Wykład - Analiza matematyczna II

(nieoficjalny) Skrypt wykładu Krzysztofa Michalika

17 kwietnia 2023

Spis treści

0.1 Mały wstęp

Skrypt jest w większości przepisywany ze zdjęć zrobionych w wordzie z dysku ale w przypadku jakichś braków wykorzystywana jest prezka dr. Michalika.
W skrypcie mogą pojawić się błędy stąd najlepiej przed nauką pobrać z dysku najbardziej aktualną wersję zamieszczoną w folderze
Semestr II $->$ Analiza Matematyczna2 $->$ Michalik wykłady $->$ Skrypt_Wykład.pdf.
Data którą można zobaczyć na samym górze jest **datą ostatniej aktualizacji skryptu**.
Wszelkie uwagi, błędy (na pewno jakieś są) można pisać priv na discordzie :
Tomasz Strzelba#1454
Miłej nauki!

1 Całki niewłaściwe I rodzaju

Ustalamy liczbę $a \in \mathbb{R}$. Niech f będzie funkcją całkowalną na każdym przedziale w postaci $[a, T]$ gdzie $T > a$. Definiujemy całkę niewłaściwą pierwszego rodzaju z f na półprostej $[a, \infty]$ jako

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty} \int_a^T f(x)\,dx \text{ , gdy granica po prawej stronie istnieje}$$

Analogicznie, gdy f jest całkowalna na każdym przedziale postaci $[T, b]$, gdzie $T < b$. Definiujemy całkę niewłaściwą pierwszego rodzaju z f na półprostej $[-\infty$, b] jako

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{T\to-\infty} \int_T^b f(x)\,dx \text{ , gdy granica po prawej stronie istnieje}$$

Terminologia dotycząca takich całek jest taka, jak dla ciągów. Są 3 przypadki :

1. Granica z prawej strony jest liczbą. Wtedy mówimy, że całka jest zbieżna.
2. Granica z prawej strony jest równa ∞ lub $-\infty$. Wtedy mówimy, że całka jest rozbieżna (odpowiednio do ∞ lub $-\infty$).
3. Granica z prawej strony nie istnieje. Wtedy mówimy, że całka jest rozbieżna.

Analogicznie dla $\int_\infty^b f(x)\,dx$

Przykłady :

$$\int_0^\infty \sin x\,dx = \lim_{T\to\infty} \int_0^T \sin x\,dx = \lim_{T\to\infty} [-\cos x]_0^T = \lim_{T\to\infty} (-\cos T - (-\cos 0)) = \lim_{T\to\infty} (1 - \cos T)$$

Granica ta nie istnieje więc całka jest rozbieżna.

$$\int\limits_{-\infty}^{0} 2^x\,dx = \lim_{T\to-\infty}\int\limits_{T}^{0} 2^x\,dx = \lim_{T\to-\infty}\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_T^0 = \lim_{T\to-\infty}\left(\frac{1}{\ln 2}-\frac{2^T}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}$$

Całka jest zbieżna do $\dfrac{1}{\ln 2}$.

Pozostaje przypadek $p = 1$. Wtedy

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|+C,\quad \int\limits_{a}^{T}\frac{1}{x}\,dx = [\ln|x|]_a^T = \ln|T|-\ln|a|,\quad \int\limits_{a}^{\infty}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{T\to\infty}(\ln|T|-\ln|a|) = \infty$$

Udowodniliśmy zatem ważny wynik

Twierdzenie

Gdy $a > 0$ to całka $\int\limits_{a}^{\infty}\dfrac{1}{x^p}\,dx$ jest skończona dla $p > 1$ oraz nieskończona dla $p \leqslant 1$.

Podobnie można łatwo pokazać poniższy wynik

Twierdzenie

Gdy $a \in \mathbb{R}$ i $A > 0$ to całka $\int\limits_{a}^{\infty} A^x\,dx$ jest skończona dla $0 < A < 1$ oraz nieskończona dla $A \geqslant 1$

Gdy $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ to

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty}F(T) - \lim_{S\to\infty}F(S)$$

przy czym przynajmniej jedna z granic z prawej strony nie istnieje lub zachodzi przypadek $\infty - \infty$ to $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ jest rozbieżna, a w pozostałych przypadkach całka ma wartość wynikającą z arytmetyki granic.

W przypadku kiedy całki nie da się obliczyć w sposób dokładny można to zrobić w sposób przybliżony, pod warunkiem , że wiemy, że jest zbieżna.
Kryteria zbieżności to twierdzenia opisujące warunki dostateczne zbieżności lub rozbieżności danej klasy całek. Najczęściej mają postać implikacji ale NIE równoważności.

Oznacza to zwykle własności postaci
warunek zachodzi $\Rightarrow$ całka jest zbieżna/rozbieżna
warunek nie zachodzi $\Rightarrow$ nic nie wiemy o zbieżności/rozbieżności całki

Popularne kryteria zbieżności całek z ∞

0. Warunek konieczny zbieżności całki

Jeżeli całka $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ jest zbieżna to $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ jest równa 0 lub nie istnieje.

Transpozycja twierdzenia daje następujący wynik:

Jeżeli $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ istnieje i jest różna od 0 to całka $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ nie jest zbieżna, przy czym

- gdy $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) > 0$ to $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \infty$,
- gdy $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) < 0$ to $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = -\infty$,

Uwaga. Warunek konieczny to tylko implikacja!
Jeżeli $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ jest równa 0 lub nie istnieje to jeszcze **NIC NIE WIEMY** o całce,

Na przykład całki $\int\limits_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx,\ a > 0$, mają $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^p} = 0$ dla wszystkich $p > 0$ ale niektóre z tych całek są zbieżne, a niektóre rozbieżne

Ważna klasa całek - całki z funkcji nieujemnych

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx,\ f \geqslant 0$$

Wtedy $\int\limits_a^T f(x)\,dx = F(T) - F(a)$ jest funkcją niemalejącą zmiennej T zatem całka $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \lim\limits_{T\to\infty} \int\limits_a^T f(x)\,dx$ zawsze istnieje. Może być to liczba lub ∞.
Zatem brak zbieżności takich całek oznacza rozbieżność do ∞.

Dla całek z funkcji nieujemnych mamy dwa kolejne kryteria zbieżności.

1. Kryterium porównawcze
2. Kryterium ilorazowe

Twierdzenie(kryterium porównawcze)

Dane są dwie całki $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ oraz $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$. Wtedy zachodzą następujące własności

1. (Przypadek zbieżności). Gdy $\forall x \geqslant x_0 \geqslant a \ \ 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ i $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ jest zbieżna to $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ też jest zbieżna. Ponadto $0 \leqslant \int\limits_a^\infty f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^\infty g(x)\,dx$

2. (Przypadek rozbieżności) Gdy $\forall x \geqslant x_0 \geqslant a \ \ 0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$ i $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ jest rozbieżna (więc równa ∞) to $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ też jest rozbieżna (do ∞).

3. **(Przypadek wątpliwy)** Gdy $\forall x \geqslant x_0 \geqslant a \ \ 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ ale $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ jest rozbieżna to **NIC NIE WIEMY** o zbieżności $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.

4. **(Przypadek wątpliwy)** Gdy $\forall x \geqslant x_0 \geqslant a \ \ 0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$ ale $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ jest zbieżna to **NIC NIE WIEMY** o zbieżności $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.

Uwagi:

- $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ jest całką z zadania, $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ tworzymy sami.
- Porównujemy najczęściej z całkami $\int\limits_a^\infty A^x\,dx$ lub $\int\limits_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$. Wtedy f często ma postać ułamków i możemy spróbować wziąć g jako :

  C - iloraz najwyższych potęg z licznika i mianownika f
- Trzeba uważać aby nierówność między f i g była prawdziwa i nie zapomnieć przypadku wątpliwego, bo wtedy **trzeba zaczynać od nowa**.
- Warto sprawdzić opisany wyżej iloraz najwyższych potęg i na tej podstawie przewidzieć czy chcemy udowodnić zbieżność czy rozbieżność. To pomaga skonstruować odpowiednią nierówność między f i g.

Popularny błąd - odpowiedź na podstawie przypadku wątpliwego

Na przykład dla całki $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$:

"Mamy $0 \leqslant \frac{1}{x+\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{x}$ i całka $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ jest rozbieżna zatem całka $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$ jest rozbieżna."

GAME OVER... To jest przypadek nr 3 (wątpliwy)

Przykład

$$\int_4^\infty \frac{2x-3}{x^3-1}\,dx$$

Przewidywanie zbieżności/rozbieżności
Najwyższe potęgi sugerują, że mając

$$\frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}, \quad \text{a} \quad \int_4^\infty \frac{1}{x^2}\,dx < \infty, \quad \text{bo} \quad 2 > 1$$

Dowodzimy zbieżność. Trzeba mieć

$$0 \leqslant \frac{2x-3}{x^3-1} \leqslant g(x) = C \cdot \frac{x}{x^3}$$

Jak w twierdzeniu o 3 ciągach

$$0 \leqslant \frac{2x}{x^3 - \frac{1}{2}x^3} = 4 \cdot \frac{x}{x^3} = 4 \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$\int_4^\infty \frac{4}{x^2}\,dx = 4\int_4^\infty \frac{1}{x^2}\,dx < \infty \quad \left(\frac{1}{2}x^3 > 1 \text{ dla } x \geqslant 4\right)$$

Twierdzenie(kryterium ilorazowe)

Dane są dwie całki $\int_a^\infty f(x)\,dx$ oraz $\int_a^\infty g(x)\,dx$. Ponadto

$$\forall x \geqslant x_0 \geqslant a \quad f(x), g(x) > 0$$

Jeżeli istnieje granica $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ i jest liczbą dodatnią to wtedy obie całki są zbieżne albo obie rozbieżne do ∞.

Uwagi

- Funkcję g tworzymy podobnie jak dla kryterium porównawczego
- Nie ma problemu z nierównościami :) ale za to trzeba umieć liczyć granice
- Granica nie może być ani 0 ani ∞: $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$
- Rozwiązanie **musi zawierać wniosek** "granica ilorazu jest liczbą dodatnią więc obie całki są zbieżne lub obie rozbieżne" - bez tego będzie niepełne.

- Kryterium zwykle jest wygodniejsze niż porównawcze ale są przykłady, które "idą" z porównawczego ale nie z ilorazowego, bo granica ilorazu nie istnieje

  Np. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{2+\sin x}{x}\,dx$

Przykłady

Poprzedni przykład raz jeszcze

$$\int\limits_{4}^{\infty} \frac{2x-3}{x^3-1}\,dx$$

$$f(x) = \frac{2x-3}{x^3-1}, \quad x \geqslant 4$$

$$g(x) = \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} > 0$$

$$\lim_{x\to\infty} = \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(2x-3)}{x^3-1} = 2$$

Obie całki zbieżne lub obie rozbieżne do ∞

Przykłady o postaci funkcji złożonej $\int\limits_{a}^{\infty} f(g(x))\,dx$ gdzie $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0^+$ oraz $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0^+$

Nową całką jest całka z funkcji wewnętrznej $\int\limits_{a}^{\infty} g(x)\,dx$

Liczymy granicę

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(g(x))}{g(x)} = \lim_{t=g(x)\to 0^+} \frac{f(t)}{t} \left[\frac{0}{0}\right]$$

przy użyciu granic podstawowych lub reguły de l'Hospitala.

Na przykład

$$\int\limits_{1}^{\infty} \left(2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1\right) dx$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$$

$$f(x) = 2^x - 1 > 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-1}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2^t-1}{t} \left[\frac{0}{0}\right] = \ln 2 \in (0,\infty)$$

Obie całki zbieżne lub obie rozbieżne

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \infty \quad \text{bo} \quad \frac{1}{2} \leqslant 1$$

Wartość główna całki niewłaściwej I rodzaju

Całka $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ jest rozbiezna, gdyż jako suma całek prowadzi do symbolu $\infty - \infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \int_{-\infty}^{0} x\,dx + \int_{0}^{\infty} x\,dx = -\infty + \infty$$

Intuicyjnie oczekwialibyśmy jednak, że jest ona równa 0 - funkcja podcałkowa jest nieparzysta czyli mamy "tyle funkcji na + co na -", a więc wszystko powinno się wzajemnie zrównoważyć. Aby taka całka miała sens trzeba nieco zmodyfikować jej definicję i wprowadzić pojęcie wartości głównej całki niewłaściwej (obustronnej).

Definicja. Wartość główna całki $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ to wielkość

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} f(x)\,dx$$

o ile powyższa granica istnieje.

Oznacza to, że przybliżamy całkę po $\mathbb{R}$ całkami po przedziale symetrycznym względem 0. P.V. jest skrótem od angielskiego "Principal Value".

Na przykład

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} x\,dx = \lim_{T\to\infty} 0 = 0$$

Zauważmy, że gdy $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ to

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty} (F(T) - F(-T))$$

Jeżeli teraz ma sens wyrażenie $\lim\limits_{T\to\infty} F(T) - \lim\limits_{T\to\infty} F(-T)$ to biorąc $S = -T \to -\infty$ dostajemy

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty} (F(T) - F(-T)) = \lim_{T\to\infty} F(T) - \lim_{T\to\infty} F(-T) =$$

$$= \lim_{T\to\infty} F(T) - \lim_{S\to-\infty} F(S) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

Udowodniliśmy zatem poniższe twierdzenie.

Jeżeli całka $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ istnieje w zwykłym sensie (jako suma odpowiednich całek jednostronnych jest liczbą lub jedną z nieskończoności) to również jej wartość główna istnieje i jest równa tej całce.
Natomiast może się zdarzyć, że wartość główna całki istnieje ale sama całka jest rozbieżna (był przykład).
W szczególności gdy funkcja jest na $\mathbb{R}$ ciągła i nieparzysta to wartość główna całki z tej funkcji jest zawsze 0 niezależnie od zbieżności samej całki.

2 Całki niewłaściwe II rodzaju

Ustalamy liczby $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. Niech f będzie funkcją całkowalną na każdym przedziale postaci $[a, T]$, gdzie $a < T < b$. Definiujemy całkę niewłaściwą drugiego rodzaju z f na przedziale $[a, b)$ jako

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{T\to b^+} \int\limits_{a}^{T} f(x)\,dx, \quad \text{gdy granica po prawej stronie istnieje.}$$

Analogicznie, gdy f jest całkowalna na każdym przedziale postaci $[T, b]$, gdzie $a < T < b$. to definiujemy całkę niewłaściwą pierwszego rodzaju z f na przedziale $(a, b]$ jako

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{T\to a^+} \int\limits_{T}^{b} f(x)\,dx, \quad \text{gdy granica po prawej stronie istnieje.}$$

Terminologia dotycząca takich całek jest taka, jak dla całek niewłaściwych 1 rodzaju. Są 3 przypadki :

1. Granica z prawej strony jest liczbą. Wtedy całka jest zbieżna (do tej granicy).
2. Granica z prawej strony jest równa ∞ lub $-\infty$. Wtedy całka jest rozbieżna do ∞ lub $-\infty$.
3. Granica z prawej strony nie istnieje. Wtedy mówimy, że całka jest rozbieżna.

Interpretacja geometryczna.

Podobnie jak dla zwykłej całki oznaczonej, jeżeli $f \geqslant 0$ na $(a, b]$ lub $[a, b)$ to całka niewłaściwa 2 rodzaju $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ daje pole obszaru ograniczonego osią X, wykresem f oraz prostymi $x = a$ oraz $x = b$.
Najczęściej definiujemy tego typu całkę w przypadku gdy f ma asymptotę pionową $x = a$ lub $x = b$. Wtedy ten obszar nie jest ograniczony z góry bądź z dołu.

Na przykład

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{T\to 0^+} \int\limits_T^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \lim_{T\to 0^+} [2\sqrt{x}]_T^1 = \lim_{T\to 0^+} (2 - 2\sqrt{T}) = 2$$

Całka jest zbieżna do 2.

<u>Wersja całki obustronnej</u>

Ustalamy liczby $a, b, c \in \mathbb{R},\ a < c < b$. Niech f będzie funkcją całkowalną na każdym przedziale postaci $[a, T]$, $T < c$, oraz $[T, b]$, $T > c$. Definiujemy całkę niewłaściwą 2 rodzaju z f na zbiorze $[a, c) \cup (c, b]$ jako sumę dwóch całek niewłaściwych. tzn.

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^c f(x)\, dx + \int\limits_c^b f(x)\, dx$$

przy czym gdy przynajmniej jedna z całek z prawej strony nie istnieje lub zachodzi przypadek $\infty - \infty$ to $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ jest rozbieżna, a w pozostałych przypadkach całka ma wartość wynikającą z arytmetyki granic.

Najczęściej takie całki pojawiają się, gdy f ma asymptotę w $x = c$.

Twierdzenie
Istnieją podstawienia, które każdą całkę niewłaściwą 2 rodzaju sprowadzają do przypadku całki niewłaściwej 1 rodzaju.
W szczególności

- dla całki $(a, b]$ możemy wziąć $t = \dfrac{1}{x-a}$ co daje $x = a + \dfrac{1}{t}$ oraz

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_C^\infty \frac{1}{t^2} f\left(a + \frac{1}{t}\right) dt \quad , \text{gdzie} \quad C = \frac{1}{b-a}$$

- dla całki na $[a, b)$ możemy wziąć $t = \dfrac{1}{b-x}$ co daje $t = b - \dfrac{1}{t}$ oraz

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_C^\infty \frac{1}{t^2} f\left(b - \frac{1}{t}\right) dt \quad , \text{gdzie} \quad C = \frac{1}{b-a}$$

Na przykład dla $p > 0$ biorąc $t = \dfrac{1}{x}$ mamy

$$\int\limits_0^b \frac{1}{x^p}\, dx = \int\limits_{\frac{1}{b}}^\infty \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^p} dt = \int\limits_{\frac{1}{b}}^\infty \frac{1}{t^{2-p}}\, dt$$

Podstawienie to oznacza też, że mamy analogiczne kryteria zbieżności dla całek 2 rodzaju - porównawcze i ilorazowe, przy czym dla kryterium ilorazowego liczymy granicę ilorazu funkcji w odpowiednim końcu zadanego przedziału.

Na koniec, wartość główna całki $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ na $[a,c) \cup (c,b]$ to wielkość

$$\text{P.V.} \int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{T\to 0^+} \left(\int\limits_a^{c-T} f(x)\,dx + \int\limits_{c+T}^b f(x)\,dx \right)$$

o ile powyższa granica istnieje.
Oznacza to, że odpowiednie końce przedziałów całkowania są w jednakowej odległości od c i zbiegają do c.

Zbieżność bezwzględna całek niewłaściwych

Definicja. Całka $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ jest <u>zbieżna bezwzględnie</u>, gdy zbieżna jest całka $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$.
Analogiczne definicje mamy dla pozostałych całek 1 rodzaju oraz dla całek 2 rodzaju.

Uwagi

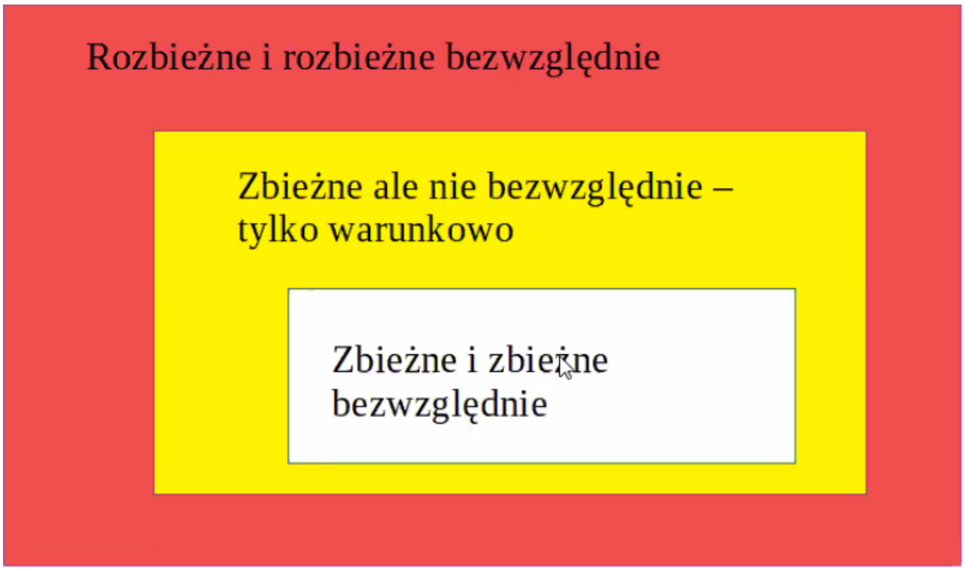
- Gdy f jest nieujemna to mamy $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ i definicja nie wnosi nic nowego. Sytuacja się zmienia, gdy są przedziały na którym f ma różne znaki.
- Nierówność $\left|\int\limits_a^T f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^T |f(x)|\,dx$ daje $\left|\int\limits_a^\infty f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^\infty |f(x)| dx$ ale gdy są przedziały na którym f ma różne znaki to równość nie zachodzi. Zatem, ogólnie, $\left|\int\limits_a^\infty f(x)\,dx\right|$ i $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ **to nie to samo**.

Twierdzenie
Jeżeli całka niewłaściwa jest bezwzględnie zbieżna to jest zbieżna (w zwykłym sensie).
Transpozycja tego twierdzenia daje warunek równoważny :
Jeżeli całka $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ nie jest zbieżna to również nie jest zbieżna bezwzględnie,
co oznacza $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx = \infty$.
Analogicznie dla pozostałych typów całek niewłaściwych.

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Są całki zbieżne ale nie bezwzględnie, np. $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Takie całki to tzw. całki <u>zbieżne warunkowo</u>.

Są więc 3 możliwe sytuacje - 3 rozłączne podzbiory całek niewłaściwych:



Przykład

Całka $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}}\,dx$ jest zbieżna bezwzględnie, bo biorąc $\int\limits_1^\infty \left|\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}}\right| dx$ i używając kryterium porównawczego mamy

$$0 \leqslant \left|\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}}\right| = \frac{|\sin x|}{x^{\frac{4}{3}}} \leqslant \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$$

a całka $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}\,dx$ jest zbieżna bo $\frac{4}{3} > 1$. Zatem $\int\limits_1^\infty \left|\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}}\right| dx$ jest zbieżna, a stąd $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}}\,dx$ też jest zbieżna.

3 Szeregi liczbowe

Dany jest ciąg liczbowy $a_1, a_2, ..., a_n, ...$
Tworzymy jego ciąg sum częściowych :

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Jeżeli istnieje granica $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ (skończona lub nieskończona) to oznaczamy ją symbolem $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

W ogólnym przypadku możemy wziąć ciąg, który zaczyna się od dowolnej liczby całkowitej $n_0 : a_{n_0}, a_{n_0+1}, ..., a_n, ...$ i jego sum częściowych

$$S_n = a_{n_0}, \quad S_{n_0+1} = a_{n_0} + a_{n_0+1}, \quad S_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + ... + a_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k, \ n \geqslant n_0$$

$S = \lim_{n\to\infty} S_n$ jest oznaczana przez $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$.

Definicja

Dla ustalonego $n_0 \in \mathbb{Z}$ obiekt $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ nazywamy szeregiem liczbowym, a wartość S (gdy istnieje) jego sumą, oznaczaną także przez $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$. Mamy wtedy

$$S_n = a_{n_0},\ \ S_{n_0+1} = a_{n_0}+a_{n_0+1}.\ \ S_n = a_{n_0}+a_{n_0+1}+...+a_n+... = \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n_0}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n$$

gdzie

- S_n to n - ta suma szeregu,
- a_n to n - ty wyraz szeregu.

Terminologia dotycząca sumy S jest taka, jak dla ciągów. Są 3 przypadki :

1. S jest liczbą. Wtedy dany szereg jest zbieżny (do S).
2. $S = \infty$ lub $S = -\infty$. Wtedy dany szereg jest rozbieżny (do ∞ lub $-\infty$).
3. $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ nie istnieje. Wtedy dany szereg jest rozbieżny.

Przykłady

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^n}+... = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} \text{ - szereg zbieżny do 1}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+... = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ - szereg rozbieżny do } \infty$$

$$1-1+1-1+1-1+... = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \text{ - szereg rozbieżny}$$

Uwaga. Każdy szereg zaczynający się od indeksu $n_0 \in \mathbb{Z}$ można przekształcić tak, by zaczynał się od indeksu 1. Wynika to z równości

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+n_0-1}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+... = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$$

Obliczanie sum szeregów

Jest to zadanie trudne, a najczęściej niemożliwe, gdyż trudno jest znaleźć bezpośredni wzór na sumy częściowe S_n.

Niektóre przypadki szczególne.

1. Ciąg geometryczny i szereg geometryczny.
   - $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, gdzie q jest ilorazem ciągu (czyli $a_{n+1} = a_n \cdot q,\ n \geqslant 1$).
     Wtedy
     $$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1 \; oraz \; S_n = na_1,\ q = 1$$
     To oznacza, że dla $a_1 \neq 0$,
   - szereg jest zbieżny dla $-1 < q < 1$ i jego suma jest $S = \dfrac{a_1}{1-q}$,
   - szereg jest rozbieżny do ∞ lub $-\infty$ dla $q \geqslant 1$, znak zależy od znaku a_1,
   - szereg jest rozbieżny (suma nie istnieje) dla $q \leqslant -1$

   Stąd np.
   $$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1 \text{ , bo tutaj } a_1 = q = \frac{1}{2}$$

2. Szeregi o wyrazie ogólnym postaci
   $a_n = f(n+1) - f(n)$ lub $a_n = f(n) - f(n+1)$, gdzie f jest pewną funkcją.
   W bardziej ogólnej postaci
   $a_n = f(n+k) - f(n)$ lub $a_n = f(n) - f(n+k)$, gdzie $k \in \mathbb{N}^+$ to tzw. krok.

   Takie szeregi to tzw. szeregi teleskopowe (telescoping series).
   Przykłady
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \text{ - tutaj } f(x) = \frac{1}{x}$$
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \text{ - tutaj } f(x) = \sqrt{x}$$
   $$\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{arc\,tg}(n) - \operatorname{arc\,tg}(n+2)) \text{ - tutaj } f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$$
   Dla takich szeregów łatwo wyznacza się wzór na S_n. Wyrazy wewnętrzne się upraszczają i zostaje:
   suma k pierwszych wartości, f suma k ostatnich wartości f (lub na odwrót)

Na przykład dla $\sum_{n=1}^{\infty}(f(n)-f(n+1)))$ mamy

$$S_n = f(1) - f(2) + f(2) - f(3) + f(3) - f(4) + ... + f(n) - f(n+1) = f(1) - f(n+1)$$

Jeżeli istnieje granica $G = \lim_{x\to\infty} f(x)$ to mamy

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(f(1) - f(n+1)) = f(1) - G$$

Przykład
Wyznaczyć sumę $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$
Wyraz ogólny nie ma postaci różnicy więc trzeba ją stworzyć.
Używając rozkładu na ułamki proste dostajemy

$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = ... = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

I to daje

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$$

Własności szeregów zbieżnych

Twierdzenie
Jeżeli szeregi $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ są zbieżne to zbieżne są szeregi $\sum_{n=n_0}^{\infty}(a_n + b_n)$ oraz $\sum_{n=n_0}^{\infty}(c \cdot a_n),\ c \in \mathbb{R}$.

Ponadto

- $\sum_{n=n_0}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$
- $\sum_{n=n_0}^{\infty}(c \cdot a_n) = c \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$

Prawdziwe są także analogiczne twierdzenia prowadzące do arytmetyki granic nieskończonych, gdy nie pojawiają się symbole nieoznaczone.
Na przykład gdy $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \infty$ oraz $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$ to

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n = \infty$$

Natomiast gdy $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n = \infty$ to $\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n - b_n)$ może być zarówno zbieżny jak i rozbieżny i nie ma sensu równość

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n - \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$$

Twierdzenie
Zmiana wartości n_0 nie wpływa na zbieżność/rozbieżność szeregu $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.
Może mieć wpływ na wartość jego sumy.

Stąd wynika np., że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=100}^{\infty} a_n$ są albo oba zbieżne albo oba rozbieżne do ∞ lub $-\infty$ albo oba rozbieżne.
To też oznacza, że na podstawie kilku pierwszych wyrazów ciągu/szeregu
NIC NIE MOŻNA POWIEDZIEĆ o jego zbieżności

Popularny błąd
"Liczymy wartości a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 . Wychodzi ciąg malejący i dodatni.
Zatem szereg jest zbieżny". **GAME OVER...**

Twierdzenie
Dla ustalonego $n_0 \in \mathbb{N}^+$ i $p \in \mathbb{R}$ szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ jest zbieżny dla $p > 1$ i rozbieżny do ∞ dla $p \leqslant 1$.

W przypadku kiedy sumy szeregu nie da się wyznaczyć w sposób dokładny można to zrobić w sposób przybliżony, pod warunkiem, że wiemy, że szereg jest zbiezny.

Kryteria zbieżności to twierdzenia opisujące warunki dostateczne zbieżności lub rozbieżności danej klasy szeregów. Najczęściej mają postać implikacji ale **NIE** równoważności.

Oznacza to zwykle własności postaci
warunek zachodzi $\Rightarrow$ szereg jest zbieżny/rozbieżny,
warunek nie zachodzi $\Rightarrow$ nic nie wiemy o zbieżności/rozbieżności szeregu

Popularne kryteria zbieżności szeregów

0. Warunek konieczny zbieżności szeregów

Twierdzenie
Jeżeli szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dowód
Dla $n \geqslant n_0 + 1$ mamy $S_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + ... + a_{n-1} + a_n$ oraz $S_{n-1} = a_{n_0} + a_{n_0+1} + ... + a_{n-1}$,
Stąd

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

Jeżeli szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny to $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S \in \mathbb{R}$. To daje

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Transpozycja tego twierdzenia daje warunek równoważny do zastosowania praktycznego :
Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ to szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ nie jest zbiezny przy czym

- gdy $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$ to $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \infty$
- gdy $\lim_{n\to\infty} a_n < 0$ to $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = -\infty$

Uwaga. To jest tylko implikacja!
Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ to jeszcze **NIC NIE WIEMY** o szeregu.
Na przykład szeregi $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ mają $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ dla wszystkich $p > 0$ ale niektóre z tych szeregów są zbieżne, a niektóre rozbieżne.

Popularny błąd
" $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ zatem szereg jest zbieżny". **GAME OVER...**

Szeregi o wyrazach nieujemnych

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n, \ a_n \geqslant 0$$

Wtedy $S_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + ... + a_{n-1} + a_n$ jest ciągiem niemalejącym zatem suma szeregu $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$ zawsze istnieje. Może być to liczba lub ∞.

Podobnie dla szeregów o wyrazach niedodatnich $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n,\ a_n \leqslant 0$, suma zawsze istnieje i rozbieżność oznacza rozbieżność do $-\infty$.

Przykład
Następujące szeregi nie są zbieżne

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + 2n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin n$$

Dla szeregów o wyrazach nieujemnych mamy dwa kolejne kryteria zbieżności.

1. Kryterium porównawcze
2. Kryterium ilorazowe

Twierdzenie (kryterium porównawcze)

Dane są dwa szeregi $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ oraz $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n$. Wtedy zachodzą nastepujące własności.

1. (Przypadek zbieżności) Gdy $\forall n \geqslant k \geqslant n_0 \quad 0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ i $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n$ jest zbieżny to $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ też jest zbieżny. Ponadto $0 \leqslant \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n \leqslant \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n$

2. (Przypadek rozbieżności) Gdy $\forall n \geqslant k \geqslant n_0 \quad 0 \leqslant b_n \leqslant a_n$ i $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny to $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ też jest rozbieżny. Ponadto $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n = \infty$

3. (Przypadek wątpliwy). Gdy $\forall n \geqslant k \geqslant n_0 \quad 0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ ale $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny to **NIC NIE WIEMY** o zbieżności $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$

4. (Przypadek wątpliwy). Gdy $\forall n \geqslant k \geqslant n_0 \quad 0 \leqslant b_n \leqslant a_n$ ale $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n$ jest zbieżny to **NIC NIE WIEMY** o zbieżności $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$

Uwagi

- $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ jest szeregiem z zadania, $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n$ tworzymy sami

- Porównujemy najczęściej z szeregiem geometrycznym $\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n$ lub z szeregami $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.
  Wtedy a_n często ma postać ułamków i możemy spróbować wziąć b_n jako
  C · iloraz najwyższych potęg z licznika i mianownika a_n
- Trzeba uważać aby nierówność między a_n i b_n była prawdziwa i nie zapomnieć o dolnym ograniczeniu (0). Ma być tak jak w twierdzeniu o trzech ciągach
- Kryterium nie zawsze jest wygodne w użyciu i trzeba uważać, by nie dostać przypadku wątpliwego, bo wtedy **trzeba zaczynać od nowa**
- Warto sprawdzić opisany wyżej iloraz najwyższych potęg i na tej podstawie przewidzieć czy chcemy udowodnić zbieżność czy rozbieżność. To pomaga skonstruować odpowiednią nierówność między a_n i b_n.

Popularny błąd : odpowiedź na podstawie przypadku wątpliwego
Na przykład dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$:
"Mamy $0 \leqslant \frac{1}{n+\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{n}$ i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ jest rozbieżny".
GAME OVER... To jest przypadek nr 3 (wątpliwy)

Przykład

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2n-3}{n^3-1}$$

Przewidywanie zbieżności/rozbieżności:
Iloraz najwyższych potęg licznika i mianownika to $\frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$, a szereg $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny, bo $2 > 1$. Zatem chcemy udowodnić zbieżność (przypadek 1).
Potrzebujemy więc $\sum_{n=4}^{\infty} b_n$ i nierówności $0 \leqslant \frac{2n-3}{n^3-1} \leqslant b_n$.
Chcemy zwiększyć wyrażenie $\frac{2n-3}{n^3-1}$ ale tak, by **zostały najwyższe potęgi**.
Można zwiększyć licznik oraz zmniejszyć mianownik.
Zwiększamy licznik poprzez wyrzucenie 3.
Zmniejszamy mianownik poprzez zastąpienie 1 czymś większym : wyrażeniem z najwyższą potęgą. Nie można jednak wziąć całego n^3 , bo będzie 0 w mianowniku.
Wygrywa wzięcie $C \cdot n^3$ np. $\frac{1}{2}n^3$, bo dla $n \geqslant 4$ mamy $\frac{1}{2}n^3 \geqslant 1$.
To wszystko daje dla $n \geqslant 4$

$$0 \leqslant \frac{2n-3}{n^3-1} \leqslant \frac{2n}{n^3-\frac{1}{2}n^3}$$

Czyli

$$b_n = \frac{2n}{n^3-\frac{1}{2}n^3} = 4 \cdot \frac{1}{n^2}$$

DZIURA W SKRYPCIE

Twierdzenie (kryterium ilorazowe)

Dane są dwa szeregi $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$. Ponadto $\forall n \geqslant n_0 \; a_n, b_n > 0$.

Jeżeli istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ i jest **liczbą dodatnią** to wtedy oba szeregi są zbieżne albo oba rozbieżne do ∞.

Uwagi

- Ciąg b_n tworzymy podobnie jak dla kryterium porównawczego.
- Nie ma problemu z nierównościami :) ale za to trzeba umieć liczyć granice.
- Granica nie może być ani 0 ani ∞: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, \infty)$.

  Nie wystarczy warunek $L > 0$ bo ∞ także jest > 0.
- Rozwiązanie **musi zawierać wniosek** "granica ilorazu jest liczbą dodatnią więc oba **szeregi** są zbieżne lub oba rozbieżne" - bez tego będzie niepełne
- Kryterium zwykle jest wygodniejsze niż porównawcze ale są przykłady, które pójdą z porównawczego ale nie z ilorazowego, bo granica ilorazu nie istnieje

  Np. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin n}{n}$.

Przykłady
Poprzedni przykład raz jeszcze

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2n-3}{n^3-1}$$

Bierzemy $b_n = \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{2n-3}{n^3-1}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{2n^3-3n^2}{n^3-1} = \frac{2-\frac{3}{n}}{1-\frac{1}{n^3}}$$

Stąd $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 2$ - liczba dodatnia.
Zatem oba szeregi są zbieżne lub oba są rozbieżne.
Dalej już analiza $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ i wniosek jak w kryterium porównawczym :
$\sum_{n=4}^{\infty} b_n = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny bo $2 > 1$. Zatem $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2n-3}{n^3-1}$ też jest zbieżny.

Przykłady o postaci funkcji złożonej $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(b_n)$, gdzie $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0^+$ oraz $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0^+$.

Nowym szeregiem jest szereg z funkcji wewnętrznej $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n$.

Liczymy granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n)}{b_n} = \lim_{x=b\to 0^+} \frac{f(x)}{x} \left[\frac{0}{0}\right]$$

przy użyciu granic podstawowych lub reguły de l'Hospitala.

Na przykład

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2} - 1\right)$$

Mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2} - 1\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

Więc bierzemy $b_n = \dfrac{1}{n} > 0$.

Liczymy granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{x=\frac{1}{n}\to 0^+} \frac{2^x - 1}{x} = \ln 2$$

Jest to liczba dodatnia więc oba szeregi są zbieżne lub oba są rozbieżne.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} = \infty$ więc $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2} - 1\right) = \infty$.

3. Kryterium Cauchy'ego.
4. Kryterium d'Alemberta

Działają dla szeregów o dowolnych wyrazach. Teza obu kryteriów jest taka sama ale liczymy granice innych wyrażeń.

Twierdzenie (kryterium Cauchy'ego)

Dany jest szereg $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ taki, że istnieje granica $q = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Wtedy

1. Gdy $0 \leqslant q < 1$ to szereg jest zbieżny.
2. Gdy $q > 1$ to szereg jest rozbieżny
3. **(Przypadek wątpliwy)**. Gdy q = 1 to **NIC NIE WIEMY** o zbieżności szeregu.

Uwagi

- Do wyznaczenia q przydają się następujące własności granic

  a) Gdy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ jest **liczbą dodatnią** to $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

  b) $\forall p \in \mathbb{R} \ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p} = 1$.

- q **nie może być ujemne**. q ujemne zwykle oznacza brak modułu na a_n.

Twierdzenie (kryterium d'Alemberta)

Dany jest szereg $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$, $a_n \neq 0$, taki, że istnieje granica $q = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Wtedy

1. Gdy $0 \leqslant q < 1$ to szereg jest zbieżny.
2. Gdy $q > 1$ to szereg jest rozbieżny
3. **(Przypadek wątpliwy)**. Gdy q = 1 to **NIC NIE WIEMY** o zbieżności szeregu.

- q **nie może być ujemne**. q ujemne zwykle oznacza brak modułu na a_n.
- W obu kryteriach szerergi $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ pokazują, że $q = 1$ nic nie daje.

Przykłady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{20^n}{n!}$$

Tutaj $a_n = \frac{20^n}{n!} > 0$ oraz $a_{n+1} = \frac{20^{n+1}}{(n+1)!}$. Zatem z kryterium d'Alemberta

$$q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{20^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{20^n}{n!}}$$

Kolejny przykład

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 \arcsin \frac{1-n}{2n+1}\right)^n$$

Tutaj chcemy użyć kryterium Cauchy'ego.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\left(2 \arcsin \frac{1-n}{2n+1}\right)^n\right|} = \sqrt[n]{\left|2 \arcsin \frac{1-n}{2n+1}\right|^n} = \left|2 \arcsin \frac{1-n}{2n+1}\right| = \left|2 \arcsin \frac{\frac{1}{n} - 1}{2 + \frac{1}{n}}\right|$$

Stąd

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \left|2 \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right| = \left|2\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right| = \frac{\pi}{3}$$

$q > 1$ więc szereg jest rozbieżny.

Twierdzenie (kryterium całkowe)

Dany jest szereg $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$. Jeżeli na $[x_0, \infty),\ x_0 \geqslant n_0$ istnieje funkcja f taka, że

- $f(n) = a_n,\ n \geqslant x_0,$
- f jest nieujemna na $[x_0, \infty)$,
- f jest nierosnąca na $[x_0, \infty)$,

to całka niewłaściwa $\int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx$ i szereg $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ są jednocześnie skończone lub jednocześnie rozbieżne do ∞.

Uwagi do kryterium

- Najczęściej $x_0 = n_0$.
- Kryterium jest ważne z punktu widzenia teorii, gdyż wiele innych własności szeregów z niego wynika. Na przykład, gdy $x_0 = n_0$ to

$$\int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leqslant a_{n_0} + \int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$$

  To pozwala oszacować sumę szeregu.
- Sens użycia kryterium: nie umiemy policzyć sumy szeregu ale umiemy **obliczyć** całkę $\int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{T\to\infty} \int\limits_{x_0}^{T} f(x)\,dx$. Stosujemy to kryterium tylko wtedy, gdy zamierzamy liczyć tę całkę.
- Z praktycznego punktu widzenia kryterium jest najczęściej **najmniej wygodnie** do zastosowania. Opłaca się je stosować głównie wtedy, gdy szereg zawiera wyrażenie $\ln n$.

Przykład

Dla ustalonego $n_0 \in \mathbb{N}^+$ i $p > 0$ dowodzimy znany już wynik dla szeregu $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ zbieżny dla $p > 1$ oraz rozbieżny do ∞ dla $p \leqslant 1$.

Tutaj bierzemy po prostu $f(x) = \frac{1}{x^p},\ x \in [n_0, \infty)$.

Dla $p > 0$ f jest malejąca i nieujemna oraz $f(n) = \frac{1}{n^p}$

Spełnione są wiec warunki użycia kryterium. Liczymy całkę $\int\limits_{n_0}^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$.

Było to już robione wcześniej i wiemy, że dla $p > 1$ jest liczbą, a dla $p \leqslant 1$ jest równa ∞. Stąd szereg jest zbieżny dla $p > 1$ oraz rozbieżny do ∞ dla $0 < p \leqslant 1$. Dla $p \leqslant 0$ szereg jest rozbieżny, bo nie spełnia warunku koniecznego zbieżności.

Uwaga do szeregów z wyrażeniem $\ln n$.
Dla dowolnego $p > 0$ funkcja $\frac{\ln x}{x^p}$, $x \geqslant 2$, ma zbiór wartości $\left(0, \frac{1}{p \cdot e}\right]$. Zatem

$$\frac{\ln x}{x^p} \leqslant \frac{1}{p \cdot e} \Leftrightarrow \ln x \leqslant \frac{1}{p \cdot e} x^p$$

a stąd

$$\ln n \leqslant \frac{1}{p \cdot e} n^p$$

Z oszacowaniem dolnym jest gorzej, bo nie ma pojedynczej funkcji elementarnej mniejszej od $\ln x$ i pozostaje oszacowanie przez stałą np.

$$\ln n \geqslant \frac{1}{2}, \quad n \geqslant 2$$

To daje oszacowanie dla dowolnego $p > 0$:

$$\frac{1}{2} \leqslant \ln n \leqslant C \cdot n^p, \quad n \geqslant 2$$

Tutaj $C = \frac{1}{p \cdot e}$, a dla $p \geqslant \frac{1}{e}$ wystarczy wziąć $C = 1$.
Często to oszacowanie pozwala uniknąć kryterium całkowego i zastąpienie go porównawczym, potrzeba tylko wziąć odpowiednio małe p.

Przykład
Dla szeregu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt[5]{n}}$ z kryterium porównawczego mamy

$$0 < \frac{\ln n}{n\sqrt[5]{n}} \leqslant \frac{Cn^p}{n\sqrt[5]{n}} = \frac{Cn^p}{n \cdot n^{0,2}} = \frac{C}{n^{1,2-p}}$$

Wystarczy teraz wziąć $p < 0,2$ czyli np. $p = 0,1$ i zbadać szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{C}{n^{1,2-0,1}} = C \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C}{n^{1,1}} \quad \text{— zbieżny, bo } 1,1 > 1$$

Zatem wyjściowy szereg jest zbieżny

Zbieżność bezwzględna szeregów

Definicja

Szereg $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie, gdy zbieżny jest szereg $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$.

Uwagi

- Gdy wszystkie wyrazy a_n są nieujemne to mamy $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ i definicja nie wnosi nic nowego. Sytuacja się zmienia gdy szereg ma zarówno wyrazy dodatnie jak i ujemne.
- Z nierówności $|S_n| = |a_{n_0} + a_{n_0+1} + ... + a_n| \leqslant |a_{n_0}| + |a_{n_0+1}| + ... + |a_n|$ wynika nierówność $\left|\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ ale równość nie musi zachodzić.

  Np. dla $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ mamy $\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\right| = \frac{2}{3}$ ale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| = 2$

  Zatem $\left|\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n\right|$ i $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ **to nie to samo**.

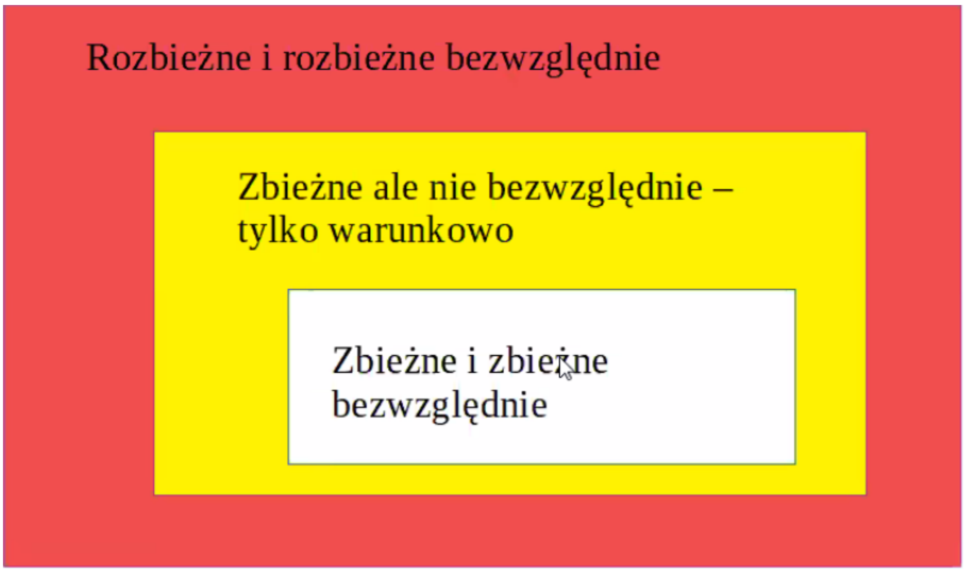
Twierdzenie

Jeżeli szereg jest bezwzględnie zbieżny to jest zbieżny (w zwykłym sensie).
Transpozycja tego twierdzenia daje warunek równoważny:

Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ nie jest zbieżny to również nie jest zbieżny bezwzględnie, co oznacza $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} |a_n| = \infty$.

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Są szeregi zbieżne ale nie bezwzględnie, np. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Takie szeregi to tzw. szeregi zbieżne warunkowo.



Przykład
Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^4}}$ jest zbieżny bezwzględnie, bo biorąc $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^4}}\right|$ i używając kryterium porównwawczego mamy

$$0 \leqslant \left|\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^4}}\right| = \frac{|\sin n|}{n^{\frac{4}{3}}} \leqslant \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$$

a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ jest zbieżny, bo $\frac{4}{3} > 1$.
Zatem $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^4}}\right|$, a stąd $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^4}}$ też jest zbieżny.

Szeregi naprzemienne

Są to szeregi, w których na zmianę dodajemy i odejmujemy wyrazy dodatnie:
$a_{n_0} - a_{n_0+1} + a_{n_0+2} - a_{n_0+3} + ...$ lub $-a_{n_0} + a_{n_0+1} - a_{n_0+2} + a_{n_0+3} + ...$ gdzie $a_n > 0$.

Postać ogólna :
$\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ lub $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$

Przykłady

$$\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4} - \sqrt{5} + ... = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Definicja
Szereg naprzemienny $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ lub $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$ nazywany jest szeregiem Leibnitza, jeżeli a_n jest ciągiem nierosnącym i zbieżnym do 0.
Na przykład $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ jest szeregiem Leibnitza, bo tutaj $a_n = \frac{1}{n}$ jest malejący i zbieżny do 0.

Twierdzenie (Leibnitz)
Każdy szereg Leibnitza jest zbieżny.

Uwagi

- Twierdzenie to daje tylko zbieżność warunkową, nie gwarantuje bezwględnej
- Gdy ciąg a_n nie dąży do 0 to szereg naprzemienny $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ jest rozbieżny, gdyż $(-1)^n a_n$ też nie dąży do 0. Wynika to z twierdzenia

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (-1)^n a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

- Wystarczy, by ciąg a_n był nierosnący dla $\forall n \geqslant k \geqslant n_0$.
- Gdy ciąg a_n zbiega do 0 ale nie jest nierosnący to **NIC NIE WIEMY** o zbieżności szeregu.
- Do badania czy a_n jest nierosnący można próbować rozszerzyć a_n do funkcji f tak by $f(n) = a_n$. Potem — pochodna itd. Gdy szereg naprzemienny jest zbieżny bezwzględnie to tw. Leibnitza nie jest potrzebne.

Popularny błąd : opisowanie "badanie" monotoniczności ciągu, bez obliczeń.
Na przykład dla ciągu $a_n = \dfrac{n}{1000n+1}$:
"Ciąg a_n jest malejący, bo mianownik szybciej rośnie niż licznik."
GAME OVER... Takie "rozwiązanie" jest jak **pisanie bajek** — nie musi mieć **nic wspólnego z prawdą**.
Dla powyższego ciągu mianownik rzeczywiście szybciej rośnie niż licznik (i to 1000 razy!), a mimo to ciąg ten jest rosnący.

Przykład

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \ln n}{n}$$

Tutaj $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$. Rozszerzamy go do funkcji $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x \geqslant 2$.

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0 \Leftrightarrow x > e \approx 2,72$$

Zatem f jest malejąca dla $x \in (e, \infty)$ czyli a_n jest malejący dla $n \geqslant 3$.
Ponadto

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] [H] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

Zatem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
Mamy więc szereg naprzemienny, który z tw. Leibnitza jest zbieżny.
Nie jest jednak zbieżny bezwzględnie bo dla $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n \cdot \ln n}{n}\right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ mamy z kryterium porównawczego $0 < \dfrac{0,5}{n} < \dfrac{\ln n}{n}$, a szereg $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{0,5}{n}$ jest rozbieżny.
Jest to więc szereg zbieżny warunkowo.

Podsumowanie : które kryterium zbieżności kiedy?

- P — porównawcze
- I — ilorazowe

- C - Cauchy'ego
- A - d'Alemberta
- $\int$ — całkowe
- ZB — zbieżność bezwględna
- L - twierdzenie Leibnitza

Wyrażenia występujące w a_n	Sugerowane kryterium dla $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$
Tylko potęgi n lub pierwiastki z potęg n	P I ale NIGDY C A
Te same najwyższe potęgi a_n w liczniku i mianowniku	P I ale NIGDY C A
Różne najwyższe potęgi a_n w liczniku i mianowniku	P I C A
funkcja złożona $f(b_n),\ b_n \to 0$	I P
n!	A P
n - ta sama potęga: $(...)^n$	C
Ciągi bez granicy, np. $\sin n$	P (+ inne, gdy trzeba)
$\ln n$	P $\int$
$(-1)^n$ i ogólne a_n, o różnych znakach	ZB (+ inne, gdy trzeba) L

Przykłady do samodzielnego policzenia :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+3}}{n^3+2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+5}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{n^2 \cdot 3^n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+7\cdot 3^n}{5^n-4^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\cos(n^2)}{\sqrt[3]{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2+2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2)}{2^n}$$

4 Szeregi potęgowe

Definicja

Szereg potęgowy zmiennej x to szereg postaci

$$c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + ... + c_n(x-x_0)^n + ...$$

gdzie $x_0 \in \mathbb{R}$ to tzw. środek/centrum a $c_1, c_2, ..., c_n, ...$ to współczynniki szeregu.

Dla $x \neq x_0$ mamy zapis sumy jako $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$. Dla $x = x_0$ przyjmujemy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = c_0$ i wtedy wyjściowa suma jest równa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ dla wszystkich x

Gdy $x_0 = 0$ to szereg nazywamy szeregiem Maclaurina.

Przykłady

$$1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Jest to szereg geometryczny o ilorazie x. Tutaj $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad c_n = 1$ oraz $x_0 = 0$.

$$(x-1) - \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{(x-1)^5}{5} - \frac{(x-1)^7}{7} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot (x-1)^{2n+1}$$

Tutaj $x_0 = 1$ oraz $c_{2n+1} = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}, \quad c_{2n} = 0$

Uwaga. Indeks współczynnika **musi się zgadzać** (być równy) z wykładnikiem potęgi o podstawie $x - x_0$.

Zbieżność szeregów potęgowych

Szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ jest zawsze zbieżny dla $x = x_0$ i wtedy jego suma to c_0.

Dla pozostałych $x \neq x_0$ szereg może być zbieżny lub nie. Są 3 przypadki

1. Szereg jest zbieżny tylko dla $x = x_0$ np. $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ – zbieżny tylko dla $x = 0$. Jest to szereg bezużyteczny w praktyce.
2. Szereg jest bezwzględnie zbieżny dla wszystkich x, np. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Jest to najlepsza sytuacja.
3. Szereg jest bezwzględnie zbieżny na przedziale otwartym postaci $(x_0 - R, x_0 + R)$ oraz – być może – zbieżny także na końcach tego przedziału. Dla pozostałych x nie jest zbieżny. Np. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ jest zbieżny dla $x \in [-1, 1)$.

Liczbę $R > 0$ nazywamy promieniem zbieżności szeregu potęgowego, a zbiór x dla których szereg jest zbieżny – przedziałem zbieżności szeregu.
R – połowa długości przedziału zbieżności.
Aby mieć promień zbieżności dla wszystkich szeregów definiujemy dodatkowo $R = 0$ dla szeregów z przypadku 1 oraz $R = \infty$ dla szeregów z przypadku 2.

Wyznaczanie promienia zbieżności i przedziału zbieżności

Szereg jest zbieżny dla $x = x_0$ i pytanie co dla pozostałych x.
Metoda jak najbardziej ogólna, działająca dla wszystkich typów szeregów potęgowych :
dla szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ przyjmujemy $a_n = c_n(x - x_0)^n, \quad x \neq x_0$. Zmienna x staje się parametrem.
Ponieważ a_n zawiera n – tą potęgę więc korzystamy z kryterium Cauchy'ego lub d'Alemberta.
Liczymy

$$q = q(x) = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad \text{lub} \quad q = q(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

W zdecydowanej większości przypadków granica ta istnieje i prowadzi do najczęstszych sytuacji

1. q nie zależy od x i jest > 1. Wtedy szereg jest zbieżny tylko dla $x = x_0$.
2. q nie zależy od x i jest < 1. Wtedy szereg jest zbieżny dla wszystkich x.
3. q zależy od x. Wtedy mamy zbieżność dla $q < 1$ i rozbieżność dla $q > 1$ oraz
   - $q < 1 \Leftrightarrow |x - x_0| < R \Leftrightarrow x \in (x_0 - R, x_0 + R)$
     "wstępny" przedział zbieżności, R – promień zbieżności
   - $q > 1 \Leftrightarrow |x - x_0| > R \Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, \infty)$
     rozbieżność poza głównym przedziałem
   - $q = 1 \Leftrightarrow |x - x_0| = R \Leftrightarrow x = x_0 \pm R$
     przypadek "wątpliwy" na końcach przedziału.
     Dla tych x trzeba użyć **innego kryterium**

Zastosowanie metody w praktyce

- Liczymy q i rozwiązujemy nierówność $q < 1$. Dostajemy wstępny (otwarty) przedział zbieżności.
- Zbieżność na końcach analizujemy osobno – wstawiamy każdy z końców i dostajemy szereg liczbowy, który analizujemy ale **NIGDY** z kryterium Cauchy'ego lub d'Alemberta bo **ZAWSZE wyjdzie** $q = 1$.

Popularny błąd :

" ... wstępny przedział zbieżności to $(-1, 1)$.
Badam zbieżność dla $x = 1$ z kryterium d'Alemberta"
STRATA CZASU I ENERGII. Będzie przypadek wątpliwy i $q = 1$ a jeżeli przypadkiem wyjdzie $q \neq 1$ to na pewno **gdzieś jest błąd**.
Przykłady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Tutaj $a_n = \frac{x^n}{n!}$ oraz $x_0 = 0$. Używamy kryterium d'Alemberta $a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ oraz dla $x \neq 0$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \left|\frac{x}{n+1}\right|$$

Stąd

$$q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 < 1$$

Szereg jest więc zbieżny dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$

Kolejny przykład

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Tutaj $a_n = \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$ oraz $x_0 = 1$. Korzystając z kryterium Cauchy'ego mamy dla $x \neq 1$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}\right|} = \sqrt[n]{\frac{|(x-1)^n|}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt[n]{|x-1|^n}}{\sqrt[n]{\sqrt{n}}} = \frac{|x-1|}{\sqrt[n]{n^{\frac{1}{2}}}}$$

Stąd

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x-1|$$

Teraz

$$q < 1 \Leftrightarrow |x-1| < 1 \Leftrightarrow x \in (0,2)$$

Zatem wstępny przedział zbieżności to $(0,2)$, a $R = 1$.
Badamy zbieżność na końcach tego przedziału.

$x = 2$ daje $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ – rozbieżny bo $\frac{1}{2} \leqslant 1$.

$x = 0$ daje $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(0-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ – zbieżny z twierdzeniem Leibnitza, bo jest naprzemienny a ciąg $\frac{1}{\sqrt{n}}$ jest malejący i dąży do 0.

Zatem przedział zbieżności tego szeregu to $[0,2)$.

Twierdzenie

Gdy szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ ma wszystkie współczynnki $c_n \neq 0$ i istnieje granica $q = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ lub $q = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ to promień zbieżności wynosi

- $R = \frac{1}{q}$ gdy q jest liczbą dodatnią,
- $R = 0$, gdy $q = \infty$,
- $R = \infty$, gdy $q = 0$.

Uwaga. Twierdzenie to bywa **źle stosowane.**
Nie można go bezpośrednio stosować do np. szeregów potęgowych gdzie występują tylko potęgi parzyste lub tylko potęgi nieparzyste, bo wtedy q **nie istnieje**.

Popularny błąd:

"Dla szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot x^{2n+1}$ mamy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n}\right|}$
Stąd $R = 2,\ x \in (-2,2)$"

Źle jest wyznaczony c_n. Tutaj $\frac{1}{2^n} = c_{2n+1}$ ale $c_{2n} = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ nie istnieje.

Ten szereg jest szeregiem geometrycznym o ilorazie $\frac{x^2}{2}$ i jest zbieżny dla $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ czyli $R = \sqrt{2}$.

Definicja

Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ jest zbieżny przynajmniej na $(x_0 - R, x_0 + R)$, $R > 0$ to jego sumę $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ nazywamy rzeczywistą funkcją analityczną, a szereg – szeregiem Taylora.

Własności szeregów potęgowych

1. Gdy

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n\ x\in(x_0-R,x_0+R)$$

to f ma pochodne dowolnego rzędu w x_0 oraz

$$c_0=f(x_0),\ c_1=\frac{f'(x_0)}{1!},\ c_2=\frac{f''(x_0)}{2!},...,c_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Stąd wynikają rozwinięcia popularnych funkcji w szereg Maclaurina ($x_0=0$).

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...,\ x\in\mathbb{R}$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...,\ x\in\mathbb{R}$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...,\ x\in\mathbb{R}$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...,\ x\in(-1,1]$$

$$(1+x)^p=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{p}{n}x^n=1+px+\frac{p(p-1)}{2!}x^2+\frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3+...,\ x\in(-1,1)$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+...,\ x\in[-1,1]$$

$$\operatorname{arc\,tg} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...,\ x\in[-1,1]$$

2. Jeżeli mamy dwa szeregi o tym samym środku i przedziałach zbieżności I_1 i I_2:
$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n,\ x\in I_1$ oraz $\sum_{n=0}^{\infty}d_n(x-x_0)^n,\ x\in I_2$
to

- dla dowolnego $c\in\mathbb{R}$ zachodzi $c\cdot\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c\cdot c_n(x-x_0)^n$
- dla $x\in I_1\cap I_2$ mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}d_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(c_n\pm d_n)(x-x_0)^n$$

Mamy

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \ x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \ x \in [-1,1]$$

Stąd

$$x\cos x = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} x \cdot \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n)!}$$

oraz dla $x \in \mathbb{R} \cap [-1,1] = [-1,1]$

$$x\cos x + \operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n)!} + \frac{(-1)^n}{2n+1} \right) x^{2n+1}$$

3. W miejsce x w szeregu Maclaurina można podstawić wyrażenie potęgowe $ax^k, \ k \in \mathbb{N}^+$. Daje to nowy szereg nowej funkcji z nowym przedziałem zbieżności. Ten nowy przedział można wyznaczyć na podstawie przedziału zbieżności wyjściowego szeregu

Przykłady

a) Szereg Maclaurina dla funkcji $\ln(1+3x)$.

Używamy rozwinięcia

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ..., \ x \in (-1,1]$$

Aby dostać $\ln(1+3x)$ w miejsce x trzeba wstawić $3x (x := 3x)$. To daje

$$\ln(1+3x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3x)^{n+1}}{n+1}, \ 3x \in (-1,1]$$

Po uproszczeniu

$$\ln(1+3x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^{n+1}}{n+1} x^{n+1}$$

$$3x \in (-1,1] \Leftrightarrow -1 < 3x \leqslant 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x \leqslant \frac{1}{3} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

b) Szereg Maclaurina dla funkcji $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Używamy rozwinięcia

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} = \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ..., \ x \in \mathbb{R}$$

Wstawiając $x := (-x)$ dostajemy

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}, \ x \in \mathbb{R}$$

To daje

$$\sin h = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n!}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n!} - \frac{(-1)^n}{2n!}\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-(-1)^n}{2n!}\right) x^n$$

Współczynnikiem tego szeregu jest więc

$$c_n = \frac{1-(-1)^n}{2n!} = \begin{cases} 0, & n = 2k, \quad k \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{n!} = \frac{1}{(2k+1)!}, & n = 2k+1, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Stąd

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ..., \ x \in \mathbb{R}$$

c) Szereg Maclaurina dla funkcji $\dfrac{x}{3+x^4}$

W przypadku funkcji wymiernej **zawsze** korzystamy z szeregu geometrycznego

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + ..., \ x \in (-1, 1)$$

Doprowadzamy wyrażenie do postaci **stała** $\cdot \dfrac{1}{1 - \textbf{"coś"}}$ i za x wstawiamy to "coś".

Zatem

$$\frac{x}{3+x^4} = \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^4}{3}} = \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x^4}{3}\right)}$$

Czyli "coś" $= -\dfrac{x^4}{3}$ i to daje

$$\frac{x}{3+x^4} = \frac{x}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^4}{3}\right)^n = \frac{x}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}x^{4n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x}{3}\cdot\frac{(-1)^n}{3^n}x^{4n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}x^{4n+1}$$

Przedział zbieżności wynika z warunku

$$-1 < -\frac{x^4}{3} < 1 \Leftrightarrow -3 < x^4 < 3 \Leftrightarrow -3 < x^4 \ \wedge \ x^4 < 3$$

Pierwsza z tych nierówności jest zawsze prawdziwa. Rozwiązanie drugiej daje $-\sqrt[4]{3} < x < \sqrt[4]{3}$. Czyli przedział zbieżności to $(-\sqrt[4]{3}, \sqrt[4]{3})$.

4. Gdy $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n,\ x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ to f ma pochodną dowolnego rzędu i zachodzi wzór

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_n\,(x-x_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(x-x_0)^{n-1}$$

Jest to rozszerzenie wzoru "pochodna sumy = suma pochodnych" na nieskończoną ilość składników

Przykład

Znaleźć szereg Maclaurina dla funkcji $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

Używamy rozwinięcia $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n,\ x \in (-1, 1)$.

Mamy

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

$$\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}((-1)^n n x^{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1}$$

Stąd

$$\frac{1}{(1+x)^2} = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n x^{n-1} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + ...,\ x \in (-1, 1)$$

5. Gdy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n,\ x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

to dla $a, b \in (x_0 - R, x_0 + R)$ mamy

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n\right)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b c_n(x-x_0)^n\,dx =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left[\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(b-x_0)^{n+1} - (a-x_0)^{n+1}}{n+1}$$

Jest to rozszerzenie wzoru "całka sumy = suma całek" na nieskończoną ilość składników

W szczególności biorąc $a = x_0,\ b = x,\ F(x) = \int f(x)\,dx$ oraz przyjmując

$$\int (x-x_0)^n\,dx = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} \quad \text{(stała całkowania = 0)}$$

Dostajemy ten wzór z całką nieoznaczoną

$$F(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int (x-x_0)^n\,dx, \quad \text{a więc}$$

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1},\ x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

Przykład

Wyprowadzić wzór na szereg Maclaurina dla $\operatorname{arc\,tg} x$ na przedziale $(-1,1)$.

Mamy $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x + C$. Wystarczy zatem rozwinąć w szereg funkcję $\dfrac{1}{1+x^2}$, a potem obliczyć całkę.

Korzystając z rozwinięcia $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,\ x \in (-1,1)$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

Przedział zbieżności: $x^2 \in (-1,1) \Leftrightarrow x \in (-1,1)$.

Zatem

$$\operatorname{arc\,tg} x = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} 0 + \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^{2n}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ x \in (-1,1)$$

6. Twierdzenie Abela o rozszerzaniu szeregu na końce przedziału zbieżności

Niech

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n,\ x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

Jeżeli

- szereg jest zbieżny również dla $x = x_0 + R$
- f jest ciągła dla $x = x_0 + R$

to wzór zachodzi także dla $x = x_0 + R$ czyli

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \ x \in (x_0 - R, x_0 + R]$$

Analogicznie dla $x = x_0 - R$

Przykład

Pokazaliśmy, że $\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \ x \in (-1, 1)$

Teraz

- dla $x = 1$ mamy $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ – zbieżny bo Leibnitza
- $\operatorname{arc\,tg} x$ jest ciągła w $x = 1$

Analogicznie dla $x = -1$.

Zatem rozwinięcie jest prawdziwe również dla $x \pm 1$ czyli

$$\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \ x \in [-1, 1]$$

Inne zastosowania szeregów potęgowych:

- przybliżanie funkcji – bierzemy rozwinięcie do ustalonej potęgi,
- obliczanie całek nieelementarnych w przybliżeniu,
- wyznaczanie sum niektórych szeregów oraz wartości pochodnych wysokiego rzędu.

Przykłady

Jaka jest siedemdziesiąta piąta pochodna $\operatorname{arc\,tg} x$ w $x = 0$?

Niech $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$.

Bierzemy rozwinięcie f ze środkiem **(koniecznie)** w 0:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \ x \in [-1, 1]$$

Ogólny wzór daje

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{czyli} \quad c_{75} = \frac{f^{(75)}(0)}{75!} \Leftrightarrow f^{(75)}(0) = 75! \cdot c_{75}$$

Pozostaje wyznaczyć c_{75}. Jest to współczynnik przy x_{75} co oznacza, że

$$c_{75} x^{75} = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Stąd

$$n = 37,\ c_{75} = \frac{(-1)^{37}}{2 \cdot 37 + 1} = -\frac{1}{75}$$

Oraz

$$f^{(75)}(0) = 75! \cdot \left(-\frac{1}{75}\right) = -74!$$

Kolejny przykład

Wyznaczyć sumę $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}}$

Jest to szereg zbieżny na podstawie np. kryterium d'Alemberta.

Zapisujemy sumę tak, by potęga była w iloczynie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Biorąc $x = \frac{1}{2}$ mamy szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n+1}$

Dla $x \in (-1, 1)$ jest on zbieżny. Wyznaczamy jego sumę przez różniczkowanie lub całkowanie.

- Pochodna $(n \cdot x^{n+1}) = n(n+1)x^n$ – pogarsza się wzór.
- Całka $\int n \cdot x^{n+1}\, dx = \frac{n}{n+2} x^{n+2}$. Jest lepiej ale problem w tym, że $n + 2$ nie uprościło n z licznika.

Stąd drugie pytanie:

Jaką wziąć potęgę nx^p aby po scałkowaniu uprościł się współczynnik n?

Potrzeba

$$x^{n-1}, \quad bo \quad \int nx^{n-1}\, dx = \frac{n}{n} x^n + C = x^n + C$$

Zatem bierzemy

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1},\ x \in (-1, 1)$$

Całkując obie strony mamy

$$F(x) = \int f(x)\, dx = F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ jest szeregiem geometrycznym o sumie $\frac{x}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$.

Stąd aby odzyskać f liczymy pochodną obu stron:

$$F(x) = f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Czyli

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

I na koniec

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \cdot x^2 = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{x^2}{(1-x)^2}$$

Dla $x = \dfrac{1}{2}$ to daje

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}}$$

5 Funkcje wielu zmiennych

Na początek kilka definicji dotyczących zbiorów w $\mathbb{R}^n$.

- Otoczenie punktu $P = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ to n – wymiarowa kula otwarta o środku w P i promieniu $r > 0$, tzn. zbiór

  $$K(P, r) = \{Q = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n : |PQ|^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2 < r^2\}$$

  Dla $n = 2$ jest to koło o środku w P bez brzegowego okręgu.

  Dla $n = 3$ jest to kula o środku w P bez brzegowej sfery.

- Sąsiedztwo punktu $x_0 \in \mathbb{R}^n$ to zbiór postaci $S = S(P, r) = K(P, r) \backslash P$
- Zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym, gdy każdy punkt z A posiada pewne otoczenie zawarte w A, tzn.

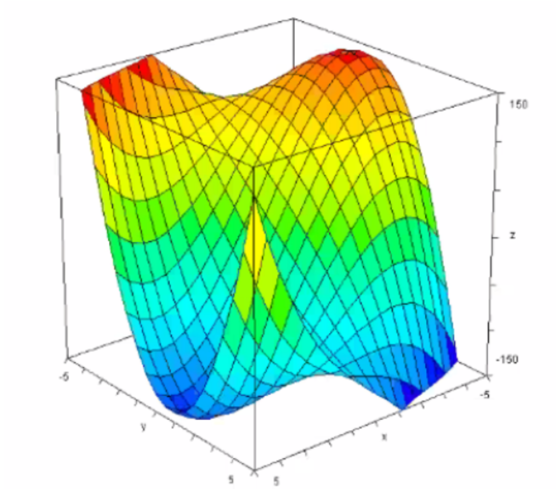
  $$\forall P \in A \ \exists K(P, r) \quad P \in K(P, r) \subset A$$

- Zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem domkniętym, gdy jego dopełnienie $A = \mathbb{R}^n \backslash A$ jest zbiorem otwartym.

Definicja
Funkcja wielu zmiennych ma postać

$$f : D \to \mathbb{R}$$

gdzie $D \subset \mathbb{R}^n$ jest dziedziną f.
Zatem dla $(x_1, x_2, ..., x_n) \in D \quad f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}$
Gdy mamy funkcje dwóch zmiennych to zwykle piszemy $z = f(x, y)$ a dla trzech zmiennych $t = f(x, y, z)$.
Będziemy analizować głównie funkcje dwóch zmiennych $z = f(x, y)$.
Dla takich funkcji można narysować wykres – gdy D jest otwarty to wykresem jest powierzchnia w 3 wymiarach dana wzorem $(x, y, f(x, y))$, gdzie $(x, y) \in D_f$.



Wykres funkcji $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y, \quad -5 \leqslant x \leqslant 5,\ -5 \leqslant y \leqslant 5$

Wykresy niektórych popularnych funkcji

- $z = Ax + By + C$ – płaszczyzna o wektorze normalnym $\vec{n} = [A, B, -1]$ i przechodząca przez punkt $(0, 0, C)$.

- $z = z_0 + \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}$ – górna półsfera o środku w (x_0, y_0, z_0) i promieniu $r > 0$. Np. $z = 3 + \sqrt{7 - x^2 - (y-1)^2}$: $S(0, 1, 3)$, $r = \sqrt{7}$

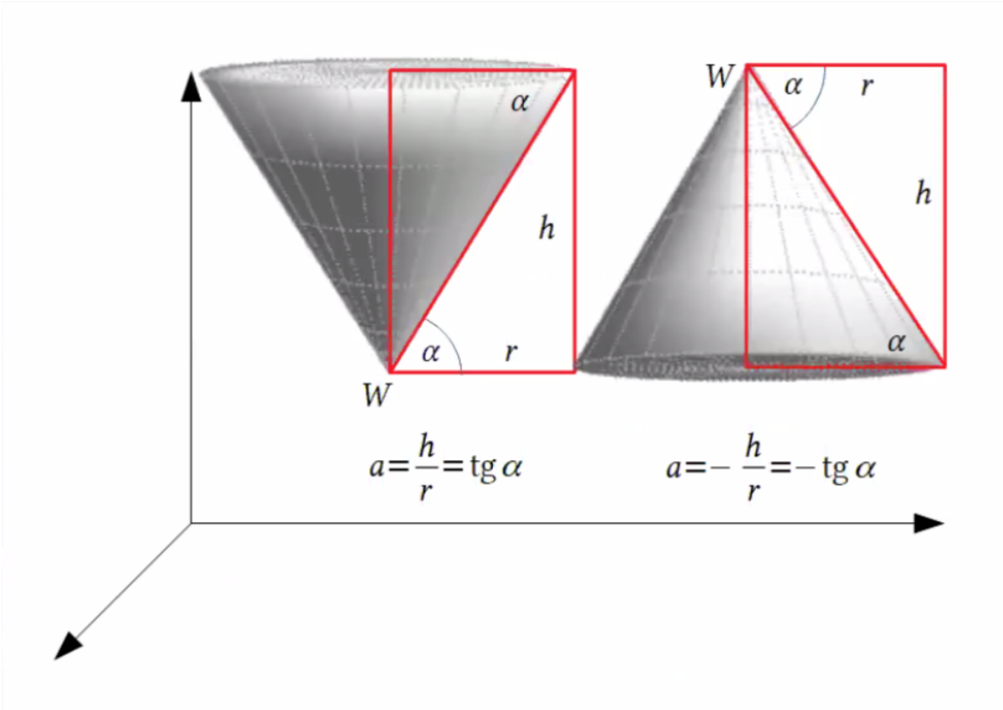
  $z = z_0 - \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}$ – analogiczna półsfera ale dolna.

  Obie pochodzą z równania całej sfery: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$.

- $z = z_0 + a\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}$, $a \neq 0$ – powierzchnia stożkowa o wierzchołku w $P = (x_0, y_0, z_0)$ i osi symetrii równoległej do osi Z.

  $a > 0$ – wierzchołek w dół, $a < 0$ – wierzchołek w górę.

  $|a| = \operatorname{tg} \alpha$, gdzie α jest kątem między prostą będącą tworzącą stożka



Powierzchnia stożkowa i półsfera są szczególnymi przypadkami tzw. powierzchni obrotowych w $\mathbb{R}^3$.

Powierzchnią obrotową w $\mathbb{R}^3$ wokół osi Z będziemy nazywali zbiór wszystkich możliwych punktów (x, y, z) taki, że podstawienie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ wyznacza zbiór z jako współrzędne wszystkich par (z, r) tworzących pewną krzywą na płaszczyźnie, przy czym zbiór wszystkich $r \geqslant 0$ jest zbiorem otwartym.
Zatem jeżeli ta powierzchnia jest dana przez pewne równanie postaci

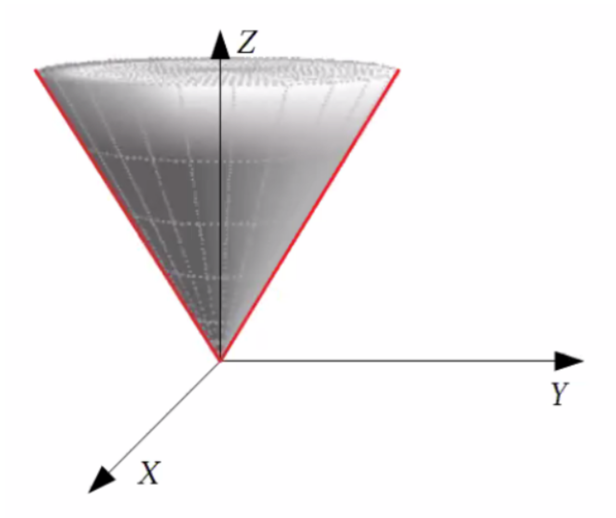
$$F(x, y, z) = 0$$

to podstawienie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ usuwa wszystkie x i y i prowadzi do równania zależnego tylko od z oraz r.
W szczególności gdy mamy $z = f(x, y)$ i podstawienie r powoduje, że f zależy tylko od r to wykresem f jest powierzchnia obrotowa wokół osi Z.

Geometryczne własności takiej powierzchni

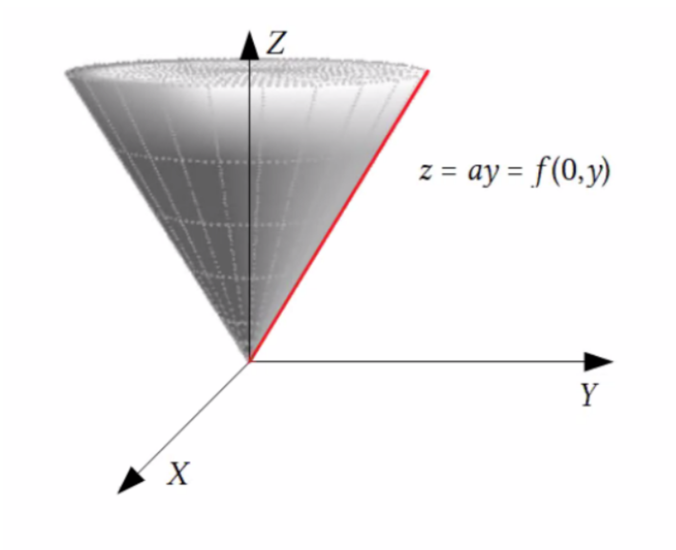
- Niepuste przecięcie powierzchni z dowolną płaszczyzną prostopadłą do osi Z jest punktem, okręgiem lub sumą tych zbiorów.
- Niepuste przecięcie powierzchni z dowolną płaszczyzną zawierającą oś Z jest krzywą o tym samym kształcie.

Na przykład dla powierzchni stożkowej $z = a\sqrt{x^2 + y^2}$, $a > 0$, przecięcie płaszczyzną prostopadłą do osi Z jest okręgiem lub wierzchołkiem, a przecięcie płaszczyzną zawierającą oś Z jest sumą dwóch półprostych wychodzących z wierzchołka.



Sposób rysowania takich powierzchni opiera się na spotstrzeżeniu, że dla $x = 0$ i $y \geqslant 0$ mamy $r = \sqrt{y^2} = y \geqslant 0$. Zatem rysujemy w płaszczyźnie YZ wykres odpowiedniej krzywej dla $y \geqslant 0$, a następnie obracamy go wokół osi Z. Tworzy to żądaną powierzchnię obrotową.

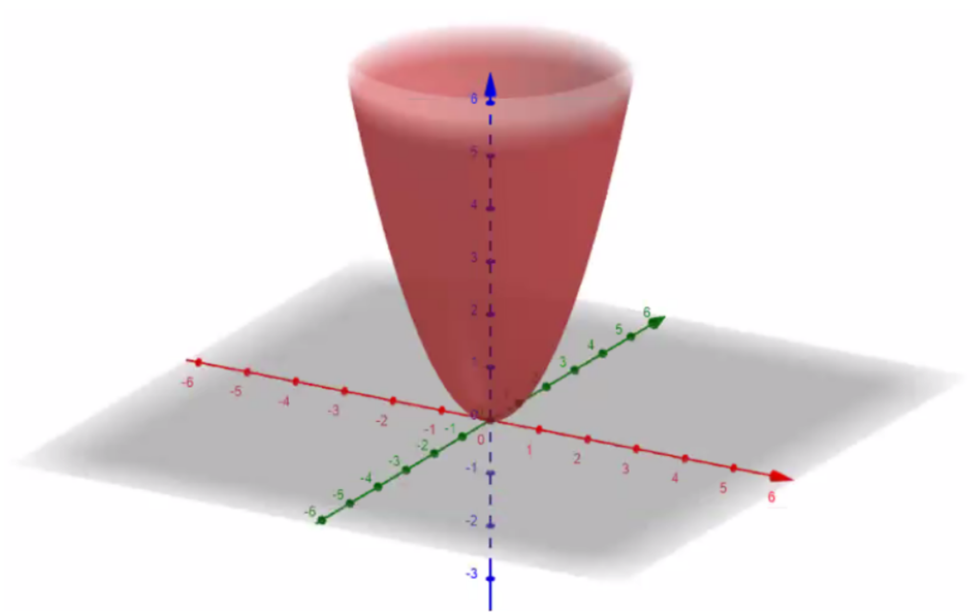
Poprzedni przykład raz jeszcze: $z = a\sqrt{x^2 + y^2},\ a > 0$.
Tutaj dla $r = \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 0$ mamy $z = ar$. Zatem biorąc $r = y \geqslant 0$ w płaszczyźnie YZ dostajemy wykres funkcji liniowej $z = f(0, y) = ay,\ y \geqslant 0$. Jest to półprosta



Rozszerzanie powyższego przypadku – powierzchnia obrotowa wokół osi równoległej do osi Z.
Jeżeli dla pewnych $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ podstawienie $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ usuwa wszystkie x i y i prowadzi do równania zależnego tylko od z oraz r to dana powierzchnia jest powierzchnią obrotową wokół prostej $L : x = x_0,\ y = y_0,\ z \in \mathbb{R}$.
Jest to zatem przypadek powierzchni opisanej poprzednio (czyli dla $x_0 = y_0 = 0$) ale przesunięty następnie o wektor $\vec{v} = [x_0, y_0, 0]$.

Przykład

Powierzchnia dana równaniem $z = (x+2)^2 + (y-1)^2$ Tutaj mamy $x_0 = -2$ oraz $y_0 = 1$ i podstawienie $r = \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2}$ daje równanie $z = r^2,\ r \geqslant 0$. Zatem biorąc $r = y \geqslant 0$ w płaszczyźnie YZ dostajemy wykres funkcji $z = f(0, y) = y^2,\ y \geqslant 0$. Jest to prawa gałąź paraboli.
Obracając ją następnie wokół osi Z dostajemy powierzchnię zwaną paraboloidą.



Na koniec przesuwamy powyższą powierzchnię o wektor $\vec{v} = [x_0, y_0, 0] = [-2, 1, 0]$ i to daje naszą powierzchnię.

Inny typ powierzchni – tzw. powierzchnie walcowe

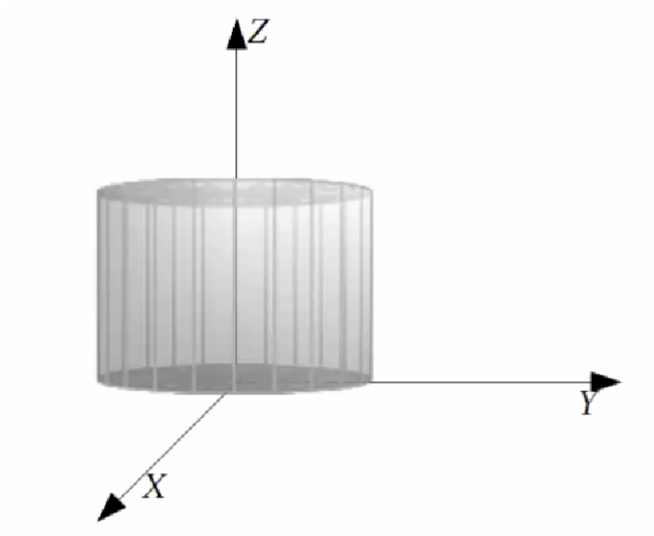
Powierzchnia jest nazywana powierzchnią walcową równoległą do osi Z jeżeli z faktu, że punkt (x_0, y_0, z_0) należy do powierzchni wynika, że dla dowolnego z każdy punkt postaci (x_0, y_0, z_0) też należy do tej powierzchni.
To oznacza, że jeżeli taka powierzchnia jest dana przez pewne wyrażenie to równanie to **nie zawiera** zmiennej z.
Geometrycznie – niepuste przecięcie powierzchni z dowolną płaszczyzną równoległą do osi Z daje krzywą o tym samym kształcie.
Stąd sposób tworzenia wykresów takich powierzchni – rysujemy w płaszczyźnie XY (czyli dla $z = 0$) krzywą zadaną wyjściową relacją, a potem wykres tej krzywej przesuwamy wzdłuż osi Z i to generuje daną powierzchnię.

Dwa pozostałe przypadki są analogiczne:

- gdy relacja definiująca powierzchnię nie zawiera x to rysujemy odpowiednią krzywą w płaszczyźnie YZ , a potem jej wykres przesuwamy wzdłuż osi X,
- gdy relacja definiująca powierzchnię nie zawiera y to rysujemy odpowiednią krzywą w płaszczyźnie XZ, a potem jej wykres przesuwamy wzdłuż osi Y.

Stąd prosta reguła – odpowiednią krzywą przesuwamy zawsze wzdłuż tej osi, która odpowiada zmiennej **nieobecnej** w równaniu.

Przykład
Powierzchnia o równaniu $x^2 + y^2 = 1$.
Nie występuje z, a więc jest to powierzchnia walcowa równoległa do osi Z.
Wyznaczamy krzywą daną powyższą relacją w płaszczyźnie XY – jest to okrąg o środku w układzie współrzędnych i promieniu równym 1.
Po przesunięciu tego okręgu wzdłuż osi Z zostaje wygenerowana powierzchnia – jest to powierzchnia boczna walca o nieskończonej długości. Stąd bierze się nazwa tego typu krzywych.



Definicja
Poziomica funkcji $z = f(x, y)$ na wysokości h to zbiór

$$D_h = \{(x, y) : f(x, y) = h\}$$

Jest to rzut na płaszczyznę XY zbioru – najczęściej krzywej – będącego przekrojem wykresu f płaszczyzną o równaniu $z = h$.

Interpretacja geograficzna
Jeśli płaszczyzna XY jest "mapą" i wyznacza "poziom morza", z – wysokością nad "poziomem morza", a wykres f jest "rzeźbą terenu" to poziomica jest krzywą na "mapie" która łączy punkty odpowiadające tej samej "wysokości" h.
Na podstawie zagęszczenia poziomic dla odpowiednio dobranych h możemy przewidzieć kształt wykresu f – czy jest stromy czy płaski.

Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji wielu zmiennych

Są to pochodne danej funkcji liczone względem jednej zmiennej, a pozostałe zmienne są stałe i przyjmują rolę parametrów.
Oznaczenie dla $f = f(x, y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ lub } f_x \text{ – pochodna po } x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} \text{ lub } f_y \text{ – pochodna po } y$$

Formalna definicja:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Dla funkcji n zmiennych $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$:

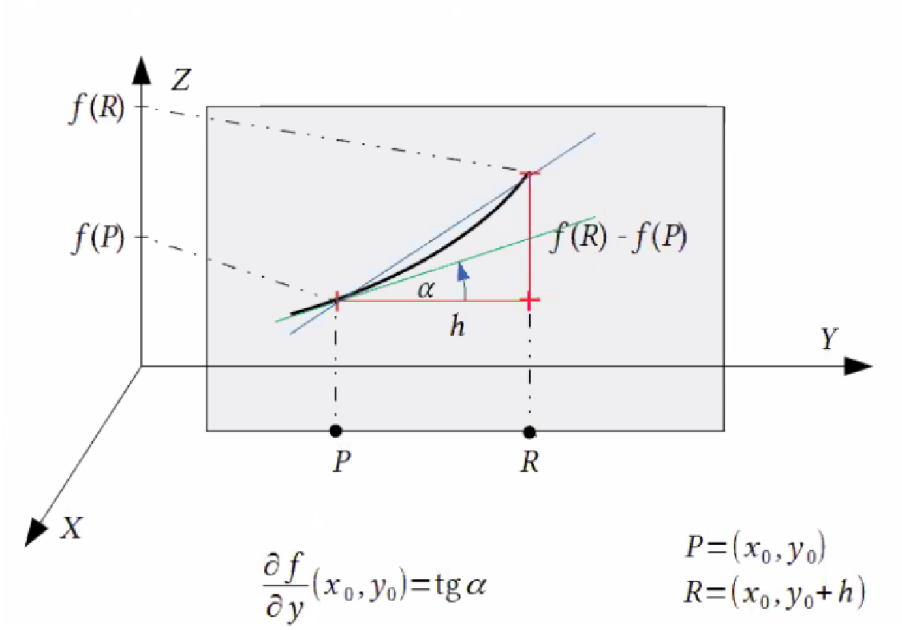
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)}{h}$$

Interpretacja geometryczna dla funkcji 2 zmiennych

Wykres każdej funkcji f dwóch zmiennych można przeciąć płaszczyzną równoległą do osi Z. Powstaje wtedy pewna krzywa, która jest częścią wspólną wykresu f oraz płaszczyzny. Jest to szczególny przypadek tzw. funkcji warunkowej o której wkrótce powiemy więcej.

Gdy taka krzywa jest regularna to możemy liczyć dla niej pochodną.
Gdy płaszczyzna przekroju przechodzi przez punkt $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ to pochodna tej krzywej jest równa

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, gdy płaszczyzna jest $\parallel XZ$,
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, gdy płaszczyzna jest $\parallel YZ$.



Sposób wyznaczania pochodnych cząstkowych w praktyce
Ponieważ tylko jedna zmienna jest w użyciu, a pozostałe stają się parametrami to korzystamy z reguł różniczkowania funkcji 1 zmiennej.
Pamiętać należy, że dla wybranej zmiennej dowolne wyrażenie z każdą inną zmienną **staje się stałą** i jej pochodna po wybranej zmiennej jest **równa 0**.
Czyli np.

$$\frac{\partial}{\partial y}(4x^2 + 3\sin x + 5) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}(ye^{z+2y}) = 0 \quad \text{itd.}$$

Przykład

$$f(x, y) = x\sin(xy^3)$$

Wtedy różniczkując po x mamy pochodną iloczynu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = ((x)_x \cdot \sin(xy^3))_y = x \cdot (\sin(xy^3))_y = x \cdot \cos(xy^3) \cdot 3y^2 x$$

Pochodne drugiego rzędu

Mając pochodne 1 rzędu definiujemy pochodne drugiego rzędu jako pochodne pierwszego rzędu z pochodnych pierwszego rzędu. W szczególności, dla $f = f(x, y)$ mamy 4 pochodne drugiego rzędu.

Pochodne jednorodne po danej zmiennej:

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ – dwukrotne różniczkowanie f po x,

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ – dwukrotne różniczkowanie f po y,
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ – różniczkowanie wpierw po x, potem po y,
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ – różniczkowanie wpierw po y, potem po x,

Inne oznaczenia to $f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}$, gdzie indeks dolny oznacza zmienne, po których kolejno różniczkujemy.
W przypadku pochodnych mieszanych f_{xy}, f_{yx}, trzeba ustalić kolejność różniczkowania.
Przyjmujemy naturalną kolejność, wtedy mamy $f_{xy} = (f_x)_y$ oraz $f_{yx} = (f_y)_x$,
co oznacza, że $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$ i $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$.

Dla funkcji n zmiennych $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = (f_{x_i})_{x_j} = f_{x_i x_j}$$

Przykład

$$f(x,y) = \frac{2^y}{x+1}$$

$$\text{Tutaj} \quad f_x = -\frac{2^y}{(x+1)^2}, \; f_y = \frac{2^y \ln 2}{x+1} \quad \text{oraz}$$

$$f_{xx} = (f_x)_x = \left(-\frac{2^y}{(x+1)^2}\right)_x = -2^y\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)_x = 2^y \cdot \frac{2}{(x+1)^3}$$

$$f_{yy} = (f_y)_y = \left(\frac{2^y \ln 2}{x+1}\right)_y = \frac{\ln 2}{x+1} \cdot (2^y)_y = \frac{2^y \cdot (\ln 2)^2}{x+1}$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \left(-\frac{2^y}{(x+1)^2}\right)_y = \left(\frac{-1}{(x+1)^2}\right) \cdot (2^y)_y = -\frac{2^y \ln 2}{(x+1)^2}$$

$$f_{yx} = (f_y)_x = \left(\frac{2^y \ln 2}{x+1}\right)_x = 2^y \ln 2\left(\frac{1}{x+1}\right)_x = 2^y \ln 2\left(\frac{-1}{(x+1)^2}\right) = -\frac{2^y \ln 2}{(x+1)^2}$$

Otrzymaliśmy $f_{xy} = f_{yx}$.
Jest to szczególny przypadek znanego twierdzenia.

Twierdzenie Schwarza o pochodnych mieszanych
Gdy pochodne mieszane drugiego rzędu są funkcjami ciągłymi w danym punkcie to są w tym punkcie równe.
W praktyce dla funkcji regularnych warunek ciągłości drugiego rzędu występuje zawsze na całych dziedzinach stąd prawie zawsze zobaczymy równość wzorów pochodnych mieszanych.

Zbieżność w $\mathbb{R}^k$ i granice funkcji wielu zmiennych

Rozpatrujemy ciąg wielu punktów $P_n = (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$.
Równoważnie możemy myśleć o wektorach $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ biorąc wektory pozycyjne punktów P_n czyli $\vec{v} = \vec{OP_n}$.
Niech teraz $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Mówimy, że $P_n \to P_0$, gdy odległość między P_n i P_0 zbiega 0.
Formalnie

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} |\overrightarrow{P_0P_n}| = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = 0$$

Podobnie, gdy

$$P_n = (x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{i} \quad P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$$

To definiujemy

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} |\overrightarrow{P_0P_n}| = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2 + (z_n - z_0)^2} = 0$$

Analogicznie rozszerzamy tę definicję na przypadek k – wymiarowy.

Poniższe twierdzenie pokazuje, że zbieżność $P_n \to P_0$ może być zdefiniowana w równoważny sposób.

Twierdzenie(zbieżność po współrzędnych)
Gdy

$$P_n = (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{i} \quad P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$$

to mamy równoważność

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \;\wedge\; \lim_{n\to\infty} y_n = y_0$$

Dowód
Implikacja $\Leftarrow$ wynika bezpośrednio z arytmetyki granic :
Jeżeli $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \;\wedge\; \lim_{n\to\infty} y_n = y_0$ to

$$\lim_{n\to\infty} |\overrightarrow{P_0P_n}| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = 0$$

Zatem

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0$$

Implikacja $\Rightarrow$ wynika z kolei z twierdzenia o 3 funkcjach.
Mamy bowiem

$$0 \leqslant |x_n - x_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2} \leqslant \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = |\overrightarrow{P_0P_n}|$$

Teraz, gdy $\lim_{n\to\infty} P_n = P_0$ to $\lim_{n\to\infty} |\overrightarrow{P_0P_n}| = 0$ i z twierdzenia o 3 ciągach dostajemy $\lim_{n\to\infty} |x_n - x_0| = 0$ a to daje $\lim_{n\to\infty} (x_n - x_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$

Analogicznie otrzymujemy $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$

Jak łatwo zauważyć, twierdzenie ma analogiczną postać w przypadku wyższych wymiarów.

Definicja granicy funkcji dwóch zmiennych w punkcie
$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \;\Leftrightarrow$ dla dowolnych ciągów punktów $(x_n, y_n) \neq (x_0, y_0)$ i takich, że $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x_0, y_0)$ zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = L$.

Definicja jest analogiczna w przypadku funkcji większej ilości zmiennych.
Równoważny zapis tej granicy, zgodny ze znaczeniem twierdzenia o zbieżności po współrzędnych to

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = L$$

Twierdzenie o granicach znane dla funkcji jednej zmiennej (arytmetyka granic, symbole nieoznaczone itd.) pozostają prawdziwe.
Główny problem – nie da się bezpośrednio zastosować niektórych popularnych technik, np. reguły de l'Hospitala.

Popularne techniki liczenia granic funkcji wielu zmiennych

1. Twierdzenie o 3 funkcjach. Jeżeli dla wszystkich punktów $P \in \mathbb{R}^k$ z pewnego sąsiedztwa punktu $P_0 \in \mathbb{R}^k$ zachodzi nierówność

$$d(P) \leqslant f(P) \leqslant g(P) \quad \text{i} \quad \lim_{P\to P_0} d(P) = \lim_{P\to P_0} g(P) = L \quad \text{to} \quad \lim_{P\to P_0} f(P) = L$$

2. Sprowadzenie granicy do przypadku jednej zmiennej.

   Jeżeli istnieje nowa zmienna $t = t(P)$ takie, że $f(P) = g(t)$ oraz $\lim\limits_{P\to P_0} t = t_0$ i $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = L$ to $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = L$

3. **COŚ O BRAKU GRANICY XD** $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ nie istnieje

Przypadek 3 jest szczególnie częsty, gdy pojawia się symbol nieoznaczony.
W przypadku funkcji dwóch zmiennych najczęściej wybiera się ciągi punktów P_n i Q_n z dwóch różnych krzywych.
P jest wtedy z wykresu jakiejś krzywej: $y = g(x)$ lub $x = g(y)$.
Q jest z wykresu innej krzywej: $y = h(x)$ lub $x = h(y)$.
Obie krzywe muszą spotykać się w punkcie granicznym P_0.
Wtedy granice $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ i $\lim\limits_{Q\to P_0} f(Q)$ stają się granicami funkcji jednej zmiennej.

Przykłady

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2 + 4y^2)\cos\left(x - 5y + \frac{2}{x}\right)$$

Wiemy, że $x^2 + 4y^2 \geqslant 0$ oraz $-1 \leqslant \cos\left(x - 5y\frac{2}{x}\right) \leqslant 1$, a stąd

$$-(x^2 + 4y^2) \leqslant (x^2 + 4y^2)\cos\left(x - 5y + \frac{2}{x}\right) \leqslant x^2 + 4y^2$$

Ponieważ

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2 + 4y^2) = 0 = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(-(x^2 + 4y^2))$$

z twiedzenia o 3 ciągach otrzymujemy

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2 + 4y^2)\cos\left(x - 5y + \frac{2}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1\\ z\to 0}} \frac{2x - y + z - 1 - \ln(2x - y + z)}{(2x - y + z - 1)^2}$$

Tutaj możemy podstawić $t = 2x - y + z$. Wtedy $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1\\ z\to 0}} t = 1$

i mamy

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1\\ z\to 0}} \frac{2x - y + z - 1 - \ln(2x - y + z)}{(2x - y + z - 1)^2} = \lim_{t\to 1} \frac{t - 1 - \ln t}{(t-1)^2} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{[H]}{=} \frac{1}{2}$$

Kolejny przykład

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{tg}(x^2 - y^2)}{x - y}$$

Tutaj znów jest granica typu $\frac{0}{0}$. Po podstawieniu $t = x^2 - y^2$ mamy granicę podstawową $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\operatorname{tg} t}{t} = 1$.

Stąd wniosek, że trzeba nasze wyrażenie rozbić na iloczyn: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{tg}(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2} \cdot \frac{x^2 - y^2}{x - y}$

Mamy wtedy

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{tg}(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{tg} t}{t} = 1$$

Oraz

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x - y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x - y)(x + y)}{x - y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x + y) = 0$$

Stąd

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{tg}(x^2 - y^2)}{x - y} = 1 \cdot 0 = 0$$

Kolejny przykład

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{y}$$

Tutaj wykażemy brak granicy
Rozpatrujemy 2 krzywe przechodzące przez $(0,0)$. Na przykład $y = x$ oraz $y = 2x$.
Biorąc $y = x$ mamy

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{y} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

Natomiast dla $y = 2x$ mamy

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{y} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \neq 1$$

Zatem granica nie istnieje

Ciągłość funkcji wielu zmiennych

Definicja jest analogiczna jak dla funkcji jednej zmiennej – granica funkcji jest równa wartości.
Formalnie,
f jest ciągła w punkcie $P_0 \in D_f$, gdy $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$,
f jest ciągła na zbiorze $A \subset D_f$ jeżeli jest ciągła we wszystkich punktach z A.

Twierdzenia dotyczące arytmetyki funkcji ciągłych są analogiczne jak w przypadku jednej zmiennej.

Przykład
Wyznaczyć zbiór punktów ciągłości funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x + y + 1, \; x \geqslant 0 \\ \quad 2y + x, \; x < 0 \end{cases}$$

Tutaj rozpatrujemy dwa obszary – dane warunkami $x \geqslant 0$ oraz $x < 0$.
Brzegiem obu obszarów jest prosta $x = 0$ (oś Y).
W punktach (x,y), $x > 0$, funkcja jest ciągła, bo jest równa elementarnej na zbiorze otwartym.
Podobnie dla $x < 0$..
Pozostaje zbadać ciągłość w punktach brzegowych czyli w $P_0 = (0, y_0)$.
Ze względu na warunek definiujący zbiór, dla takich punktów zbieżności trzeba rozpatrzeć 2 możliwe typy punktów

$$P = (x,y) \to P_0 \quad \text{dla} \quad x \geqslant 0 \text{ oraz } x < 0$$

Dla $x \geqslant 0$ mamy

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0}} (2x + y - 1) = y_0 - 1$$

Dla $x < 0$ mamy

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to y_0}} (2y + x) = 2y_0$$

Ponadto $f(0, y_0) = y_0 - 1$
Stąd ciągłość w $P_0 = (0, y_0)$ ma miejsce, gdy $y_0 - 1 = 2y_0$, a więc dla $y_0 = -1$.
Wtedy dla dowolnego ciągu punktów $P = (x, y) \to (0, -1)$ mamy

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to -1}} f(x, y) = f(0, -1) = -2$$

Zatem zbiorem punktów ciągłości f jest zbiór

$$D = \{(x, y) : x \neq 0\} \cup \{(0, -1)\}$$

Interpretacja geometryczna wykresu – składa się z dwóch osobnych ukośnych półpłaszczyzn, które spotykają się w punkcie $(0, -1)$.

Ekstrema funkcji dwóch zmiennych

Definicja
f ma w $P = (x_0, y_0) \in D_f$ minimum lokalne gdy $f(x_0, y_0)$ jest najmniejszą wartością f na pewnym kole o środku w P.
f ma w $P = (x_0, y_0) \in D_f$ minimum lokalne gdy $f(x_0, y_0)$ jest największą wartością f na pewnym kole o środku w P.

Gdy ta wartość jest najmniejsza/największa na całej dziedzinie f to mówimy o ekstremum (minimum, maksimum) globalnym.

Na przykład funkcja $f(x, y) = x^4 + y^6$ ma w $(0, 0)$ minimum i jest ono globalne, bo

$$f(0, 0) = 0$$

a dla dowolnego $(x, y) \neq (0, 0)$ mamy $f(x, y) = x^4 + y^6 > 0$.

Wyznaczenie ekstremów z definicji rzadko kiedy się udaje, najczęściej szukamy ich z użyciem pochodnych cząstkowych.
Daje się to robić dla funkcji regularnych: na badanym zbiorze **pochodne pierwszego i drugiego rzędu istnieją i są ciągłe**.

Warunek konieczny istnienia ekstremum: tzw. punkt stacjonarny czyli
$P = (x_0, y_0)$ taki, że

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

To jeszcze nie wystarcza! To tylko mówi, że płaszczyzna styczna (gdy istnieje) jest równoległa do płaszczyzny XY.

Warunek dostateczny. Liczymy w P specjalny wyznacznik – tzw. hesjan.

$$W = H(P) = H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0), & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

Interpretacja: H to "wykrywacz" ekstremum: mówi czy ekstremum jest czy nie.

Twierdzenie
Jeżeli w pewnym otoczeniu $P = (x_0, y_0)$ pochodne pierwszego i drugiego rzędu funkcji f istnieją i są ciągłe oraz $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ to zachodzą poniższe własności.

- Gdy $H(x_0, y_0) > 0$ to **jest ekstremum**. Wtedy gdy $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ to jest minimum, a gdy $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ to jest maksimum.
- Gdy $H(x_0, y_0) < 0$ to **nie ma ekstremum**.
- Gdy $H(x_0, y_0) = 0$ to **nic nie wiemy** – metoda nie działa.

Uwaga
Można udowodnić, że gdy $H(x_0, y_0) > 0$ to $f_{xx}(x_0, y_0)$ oraz $f_{yy}(x_0, y_0)$ są jednocześnie obie dodatnie lub obie ujemne.
Zatem przy sprawdzaniu typu ekstremum (minimum/maksimum) możemy patrzeć na dowolną z tych pochodnych.

Przykłady

1. $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$
   Mamy $D_f = \mathbb{R}^2$ oraz
   $$f_x = 4x, \quad f_y = 6y$$
   Stąd
   $$f_x = f_y = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y = 0 \quad \text{czyli punkt standardowy to} \quad P = (0, 0)$$
   Teraz
   $$f_{xx} = 4,\; f_{yy} = 6,\; f_{xy} = f_{yx} = 0$$
   To daje
   $$W = H(0, 0) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 24 > 0 \quad \text{– jest ekstremum}$$
   $f_{xx}(0, 0) = 4 > 0$ więc w $(0, 0)$ jest minimum $f(0, 0) = 0$.

2. $f(x, y) = (x^2 - y^2)e^x$
   Mamy $D_f = \mathbb{R}^2$ oraz
   $$f_x = 2xe^x + (x^2 - y^2)e^x = e^x(x^2 - y^2 + 2x)$$
   $$f_y = -2ye^x$$
   Stąd
   $$f_x = f_y = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} [flalign]x^2 - y^2 + 2x = 0 \\ \hfill y = 0 \end{cases}$$