą natomiast uzyskać zbieżności warunkowej. Tylko twierdzenie Leibnitza pozwoli taką zbieżność wykryć.

W przypadku kryterium porównawczego, ilorazowego lub całkowego wynika to z faktu, że działamy na szeregach o wyrazach nieujemnych, a więc $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=n_0}^{\infty}|a_n|$ i zbieżność bezwzględna jest równoważna zwykłej zbieżności.
W przypadku warunku koniecznego możemy jedynie wywnioskować rozbieżność a to oznacza też rozbieżność bezwzględną.
W przypadku kryterium Cauchy'ego lub d'Alemberta wynika to z własności modułu i faktu, że w obu tych kryteriach dla szeregów $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}|a_n|$ oraz $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ liczymy granicę tego samego wyrażenia : $\sqrt[n]{||a_n||} = \sqrt[n]{|a_n|}$ i podobnie $\left|\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right| = \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

Dla $a_n = \dfrac{(-3)^n}{n^3}$ i szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-3)^n}{n^3}$ zarówno kryterium Cauchy'ego jak i d'Alemberta daje granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 3 > 1$$

Zatem ten szereg jest rozbieżny bezwzględnie i rozbieżny w zwykłym sensie.
Oznacza to także, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| = \infty$ natomiast jeśli chodzi o sumę $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ to nie mamy pewności czy istnieje (wtedy jest nieskończona) czy też nie istnieje.

W powyższym przykładzie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^3}$ nie istnieje. Wynika to z ciekawej własności szeregów naprzemiennych i własność ta pokazuje różnicę między kryterium Cauchy'ego i d'Alemberta.

Twierdzenie

Jeśli mamy szereg naprzemienny $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n a_n$, $a_n > 0$ i kryterium d'Alemberta daje rozbieżność, tzn. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ to suma $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n a_n$ nie istnieje.

Dla kryterium Cauchy'ego powyższe twierdzenie nie musi zachodzić, są przykłady szeregów naprzemiennych dla których z kryterium Cauchy'ego otrzymujemy rozbieżność, a mimo to suma szeregu jest równa ∞.

Popularny błąd – użycie kryterium Cauchy'ego / d'Alemberta i badanie obu typów zbieżności osobno

" ... z kryterium Cauchy'ego / d'Alemberta wynika więc, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^3}$ jest rozbieżny bezwzględnie.
Ale może być jeszcze zbieżny normalnie.
Badam zwykłą zbieżność z twierdzenia Leibnitza..."

STRATA CZASU I ENERGII. Jak już pisaliśmy, dla tych kryteriów mając rozbieżność bezwzględną mamy też zwykłą rozbieżność.

Popularny błąd – niepewne/błędne wnioski co do sumy szeregu rozbieżnego

"... z kryterium Cauchy'ego / d'Alemberta wynika więc, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^3}$ jest rozbieżny do ∞"
Niepewny wniosek. Jeżeli szereg zawiera nieskończenie wiele wyrazów dodatnich i nieskończenie wiele wyrazów ujemnych to kryteria te **nie gwarantują** istnienia sumy szeregu.
A poza tym w zadaniach typu "zbadać zbieżność szeregu" mamy jedynie określić czy suma jest skończona czy nie.

Popularny błąd – opisowne "badanie" monotoniczności ciągu, bez obliczeń

Na przykład dla ciągu $a_n = \dfrac{n}{1000n+1}$:
"Ciąg a_n jest malejący, bo mianownik szybciej rośnie niż licznik."
GAME OVER... Takie "rozwiązanie" jest jak **pisanie bajek** — nie musi mieć **nic wspólnego z prawdą**.
Dla powyższego ciągu mianownik rzeczywiście szybciej rośnie niż licznik (i to 1000 razy!), a mimo to ciąg ten jest rosnący.

Przykład

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \ln n}{n}$$

Tutaj $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$. Rozszerzamy go do funkcji $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x \geqslant 2$.

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0 \Leftrightarrow x > e \approx 2,72$$

Zatem f jest malejąca dla $x \in (e, \infty)$ czyli a_n jest malejący dla $n \geqslant 3$.
Ponadto

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] [H] = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

Zatem $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.
Mamy więc szereg naprzemienny, który z tw. Leibnitza jest zbieżny.
Nie jest jednak zbieżny bezwzględnie bo dla $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left|\dfrac{(-1)^n \cdot \ln n}{n}\right| = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n}$ mamy z kryterium porównawczego $0 < \dfrac{0,5}{n} < \dfrac{\ln n}{n}$, a szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{0,5}{n}$ jest rozbieżny.
Jest to więc szereg zbieżny warunkowo.

Podsumowanie : które kryterium zbieżności kiedy?

- P — porównawcze
- I — ilorazowe
- C - Cauchy'ego
- A - d'Alemberta
- $\int$ — całkowe
- ZB — zbieżność bezwględna
- L - twierdzenie Leibnitza

Wyrażenia występujące w a_n	Sugerowane kryterium dla $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$
Tylko potęgi n lub pierwiastki z potęg n	P I ale NIGDY C A
Te same najwyższe potęgi a_n w liczniku i mianowniku	P I ale NIGDY C A
Różne najwyższe potęgi a_n w liczniku i mianowniku	P I C A
funkcja złożona $f(b_n),\ b_n \to 0$	I P
n!	A P
n - ta sama potęga: $(...)^n$	C
Ciągi bez granicy, np. $\sin n$	P (+ inne, gdy trzeba)
$\ln n$	P $\int$
$(-1)^n$ i ogólne a_n, o różnych znakach	ZB (+ inne, gdy trzeba) L

Przykłady do samodzielnego policzenia :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+3}}{n^3+2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+5}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{n^2 \cdot 3^n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+7\cdot 3^n}{5^n-4^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\cos(n^2)}{\sqrt[3]{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2+2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2)}{2^n}$$

4 Szeregi potęgowe

Definicja

Szereg potęgowy zmiennej x to szereg postaci

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + ... + c_n(x - x_0)^n + ...$$

gdzie $x_0 \in \mathbb{R}$ to tzw. środek/centrum a $c_1, c_2, ..., c_n, ...$ to współczynniki szeregu.

Dla $x \neq x_0$ mamy zapis sumy jako $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$.

Dla $x = x_0$ przyjmujemy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n = c_0$ i wtedy wyjściowa suma jest równa $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ dla wszystkich x

Gdy $x_0 = 0$ to szereg nazywamy szeregiem Maclaurina.

Przykład

$$1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Jest to szereg geometryczny o ilorazie x. Tutaj $\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = 1$ oraz $x_0 = 0$.

Przykład

$$(x-1) - \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{(x-1)^5}{5} - \frac{(x-1)^7}{7} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot (x-1)^{2n+1}$$

Tutaj $x_0 = 1$ oraz $c_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad c_{2n} = 0$

Uwaga. Indeks współczynnika **musi się zgadzać** (być równy) z wykładnikiem potęgi o podstawie $x - x_0$.

Zbieżność szeregów potęgowych

Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ jest zawsze zbieżny dla $x = x_0$ i wtedy jego suma to c_0.
Dla pozostałych $x \neq x_0$ szereg może być zbieżny lub nie. Są 3 przypadki

1. Szereg jest zbieżny tylko dla $x = x_0$ np. $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ – zbieżny tylko dla $x = 0$. Jest to szereg bezużyteczny w praktyce.
2. Szereg jest bezwzględnie zbieżny dla wszystkich x, np. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Jest to najlepsza sytuacja.

3. Szereg jest bezwzględnie zbieżny na przedziale otwartym postaci $(x_0 - R, x_0 + R)$ oraz – być może – zbieżny także na końcach tego przedziału. Dla pozostałych x nie jest zbieżny.
   Np. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ jest zbieżny dla $x \in [-1, 1)$.

Liczbę $R > 0$ nazywamy promieniem zbieżności szeregu potęgowego, a zbiór x dla których szereg jest zbieżny – przedziałem zbieżności szeregu.
R – połowa długości przedziału zbieżności.
Aby mieć promień zbieżności dla wszystkich szeregów definiujemy dodatkowo $R = 0$ dla szeregów z przypadku 1 oraz $R = \infty$ dla szeregów z przypadku 2.

Wyznaczanie promienia zbieżności i przedziału zbieżności

Szereg jest zbieżny dla $x = x_0$ i pytanie co dla pozostałych x.
Metoda jak najbardziej ogólna, działająca dla wszystkich typów szeregów potęgowych :
dla szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ przyjmujemy $a_n = c_n(x - x_0)^n$, $\quad x \neq x_0$. Zmienna x staje się parametrem.
Ponieważ a_n zawiera n – tą potęgę więc korzystamy z kryterium Cauchy'ego lub d'Alemberta.
Liczymy

$$q = q(x) = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad \text{lub} \quad q = q(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

W zdecydowanej większości przypadków granica ta istnieje i prowadzi do najczęstszych sytuacji

1. q nie zależy od x i jest > 1. Wtedy szereg jest zbieżny tylko dla $x = x_0$.

2. q nie zależy od x i jest < 1. Wtedy szereg jest zbieżny dla wszystkich x.

3. q zależy od x. Wtedy mamy zbieżność dla $q < 1$ i rozbieżność dla $q > 1$ oraz

   - $q < 1 \Leftrightarrow |x - x_0| < R \Leftrightarrow x \in (x_0 - R, x_0 + R)$
     "wstępny" przedział zbieżności, R – promień zbieżności
   - $q > 1 \Leftrightarrow |x - x_0| > R \Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, \infty)$
     rozbieżność poza głównym przedziałem
   - $q = 1 \Leftrightarrow |x - x_0| = R \Leftrightarrow x = x_0 \pm R$
     przypadek "wątpliwy" na końcach przedziału.
     Dla tych x trzeba użyć **innego kryterium**

Zastosowanie metody w praktyce

- Liczymy q i rozwiązujemy nierówność $q < 1$. Dostajemy wstępny (otwarty) przedział zbieżności.

- Zbieżność na końcach analizujemy osobno – wstawiamy każdy z końców i dostajemy szereg liczbowy, który analizujemy ale **NIGDY** z kryterium Cauchy'ego lub d'Alemberta bo **ZAWSZE wyjdzie** $q = 1$.

Popularny błąd

" ... wstępny przedział zbieżności to $(-1, 1)$.
Badam zbieżność dla $x = 1$ z kryterium d'Alemberta"

STRATA CZASU I ENERGII. Będzie przypadek wątpliwy i $q = 1$ a jeżeli przypadkiem wyjdzie $q \neq 1$ to na pewno **gdzieś jest błąd**.

Przykład

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Tutaj $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$ oraz $x_0 = 0$. Używamy kryterium d'Alemberta $a_{n+1} = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ oraz dla $x \neq 0$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \left|\frac{x}{n+1}\right|$$

Stąd

$$q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 < 1$$

Szereg jest więc zbieżny dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$

Przykład

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Tutaj $a_n = \dfrac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$ oraz $x_0 = 1$. Korzystając z kryterium Cauchy'ego mamy dla $x \neq 1$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}\right|} = \sqrt[n]{\frac{|(x-1)^n|}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt[n]{|x-1|^n}}{\sqrt[n]{\sqrt{n}}} = \frac{|x-1|}{\sqrt[n]{n^{\frac{1}{2}}}}$$

Stąd

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x-1|$$

Teraz

$$q < 1 \Leftrightarrow |x-1| < 1 \Leftrightarrow x \in (0,2)$$

Zatem wstępny przedział zbieżności to $(0,2)$, a $R = 1$.
Badamy zbieżność na końcach tego przedziału.

$x = 2$ daje $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ – rozbieżny bo $\dfrac{1}{2} \leqslant 1$.
$x = 0$ daje $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(0-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ – zbieżny z twierdzeniem Leibnitza, bo jest naprzemienny a ciąg $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ jest malejący i dąży do 0.

Zatem przedział zbieżności tego szeregu to $[0,2)$.

Twierdzenie

Gdy szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ ma wszystkie współczynnki $c_n \neq 0$ i istnieje granica $q = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ lub $q = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ to promień zbieżności wynosi

- $R = \dfrac{1}{q}$ gdy q jest liczbą dodatnią,
- $R = 0$, gdy $q = \infty$,
- $R = \infty$, gdy $q = 0$.

Uwaga. Twierdzenie to bywa **źle stosowane.**
Nie można go bezpośrednio stosować do np. szeregów potęgowych gdzie występują tylko potęgi parzyste lub tylko potęgi nieparzyste, bo wtedy q **nie istnieje**.

Popularny błąd

"Dla szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot x^{2n+1}$ mamy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n}\right|}$
Stąd $R = 2,\ x \in (-2, 2)$"

Źle jest wyznaczony c_n. Tutaj $\frac{1}{2^n} = c_{2n+1}$ ale $c_{2n} = 0$ i $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ nie istnieje.

Ten szereg jest szeregiem geometrycznym o ilorazie $\frac{x^2}{2}$ i jest zbieżny dla $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ czyli $R = \sqrt{2}$.

Definicja

Jeżeli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ jest zbieżny przynajmniej na $(x_0 - R, x_0 + R)$, $R > 0$ to jego sumę $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ nazywamy rzeczywistą funkcją analityczną, a szereg – szeregiem Taylora.

Własności szeregów potęgowych

1. Gdy
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n \ x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$
to f ma pochodne dowolnego rzędu w x_0 oraz
$$c_0 = f(x_0),\ c_1 = \frac{f'(x_0)}{1!},\ c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \dots, c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$
Stąd wynikają rozwinięcia popularnych funkcji w szereg Maclaurina ($x_0 = 0$).

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,\ x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,\ x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots,\ x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,\ x \in (-1, 1]$$

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \dots,\ x \in (-1, 1)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + ..., \; x \in [-1, 1]$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ..., \; x \in [-1, 1]$$

2. Jeżeli mamy dwa szeregi o tym samym środku i przedziałach zbieżności I_1 i I_2:
   $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n, \; x \in I_1$ oraz $\sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-x_0)^n, \; x \in I_2$
   to

   - dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$ zachodzi $c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c \cdot c_n(x-x_0)^n$
   - dla $x \in I_1 \cap I_2$ mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \pm d_n)(x-x_0)^n$$

Mamy

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \; x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \; x \in [-1, 1]$$

Stąd

$$x \cos x = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} x \cdot \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n)!}$$

oraz dla $x \in \mathbb{R} \cap [-1, 1] = [-1, 1]$

$$x \cos x + \operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n)!} + \frac{(-1)^n}{2n+1} \right) x^{2n+1}$$

3. W miejsce x w szeregu Maclaurina można podstawić wyrażenie potęgowe $ax^k, \; k \in \mathbb{N}^+$. Daje to nowy szereg nowej funkcji z nowym przedziałem zbieżności. Ten nowy przedział można wyznaczyć na podstawie przedziału zbieżności wyjściowego szeregu

Przykład

a) Szereg Maclaurina dla funkcji $\ln(1+3x)$.
Używamy rozwinięcia

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ..., \ x \in (-1,1]$$

Aby dostać $\ln(1+3x)$ w miejsce x trzeba wstawić $3x (x := 3x)$. To daje

$$\ln(1+3x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3x)^{n+1}}{n+1}, \ 3x \in (-1,1]$$

Po uproszczeniu

$$\ln(1+3x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^{n+1}}{n+1} x^{n+1}$$

$$3x \in (-1,1] \Leftrightarrow -1 < 3x \leqslant 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x \leqslant \frac{1}{3} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

Przykład

b) Szereg Maclaurina dla funkcji $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
Używamy rozwinięcia

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} = \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ..., \ x \in \mathbb{R}$$

Wstawiając $x := (-x)$ dostajemy

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}, \ x \in \mathbb{R}$$

To daje

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n!}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n!} - \frac{(-1)^n}{2n!}\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-(-1)^n}{2n!}\right) x^n$$

Współczynnikiem tego szeregu jest więc

$$c_n = \frac{1-(-1)^n}{2n!} = \begin{cases} 0, & n = 2k, \quad k \in \mathbb{N} \\ \dfrac{1}{n!} = \dfrac{1}{(2k+1)!}, & n = 2k+1, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Stąd

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ..., \ x \in \mathbb{R}$$

Przykład

c) Szereg Maclaurina dla funkcji $\dfrac{x}{3+x^4}$
W przypadku funkcji wymiernej **zawsze** korzystamy z szeregu geometrycznego

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+...,\ \ x\in(-1,1)$$

Doprowadzamy wyrażenie do postaci **stała**$\cdot\dfrac{1}{1-\textbf{"coś"}}$ i za x wstawiamy to "coś".
Zatem

$$\frac{x}{3+x^4}=\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^4}{3}}=\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{x^4}{3}\right)}$$

Czyli "coś" $=-\dfrac{x^4}{3}$ i to daje

$$\frac{x}{3+x^4}=\frac{x}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^4}{3}\right)^n=\frac{x}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}x^{4n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x}{3}\cdot\frac{(-1)^n}{3^n}x^{4n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}x^{4n+1}$$

Przedział zbieżności wynika z warunku

$$-1<-\frac{x^4}{3}<1\Leftrightarrow -3<x^4<3\Leftrightarrow -3<x^4\ \wedge\ x^4<3$$

Pierwsza z tych nierówności jest zawsze prawdziwa. Rozwiązanie drugiej daje $-\sqrt[4]{3}<x<\sqrt[4]{3}$. Czyli przedział zbieżności to $(-\sqrt[4]{3},\sqrt[4]{3})$.

4. Gdy $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n,\ x\in(x_0-R,x_0+R)$ to f ma pochodną dowolnego rzędu i zachodzi wzór

$$f'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(c_n\left(x-x_0\right)^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nn(x-x_0)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}c_nn(x-x_0)^{n-1}$$

Jest to rozszerzenie wzoru "pochodna sumy = suma pochodnych" na nieskończoną ilość składników

Przykład

Znaleźć szereg Maclaurina dla funkcji $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

Używamy rozwinięcia $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n,\ x \in (-1,1)$.

Mamy

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}((-1)^n n x^{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1}$$

Stąd

$$\frac{1}{(1+x)^2} = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n x^{n-1} = 1-2x+3x^2-4x^3+...,\ x \in (-1,1)$$

5. Gdy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n,\ x \in (x_0-R, x_0+R)$$

to dla $a, b \in (x_0-R, x_0+R)$ mamy

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b c_n (x-x_0)^n\,dx =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left[\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(b-x_0)^{n+1}-(a-x_0)^{n+1}}{n+1}$$

Jest to rozszerzenie wzoru "całka sumy = suma całek" na nieskończoną ilość składników

W szczególności biorąc $a = x_0,\ b = x,\ F(x) = \int f(x)\,dx$ oraz przyjmując

$$\int (x-x_0)^n\,dx = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} \quad \text{(stała całkowania = 0)}$$

Dostajemy ten wzór z całką nieoznaczoną

$$F(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int (x-x_0)^n\,dx, \quad \text{a więc}$$

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1},\ x \in (x_0-R, x_0+R)$$

Przykład

Wyprowadzić wzór na szereg Maclaurina dla $\operatorname{arc\,tg} x$ na przedziale $(-1,1)$.

Mamy $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x + C$. Wystarczy zatem rozwinąć w szereg funkcję $\frac{1}{1+x^2}$, a potem obliczyć całkę.
Korzystając z rozwinięcia $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,\ x \in (-1,1)$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

Przedział zbieżności: $x^2 \in (-1,1) \Leftrightarrow x \in (-1,1)$.
Zatem

$$\operatorname{arc\,tg} x = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} 0 + \sum_{n=0}^{\infty}\int (-1)^n x^{2n}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ x \in (-1,1)$$

Twierdzenie Abela o rozszerzaniu szeregu na końce przedziału zbieżności

Niech

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n,\ x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

Jeżeli

6.
- szereg jest zbieżny również dla $x = x_0 + R$
- f jest ciągła dla $x = x_0 + R$

to wzór zachodzi także dla $x = x_0 + R$ czyli

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n,\ x \in (x_0 - R, x_0 + R]$$

Analogicznie dla $x = x_0 - R$

Przykład

Pokazaliśmy, że $\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \ x \in (-1,1)$

Teraz

- dla $x = 1$ mamy $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}$ – zbieżny bo Leibnitza
- $\operatorname{arc\,tg} x$ jest ciągła w $x = 1$

Analogicznie dla $x = -1$.
Zatem rozwinięcie jest prawdziwe również dla $x \pm 1$ czyli

$$\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \ x \in [-1,1]$$

Inne zastosowania szeregów potęgowych:

- przybliżanie funkcji – bierzemy rozwinięcie do ustalonej potęgi,
- obliczanie całek nieelementarnych w przybliżeniu,
- wyznaczanie sum niektórych szeregów oraz wartości pochodnych wysokiego rzędu.

Przykład

Jaka jest siedemdziesiąta piąta pochodna $\operatorname{arc\,tg} x$ w $x = 0$?

Niech $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$.
Bierzemy rozwinięcie f ze środkiem **(koniecznie)** w 0:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \ x \in [-1,1]$$

Ogólny wzór daje

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{czyli} \quad c_{75} = \frac{f^{(75)}(0)}{75!} \Leftrightarrow f^{(75)}(0) = 75! \cdot c_{75}$$

Pozostaje wyznaczyć c_{75}. Jest to współczynnik przy x_{75} co oznacza, że

$$c_{75}x^{75} = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Stąd

$$n = 37, \ c_{75} = \frac{(-1)^{37}}{2 \cdot 37 + 1} = -\frac{1}{75}$$

Oraz

$$f^{(75)}(0) = 75! \cdot \left(-\frac{1}{75}\right) = -74!$$

Przykład

Wyznaczyć sumę $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}}$

Jest to szereg zbieżny na podstawie np. kryterium d'Alemberta.

Zapisujemy sumę tak, by potęga była w iloczynie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Biorąc $x = \frac{1}{2}$ mamy szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n+1}$

Dla $x \in (-1, 1)$ jest on zbieżny. Wyznaczamy jego sumę przez różniczkowanie lub całkowanie.

- Pochodna $(n \cdot x^{n+1}) = n(n+1)x^n$ – pogarsza się wzór.
- Całka $\int n \cdot x^{n+1}\, dx = \frac{n}{n+2} x^{n+2}$. Jest lepiej ale problem w tym, że $n+2$ nie uprościło n z licznika.

Stąd drugie pytanie:

Jaką wziąć potęgę nx^p aby po scałkowaniu uprościł się współczynnik n?

Potrzeba

$$x^{n-1}, \quad bo \quad \int nx^{n-1}\, dx = \frac{n}{n} x^n + C = x^n + C$$

Zatem bierzemy

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \; x \in (-1, 1)$$

Całkując obie strony mamy

$$F(x) = \int f(x)\, dx = F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ jest szeregiem geometrycznym o sumie $\frac{x}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$.

Stąd aby odzyskać f liczymy pochodną obu stron:

$$F(x) = f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Czyli

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

I na koniec

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \cdot x^2 = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{x^2}{(1-x)^2}$$

Dla $x = \frac{1}{2}$ to daje

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}}$$

5 Funkcje wielu zmiennych

Na początek kilka definicji dotyczących zbiorów w $\mathbb{R}^n$.

Definicja

Otoczenie punktu $P = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ to n – wymiarowa kula otwarta o środku w P i promieniu $r > 0$, tzn. zbiór

$$K(P, r) = \{Q = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n : |PQ|^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2 < r^2\}$$

Dla $n = 2$ jest to koło o środku w P bez brzegowego okręgu.
Dla $n = 3$ jest to kula o środku w P bez brzegowej sfery.

Definicja

Sąsiedztwo punktu $x_0 \in \mathbb{R}^n$ to zbiór postaci $S = S(P, r) = K(P, r) \backslash P$ Zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym, gdy każdy punkt z A posiada pewne otoczenie zawarte w A, tzn.

$$\forall P \in A \ \exists K(P, r) \quad P \in K(P, r) \subset A$$

Zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem domkniętym, gdy jego dopełnienie $A = \mathbb{R}^n \backslash A$ jest zbiorem otwartym.

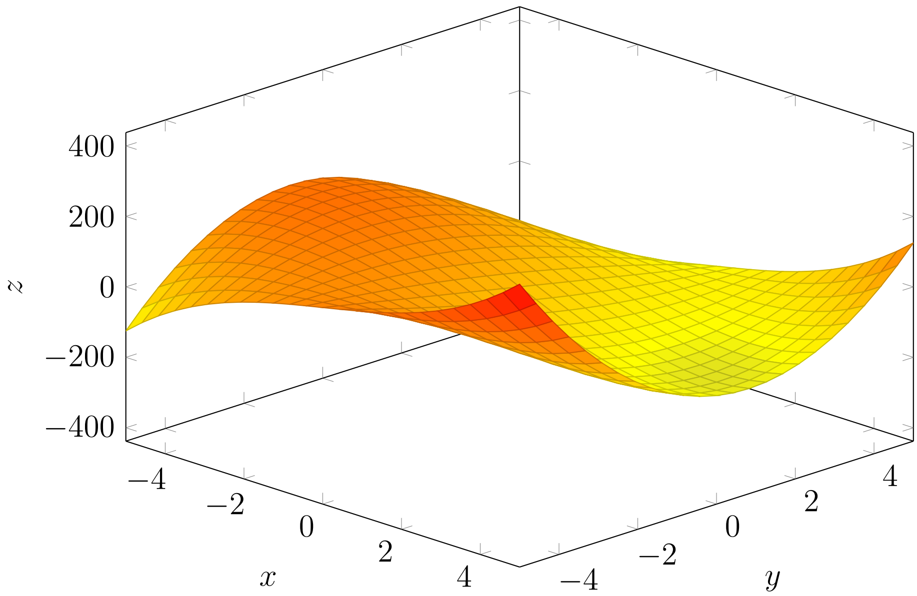
Definicja

Funkcja wielu zmiennych ma postać

$$f : D \to \mathbb{R}$$

gdzie $D \subset \mathbb{R}^n$ jest dziedziną f.
Zatem dla $(x_1, x_2, ..., x_n) \in D \quad f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}$

Gdy mamy funkcje dwóch zmiennych to zwykle piszemy $z = f(x, y)$ a dla trzech zmiennych $t = f(x, y, z)$.
Będziemy analizować głównie funkcje dwóch zmiennych $z = f(x, y)$.
Dla takich funkcji można narysować wykres – gdy D jest otwarty to wykresem jest powierzchnia w 3 wymiarach dana wzorem $(x, y, f(x, y))$, gdzie $(x, y) \in D_f$.



Wykres funkcji $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y, \quad -5 \leqslant x \leqslant 5,\ -5 \leqslant y \leqslant 5$

Wykresy niektórych popularnych funkcji

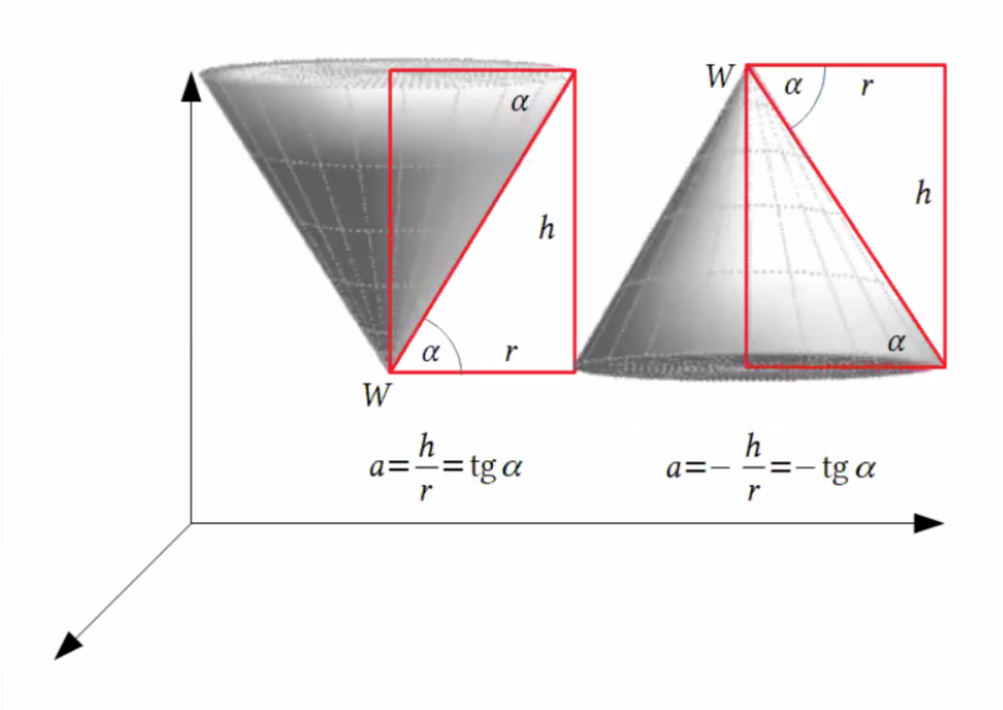
- $z = Ax + By + C$ – płaszczyzna o wektorze normalnym $\vec{n} = [A, B, -1]$ i przechodząca przez punkt $(0, 0, C)$.
- $z = z_0 + \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}$ – górna półsfera o środku w (x_0, y_0, z_0) i promieniu $r > 0$. Np. $z = 3 + \sqrt{7 - x^2 - (y-1)^2}:\ S(0, 1, 3),\ r = \sqrt{7}$

  $z = z_0 - \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}$ – analogiczna półsfera ale dolna.

  Obie pochodzą z równania całej sfery: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$.
- $z = z_0 + a\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},\ a \neq 0$ – powierzchnia stożkowa o wierzchołku w $P = (x_0, y_0, z_0)$ i osi symetrii równoległej do osi Z.

  $a > 0$ – wierzchołek w dół, $a < 0$ – wierzchołek w górę.

  $|a| = \operatorname{tg} \alpha$, gdzie α jest kątem między prostą będącą tworzącą stożka



Powierzchnia stożkowa i półsfera są szczególnymi przypadkami tzw. powierzchni obrotowych w $\mathbb{R}^3$.

Powierzchnią obrotową w $\mathbb{R}^3$ wokół osi Z będziemy nazywali zbiór wszystkich możliwych punktów (x, y, z) taki, że podstawienie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ wyznacza zbiór z jako współrzędne wszystkich par (z, r) tworzących pewną krzywą na płaszczyźnie, przy czym zbiór wszystkich $r \geqslant 0$ jest zbiorem otwartym.
Zatem jeżeli ta powierzchnia jest dana przez pewne równanie postaci

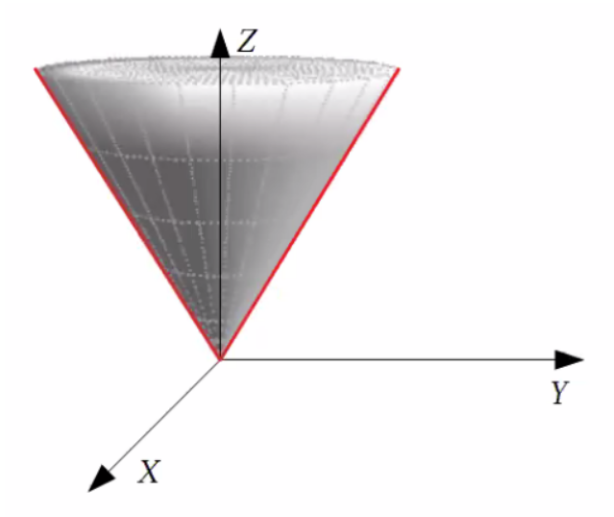
$$F(x, y, z) = 0$$

to podstawienie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ usuwa wszystkie x i y i prowadzi do równania zależnego tylko od z oraz r.
W szczególności gdy mamy $z = f(x, y)$ i podstawienie r powoduje, że f zależy tylko od r to wykresem f jest powierzchnia obrotowa wokół osi Z.

Geometryczne własności takiej powierzchni

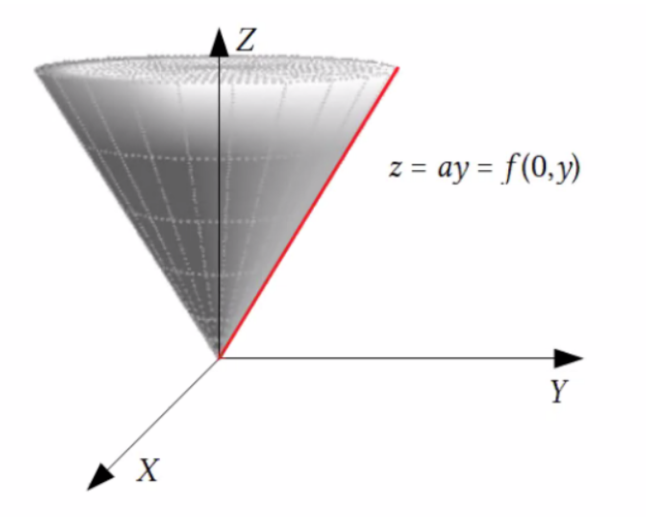
- Niepuste przecięcie powierzchni z dowolną płaszczyzną prostopadłą do osi Z jest punktem, okręgiem lub sumą tych zbiorów.
- Niepuste przecięcie powierzchni z dowolną płaszczyzną zawierającą oś Z jest krzywą o tym samym kształcie.

Na przykład dla powierzchni stożkowej $z = a\sqrt{x^2 + y^2}$, $a > 0$, przecięcie płaszczyzną prostopadłą do osi Z jest okręgiem lub wierzchołkiem, a przecięcie płaszczyzną zawierającą oś Z jest sumą dwóch półprostych wychodzących z wierzchołka.



Sposób rysowania takich powierzchni opiera się na spotstrzeżeniu, że dla $x = 0$ i $y \geqslant 0$ mamy $r = \sqrt{y^2} = y \geqslant 0$. Zatem rysujemy w płaszczyźnie YZ wykres odpowiedniej krzywej dla $y \geqslant 0$, a następnie obracamy go wokół osi Z. Tworzy to żądaną powierzchnię obrotową.

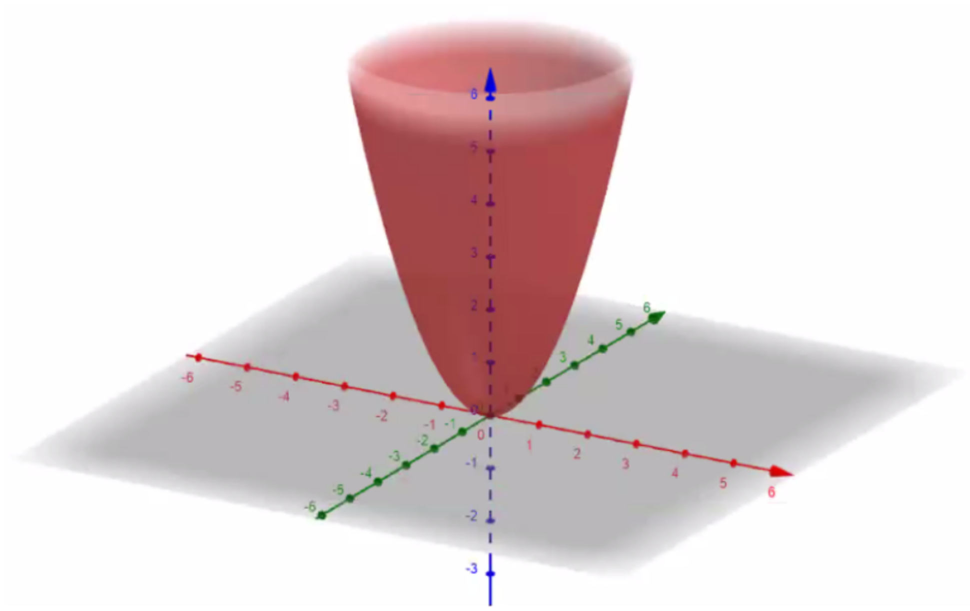
Poprzedni przykład raz jeszcze: $z = a\sqrt{x^2 + y^2},\ a > 0$.
Tutaj dla $r = \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 0$ mamy $z = ar$. Zatem biorąc $r = y \geqslant 0$ w płaszczyźnie YZ dostajemy wykres funkcji liniowej $z = f(0, y) = ay,\ y \geqslant 0$. Jest to półprosta



Rozszerzanie powyższego przypadku – powierzchnia obrotowa wokół osi równoległej do osi Z.
Jeżeli dla pewnych $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ podstawienie $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ usuwa wszystkie x i y i prowadzi do równania zależnego tylko od z oraz r to dana powierzchnia jest powierzchnią obrotową wokół prostej $L : x = x_0,\ y = y_0,\ z \in \mathbb{R}$.
Jest to zatem przypadek powierzchni opisanej poprzednio (czyli dla $x_0 = y_0 = 0$) ale przesunięty następnie o wektor $\vec{v} = [x_0, y_0, 0]$.

Przykład

Powierzchnia dana równaniem $z = (x+2)^2 + (y-1)^2$ Tutaj mamy $x_0 = -2$ oraz $y_0 = 1$ i podstawienie $r = \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2}$ daje równanie $z = r^2,\ r \geqslant 0$. Zatem biorąc $r = y \geqslant 0$ w płaszczyźnie YZ dostajemy wykres funkcji $z = f(0, y) = y^2,\ y \geqslant 0$. Jest to prawa gałąź paraboli.
Obracając ją następnie wokół osi Z dostajemy powierzchnię zwaną paraboloidą.



Na koniec przesuwamy powyższą powierzchnię o wektor $\vec{v} = [x_0, y_0, 0] = [-2, 1, 0]$ i to daje naszą powierzchnię.

Inny typ powierzchni – tzw. powierzchnie walcowe

Powierzchnia jest nazywana powierzchnią walcową równoległą do osi Z jeżeli z faktu, że punkt (x_0, y_0, z_0) należy do powierzchni wynika, że dla dowolnego z każdy punkt postaci (x_0, y_0, z_0) też należy do tej powierzchni.
To oznacza, że jeżeli taka powierzchnia jest dana przez pewne wyrażenie to równanie to **nie zawiera** zmiennej z.
Geometrycznie – niepuste przecięcie powierzchni z dowolną płaszczyzną równoległą do osi Z daje krzywą o tym samym kształcie.
Stąd sposób tworzenia wykresów takich powierzchni – rysujemy w płaszczyźnie XY (czyli dla $z = 0$) krzywą zadaną wyjściową relacją, a potem wykres tej krzywej przesuwamy wzdłuż osi Z i to generuje daną powierzchnię.

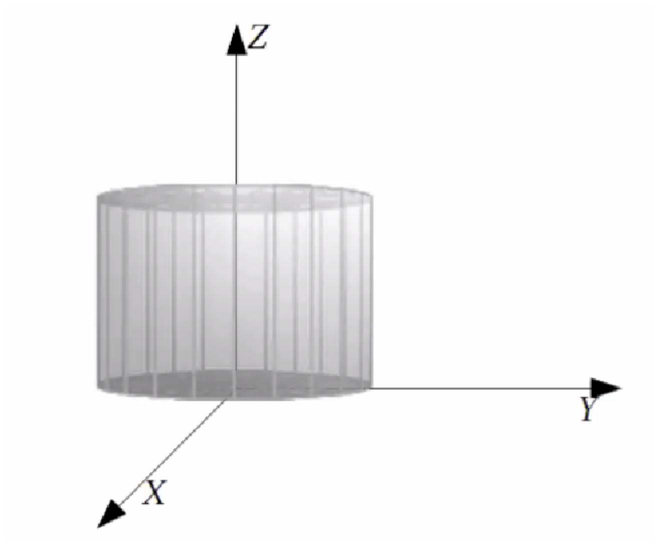
Dwa pozostałe przypadki są analogiczne:

- gdy relacja definiująca powierzchnię nie zawiera x to rysujemy odpowiednią krzywą w płaszczyźnie YZ , a potem jej wykres przesuwamy wzdłuż osi X,
- gdy relacja definiująca powierzchnię nie zawiera y to rysujemy odpowiednią krzywą w płaszczyźnie XZ, a potem jej wykres przesuwamy wzdłuż osi Y.

Stąd prosta reguła – odpowiednią krzywą przesuwamy zawsze wzdłuż tej osi, która odpowiada zmiennej **nieobecnej** w równaniu.

Przykład

Powierzchnia o równaniu $x^2 + y^2 = 1$.
Nie występuje z, a więc jest to powierzchnia walcowa równoległa do osi Z.
Wyznaczamy krzywą daną powyższą relacją w płaszczyźnie XY – jest to okrąg o środku w układzie współrzędnych i promieniu równym 1.
Po przesunięciu tego okręgu wzdłuż osi Z zostaje wygenerowana powierzchnia – jest to powierzchnia boczna walca o nieskończonej długości. Stąd bierze się nazwa tego typu krzywych.



Definicja

Poziomica funkcji $z = f(x, y)$ na wysokości h to zbiór

$$D_h = \{(x, y) : f(x, y) = h\}$$

Jest to rzut na płaszczyznę XY zbioru – najczęściej krzywej – będącego przekrojem wykresu f płaszczyzną o równaniu $z = h$.

Interpretacja geograficzna
Jeśli płaszczyzna XY jest "mapą" i wyznacza "poziom morza", z – wysokością nad "poziomem morza", a wykres f jest "rzeźbą terenu" to poziomica jest krzywą na "mapie" która łączy punkty odpowiadające tej samej "wysokości" h.
Na podstawie zagęszczenia poziomic dla odpowiednio dobranych h możemy przewidzieć kształt wykresu f – czy jest stromy czy płaski.

Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji wielu zmiennych

Są to pochodne danej funkcji liczone względem jednej zmiennej, a pozostałe zmienne są stałe i przyjmują rolę parametrów.
Oznaczenie dla $f = f(x, y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ lub } f_x \text{ – pochodna po } x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} \text{ lub } f_y \text{ – pochodna po } y$$

Formalna definicja:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Dla funkcji n zmiennych $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$:

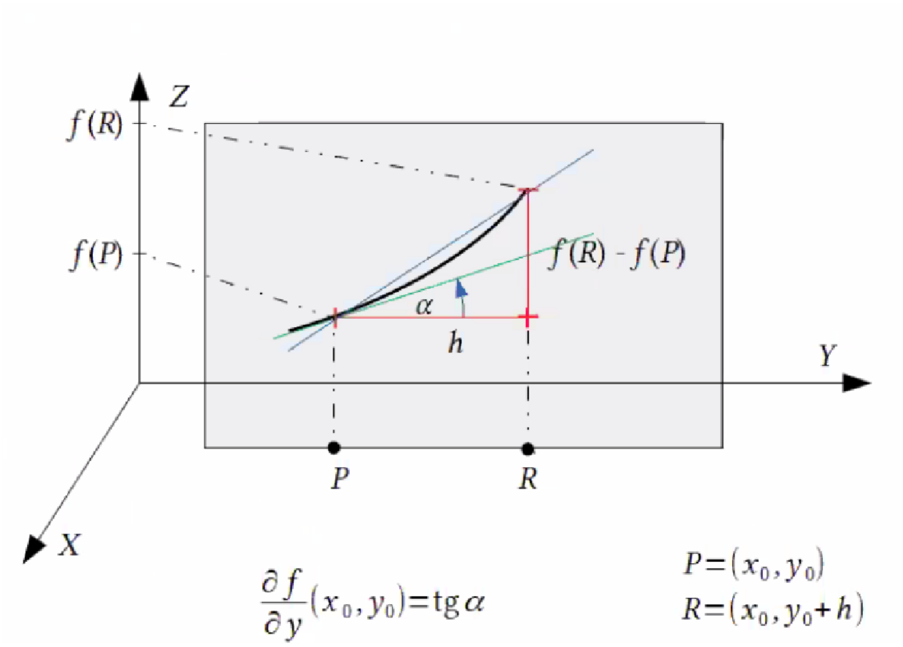
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)}{h}$$

Interpretacja geometryczna dla funkcji 2 zmiennych

Wykres każdej funkcji f dwóch zmiennych można przeciąć płaszczyzną równoległą do osi Z. Powstaje wtedy pewna krzywa, która jest częścią wspólną wykresu f oraz płaszczyzny. Jest to szczególny przypadek tzw. funkcji warunkowej o której wkrótce powiemy więcej.

Gdy taka krzywa jest regularna to możemy liczyć dla niej pochodną.
Gdy płaszczyzna przekroju przechodzi przez punkt $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ to pochodna tej krzywej jest równa

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, gdy płaszczyzna jest $\parallel XZ$,
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, gdy płaszczyzna jest $\parallel YZ$.



Sposób wyznaczania pochodnych cząstkowych w praktyce
Ponieważ tylko jedna zmienna jest w użyciu, a pozostałe stają się parametrami to korzystamy z reguł różniczkowania funkcji 1 zmiennej.
Pamiętać należy, że dla wybranej zmiennej dowolne wyrażenie z każdą inną zmienną **staje się stałą** i jej pochodna po wybranej zmiennej jest **równa 0**.
Czyli np.

$$\frac{\partial}{\partial y}(4x^2 + 3\sin x + 5) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}(ye^{z+2y}) = 0 \quad \text{itd.}$$

Przykład

$$f(x, y) = x \sin(xy^3)$$

Wtedy różniczkując po x mamy pochodną iloczynu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = (x)_x \cdot \sin(xy^3) + x \cdot (\sin(xy^3))_x = \sin(xy^3) + x \cdot \cos(xy^3) \cdot y^3$$

Natomiast różniczkując po y mamy mnożenie $\sin(xy^3)$ przez stałą dla y (czyli x) i nie trzeba stosować pochodnej iloczynu

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = (x \cdot \sin(xy^3))_y = x \cdot (\sin(xy^3))_y = x \cdot \cos(xy^3) \cdot 3y^2 x$$

Pochodne drugiego rzędu

Mając pochodne 1 rzędu definiujemy pochodne drugiego rzędu jako pochodne pierwszego rzędu z pochodnych pierwszego rzędu. W szczególności, dla $f = f(x, y)$ mamy 4 pochodne drugiego rzędu.

Pochodne <u>jednorodne</u> po danej zmiennej:

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ – dwukrotne różniczkowanie f po x,
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ – dwukrotne różniczkowanie f po y,

Pochodne <u>mieszane</u>:

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ – różniczkowanie wpierw po x, potem po y,
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ – różniczkowanie wpierw po y, potem po x,

Inne oznaczenia to $f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}$, gdzie indeks dolny oznacza zmienne, po których kolejno różniczkujemy.
W przypadku pochodnych mieszanych f_{xy}, f_{yx}, trzeba ustalić kolejność różniczkowania.
Przyjmujemy naturalną kolejność, wtedy mamy $f_{xy} = (f_x)_y$ oraz $f_{yx} = (f_y)_x$,
co oznacza, że
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$ i $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$.

Dla funkcji n zmiennych $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = (f_{x_i})_{x_j} = f_{x_i x_j}$$

Przykład

$$f(x,y)=\frac{2^y}{x+1}$$

$$\text{Tutaj}\quad f_x=-\frac{2^y}{(x+1)^2},\ f_y=\frac{2^y\ln 2}{x+1}\quad\text{oraz}$$

$$f_{xx}=(f_x)_x=\left(-\frac{2^y}{(x+1)^2}\right)_x=-2^y\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)_x=2^y\cdot\frac{2}{(x+1)^3}$$

$$f_{yy}=(f_y)_y=\left(\frac{2^y\ln 2}{x+1}\right)_y=\frac{\ln 2}{x+1}\cdot(2^y)_y=\frac{2^y\cdot(\ln 2)^2}{x+1}$$

$$f_{xy}=(f_x)_y=\left(-\frac{2^y}{(x+1)^2}\right)_y=\left(\frac{-1}{(x+1)^2}\right)\cdot(2^y)_y=-\frac{2^y\ln 2}{(x+1)^2}$$

$$f_{yx}=(f_y)_x=\left(\frac{2^y\ln 2}{x+1}\right)_x=2^y\ln 2\left(\frac{1}{x+1}\right)_x=2^y\ln 2\left(\frac{-1}{(x+1)^2}\right)=-\frac{2^y\ln 2}{(x+1)^2}$$

Otrzymaliśmy $f_{xy}=f_{yx}$.
Jest to szczególny przypadek znanego twierdzenia.

Twierdzenie Schwarza o pochodnych mieszanych

Gdy pochodne mieszane drugiego rzędu są funkcjami ciągłymi w danym punkcie to są w tym punkcie równe.
W praktyce dla funkcji regularnych warunek ciągłości drugiego rzędu występuje zawsze na całych dziedzinach stąd prawie zawsze zobaczymy równość wzorów pochodnych mieszanych.

Definicja

Niech $k\in\mathbb{N}^+$ oraz $f=f(x_1,x_2,...,x_n)$. Pochodna rzędu k funkcji f to funkcja

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{n_1}...\partial x_{n_2}\partial x_{n_k}}=\frac{\partial}{\partial x_{n_k}}=\left(...\left(\frac{\partial}{\partial x_{n_2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{n_1}}\right)\right)...\right)=f_{x_{n_1},x_{n_2},...,x_{n_k}}$$

gdzie zmienne $x_{n_1},x_{n_2},...,x_{n_k}$ są dowolnymi ze zmiennych $x_1,x_2,...,x_n$.

Oznacza to różniczkowanie funkcji k razy, po kolei po zmiennych

$$x_{n_1},x_{n_2},...,x_{n_k}$$

Pochodne jednorodne to te, w których różniczkujemy po tej samej zmiennej k razy, np. f_{xxx}.
Pochodne mieszane to te pochodne, w których różniczkujemy przynajmniej po dwóch różnych zmiennych np. $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x\partial x\partial y\partial x}=f_{xyxx}$

Twierdzenie Schwarza pozostaje prawdziwe dla pochodnych mieszanych rzędu k.

Płaszczyzna styczna do funkcji dwóch zmiennych

Definicja

Niech $R = (x, y, z)$ oraz $P = (x_0, y_0, z_0)$. Definiujemy zbieżność

$$R \to P \;\Leftrightarrow\; x \to x_0 \;\wedge\; y \to y_0 \;\wedge\; z \to z_0$$

Nazywamy to zbieżnością po współrzędnych.

Definicja

Niech teraz P i R należą do wykresu funkcji f.
Czyli

$$z = f(x, y), \quad z_0 = f(x_0, y_0)$$

Ponadto niech Π będzie płaszczyzną przechodzącą przez P.
Π nazywamy płaszczyzną styczną do wykresu f w punkcie P jeżeli kąt między prostą PR oraz płaszczyzną Π dąży do 0, gdy $R \to P$.
Jest to uogólnienie prostej stycznej do wykresu funkcji jednej zmiennej.

Definicja

$f = f(x, y)$ jest funkcją różniczkowalną w punkcie $(x_0, y_0) \in D_f$, gdy istnieje płaszczyzna styczna do wykresu f w punkcie $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Przykład funkcji nieróżniczkowalnej w pewnym punkcie: powierzchnia stożkowa w wierzchołku (zobacz rysunek powierzchni stożkowych str. 50)

Twierdzenie

Gdy na pewnym kole bez brzegu zawierającym $(x_0, y_0) \in D_f$ f ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu to f jest różniczkowalna w punkcie (x_0, y_0).

Twierdzenie – wzór na płaszczyznę styczną do f

Jeżeli f jest różniczkowalna w punkcie (x_0, y_0) to płaszczyzna styczna do wykresu f w $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ jest dana wzorem

$$z - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Uwagi

- Warunek ciągłości pochodnych na kole jest spełniony dla zdecydowanej większości funkcji elemetnarnych na całej dziedzinie funkcji.
- Wzór na płaszczyznę styczną jest analogiczny do wzoru na prostą styczną do funkcji jednej zmiennej.

- Płaszczyznę styczną można zapisać w postaci ogólnej

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) - 1(z - z_0) = 0$$

gdzie

$$z_0 = f(x_0, y_0), \quad A = f_x(x_0, y_0), \quad B = f_y(x_0, y_0)$$

Stąd wektorem normalnym jest

$$\vec{n} = [A, B, -1] = [f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1]$$

Przykład

Dana jest funkcja $f(x, y) = x^2 - 2y^2$
a) Znaleźć płaszczyznę styczną do wykresu f w punkcie $P = (1, 2, z_0)$.
b) Znaleźć wszystkie punkty wykresu f w których płaszczyzna styczna jest równoległa do płaszczyzny $\Pi_1 : x - 2y + 2z + 5 = 0$

a) Π_s w $P = (1, 2, z_0)$
$z_0 = f(1, 2) = -7$

$$\begin{array}{ll} f_x = 2x & A = f_x(1,2) = 2 \\ f_y = -4y & B = f_y(1,2) = -8 \end{array}$$

Wzór

$$z - (-7) = 2(x - 1) - 8(x - 2) \quad \text{lub} \quad 2(x - 1) - 8(y - 2) - (z + 7) = 0$$

b)

$$\Pi_s \parallel \Pi : x - 2y + 2z + 5 = 0$$
$$\vec{n} = [-1, -2, 2] \perp \Pi$$
$$\vec{n_s} = [f_x, f_y, -1] \perp \Pi_s$$

$$\Pi \parallel \Pi_s \Leftrightarrow \vec{n} \parallel \vec{n_s} \Leftrightarrow \frac{f_x}{1} = \frac{f_y}{-2} = \frac{-1}{2}$$

Trzeba zatem rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} f_x = -\dfrac{1}{2} = 2x \\ f_y = 1 = -4y \end{cases}$$

Rozwiązanie to

$$x = x_0 = -\frac{1}{4}$$
$$y = y_0 = -\frac{1}{4}$$

Stąd

$$z_0 = f(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}) = -\frac{1}{16}$$

I punkt to jest

$$P = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{16})$$

Bezpośrednie zastosowanie: przybliżanie funkcji płaszczyzą styczną
Równanie płaszczyzny stycznej Π do wykresu f w $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ można zapisać wzorem

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Gdy teraz $R = (x, y, f(x, y))$, $Q = (x, y, z) \in \Pi$ i $x \approx x_0$ oraz $y \approx y_0$ to $R \approx P \approx Q$, a więc $R \approx Q$ i $z \approx f(x, y)$.
To daje wzór na przybliżoną wartość $f(x, y)$:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Zastosowanie:

- x_0, y_0 – "ładne": łatwe do obliczenia,
- x, y – to co mamy w zadaniu.

Przykład

Obliczyć w przybliżeniu i bez kalkulatora $(2,005)^5 \ln(0,98)$

Mamy $(2,005)^5 \ln(0,98) = f(2.005, 0.98)$.
Zatem

$$f(x, y) = x^5 \ln y, \ x = 2,005, \ y = 0,98$$

Bierzemy $x_0 = 2$ oraz $y_0 = 1$.
To daje

$$f_x = 5x^4 \ln y, \quad f_y = \frac{x^5}{y}, \quad f_x(2, 1) = 0, \quad f_y(2, 1) = 32 \quad \text{oraz} \quad f(2, 1) = 0$$

Zatem

$$(2,005)^5 \ln(0,98) \approx 0 + 0 \cdot (2,005 - 2) + 32 \cdot (0,98 - 1) = -0,64$$

Dokładna wartość: $-0,65461$. Błąd wynosi ok. 0,015 czyli 2,34%.

Dalsze zastosowanie wzoru
Biorąc $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$ mamy $x = \Delta x + x_0$, $y = \Delta y + y_0$.

To daje wzór

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y$$

Czyli

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y$$

Oznaczając przez Δf "błąd bezwzględny funkcji" mamy

$$\Delta f = |f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)| \approx f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y$$

Gdy oba iloczyny pod modułem z prawej strony mają ten sam znak błędy kumulują się i mamy

$$\Delta f \approx |f_x(x_0, y_0)| \cdot |\Delta x| + |f_y(x_0, y_0)| \cdot |\Delta y|$$

To jest wzór na tzw. różniczkę zupełną.
Jest to uogólnienie wzoru z AM1 dla funkcji jednej zmiennej $f = f(x)$:

$$\Delta f \approx |f'(x_0)| \cdot |\Delta x|$$

Zastosowania – przy pomiarach z błędem
Mierzymy x z dokładnością $|\Delta x| \approx 0$.
Wówczas błąd bezwzględny pomiaru f wynosi w przybliżeniu Δf.

Przykład

W obwodzie zmierzono wartość prądu stałego $I = 3\ A \pm 0,1\ A$ oraz rezystancję $R = 2\ \Omega \pm 0,01\Omega$.
Z jaką w przybliżeniu dokładnością zmierzymy wydzieloną moc?

Mamy

$$P = P(I,R) = I^2R, \quad I_0 = 3, \quad R_0 = 2, \quad ,\Delta I = \pm 0,1, \quad \Delta R = \pm 0,01$$

Czyli

$$P_I = 2IR, \quad P_R = I^2, \quad P_I(3,2) = 12, \quad P_R(3,2) = 9$$

A więc

$$\Delta P = |12| \cdot 0,1 + |9| \cdot 0,01 = 1,29[\mathrm{W}]$$

Pochodna kierunkowa

Definicja

Dla funkcji 2 zmiennych $f = f(x,y)$ pochodna ta mierzy zmienność f w zadanym kierunku $\vec{v} = [a,b]$.
Geometrycznie, jest to wersja pochodnej jednostronnej krzywej, która jest częścią wspólną wykresu f oraz płaszczyzny równoległej do osi Z i do wektora $\vec{v}$.
Oznaczenie :

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x,y) \quad \text{lub} \quad f_{\vec{v}}(x,y)$$

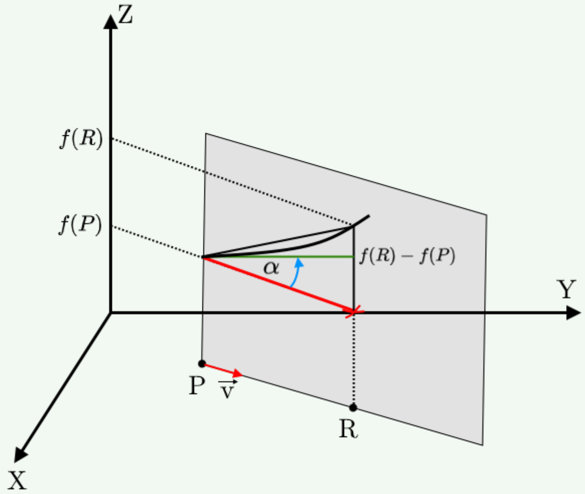
Uwaga! Do definicji będziemy zawsze używać wektorów jednostkowych:

$$|\vec{v}| = 1$$

Ogólna definicja dla funkcji n zmiennych

Ustalamy punkt P w $\mathbb{R}^n$ i rozpatrujemy półprostą o początku w P i o kierunku zgodnym z $\vec{v}$ czyli zbiór tych punktów R dla których $\overrightarrow{PR}$ i $\vec{v}$ mają zgodne kierunki.
Badamy proporcję różnicy wartości f w punktach R i P do odległości R od P przy przejściu granicznym $R \to P$.
Daje to definicję

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P) = \lim_{R \to P} \frac{f(R) - f(P)}{|\overrightarrow{PR}|}$$



$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P) = \operatorname{tg} \alpha$$

W przypadku funkcji 2 zmiennych dla $P = (x_0, y_0)$ i $\vec{v} = [a, b]$ równanie parametryczne powyższej półprostej ma postać

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \qquad \text{dla } t > 0$$

To oznacza, że

$$R = (x, y) = (x_0 + at, y_0 + bt) \quad \text{oraz} \quad \overrightarrow{PR} = t \cdot \vec{v}$$

A stąd

$$|\overrightarrow{PR}| = |t \cdot \vec{v}| = |t| \cdot |\vec{v}| = t \cdot 1 = t$$

Ponieważ $R \to P \;\Leftrightarrow\; t \to 0^+$ oznacza, że

$$\lim_{R \to P} \frac{f(R) - f(P)}{|\overrightarrow{PR}|} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t}$$

a to daje równoważną definicję pochodnej kierunkowej:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t}, \quad \text{gdzie } \vec{v} = [a, b],\ |\vec{v}| = 1$$

Przykład

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,1) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f\left(0-\frac{\sqrt{2}}{2}t, 1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) - f(0,1)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right| + 3\left|1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right| - 3}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}t + 3\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) - 3}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}t}{t} = 2\sqrt{2}$$

Z definicji liczymy tylko dla funkcji mało regularnych. Gdy pochodne cząstkowe f są ciągle to mamy lepszy wzór z użyciem gradientu.

Gradient

Definicja

Gradient funkcji w danym punkcie – wektor pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu funkcji f w danym punkcie.
Oznaczenie: $\operatorname{grad} f$ lub ∇f.
Dla funkcji 2 zmiennych i punktu $P = (x_0, y_0)$

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = [f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)]$$

Dla funkcji n zmiennych $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ i punktu $P = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\operatorname{grad} f(P) = [f_{x_1}(P), f_{x_2}(P), ..., f_{x_n}(P)]$$

Twierdzenie

Gdy pochodne cząstkowe f są ciągłe w (x_0, y_0) i $\vec{v} = [a, b]$ oraz $|\vec{v}| = 1$ to

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \vec{v} \circ (\operatorname{grad} f(x_0, y_0)) = a \cdot f_x(x_0, y_0) + b \cdot f_y(x_0, y_0)$$

Wzór rozszerza się do funkcji większej ilości zmiennych.

Przykład

$$f(x,y) = x^2 \cdot y^3, \quad \vec{v} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

Obliczyć $f_{\vec{v}}(-1,1)$.

Mamy

$$f_x = 2xy^3, \quad f_y = 3x^2y^2$$

$$f_x(-1,1) = -2, \quad f_y(-1,1) = 3, \quad \text{grad}\, f(-1,1) = [-2,3]$$

$$f_{\vec{v}} = [-2,3] \circ \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Dalej,

$$\vec{v} \circ \text{grad}\, f(x_0,y_0) = 1 \cdot |\text{grad}\ f(x_0,y_0)| \cdot \cos\alpha$$

gdzie α jest kątem między tymi dwoma wektorami.
To daje następujące wnioski:

Twierdzenie

Gdy $\text{grad}\, f(x_0,y_0) = \vec{0}$ to $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0) = 0$ dla dowolnego $\vec{v}$.

Twierdzenie

$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0)$ ma wartość największą kiedy $\vec{v}$ i $\text{grad}\ f(x_0,y_0)$ mają zgodne kierunki.
Ta największa wartość to $|\text{grad}\, f(x_0,y_0)|$.

Twierdzenie

$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0)$ ma wartość najmniejszą kiedy $\vec{v}$ i $\text{grad}\ f(x_0,y_0)$ mają przeciwne kierunki.
Ta najmniejsza wartość to $-|\text{grad}\, f(x_0,y_0)|$.

Twierdzenie

$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0) = 0$ dla $\text{grad}\, f(x_0,y_0) \neq \vec{0}$ kiedy $\text{grad}\, f(x_0,y_0) \perp \vec{v}$

Twierdzenie

Zbiór wartości $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$ w zależności od $\vec{v}$ to przedział

$$[-|\text{grad}\, f(x_0, y_0)|, |\text{grad}\, f(x_0, y_0)|]$$

Skrajne wartości są osiągane dla dokładnie jednego wektora (zob. punkty 2 i 3), a pozostałe – dla dokładnie dwóch wektorów $\vec{v}$.

Przykład

Dana jest funkcja

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x-y}$$

1.Znaleźć wszystkie wersory $\vec{v}$ dla których $f_{\vec{v}}(-1, 1)$
a) jest największa
b) jest najmniejsza

2. Wyznaczyć zbiór wszystkich punktów (x,y) dla których pochodna kierunkowa w kierunku wersora $\vec{v} = \left[\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right]$ jest równa 0.

Wprowadzić wektor $\vec{v} = [a, b]$ co daje

$$f_{\vec{v}}(-1, 1) = [a, b] \circ [3e^{-3}, -e^{-3}] = 3e^{-3}a - e^{-3}b$$

Następnie trzeba analizować tę funkcję **nie zapominając o dodatkowym warunku**

$$\vec{v} = 1 \ \Leftrightarrow \ a^2 + b^2 = 1$$

Prowadzi to do układu równań, jest dłuższe i bardziej skomplikowane
W części 2 potrzebna jest metoda analityczna.
Korzystając ze wzoru na gradient z części a) Mamy

$$f_{\vec{v}} = (x, y) = grad\, f(x, y) \circ \vec{v} = [e^{x-y}(2x + x^2 + y^2), e^{x-y}(2y - x^2 - y^2)] \circ \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right] =$$

$$\frac{3}{5}e^{x-y}(2x + x^2 + y^2) + \frac{4}{5}e^{x-y}(2y - x^2 - y^2) = \frac{1}{5}e^{x-y}(6x + 8y - x^2 - y^2) = 0$$

To oznacza, że $6x + 8y - x^2 - y^2 = 0$
Jest to równanie okręgu – po sprowadzeniu do postaci kanonicznej mamy

Ciąg dalszy nastąpi po wykładzie w dniu 8.05.2023

Zbieżność w $\mathbb{R}^k$ i granice funkcji wielu zmiennych

Rozpatrujemy ciąg wielu punktów $P_n = (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$.
Równoważnie możemy myśleć o wektorach $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ biorąc wektory pozycyjne punktów P_n czyli $\vec{v} = \vec{OP_n}$.

Niech teraz $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Mówimy, że $P_n \to P_0$, gdy odległość między P_n i P_0 zbiega 0. Formalnie

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} |\overrightarrow{P_0P_n}| = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = 0$$

Podobnie, gdy

$$P_n = (x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{i} \quad P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$$

To definiujemy

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} |\overrightarrow{P_0P_n}| = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2 + (z_n - z_0)^2} = 0$$

Analogicznie rozszerzamy tę definicję na przypadek k – wymiarowy.

Poniższe twierdzenie pokazuje, że zbieżność $P_n \to P_0$ może być zdefiniowana w równoważny sposób.

Twierdzenie – zbieżność po współrzędnych

Gdy

$$P_n = (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{i} \quad P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$$

to mamy równoważność

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \;\wedge\; \lim_{n\to\infty} y_n = y_0$$

Dowód
Implikacja $\Leftarrow$ wynika bezpośrednio z arytmetyki granic :
Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \;\wedge\; \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$ to

$$\lim_{n\to\infty} |\overrightarrow{P_0P_n}| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = 0$$

Zatem

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0$$

Implikacja $\Rightarrow$ wynika z kolei z twierdzenia o 3 funkcjach.
Mamy bowiem

$$0 \leqslant |x_n - x_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2} \leqslant \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = |\overrightarrow{P_0P_n}|$$

Teraz, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$ to $\lim\limits_{n\to\infty} |\overrightarrow{P_0P_n}| = 0$ i z twierdzenia o 3 ciągach dostajemy $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - x_0| = 0$ a to daje $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - x_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$
Analogicznie otrzymujemy $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$

Jak łatwo zauważyć, twierdzenie ma analogiczną postać w przypadku wyższych wymiarów.

Definicja – granica funkcji dwóch zmiennych w punkcie

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \Leftrightarrow$ dla dowolnych ciągów punktów $(x_n, y_n) \neq (x_0, y_0)$ i takich, że $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x_0, y_0)$ zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = L$.

Definicja jest analogiczna w przypadku funkcji większej ilości zmiennych.
Równoważny zapis tej granicy, zgodny ze znaczeniem twierdzenia o zbieżności po współrzędnych to

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = L$$

Twierdzenie o granicach znane dla funkcji jednej zmiennej (arytmetyka granic, symbole nieoznaczone itd.) pozostają prawdziwe.

Główny problem – nie da się bezpośrednio zastosować niektórych popularnych technik, np. reguły de l'Hospitala.

Popularne techniki liczenia granic funkcji wielu zmiennych

1. Twierdzenie o 3 funkcjach. Jeżeli dla wszystkich punktów $P \in \mathbb{R}^k$ z pewnego sąsiedztwa punktu $P_0 \in \mathbb{R}^k$ zachodzi nierówność

$$d(P) \leqslant f(P) \leqslant g(P) \quad \text{i} \quad \lim_{P\to P_0} d(P) = \lim_{P\to P_0} g(P) = L \quad \text{to} \quad \lim_{P\to P_0} f(P) = L$$

2. Sprowadzenie granicy do przypadku jednej zmiennej.

   Jeżeli istnieje nowa zmienna $t = t(P)$ takie, że $f(P) = g(t)$ oraz $\lim\limits_{P\to P_0} t = t_0$ i $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = L$ to $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = L$

3. **COŚ O BRAKU GRANICY XD** $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ nie istnieje

Przypadek 3 jest szczególnie częsty, gdy pojawia się symbol nieoznaczony.
W przypadku funkcji dwóch zmiennych najczęściej wybiera się ciągi punktów P_n i Q_n z dwóch różnych krzywych.
P jest wtedy z wykresu jakiejś krzywej: $y = g(x)$ lub $x = g(y)$.
Q jest z wykresu innej krzywej: $y = h(x)$ lub $x = h(y)$.
Obie krzywe muszą spotykać się w punkcie granicznym P_0.
Wtedy granice $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ i $\lim\limits_{Q\to P_0} f(Q)$ stają się granicami funkcji jednej zmiennej.

Przykład

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+4y^2)\cos\left(x-5y+\frac{2}{x}\right)$$

Wiemy, że $x^2+4y^2 \geqslant 0$ oraz $-1 \leqslant \cos\left(x-5y\frac{2}{x}\right) \leqslant 1$, a stąd

$$-(x^2+4y^2) \leqslant (x^2+4y^2)\cos\left(x-5y+\frac{2}{x}\right) \leqslant x^2+4y^2$$

Ponieważ

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+4y^2) = 0 = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(-(x^2+4y^2))$$

z twiedzenia o 3 ciągach otrzymujemy

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+4y^2)\cos\left(x-5y+\frac{2}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1\\ z\to 0}}\frac{2x-y+z-1-\ln(2x-y+z)}{(2x-y+z-1)^2}$$

Tutaj możemy podstawić $t=2x-y+z$. Wtedy $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1\\ z\to 0}} t = 1$

i mamy

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1\\ z\to 0}}\frac{2x-y+z-1-\ln(2x-y+z)}{(2x-y+z-1)^2} = \lim_{t\to 1}\frac{t-1-\ln t}{(t-1)^2}\left[\frac{0}{0}\right] \overset{[H]}{=} \frac{1}{2}$$

Przykład

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{tg}(x^2-y^2)}{x-y}$$

Tutaj znów jest granica typu $\frac{0}{0}$. Po podstawieniu $t = x^2 - y^2$ mamy granicę podstawową $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{tg} t}{t} = 1$.

Stąd wniosek, że trzeba nasze wyrażenie rozbić na iloczyn: $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{tg}(x^2-y^2)}{x^2-y^2} \cdot \frac{x^2-y^2}{x-y}$

Mamy wtedy

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{tg}(x^2-y^2)}{x^2-y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{tg} t}{t} = 1$$

Oraz

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x-y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x-y)(x+y)}{x-y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x+y) = 0$$

Stąd

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{tg}(x^2-y^2)}{x-y} = 1 \cdot 0 = 0$$

Przykład

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{y}$$

Tutaj wykażemy brak granicy
Rozpatrujemy 2 krzywe przechodzące przez $(0,0)$. Na przykład $y = x$ oraz $y = 2x$.
Biorąc $y = x$ mamy

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{y} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

Natomiast dla $y = 2x$ mamy

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{y} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \neq 1$$

Zatem granica nie istnieje

Ciągłość funkcji wielu zmiennych

Definicja jest analogiczna jak dla funkcji jednej zmiennej – granica funkcji jest równa wartości.
Formalnie,
f jest ciągła w punkcie $P_0 \in D_f$, gdy $\lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$,
f jest ciągła na zbiorze $A \subset D_f$ jeżeli jest ciągła we wszystkich punktach z A.

Twierdzenia dotyczące arytmetyki funkcji ciągłych są analogiczne jak w przypadku jednej zmiennej.

Przykład

Wyznaczyć zbiór punktów ciągłości funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x + y + 1, \; x \geqslant 0 \\ \quad 2y + x, \; x < 0 \end{cases}$$

Tutaj rozpatrujemy dwa obszary – dane warunkami $x \geqslant 0$ oraz $x < 0$.
Brzegiem obu obszarów jest prosta $x = 0$ (oś Y).
W punktach (x,y), $x > 0$, funkcja jest ciągła, bo jest równa elementarnej na zbiorze otwartym.
Podobnie dla $x < 0$..
Pozostaje zbadać ciągłość w punktach brzegowych czyli w $P_0 = (0, y_0)$.
Ze względu na warunek definiujący zbiór, dla takich punktów zbieżności trzeba rozpatrzeć 2 możliwe typy punktów

$$P = (x,y) \to P_0 \quad \text{dla} \quad x \geqslant 0 \text{ oraz } x < 0$$

Dla $x \geqslant 0$ mamy

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to y_0}} (2x + y - 1) = y_0 - 1$$

Dla $x < 0$ mamy

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to y_0}} (2y + x) = 2y_0$$

Ponadto $f(0, y_0) = y_0 - 1$
Stąd ciągłość w $P_0 = (0, y_0)$ ma miejsce, gdy $y_0 - 1 = 2y_0$, a więc dla $y_0 = -1$.
Wtedy dla dowolnego ciągu punktów $P = (x,y) \to (0, -1)$ mamy

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to -1}} f(x,y) = f(0,-1) = -2$$

Zatem zbiorem punktów ciągłości f jest zbiór

$$D = \{(x,y) : x \neq 0\} \cup \{(0,-1)\}$$

Interpretacja geometryczna wykresu – składa się z dwóch osobnych ukośnych półpłaszczyzn, które spotykają się w punkcie $(0, -1)$.

Ekstrema funkcji dwóch zmiennych

Definicja

f ma w $P = (x_0, y_0) \in D_f$ minimum lokalne gdy $f(x_0, y_0)$ jest najmniejszą wartością f na pewnym kole o środku w P.
f ma w $P = (x_0, y_0) \in D_f$ minimum lokalne gdy $f(x_0, y_0)$ jest największą wartością f na pewnym kole o środku w P.

Gdy ta wartość jest najmniejsza/największa na całej dziedzinie f to mówimy o ekstremum (minimum, maksimum) globalnym.

Przykład

Funkcja $f(x, y) = x^4 + y^6$ ma w $(0, 0)$ minimum i jest ono globalne, bo

$$f(0, 0) = 0$$

a dla dowolnego $(x, y) \neq (0, 0)$ mamy $f(x, y) = x^4 + y^6 > 0$.

Wyznaczenie ekstremów z definicji rzadko kiedy się udaje, najczęściej szukamy ich z użyciem pochodnych cząstkowych.
Daje się to robić dla funkcji regularnych: na badanym zbiorze **pochodne pierwszego i drugiego rzędu istnieją i są ciągłe**.

Warunek konieczny istnienia ekstremum: tzw. punkt stacjonarny czyli
$P = (x_0, y_0)$ taki, że

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

To jeszcze nie wystarcza! To tylko mówi, że płaszczyzna styczna (gdy istnieje) jest równoległa do płaszczyzny XY.
Warunek dostateczny. Liczymy w P specjalny wyznacznik – tzw. hesjan.

$$W = H(P) = H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0), & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

Interpretacja: H to "wykrywacz" ekstremum: mówi czy ekstremum jest czy nie.

Twierdzenie

Jeżeli w pewnym otoczeniu $P = (x_0, y_0)$ pochodne pierwszego i drugiego rzędu funkcji f istnieją i są ciągłe oraz $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ to zachodzą poniższe własności.

- Gdy $H(x_0, y_0) > 0$ to **jest ekstremum**. Wtedy gdy $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ to jest minimum, a gdy $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ to jest maksimum.
- Gdy $H(x_0, y_0) < 0$ to **nie ma ekstremum**.
- Gdy $H(x_0, y_0) = 0$ to **nic nie wiemy** – metoda nie działa.

Uwaga

Można udowodnić, że gdy $H(x_0, y_0) > 0$ to $f_{xx}(x_0, y_0)$ oraz $f_{yy}(x_0, y_0)$ są jednocześnie obie dodatnie lub obie ujemne.
Zatem przy sprawdzaniu typu ekstremum (minimum/maksimum) możemy patrzeć na dowolną z tych pochodnych.

Przykład

$f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$
Mamy $D_f = \mathbb{R}^2$ oraz

$$f_x = 4x, \quad f_y = 6y$$

Stąd

$$f_x = f_y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \quad \text{czyli punkt standardowy to} \quad P = (0, 0)$$

Teraz

$$f_{xx} = 4, \; f_{yy} = 6, \; f_{xy} = f_{yx} = 0$$

To daje

$$W = H(0, 0) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 24 > 0 \quad \text{– jest ekstremum}$$

$f_{xx}(0, 0) = 4 > 0$ więc w $(0, 0)$ jest minimum $f(0, 0) = 0$.

Przykład

$f(x,y) = (x^2 - y^2)e^x$
Mamy $D_f = \mathbb{R}^2$ oraz

$$f_x = 2xe^x + (x^2 - y^2)e^x = e^x(x^2 - y^2 + 2x)$$

$$f_y = -2ye^x$$

Stąd

$$f_x = f_y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \ \vee \ x = -2 \end{cases}$$

Czyli punkty stacjonarne to $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (-2,0)$.
Teraz

$$f_{xx} = e^x(2x+2) + e^x(x^2 - y^2 + 2x)$$

$$f_{yy} = -2e^x$$

$$f_{xy} = f_{yx} = -2ye^x$$

Dla $P_1 = (0,0)$ mamy

$$W = H(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0 \quad \text{Brak ekstremum w } P_1$$

Dla $P_2 = (-2,0)$ mamy

$$W = H(0,0) = \begin{vmatrix} -2e^2 & 0 \\ 0 & -2e^2 \end{vmatrix} = -4e^{-2} \cdot e^{-2} > 0 \quad \text{Jest ekstremum}$$

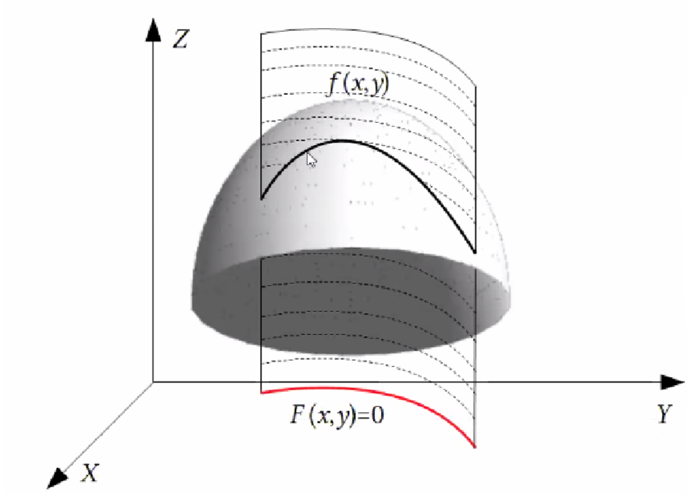
$f_{xx}(-2,0) = -2e^{-2} < 0$ czyli mamy maksimum o wartości $f(-2,0) = 4e^{-2}$.

Ekstrema warunkowe

Definicja

Funkcją warunkową nazwiemy $f = f(x,y)$ gdzie dziedziną jest zbiór, który jest krzywą na płaszczyźnie XY czyli ma postać zależności między x i y: $F(x,y) = 0$.

Interpretacja geometryczna: taka funkcja f to krzywa w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ położona "pionowo pod/nad" krzywą na płaszczyźnie daną równaniem $F(x,y) = 0$.
Zatem jest to zbiór punktów $(x, y, f(x,y))$, gdzie $F(x,y) = 0$.
Rzutem tej krzywej na płaszczyznę XY jest krzywa płaska o równaniu $F(x,y) = 0$


Z
f(x,y)
F(x,y)=0
Y
X

Przykład

$$f(x,y) = -xy, \ F(x,y) = 2x + y = 0$$

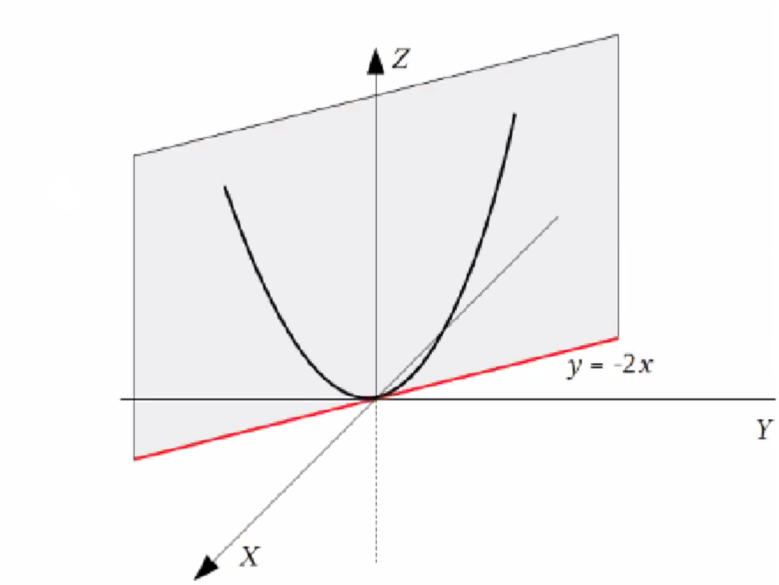
To daje $y = -2x$ czyli

$$f(x,y) = f(x,-2x) = 2x^2, \ y = -2x, \ x \in \mathbb{R}$$

Czyli zbiór punktów

$$(x, -2x, 2x^2), \ x \in \mathbb{R}$$

Jest to paraboloida ustawiona "pionowo" ale nad prostą $y = -2x$ (w płaszczyźnie równoległej do osi Z i zawierającej tą prostą).



Ekstrema warunkowe to ekstrema takich funkcji. Liczymy je metodami poznanymi z Analizy Matematycznej 1 (mamy funkcję 1 zmiennej).
W naszym przykładzie mamy do analizy funkcję $f(x) = x^2, \ x \in \mathbb{R}$
Nie trzeba pochodnych, ekstremum to punkt dla $x = 0$ – jest to minimum.
To daje $y = -2 \cdot 0 = 0$ oraz $z = f(0,0) = 0$ więc punkt $(0,0,0)$.

Wartości największe i najmniejsze funkcji na zadanych zbiorach

Mamy funkcję $f(x,y), \ D_f = D$
Interesuje nas wartość największa i wartość najmniejsza f na D. Te wartości mogą istnieć lub nie. To zależy od funkcji i zbioru.

Twierdzenie (Wersja tw. Weiertrassa (AM1) dla funkcji dwóch zmiennych)

Gdy D jest domknięty (czyli cały brzeg D jest zawarty w D) oraz ograniczony (czyli zawiera się w pewnym kole) i f jest ciągła na D to wartość największa i wartość najmniejsza f na D jest osiągana.

Gdzie te wartości mogą być osiągane dla funkcji różniczkowalnych?

- W punktach stacjonarnych f: $f_x = f_y = 0$.
- Na brzegu D: prowadzi to do funkcji warunkowych i ich wartości największych/najmniejszych – jak dla funkcji jednej zmiennej w AM1

Dla punktów z obu przypadków liczymy wartości f i z tych wartości wybieramy najwieksza i najmniejszą. To daje odpowiedź.
Uwaga: Dla punktów stacjonarnych nie trzeba sprawdzać czy jest to ekstremum.
Nie potrzeba hesjanu itd. Wystarczy policzyć wartość.

Przykład

$$f(x,y) = xy^2,\ x^2 + y^3 \leqslant 3$$

Punkty stacjonarne
$f_x = y^2 = 0$
$f_y = 2xy = 0$
Wychodzą punkty $(x, 0)$ oraz $f(x, 0) = 0$
Brzeg: $x^2 + y^2 = 3$. Wystarczy wyliczyć $y^2 = 3 - x^2$ i to daje

$$f(x,y) = f(x) = x(3 - x^2) = 3x - x^3,\ x \in \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$$

Zadanie staje się zadaniem z AM1: znaleźć wartość największą/najmniejszą tej funkcji.
Zatem

$$f(\pm\sqrt{3}) = 0$$

$$f' = 3 - 3x^2 = 0 \ \Leftrightarrow\ x = \pm 1 \in \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$$

$$f(-1) = -2,\ f(1) = 2$$

Stąd wartość największa to 2, jest osiągana w punktach $(1, \sqrt{2})$ oraz $(1, -\sqrt{2})$.
Najmniejsza wartość to -2, jest osiągana w punktach $(-1, \sqrt{2})$ oraz $(-1, -\sqrt{2})$.

Zadania optymalizacyjne

Schemat taki jak w AM1.

1. Ułożyć funkcję opisującą daną wielkość.
2. Znaleźć dziedzinę tej funkcji pasującą do zadania (niekoniecznie dziedzinę naturalną).

3. Znaleźć wartość największą lub najmniejszą tej funkcji na zadanej dziedzinie.

Przykład
Spośród wszystkich trójkątów o obwodzie równym 3 jednostki znaleźć ten trójkąt, który ma największe pole.

1. Wzór funkcji.
Jeśli boki tego trójkąta mają długości $a, b, c > 0$ to pole jest dane wzorem

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{gdzie} \quad p = \frac{a+b+c}{2} \qquad \text{(wzór Herona)}$$

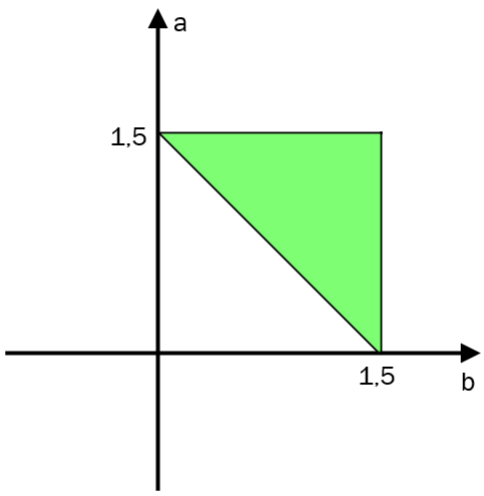
2. Dziedzina f: $a, b > 0,\ c = 3 - a - b > 0$ oraz z warunku trójkąta

$$\begin{array}{rcl} a+b>c & \Leftrightarrow & b > 1,5 - a \\ a+c>b & \Leftrightarrow & 0 < b < 1,5 \\ b+c>a & \Leftrightarrow & 0 < a < 1,5 \end{array}$$

To daje trójkąt o wierzchołkach w punktach $(1.5,\ 0), (0,\ 1.5)$ oraz $(1.5,\ 1.5)$ ale bez brzegu. Aby mieć gwarancję istnienia wartości największej (twierdzenie Weiertrassa) dołączamy brzeg do trójkąta i mamy D_f:

$$0 \leqslant a \leqslant 1,5$$

$$1,5 - a \leqslant b \leqslant 1,5$$



3.Wartość największa f

a) Na brzegu
Brzeg składa się z trzech boków o równaniach

$$\begin{array}{rl} a = 1,5: & f \equiv 0 \\ b = 1,5: & f \equiv 0 \\ b = 1,5 - a: & f \equiv 0 \end{array}$$

To na pewno nie jest wartość największa

b) W punktach stacjonarnych we wnętrzu

$$f(a,b) = \sqrt{1,5(1,5-a)(1,5-b)(a+b-1,5)} \quad \text{więc}$$

$$f_a = \frac{1}{2\sqrt{dopoprawy}} \cdot 1,5 \cdot (1,5-b) \cdot (-(a+b-1,5) + 1(1,5-a)) = 0$$

To daje układ

$$\begin{cases} (1,5-b) \cdot (3-2a-b) = 0 \\ (1,5-a) \cdot (3-2b-a) = 0 \end{cases}$$

Zatem

$$\begin{cases} b = 1,5 \text{ brzeg -- odrzucamy } \vee \ 3-2a-b=0 \\ a = 1,5 \text{ brzeg -- odrzucamy } \vee \ 3-2b-a=0 \end{cases}$$

Dla punktów we wnętrzu trójkąta jest więc

$$\begin{cases} 3-2a-b=0 \\ 3-2b-a=0 \end{cases}$$

To daje $a = b = 1$ oraz $f(1,1) = \frac{\sqrt{3}}{4}$. To jest wartość największa.
Ponadto wtedy $c = 1$. Jest to więc trójkąt równoboczny.

6 Całki podwójne

Zapis: $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, gdzie zbiór D i funkcja f są odpowiednio regularne.
Definicja może być skonstruowana poprzez:

- n – tą sumę całkową (sumę Riemanna) – podobnie jak w AM1
- tzw. całki iterowane

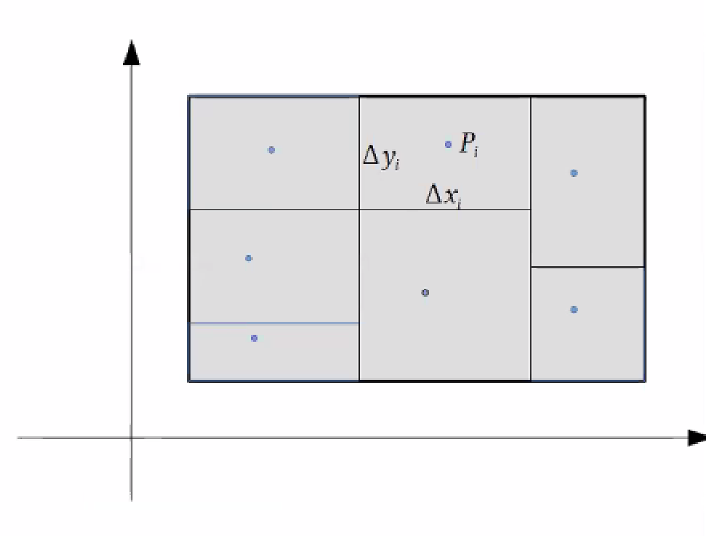
Całka w sensie Riemanna

Przypadek podstawowy – D jest prostokątem

$$D = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$$

Dzielimy D na n prostokątów o bokach poziomych o długości ΔX i bokach pionowych o długości Δy_i, $i = 1, 2, ..., n$. W każdym z prostokątów wybieramy dowolny punkt $P_i = (a_i, b_i)$.
Sumą Riemanna (n – tą sumę całkową) funkcji f na D jest

$$S_n = \sum_{n=1}^{n} \Delta x_i \cdot \Delta y_i \cdot f(a_i, b_i)$$



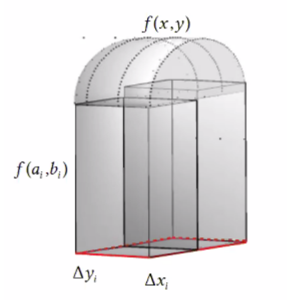
Jeżeli dla $n \to \infty$, $\Delta x_i \to 0$, $\Delta y_i \to 0$ granica $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ istnieje i nie zależy od wyboru prostokątów oraz punktów P_i to nazywamy ją całką podwójną z f na prostokącie D i oznaczamy przez $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$.

Twierdzenie

Gdy f jest ciągła na prostokącie D to całka podwójna z f na D istnieje.

Interpretacja geometryczna dla $f \geqslant 0$ na D: S_n to suma objętości prostopadłościanów o krawędziach $\Delta x_i,\ \Delta y_i$ oraz $f(a_i, b_i)$. Prostopadłościany te przybliżają bryłę o podstawie D, ścianach pionowych i ograniczonej z góry przez powierzchnię f.

Granica S_n daje objętość tej bryły.



Dla $D = [a, b] \times [c, d]$ są to całki postaci

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y)\, dx = \int\limits_c^d dy \left(\int\limits_a^b f(x, y)\, dx \right)$$

oraz

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\, dy = \int\limits_a^b dx \left(\int\limits_c^d f(x, y)\, dy \right)$$

Twierdzenie

Gdy f jest ciągła na D to

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y)\, dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\, dy = \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy$$

Przykład

$$D = [0,1] \times [-1,1], \ f(x,y) = 2x + 3y^2$$

$$\int_0^1 dx \int_{-1}^1 (2x+3y^2)\,dy = \int_0^1 dx \left[2xy + y^3\right]_{y=-1}^{y=1} = \int_0^1 dx(4x+2) = \left[2x^2+2x\right]_0^1 = 4-0=4$$

W odwrotnej kolejności

$$\int_{-1}^1 dy \int_0^1 (2x+3y^2)\,dx = \int_{-1}^1 dy \left[x^2+3y^2x\right]_{x=0}^{x=1} = \int_{-1}^1 dy(3y^2+1) = \left[y^3+y\right]_{-1}^1 = 2-(-2) = 4$$

Przypadek ogólny – całki po tzw. obszarach normalnych.
Są to zbiory postaci:

$$D = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b, \ d(x) \leqslant y \leqslant g(x)\} \quad \text{lub} \quad D = \{(x,y) : a \leqslant y \leqslant b, \ d(y) \leqslant x \leqslant g(y)\}$$

Ponadto funkcje d i g są ciągłe.

Definicja

Definicja całki podwójnej w sensie Riemanna jest analogiczna jak dla prostokąta.

$$\int_a^b dx \int_{d(x)}^{g(x)} f(x,y)\,dy = \int_a^b dx \left(\int_{d(x)}^{g(x)} f(x,y)\,dy \right)$$

lub

$$\int_c^d dy \int_{d(x)}^{g(x)} f(x,y)\,dx = \int_a^b dy \left(\int_{d(x)}^{g(x)} f(x,y)\,dx \right)$$

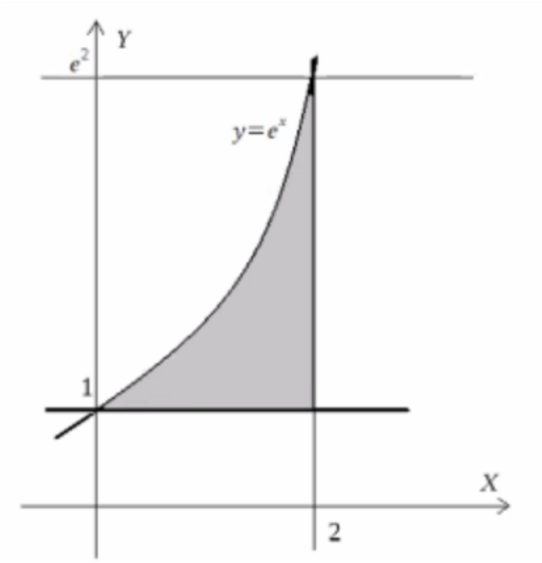
Twierdzenie

Gdy f jest ciągła na obszarze normalnym to całka podwójna $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ istnieje i jest równa każdej z całek iterowanych.

Przykład

$f(x,y) = xy$
D jest ograniczony krzywymi $x = 0,\ x = 2, y = e^x$

Rysunek obszaru:



Mamy $D : 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant e^x$. Czyli całka jest równa

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_1^{e^x} xy\,dy = \int\limits_0^2 dx \left[\frac{xy^2}{2}\right]_1^{e^x} = \int\limits_0^2 dx \left(\frac{xe^{2x}}{2} - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 xe^{2x}\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^2 x\,dx$$

Ta druga całka wynosi 2.
Tą pierwszą liczymy przez części:

$$\int xe^{2x} = \frac{1}{2}xe^{2x} - \int 1\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

$$\left|\begin{matrix} f(x) = x & g'(x) = e^{2x} \\ f'(x) = 1 & g(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{matrix}\right|$$

Zatem

$$\int\limits_0^2 xe^{2x}\,dx = e^4 - \frac{1}{4}e^4 + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}e^4 + \frac{1}{4}$$

Całość:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}e^4 + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\cdot 2 = \frac{3}{8}e^4 - \frac{7}{8}$$

Własności całki podwójnej

- $\iint\limits_D (f(x,y) \pm g(x,y))\, dxdy = \iint\limits_D f(x,y)\, dxdy \pm \iint\limits_D g(x,y)\, dxdy$
- $\iint\limits_D c \cdot f(x,y)\, dxdy = c \iint\limits_D f(x,y)\, dxdy$
- gdy $D = D_1 \cup D_2$ i D_1, D_2 są rozłączne to

$$\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\, dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\, dxdy$$

Zmiana kolejności całkowania

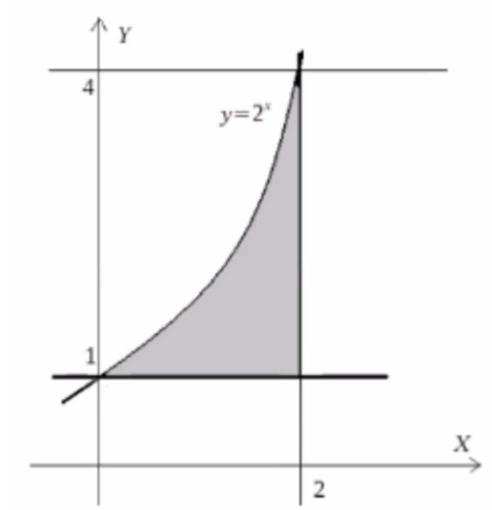
$$\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{d_1(y)}^{g_1(y)} f(x,y)\, dx$$

będzie dawała jeden obszar i jedną całkę.

Pytanie: jak mając obszar normalny względem x zmienić go na obszar/obszary względem y?
Zmiana kolejności całkowania wymaga zmiany roli argumentu i wartości czyli np. mając funkcję brzegową $y = f(x)$ trzeba wyliczyć ją względem y czyli $x = g(y)$.
Związane jest to z wyznaczaniem funkcji odwrotnej.
Stąd wniosek: zmiana kolejności całkowania jest związana z **odbiciem obszaru względem prostej** $y = x$.
Funkcja/krzywa "prawa" staje się "górną", a "lewa" - "dolną".
Praktyczna uwaga: symetria względem prostej $y = x$ jest równoważna obrotowi względem $(0,0)$ w lewo o kąt 90°, a potem symetrii względem osi pionowej.
W praktyce wystarczy sam obrót by zobaczyć funkcje górne i dolne.

Przykład

Zapisać, jako całkę iterowaną, $\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy$, gdzie D jest obszarem na rysunku poniżej.
Następnie zmienić kolejność całkowania.



Widać, że funkcją dolną jest funkcja stała $y = 1$, a górną $y = 2^x$. Zmienność x można odczytać poprzez rzut obszaru na oś X.
Zatem

$$D: \ 0 \leqslant x \leqslant 2, \quad 1 \leqslant y \leqslant 2^x$$

To daje całkę

$$\int_0^2 dx \int_1^{2^x} f(x,y)\,dy$$

Ważna uwaga
Jeżeli zarówno x jak i y są ograniczone przez liczby to obszar jest prostokątem lub sumą prostokątów. Zatem każdy zbiór, który nie jest prostokątem/sumą prostokątów będzie zawierał **zależność jednej zmiennej od drugiej**.

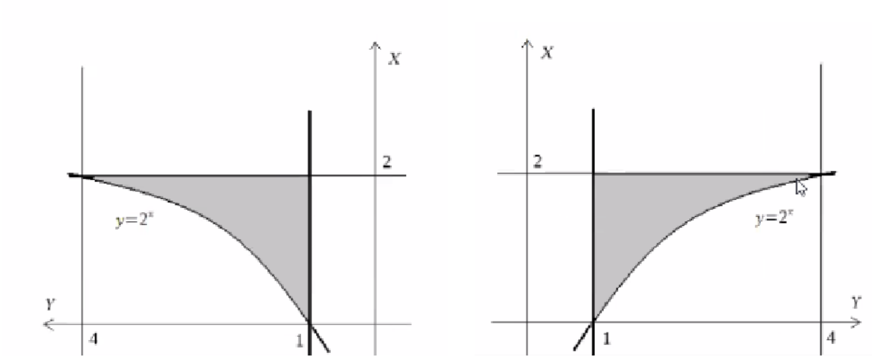
Popularny błąd

Obie zmienne między liczbami dla obszarów innych niż prostkąty
Na przykład dla naszego obszaru

$$D: \ 0 \leqslant x \leqslant 2, \quad 1 \leqslant y \leqslant 4$$

GAME OVER... To jest opis prostokąta

Teraz zmiana kolejności całkowania.
Funkcją górną staje się krzywa prawa (prosta pionowa), a dolną – lewa ($y = 2^x$).
Widać to po obrocie rysunku względem (0,0) w lewo o kąt 90°.



Zatem dostaniemy

$$y = 2^x \ \Leftrightarrow\ x = \log_2 y \text{ – funkcja dolna}$$

$$x = 2 \text{ – funkcja górna}$$

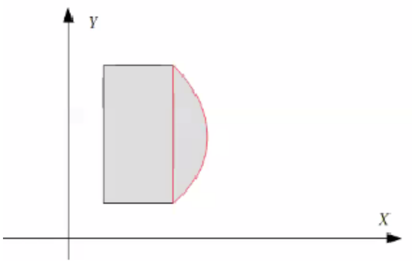
Warunki opisujące $D: \ 1 \leqslant y \leqslant 4, \quad \log_2 y \leqslant x \leqslant 2$

Całka: $\displaystyle\int\limits_1^4 dy \int\limits_{\log_2 y}^{2} f(x,y)\,dx$

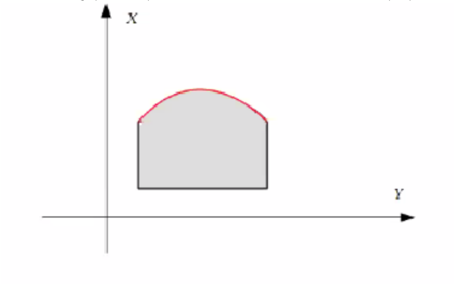
Praktyczna uwaga.
Opłaca się zmieniać kolejność całkowania, gdy w podstawowym zapisie trzeba dzielić obszar na kilka fragmentów, a po zmianie dostajemy jeden obszar (między jedną funkcją górną i jedną dolną).

Przykład

Na przykład poniższy w postaci $D = \{(x, y) :\ a \leqslant x \leqslant b,\ d(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$



trzeba rozbić na sumę 2 obszarów i będą 2 całki
Po zmianie kolejności całkowania mamy obszar w postaci
$D = \{(x, y) :\ c \leqslant y \leqslant d,\ d_1(y) \leqslant x \leqslant g_1(y)\}$



Będzie to całka po tylko jednym obszarze.

Zmiana zmiennych w całce podwójnej

Chodzi o metodę podstawienia
Wyprowadzamy wzory
$x = x(s, t)$
$y = y(s, t)$
Zakładamy, że są to różniczkowalne funkcje zmiennych s i t.
s, t – nowe współrzędne,
x, y – stare współrzędne.
Definiujemy wyznacznik

$$J = J(s,t) = \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{ds} & \frac{dy}{dt} \end{vmatrix} \quad - \underline{\text{jakobian}} \text{ przekształcenia}$$

A - obraz D w nowych współrzędnych tzn. $(x, y) \in D \ \Leftrightarrow \ (s, t) \in A$.
Wtedy mamy wzór

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_A f(x(s,t), y(s,t)) \cdot |J|\,dsdt$$

Jest to metoda podstawienia w całce podwójnej.

Współrzędne biegunowe

Jest to szczególny przypadek podstawienia.
Współrzędne biegunowe centralne – mają środek w (0,0).
Jest to odpowiednik postaci trygonometrycznej dla liczb zespolonych:

- r – odległość punktu (x, y) od środka (0,0)
- φ – kąt między dodatnią częścią osi X oraz półprostą łączącą środek z (x, y)

Formalne wzory

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$J = r \geqslant 0$$

$$0 \leqslant \varphi < 2\pi \quad \text{lub} \quad -\pi < \varphi \leqslant \pi$$

Obliczenie jakobianu:

$$J = J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi - (-r\sin^2\varphi) = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r \geqslant 0$$

Zatem $|J| = r$.
Stosujemy gdy jest dużo wyrażeń typu $x^2 + y^2 = R^2$.
Obraz zbioru D we współrzędnych biegunowych zwykle ma postać

$$A = A(r,\varphi) = \{(r,\varphi) : \ a \leqslant \varphi \leqslant \beta, \ d(\alpha) \leqslant r \leqslant g(\alpha)\}$$

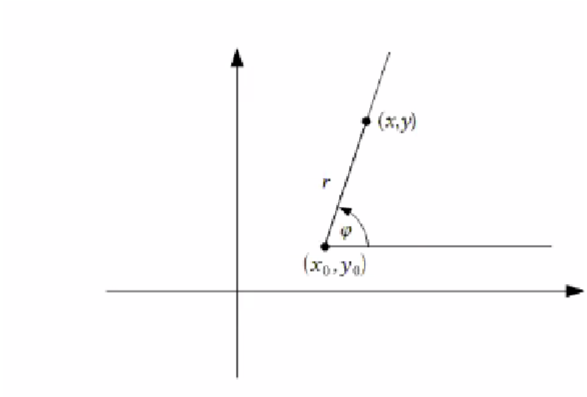
Warunek $a \leqslant \varphi \leqslant \beta$ zwykle można wywnioskować z rysunku.
Warunek $d(\alpha) \leqslant r \leqslant g(\alpha)$ zwykle wymaga obliczeń, bo najczęściej promień zależy od kąta.
Praktyczna obserwacja: promień nie zależy od kąta, gdy obszar jest

- kołem lub wycinkiem kątowym o wierzchołku w (0,0)
- pierścieniem kołowym o środku w (0,0)
- sumą lub przekrojem powyższych zbiorów

Inny środek niż w (0,0) powoduje, że promień zależy od kąta

Współrzędne biegunowe przesunięte – o środku w (x_0, y_0)

- r – odległość punktu (x, y) od środka (x_0, y_0),
- φ – kąt między półprostą $y = y_0, \ x \geqslant x_0$ oraz półprostą łączącą środek z (x, y).



Formalne wzory

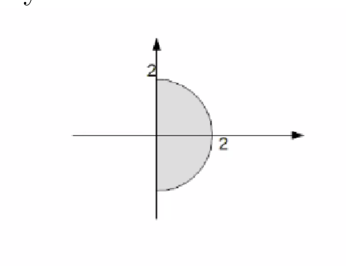
$$x = x_0 + r\cos\varphi$$
$$y = y_0 + r\sin\varphi$$
$$J = r \geqslant 0$$
$$0 \leqslant \varphi < 2\pi \quad \text{lub} \quad -\pi < \varphi \leqslant \pi$$

Stosujemy, gdy jest dużo wyrażeń typu $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
Postać obrazu zbioru D oraz praktyczne uwagi są analogiczne do przypadku centralnego, jednak wszystko odnosimy do środka (x_0, y_0), a nie (0,0).

Przykład

$$\iint_D xy^2, \quad D: \; x^2 + y^2 \leqslant 4, \quad x \geqslant 0$$

Rysunek obszaru



Wyznaczenie r i φ
a) Z rysunku $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant r \leqslant 2$
b) Z obliczeń
$r^2 \leqslant 4$ oraz $r\cos\varphi \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; 0 \leqslant r \leqslant 2$ oraz $\cos\varphi \geqslant 0$.
Dla cosinusa wygodniej brać $-\pi < \varphi \leqslant \pi$ zamiast $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.
Wtedy
$\cos\varphi \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$

$$\iint_D xy^2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 r\,dr \cdot r\cos\varphi \cdot (r\sin\varphi)^2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, \cos\varphi \sin^2\varphi \int_0^2 r^4\,dr$$

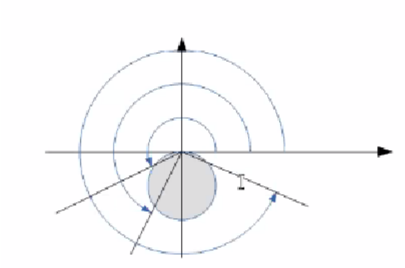
$$= \frac{32}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, \cos\varphi\sin^2\varphi = [t = \sin\varphi]\ \frac{32}{5}\int_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{64}{15}$$

Przykład

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy, \qquad D:\ x^2+y^2+2y \leqslant 0$$

D – koło o środku w (0, -1) i promieniu 1: $x^2(y+1)^2 \leqslant 1$.
Zastosujemy 2 metody.

a) Współrzędne centralne
Z rysunku widać, że $\pi \leqslant \varphi < 2\pi$:



Promień zależy od kąta bo nasze koło nie ma środka w (0,0).
Po wstawieniu warunku na D:

$$r^2 + 2r\sin\varphi \leqslant 0 \ \Leftrightarrow\ r \leqslant -2\sin\varphi \quad (\text{bo } r \geqslant 0) \text{ czyli } 0 \leqslant r \leqslant -2\sin\varphi$$

Jeżeli chcemy potwierdzić zasięg kąta obliczeniami to pojawia się pytanie: skąd wziąć warunek na kąt?

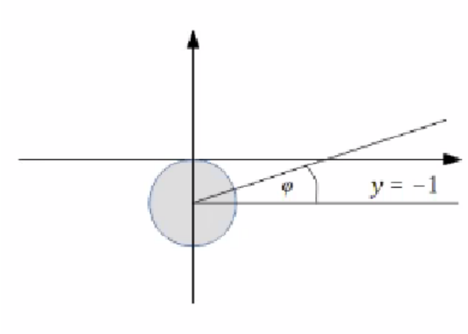
Zawsze jest dodatkowy (pośredni) warunek: funkcja dolna $\leqslant$ funkcja górna
U nas to daje

$$0 \leqslant -2\sin\varphi \quad \text{czyli} \quad \sin\varphi \leqslant 0 \quad \text{a stąd} \quad \pi \leqslant \varphi < 2\pi$$

b) Przesunięte współrzędne: środek to (0, -1).
Wtedy

$$x = r\cos\varphi, \quad y = -1 + r\sin\varphi, \quad x^2 + (y+1)^2 = r^2$$

r – odległość od (0, -1), φ – kąt względem półprostej $y = -1,\ x \geqslant 0$.



To daje $0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant 1$.
Dostajemy

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\,dr \cdot (r^2\cos^2\varphi + (-1 + r\sin\varphi)^2) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\,dr \cdot (r^2 - 2r\sin\varphi + 1)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{1}{4}r^2 - 2\frac{r^3}{3}\sin\varphi + \frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\sin\varphi\right) = \frac{3}{2}\pi$$

Ten sam wynik co poprzednio ale całka łatwiejsza.