

# Wykład - Analiza matematyczna II

(nieoficjalny) Skrypt wykładu Krzysztofa Michalika

8 kwietnia 2023

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Całki niewłaściwe I rodzaju</b>	<b>1</b>
	Twierdzenie(kryterium porównawcze) . . . . .	4
	Twierdzenie(kryterium ilorazowe) . . . . .	6
	Wartość główna całki niewłaściwej I rodzaju . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Całki niewłaściwe II rodzaju</b>	<b>8</b>
	Zbieżność bezwzględna całek niewłaściwych . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Szeregi liczbowe</b>	<b>12</b>
	Obliczanie sum szeregów . . . . .	13
	Własności szeregów zbieżnych . . . . .	15
	Popularne kryteria zbieżności szeregów . . . . .	16
	Twierdzenie (kryterium porównawcze) . . . . .	17
	Twierdzenie (kryterium ilorazowe) . . . . .	19
	Twierdzenie (kryterium Cauchy'ego) . . . . .	21
	Twierdzenie (kryterium d'Alemberta) . . . . .	21
	Twierdzenie (kryterium całkowe) . . . . .	22
	Zbieżność bezwzględna szeregów . . . . .	24
	Szeregi naprzemienne . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Szeregi potęgowe</b>	<b>28</b>
	Zbieżność szeregów potęgowych . . . . .	29
	Wyznaczanie promienia zbieżności i przedziału zbieżności . . . . .	29
	Własności szeregów potęgowych . . . . .	32

## 1 Całki niewłaściwe I rodzaju

Ustalamy liczbę  $a \in \mathbb{R}$ . Niech  $f$  będzie funkcją całkowalną na każdym przedziale w postaci  $[a, T]$  gdzie  $T > a$ . Definiujemy całkę niewłaściwą pierwszego rodzaju z  $f$  na półprostej  $[a, \infty]$  jako

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_a^T f(x) dx, \text{ gdy granica po prawej stronie istnieje}$$

Analogicznie, gdy  $f$  jest całkowalna na każdym przedziale postaci  $[T, b]$ , gdzie  $T < b$ . Definiujemy całkę niewłaściwą pierwszego rodzaju z  $f$  na półprostej  $[-\infty, b]$  jako

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{T \rightarrow -\infty} \int_T^b f(x) dx, \text{ gdy granica po prawej stronie istnieje}$$

Terminologia dotycząca takich całek jest taka, jak dla ciągów. Są 3 przypadki :

1. Granica z prawej strony jest liczbą. Wtedy mówimy, że całka jest zbieżna.
2. Granica z prawej strony jest równa  $\infty$  lub  $-\infty$ . Wtedy mówimy, że całka jest rozbieżna (odpowiednio do  $\infty$  lub  $-\infty$ ).
3. Granica z prawej strony nie istnieje. Wtedy mówimy, że całka jest rozbieżna.

Analogicznie dla  $\int_{\infty}^b f(x) dx$

Przykłady :

$$\int_0^{\infty} \sin x dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \sin x dx = \lim_{T \rightarrow \infty} [-\cos x]_0^T = \lim_{T \rightarrow \infty} (-\cos T - (-\cos 0)) = \lim_{T \rightarrow \infty} (1 - \cos T)$$

Granica ta nie istnieje więc całka jest rozbieżna.

$$\int_{-\infty}^0 2^x dx = \lim_{T \rightarrow -\infty} \int_T^0 2^x dx = \lim_{T \rightarrow -\infty} \left[ \frac{2^x}{\ln 2} \right]_T^0 = \lim_{T \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{\ln 2} - \frac{2^T}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2}$$

Całka jest zbieżna do  $\frac{1}{\ln 2}$ .

Pozostaje przypadek  $p = 1$ . Wtedy

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \quad \int_a^T \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_a^T = \ln|T| - \ln|a|, \quad \int_a^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} (\ln|T| - \ln|a|) = \infty$$

Udowodniliśmy zatem ważny wynik

### Twierdzenie

Gdy  $a > 0$  to całka  $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$  jest skończona dla  $p > 1$  oraz nieskończona dla  $p \leq 1$ .

Podobnie można łatwo pokazać poniższy wynik

### Twierdzenie

Gdy  $a \in \mathbb{R}$  i  $A > 0$  to całka  $\int_a^\infty A^x dx$  jest skończona dla  $0 < A < 1$  oraz nieskończona dla  $A \geq 1$

Gdy  $\int f(x) dx = F(x) + C$  to

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} F(T) - \lim_{S \rightarrow \infty} F(S)$$

przy czym przynajmniej jedna z granic z prawej strony nie istnieje lub zachodzi przypadek  $\infty - \infty$  to  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  jest rozbieżna, a w pozostałych przypadkach całka ma wartość wynikającą z arytmetyki granic.

W przypadku kiedy całki nie da się obliczyć w sposób dokładny można to zrobić w sposób przybliżony, pod warunkiem, że wiemy, że jest zbieżna.

Kryteria zbieżności to twierdzenia opisujące warunki dostateczne zbieżności lub rozbieżności danej klasy całek. Najczęściej mają postać implikacji ale NIE równoważności.

Oznacza to zwykle własności postaci

warunek zachodzi  $\Rightarrow$  całka jest zbieżna/rozbieżna

warunek nie zachodzi  $\Rightarrow$  nic nie wiemy o zbieżności/rozbieżności całki

## Popularne kryteria zbieżności całek z $\infty$

0. Warunek konieczny zbieżności całki

Jeżeli całka  $\int_a^\infty f(x) dx$  jest zbieżna to  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  jest równa 0 lub nie istnieje.

Transpozycja twierdzenia daje następujący wynik:

Jeżeli  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  istnieje i jest różna od 0 to całka  $\int_a^\infty f(x) dx$  nie jest zbieżna, przy czym

- gdy  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) > 0$  to  $\int_a^\infty f(x) dx = \infty$ ,
- gdy  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) < 0$  to  $\int_a^\infty f(x) dx = -\infty$ ,

**Uwaga. Warunek konieczny to tylko implikacja!**

Jeżeli  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  jest równa 0 lub nie istnieje to jeszcze **NIC NIE WIEMY** o całce,

Na przykład całki  $\int_a^\infty \frac{1}{x^p} dx$ ,  $a > 0$ , mają  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^p} = 0$  dla wszystkich  $p > 0$  ale niektóre z tych całek są zbieżne, a niektóre rozbieżne

## Ważna klasa całek - całki z funkcji nieujemnych

$$\int_a^{\infty} f(x) dx, \quad f \geq 0$$

Wtedy  $\int_a^T f(x) dx = F(T) - F(a)$  jest funkcją niemalejącą zmiennej  $T$  zatem całka  $\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_a^T f(x) dx$  zawsze istnieje. Może być to liczba lub  $\infty$ .

Zatem brak zbieżności takich całek oznacza rozbieżność do  $\infty$ .

Dla całek z funkcji nieujemnych mamy dwa kolejne kryteria zbieżności.

1. Kryterium porównawcze
2. Kryterium ilorazowe

### Twierdzenie(kryterium porównawcze)

Dane są dwie całki  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  oraz  $\int_a^{\infty} g(x) dx$ . Wtedy zachodzą następujące własności

1. (Przypadek zbieżności). Gdy  $\forall x \geq x_0 \geq a \quad 0 \leq f(x) \leq g(x)$  i  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  jest zbieżna to  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  też jest zbieżna. Ponadto  $0 \leq \int_a^{\infty} f(x) dx \leq \int_a^{\infty} g(x) dx$
2. (Przypadek rozbieżności) Gdy  $\forall x \geq x_0 \geq a \quad 0 \leq g(x) \leq f(x)$  i  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  jest rozbieżna (więc równa  $\infty$ ) to  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  też jest rozbieżna (do  $\infty$ ).
3. (Przypadek wątpliwy) Gdy  $\forall x \geq x_0 \geq a \quad 0 \leq f(x) \leq g(x)$  ale  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  jest rozbieżna to **NIC NIE WIEMY** o zbieżności  $\int_a^{\infty} f(x) dx$ .
4. (Przypadek wątpliwy) Gdy  $\forall x \geq x_0 \geq a \quad 0 \leq g(x) \leq f(x)$  ale  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  jest zbieżna to **NIC NIE WIEMY** o zbieżności  $\int_a^{\infty} f(x) dx$ .

Uwagi:

- $\int_a^\infty f(x) dx$  jest całką z zadania,  $\int_a^\infty g(x) dx$  tworzymy sami.
- Porównujemy najczęściej z całkami  $\int_a^\infty A^x dx$  lub  $\int_a^\infty \frac{1}{x^p} dx$ . Wtedy  $f$  często ma postać ułamków i możemy spróbować wziąć  $g$  jako :  
C - iloraz najwyższych potęg z licznika i mianownika  $f$
- Trzeba uważać aby nierówność między  $f$  i  $g$  była prawdziwa i nie zapomnieć przypadku wątpliwego, bo wtedy **trzeba zaczynać od nowa**.
- Warto sprawdzić opisany wyżej iloraz najwyższych potęg i na tej podstawie przewidzieć czy chcemy udowodnić zbieżność czy rozbieżność. To pomaga skonstruować odpowiednią nierówność między  $f$  i  $g$ .

**Popularny błąd** - odpowiedź na podstawie przypadku wątpliwego

Na przykład dla całki  $\int_1^\infty \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$  :

”Mamy  $0 \leq \frac{1}{x + \sqrt{x}} \leq \frac{1}{x}$  i całka  $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$  jest rozbieżna **zatem całka  $\int_1^\infty \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$  jest rozbieżna.**”

GAME OVER... To jest przypadek nr 3 (wątpliwy)

Przykład

$$\int_4^\infty \frac{2x-3}{x^3-1} dx$$

Przewidywanie zbieżności/rozbieżności

Najwyższe potęgi sugerują, że mając

$$\frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}, \quad \text{a} \quad \int_4^\infty \frac{1}{x^2} dx < \infty, \quad \text{bo} \quad 2 > 1$$

Dowodzimy zbieżność. Trzeba mieć

$$0 \leq \frac{2x-3}{x^3-1} \leq g(x) = C \cdot \frac{x}{x^3}$$

Jak w twierdzeniu o 3 ciągach

$$0 \leq \frac{2x}{x^3 - \frac{1}{2}x^3} = 4 \cdot \frac{x}{x^3} = 4 \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$\int_4^\infty \frac{4}{x^2} dx = 4 \int_4^\infty \frac{1}{x^2} dx < \infty \quad \left( \frac{1}{2}x^3 > 1 \text{ dla } x \geq 4 \right)$$

## Twierdzenie(kryterium ilorazowe)

Dane są dwie całki  $\int_a^\infty f(x) dx$  oraz  $\int_a^\infty g(x) dx$ . Ponadto

$$\forall x \geq x_0 \geq a \quad f(x), g(x) > 0$$

Jeżeli istnieje granica  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  i jest liczbą dodatnią to wtedy obie całki są zbieżne albo obie rozbieżne do  $\infty$ .

Uwagi

- Funkcję  $g$  tworzymy podobnie jak dla kryterium porównawczego
- Nie ma problemu z nierównościami :) ale za to trzeba umieć liczyć granice
- Granica nie może być ani 0 ani  $\infty$ :  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$
- Rozwiązanie **musi zawierać wniosek** "granica ilorazu jest liczbą dodatnią więc obie całki są zbieżne lub obie rozbieżne" - bez tego będzie niepełne.
- Kryterium zwykle jest wygodniejsze niż porównawcze ale są przykłady, które "idą" z porównawczego ale nie z ilorazowego, bo granica ilorazu nie istnieje

$$\text{Np. } \int_1^\infty \frac{2 + \sin x}{x} dx$$

Przykłady

Poprzedni przykład raz jeszcze

$$\int_4^\infty \frac{2x-3}{x^3-1} dx$$

$$f(x) = \frac{2x-3}{x^3-1}, \quad x \geq 4$$

$$g(x) = \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(2x-3)}{x^3-1} = 2$$

Obie całki zbieżne lub obie rozbieżne do  $\infty$

Przykłady o postaci funkcji złożonej  $\int_a^\infty f(g(x)) dx$  gdzie  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0^+$  oraz  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0^+$

Nową całką jest całka z funkcji wewnętrznej  $\int_a^\infty g(x) dx$

Liczmy granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(g(x))}{g(x)} = \lim_{t=g(x) \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} \left[ \frac{0}{0} \right]$$

przy użyciu granic podstawowych lub reguły de l'Hospitala.

Na przykład  $\int_1^{\infty} \left( 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1 \right) dx$

$$\int_1^{\infty} \left( 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1 \right) dx$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$$

$$f(x) = 2^x - 1 > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2^t - 1}{t} \left[ \frac{0}{0} \right] = \ln 2 \in (0, \infty)$$

Obie całki zbieżne lub obie rozbieżne

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \infty \quad \text{bo} \quad \frac{1}{2} \leq 1$$

## Wartość główna całki niewłaściwej I rodzaju

Całka  $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$  jest rozbieżna, gdyż jako suma całek prowadzi do symbolu  $\infty - \infty$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dx = \int_{-\infty}^0 x dx + \int_0^{\infty} x dx = -\infty + \infty$$

Intuicyjnie oczekiwilibyśmy jednak, że jest ona równa 0 - funkcja podcałkowa jest nieparzysta czyli mamy "tyle funkcji na + co na -", a więc wszystko powinno się wzajemnie zrównoważyć. Aby taka całka miała sens trzeba nieco zmodyfikować jej definicję i wprowadzić pojęcie wartości głównej całki niewłaściwej (obustronnej).

Definicja. Wartość główna całki  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  to wielkość

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f(x) dx$$

o ile powyższa granica istnieje.

Oznacza to, że przybliżamy całkę po  $\mathbb{R}$  całkami po przedziale symetrycznym względem 0.

P.V. jest skrótem od angielskiego "Principal Value".

Na przykład

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} x \, dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T x \, dx = \lim_{T \rightarrow \infty} 0 = 0$$

Zauważmy, że gdy  $\int f(x) \, dx = F(x) + C$  to

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f(x) \, dx = \lim_{T \rightarrow \infty} (F(T) - F(-T))$$

Jeżeli teraz ma sens wyrażenie  $\lim_{T \rightarrow \infty} F(T) - \lim_{T \rightarrow \infty} F(-T)$  to biorąc  $S = -T \rightarrow -\infty$  dostajemy

$$\begin{aligned} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx &= \lim_{T \rightarrow \infty} (F(T) - F(-T)) = \lim_{T \rightarrow \infty} F(T) - \lim_{T \rightarrow \infty} F(-T) = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} F(T) - \lim_{S \rightarrow -\infty} F(S) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx \end{aligned}$$

Udowodniliśmy zatem poniższe twierdzenie.

Jeżeli całka  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$  istnieje w zwykłym sensie (jako suma odpowiednich całek jednostronnych jest liczbą lub jedną z nieskończoności) to również jej wartość główna istnieje i jest równa tej całce.

Natomiast może się zdarzyć, że wartość główna całki istnieje ale sama całka jest rozbieżna (był przykład).

W szczególności gdy funkcja jest na  $\mathbb{R}$  ciągła i nieparzysta to wartość główna całki z tej funkcji jest zawsze 0 niezależnie od zbieżności samej całki.

## 2 Całki niewłaściwe II rodzaju

Ustalamy liczby  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Niech  $f$  będzie funkcją całkowalną na każdym przedziale postaci  $[a, T]$ , gdzie  $a < T < b$ . Definiujemy całkę niewłaściwą drugiego rodzaju z  $f$  na przedziale  $[a, b)$  jako

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{T \rightarrow b^+} \int_a^T f(x) \, dx, \quad \text{gdy granica po prawej stronie istnieje.}$$

Analogicznie, gdy  $f$  jest całkowalna na każdym przedziale postaci  $[T, b]$ , gdzie  $a < T < b$ , to definiujemy całkę niewłaściwą pierwszego rodzaju z  $f$  na przedziale  $(a, b]$  jako

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{T \rightarrow a^+} \int_T^b f(x) \, dx, \quad \text{gdy granica po prawej stronie istnieje.}$$



Terminologia dotycząca takich całek jest taka, jak dla całek niewłaściwych 1 rodzaju. Są 3 przypadki :

1. Granica z prawej strony jest liczbą. Wtedy całka jest zbieżna (do tej granicy).
2. Granica z prawej strony jest równa  $\infty$  lub  $-\infty$ . Wtedy całka jest rozbieżna do  $\infty$  lub  $-\infty$ .
3. Granica z prawej strony nie istnieje. Wtedy mówimy, że całka jest rozbieżna.

Interpretacja geometryczna.

Podobnie jak dla zwykłej całki oznaczonej, jeżeli  $f \geq 0$  na  $(a, b]$  lub  $[a, b)$  to całka niewłaściwa 2 rodzaju  $\int_a^b f(x) dx$  daje pole obszaru ograniczonego osią X, wykresem  $f$  oraz prostymi  $x = a$  oraz  $x = b$ .

Najczęściej definiujemy tego typu całkę w przypadku gdy  $f$  ma asymptotę pionową  $x = a$  lub  $x = b$ . Wtedy ten obszar nie jest ograniczony z góry bądź z dołu.

Na przykład

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{T \rightarrow 0^+} \int_T^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{T \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_T^1 = \lim_{T \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{T}) = 2$$

Całka jest zbieżna do 2.

### Wersja całki obustronnej

Ustalamy liczby  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a < c < b$ . Niech  $f$  będzie funkcją całkowalną na każdym przedziale postaci  $[a, T]$ ,  $T < c$ , oraz  $[T, b]$ ,  $T > c$ . Definiujemy całkę niewłaściwą 2 rodzaju z  $f$  na zbiorze  $[a, c) \cup (c, b]$  jako sumę dwóch całek niewłaściwych. tzn.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

przy czym gdy przynajmniej jedna z całek z prawej strony nie istnieje lub zachodzi przypadek  $\infty - \infty$  to  $\int_a^b f(x) dx$  jest rozbieżna, a w pozostałych przypadkach całka ma wartość wynikającą z arytmetyki granic.

Najczęściej takie całki pojawiają się, gdy  $f$  ma asymptotę w  $x = c$ .

### **Twierdzenie**

Istnieją podstawienia, które każdą całkę niewłaściwą 2 rodzaju sprowadzają do przypadku całki niewłaściwej 1 rodzaju.

W szczególności

- dla całki  $(a, b]$  możemy wziąć  $t = \frac{1}{x-a}$  co daje  $x = a + \frac{1}{t}$  oraz

$$\int_a^b f(x) dx = \int_C^\infty \frac{1}{t^2} f\left(a + \frac{1}{t}\right) dt, \text{ gdzie } C = \frac{1}{b-a}$$

- dla całki na  $[a, b)$  możemy wziąć  $t = \frac{1}{b-x}$  co daje  $x = b - \frac{1}{t}$  oraz

$$\int_a^b f(x) dx = \int_C^\infty \frac{1}{t^2} f\left(b - \frac{1}{t}\right) dt, \text{ gdzie } C = \frac{1}{b-a}$$

Na przykład dla  $p > 0$  biorąc  $t = \frac{1}{x}$  mamy

$$\int_0^b \frac{1}{x^p} dx = \int_{\frac{1}{b}}^\infty \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^p} dt = \int_{\frac{1}{b}}^\infty \frac{1}{t^{2-p}} dt$$

Podstawienie to oznacza też, że mamy analogiczne kryteria zbieżności dla całek 2 rodzaju - porównawcze i ilorazowe, przy czym dla kryterium ilorazowego liczymy granicę ilorazu funkcji w odpowiednim końcu zadanego przedziału.

Na koniec, wartość główna całki  $\int_a^b f(x) dx$  na  $[a, c) \cup (c, b]$  to wielkość

$$\text{P.V.} \int_a^b f(x) dx = \lim_{T \rightarrow 0^+} \left( \int_a^{c-T} f(x) dx + \int_{c+T}^b f(x) dx \right)$$

o ile powyższa granica istnieje.

Oznacza to, że odpowiednie końce przedziałów całkowania są w jednakowej odległości od  $c$  i zbiegają do  $c$ .

## Zbieżność bezwzględna całek niewłaściwych

Definicja. Całka  $\int_a^\infty f(x) dx$  jest zbieżna bezwzględnie, gdy zbieżna jest całka  $\int_a^\infty |f(x)| dx$ .

Analogiczne definicje mamy dla pozostałych całek 1 rodzaju oraz dla całek 2 rodzaju.

Uwagi

- Gdy  $f$  jest nieujemna to mamy  $\int_a^\infty f(x) dx = \int_a^\infty |f(x)| dx$  i definicja nie wnosi nic nowego. Sytuacja się zmienia, gdy są przedziały na którym  $f$  ma różne znaki.

- Nierówność  $\left| \int_a^T f(x) dx \right| \leq \int_a^T |f(x)| dx$  daje  $\left| \int_a^\infty f(x) dx \right| \leq \int_a^\infty |f(x)| dx$  ale gdy są przedziały na którym  $f$  ma różne znaki to równość nie zachodzi. Zatem, ogólnie,  $\left| \int_a^\infty f(x) dx \right|$  i  $\int_a^\infty |f(x)| dx$  **to nie to samo**.

### Twierdzenie

Jeżeli całka niewłaściwa jest bezwzględnie zbieżna to jest zbieżna (w zwykłym sensie).

Transpozycja tego twierdzenia daje warunek równoważny :

Jeżeli całka  $\int_a^\infty f(x) dx$  nie jest zbieżna to również nie jest zbieżna bezwzględnie,

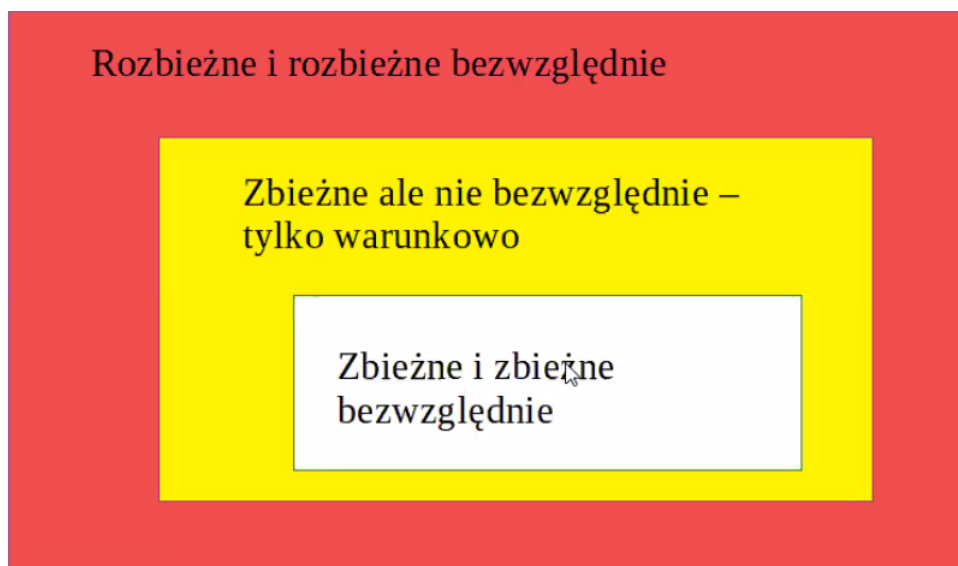
co oznacza  $\int_a^\infty |f(x)| dx = \infty$ .

Analogicznie dla pozostałych typów całek niewłaściwych.

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Są całki zbieżne ale nie bezwzględnie, np.  $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ .

Takie całki to tzw. całki zbieżne warunkowo.

Są więc 3 możliwe sytuacje - 3 rozłączne podzbiory całek niewłaściwych:



Przykład

Całka  $\int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}} dx$  jest zbieżna bezwzględnie, bo biorąc  $\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}} \right| dx$  i używając kryterium porównawczego mamy

$$0 \leq \left| \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}} \right| = \frac{|\sin x|}{x^{\frac{4}{3}}} \leq \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$$

a całka  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} dx$  jest zbieżna bo  $\frac{4}{3} > 1$ . Zatem  $\int_1^{\infty} \left| \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}} \right| dx$  jest zbieżna, a stąd  $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}} dx$  też jest zbieżna.

### 3 Szeregi liczbowe

Dany jest ciąg liczbowy  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

Tworzymy jego ciąg sum częściowych :

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Jeżeli istnieje granica  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  (skończona lub nieskończona) to oznaczamy ją symbolem

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

W ogólnym przypadku możemy wziąć ciąg, który zaczyna się od dowolnej liczby całkowitej  $n_0 : a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots, a_n, \dots$  i jego sum częściowych

$$S_n = a_{n_0}, \quad S_{n_0+1} = a_{n_0} + a_{n_0+1}, \quad S_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_n = \sum_{k=n_0}^n a_k, \quad n \geq n_0$$

$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  jest oznaczana przez  $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ .

Definicja. Dla ustalonego  $n_0 \in \mathbb{Z}$  obiekt  $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$  nazywamy szeregiem liczbowym, a wartość  $S$

(gdy istnieje) jego sumą, oznaczaną także przez  $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ . Mamy wtedy

$$S_n = a_{n_0}, \quad S_{n_0+1} = a_{n_0} + a_{n_0+1}, \quad S_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_n + \dots = \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n_0}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

gdzie

- $S_n$  to  $n$  - ta suma szeregu,
- $a_n$  to  $n$  - ty wyraz szeregu.

Terminologia dotycząca sumy  $S$  jest taka, jak dla ciągów. Są 3 przypadki :

1.  $S$  jest liczbą. Wtedy dany szereg jest zbieżny (do  $S$ ).
2.  $S = \infty$  lub  $S = -\infty$ . Wtedy dany szereg jest rozbieżny (do  $\infty$  lub  $-\infty$ ).
3.  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  nie istnieje. Wtedy dany szereg jest rozbieżny.

## Przykłady

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \text{szereg zbieżny do } 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{szereg rozbieżny do } \infty$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n - \text{szereg rozbieżny}$$

Uwaga. Każdy szereg zaczynający się od indeksu  $n_0 \in \mathbb{Z}$  można przekształcić tak, by zaczynał się od indeksu 1. Wynika to z równości

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+n_0-1}$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

## Obliczanie sum szeregów

Jest to zadanie trudne, a najczęściej niemożliwe, gdyż trudno jest znaleźć bezpośredni wzór na sumy częściowe  $S_n$ .

Niektóre przypadki szczególne.

### 1. Ciąg geometryczny i szereg geometryczny.

- $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ , gdzie  $q$  jest ilorazem ciągu (czyli  $a_{n+1} = a_n \cdot q$ ,  $n \geq 1$ ).

Wtedy

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, q \neq 1 \text{ oraz } S_n = na_1, q = 1$$

To oznacza, że dla  $a_1 \neq 0$ ,

- szereg jest zbieżny dla  $-1 < q < 1$  i jego suma jest  $S = \frac{a_1}{1 - q}$ ,
- szereg jest rozbieżny do  $\infty$  lub  $-\infty$  dla  $q \geq 1$ , znak zależy od znaku  $a_1$ ,
- szereg jest rozbieżny (suma nie istnieje) dla  $q \leq -1$

Stąd np.

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1, \text{ bo tutaj } a_1 = q = \frac{1}{2}$$

2. Szeregi o wyrazie ogólnym postaci

$a_n = f(n+1) - f(n)$  lub  $a_n = f(n) - f(n+1)$ , gdzie  $f$  jest pewną funkcją.

W bardziej ogólnej postaci

$a_n = f(n+k) - f(n)$  lub  $a_n = f(n) - f(n+k)$ , gdzie  $k \in \mathbb{N}^+$  to tzw. krok.

Takie szeregi to tzw. szeregi teleskopowe (telescoping series).

Przykłady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \text{tutaj } f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - \text{tutaj } f(x) = \sqrt{x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan(n) - \arctan(n+2)) - \text{tutaj } f(x) = \arctan x$$

Dla takich szeregów łatwo wyznacza się wzór na  $S_n$ . Wyrazy wewnętrzne się upraszczają i zostaje:

suma  $k$  pierwszych wartości,  $f$  suma  $k$  ostatnich wartości  $f$  (lub na odwrót)

Na przykład dla  $\sum_{n=1}^{\infty} (f(n) - f(n+1))$  mamy

$$S_n = f(1) - \textcolor{red}{f(2)} + \textcolor{red}{f(2)} - \textcolor{blue}{f(3)} + \textcolor{blue}{f(3)} - \textcolor{green}{f(4)} + \dots + \textcolor{red}{f(n)} - f(n+1) = f(1) - f(n+1)$$

.

Jeżeli istnieje granica  $G = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  to mamy

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(1) - f(n+1)) = f(1) - G$$

Przykład. Wyznaczyć sumę  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$

Wyraz ogólny nie ma postaci różnicy więc trzeba ją stworzyć.

Używając rozkładu na ułamki proste dostajemy

$$\frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \dots = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

I to daje

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$$

## Własności szeregów zbieżnych

### Twierdzenie

Jeżeli szeregi  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  oraz  $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$  są zbieżne to zbieżne są szeregi  $\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n + b_n)$  oraz  $\sum_{n=n_0}^{\infty} (c \cdot a_n)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

Ponadto

- $\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$
- $\sum_{n=n_0}^{\infty} (c \cdot a_n) = c \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$

Prawdziwe są także analogiczne twierdzenia prowadzące do arytmetyki granic nieskończonych, gdy nie pojawiają się symbole nieoznaczone. Na przykład gdy  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \infty$  oraz  $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$  to

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n = \infty$$

Natomiast gdy  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n = \infty$  to  $\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n - b_n)$  może być zarówno zbieżny jak i rozbieżny i nie ma sensu równość

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n - \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$$

### Twierdzenie

Zmiana wartości  $n_0$  nie wpływa na zbieżność/rozbieżność szeregu  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ .

Może mieć wpływ na wartość jego sumy.

Stąd wynika np., że szeregi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  i  $\sum_{n=100}^{\infty} a_n$  są albo oba zbieżne albo oba rozbieżne do  $\infty$  lub  $-\infty$  albo oba rozbieżne.

To też oznacza, że na podstawie kilku pierwszych wyrazów ciągu/szeregu

**NIC NIE MOŻNA POWIEDZIEĆ** o jego zbieżności

### Popularny błąd

"Liczymy wartości  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  . Wychodzi ciąg malejący i dodatni.

Zatem szereg jest zbieżny". **GAME OVER...**

### Twierdzenie

Dla ustalonego  $n_0 \in \mathbb{N}^+$  i  $p \in \mathbb{R}$  szereg  $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  jest zbieżny dla  $p > 1$  i rozbieżny do  $\infty$  dla  $p \leq 1$ .

W przypadku kiedy sumy szeregu nie da się wyznaczyć w sposób dokładny można to zrobić w sposób przybliżony, pod warunkiem, że wiemy, że szereg jest zbieżny.

Kryteria zbieżności to twierdzenia opisujące warunki dostateczne zbieżności lub rozbieżności danej klasy szeregów. Najczęściej mają postać implikacji ale **NIE** równoważności.

Oznacza to zwykle własności postaci

warunek zachodzi  $\Rightarrow$  szereg jest zbieżny/rozbieżny,

warunek nie zachodzi  $\Rightarrow$  nic nie wiemy o zbieżności/rozbieżności szeregu

## Popularne kryteria zbieżności szeregów

0. Warunek konieczny zbieżności szeregów

### Twierdzenie

Jeżeli szereg  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  jest zbieżny to  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Dowód

Dla  $n \geq n_0 + 1$  mamy  $S_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_{n-1} + a_n$  oraz  $S_{n-1} = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_{n-1}$ ,  
Stąd

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

Jeżeli szereg  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  jest zbieżny to  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S \in \mathbb{R}$ . To daje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Transpozycja tego twierdzenia daje warunek równoważny do zastosowania praktycznego :

Jeżeli  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  to szereg  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  nie jest zbieżny przy czym

- gdy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$  to  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \infty$



- gdy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 0$  to  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = -\infty$

**Uwaga. To jest tylko implikacja!**

Jeżeli  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  to jeszcze **NIC NIE WIEMY** o szeregu.

Na przykład szeregi  $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  mają  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$  dla wszystkich  $p > 0$  ale niektóre z tych szeregów są zbieżne, a niektóre rozbieżne.

**Popularny błąd**

” $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  **zatem szereg jest zbieżny**”. **GAME OVER...**

Szeregi o wyrazach nieujemnych

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0$$

Wtedy  $S_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_{n-1} + a_n$  jest ciągiem niemalejącym zatem suma szeregu  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  zawsze istnieje. Może być to liczba lub  $\infty$ .

Podobnie dla szeregów o wyrazach niedodatnich  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n, \quad a_n \leq 0$ , suma zawsze istnieje i rozbieżność oznacza rozbieżność do  $-\infty$ .

Przykład. Następujące szeregi nie są zbieżne

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + 2n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin n$$

Dla szeregów o wyrazach nieujemnych mamy dwa kolejne kryteria zbieżności.

1. Kryterium porównawcze
2. Kryterium ilorazowe

## Twierdzenie (kryterium porównawcze)

Dane są dwa szeregi  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  oraz  $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ . Wtedy zachodzą następujące własności.

1. (Przypadek zbieżności) Gdy  $\forall n \geq k \geq n_0 \quad 0 \leq a_n \leq b_n$  i  $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$  jest zbieżny to  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  też jest zbieżny. Ponadto  $0 \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$

2. (Przypadek rozbieżności) Gdy  $\forall n \geq k \geq n_0 \quad 0 \leq b_n \leq a_n$  i  $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$  jest rozbieżny to

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ też jest rozbieżny. Ponadto } \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n = \infty$$

3. (Przypadek wątpliwy). Gdy  $\forall n \geq k \geq n_0 \quad 0 \leq a_n \leq b_n$  ale  $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$  jest rozbieżny to **NIC**

**NIE WIEMY** o zbieżności  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$

4. (Przypadek wątpliwy). Gdy  $\forall n \geq k \geq n_0 \quad 0 \leq b_n \leq a_n$  ale  $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$  jest zbieżny to **NIC**

**NIE WIEMY** o zbieżności  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$

Uwagi

- $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  jest szeregiem z zadania,  $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$  tworzymy sami
- Porównujemy najczęściej z szeregiem geometrycznym  $\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n$  lub z szeregami  $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ .

Wtedy  $a_n$  często ma postać ułamków i możemy spróbować wziąć  $b_n$  jako

**C · iloraz najwyższych potęg z licznika i mianownika  $a_n$**

- Trzeba uważać aby nierówność między  $a_n$  i  $b_n$  była prawdziwa i nie zapomnieć o dolnym ograniczeniu (0). Ma być tak jak w twierdzeniu o trzech ciągach
- Kryterium nie zawsze jest wygodne w użyciu i trzeba uważać, by nie dostać przypadku wątpliwego, bo wtedy **trzeba zaczynać od nowa**
- Warto sprawdzić opisany wyżej iloraz najwyższych potęg i na tej podstawie przewidzieć czy chcemy udowodnić zbieżność czy rozbieżność. To pomaga skonstruować odpowiednią nierówność między  $a_n$  i  $b_n$ .

**Popularny błąd :** odpowiedź na podstawie przypadku wątpliwego

Na przykład dla szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n}}$  :

”Mamy  $0 \leq \frac{1}{n + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{n}$  i szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  jest rozbieżny **zatem szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n}}$  jest rozbieżny**”.

**GAME OVER...** To jest przypadek nr 3 (wątpliwy)

Przykład

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2n-3}{n^3-1}$$

Przewidywanie zbieżności/rozbieżności:

Iloraz najwyższych potęg licznika i mianownika to  $\frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ , a szereg  $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  jest zbieżny, bo  $2 > 1$ . Zatem chcemy udowodnić zbieżność (przypadek 1).

Potrzebujemy więc  $\sum_{n=4}^{\infty} b_n$  i nierówności  $0 \leq \frac{2n-3}{n^3-1} \leq b_n$ .

Chcemy zwiększyć wyrażenie  $\frac{2n-3}{n^3-1}$  ale tak, by zostały najwyższe potęgi.

Można zwiększyć licznik oraz zmniejszyć mianownik.

Zwiększamy licznik poprzez wyrzucenie 3.

Zmniejszamy mianownik poprzez zastąpienie 1 czymś większym : wyrażeniem z najwyższą potęgą. Nie można jednak wziąć całego  $n^3$ , bo będzie 0 w mianowniku.

Wygrywa wzięcie  $C \cdot n^3$  np.  $\frac{1}{2}n^3$ , bo dla  $n \geq 4$  mamy  $\frac{1}{2}n^3 \geq 1$ .

To wszystko daje dla  $n \geq 4$

$$0 \leq \frac{2n-3}{n^3-1} \leq \frac{2n}{n^3-\frac{1}{2}n^3}$$

Czyli

$$b_n = \frac{2n}{n^3-\frac{1}{2}n^3} = 4 \cdot \frac{1}{n^2}$$

## DZIURA W SKRYPCIE

### Twierdzenie (kryterium ilorazowe)

Dane są dwa szeregi  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  oraz  $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ . Ponadto  $\forall n \geq n_0 \ a_n, b_n > 0$ .

Jeżeli istnieje granica  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$  i jest liczbą dodatnią to wtedy oba szeregi są zbieżne albo oba rozbieżne do  $\infty$ .

Uwagi

- Ciąg  $b_n$  tworzymy podobnie jak dla kryterium porównawczego.
- Nie ma problemu z nierównościami :) ale za to trzeba umieć liczyć granice.
- Granica nie może być ani 0 ani  $\infty$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, \infty)$ .

Nie wystarczy warunek  $L > 0$  bo  $\infty$  także jest  $> 0$ .

- Rozwiązanie „musi zawierać wniosek” granica ilorazu jest liczbą dodatnią więc oba szeregi są zbieżne lub oba rozbieżne” - bez tego będzie niepełne
- Kryterium zwykle jest wygodniejsze niż porównawcze ale są przykłady, które pójdą z porównawczego ale nie z ilorazowego, bo granica ilorazu nie istnieje

Np.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin n}{n}$ .

Przykłady

Poprzedni przykład raz jeszcze

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2n-3}{n^3-1}$$

Bierzemy  $b_n = \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{2n-3}{n^3-1}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{2n^3-3n^2}{n^3-1} = \frac{2-\frac{3}{n}}{1-\frac{1}{n^3}}$$

Stąd  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 2$  - liczba dodatnia.

Zatem oba szeregi są zbieżne lub oba są rozbieżne.

Dalej już analiza  $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  i wniosek jak w kryterium porównawczym :

$\sum_{n=4}^{\infty} b_n = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  jest zbieżny bo  $2 > 1$ . Zatem  $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2n-3}{n^3-1}$  też jest zbieżny.

Przykłady o postaci funkcji złożonej  $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(b_n)$ ,

gdzie  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0^+$  oraz  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0^+$ .

Nowym szeregiem jest szereg z funkcji wewnętrznej  $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ .

Liczmy granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(b_n)}{b_n} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} \left[ \frac{0}{0} \right]$$

przy użyciu granic podstawowych lub reguły de l'Hospitala.

Na przykład

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)$$

Mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1) = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{\frac{1}{n}} - 1)$$

Więc bierzemy  $b_n = \frac{1}{n} > 0$ .

Liczmy granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{x = \frac{1}{n} \rightarrow 0^+} \frac{2^x - 1}{x} = \ln 2$$

Jest to liczba dodatnia więc oba szeregi są zbieżne lub oba są rozbieżne.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \text{ więc } \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1) = \infty.$$

3. Kryterium Cauchy'ego.

4. Kryterium d'Alemberta

Działają dla szeregów o dowolnych wyrazach. Teza obu kryteriów jest taka sama ale liczymy granice innych wyrażeń.

### Twierdzenie (kryterium Cauchy'ego)

Dany jest szereg  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  taki, że istnieje granica  $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ . Wtedy

1. Gdy  $0 \leq q < 1$  to szereg jest zbieżny.
2. Gdy  $q > 1$  to szereg jest rozbieżny
3. **(Przypadek wątpliwy)**. Gdy  $q = 1$  to **NIC NIE WIEMY** o zbieżności szeregu.

### Uwagi

- Do wyznaczenia  $q$  przydają się następujące własności granic
  - a) Gdy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  jest **liczbą dodatnią** to  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ .
  - b)  $\forall p \in \mathbb{R} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^p} = 1$ .
- $q$  **nie może być ujemne**.  $q$  ujemne zwykle oznacza brak modułu na  $a_n$ .

### Twierdzenie (kryterium d'Alemberta)

Dany jest szereg  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ ,  $a_n \neq 0$ , taki, że istnieje granica  $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ . Wtedy

1. Gdy  $0 \leq q < 1$  to szereg jest zbieżny.
2. Gdy  $q > 1$  to szereg jest rozbieżny
3. **(Przypadek wątpliwy)**. Gdy  $q = 1$  to **NIC NIE WIEMY** o zbieżności szeregu.

- $q$  **nie może być ujemne**.  $q$  ujemne zwykle oznacza brak modułu na  $a_n$ .
- W obu kryteriach szeregi  $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  pokazują, że  $q = 1$  nic nie daje.

Przykłady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{20^n}{n!}$$

Tutaj  $a_n = \frac{20^n}{n!} > 0$  oraz  $a_{n+1} = \frac{20^{n+1}}{(n+1)!}$ . Zatem z kryterium d'Alemberta

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{20^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{20^n}{n!}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( 2 \arcsin \frac{1-n}{2n+1} \right)^n$$

Tutaj chcemy użyć kryterium Cauchy'ego.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left| \left( 2 \arcsin \frac{1-n}{2n+1} \right)^n \right|} = \sqrt[n]{\left| 2 \arcsin \frac{1-n}{2n+1} \right|^n} = \left| 2 \arcsin \frac{1-n}{2n+1} \right| = \left| 2 \arcsin \frac{\frac{1}{n} - 1}{2 + \frac{1}{n}} \right|$$

Stąd

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \left| 2 \arcsin \left( -\frac{1}{2} \right) \right| = \left| 2 \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right| = \frac{\pi}{3}$$

$q > 1$  więc szereg jest rozbieżny.

## Twierdzenie (kryterium całkowe)

Dany jest szereg  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ . Jeżeli na  $[x_0, \infty)$ ,  $x_0 \geq n_0$  istnieje funkcja  $f$  taka, że

- $f(n) = a_n$ ,  $n \geq x_0$ ,
- $f$  jest nieujemna na  $[x_0, \infty)$ ,
- $f$  jest nierosnąca na  $[x_0, \infty)$ ,

to całka niewłaściwa  $\int_{x_0}^{\infty} f(x) dx$  i szereg  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  są jednocześnie skończone lub jednocześnie rozbieżne do  $\infty$ .

Uwagi do kryterium

- Najczęściej  $x_0 = n_0$ .

- Kryterium jest ważne z punktu widzenia teorii, gdyż wiele innych własności szeregów z niego wynika. Na przykład, gdy  $x_0 = n_0$  to

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq a_{n_0} + \int_{n_0}^{\infty} f(x) dx$$

To pozwala oszacować sumę szeregu.

- Sens użycia kryterium: nie umiemy policzyć sumy szeregu ale umiemy **obliczyć** całkę  $\int_{x_0}^{\infty} f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{x_0}^T f(x) dx$ . Stosujemy to kryterium tylko wtedy, gdy zamierzamy liczyć tę całkę.
- Z praktycznego punktu widzenia kryterium jest najczęściej **najmniej wygodnie** do zastosowania. Opłaca się je stosować głównie wtedy, gdy szereg zawiera wyrażenie  $\ln n$ .

Przykład

Dla ustalonego  $n_0 \in \mathbb{N}^+$  i  $p > 0$  dowodzimy znany już wynik dla szeregu  $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  zbieżny dla  $p > 1$  oraz rozbieżny do  $\infty$  dla  $p \leq 1$ .

Tutaj bierzemy po prostu  $f(x) = \frac{1}{x^p}$ ,  $x \in [n_0, \infty)$ .

Dla  $p > 0$   $f$  jest malejąca i nieujemna oraz  $f(n) = \frac{1}{n^p}$

Spełnione są więc warunki użycia kryterium. Liczymy całkę  $\int_{n_0}^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ .

Było to już robione wcześniej i wiemy, że dla  $p > 1$  jest liczbą, a dla  $p \leq 1$  jest równa  $\infty$ . Stąd szereg jest zbieżny dla  $p > 1$  oraz rozbieżny do  $\infty$  dla  $0 < p \leq 1$ . Dla  $p \leq 0$  szereg jest rozbieżny, bo nie spełnia warunku koniecznego zbieżności.

Uwaga do szeregów z wyrażeniem  $\ln n$ .

Dla dowolnego  $p > 0$  funkcja  $\frac{\ln x}{x^p}$ ,  $x \geq 2$ , ma zbiór wartości  $\left(0, \frac{1}{p \cdot e}\right]$ . Zatem

$$\frac{\ln x}{x^p} \leq \frac{1}{p \cdot e} \Leftrightarrow \ln x \leq \frac{1}{p \cdot e} x^p$$

a stąd

$$\ln n \leq \frac{1}{p \cdot e} n^p$$

Z oszacowaniem dolnym jest gorzej, bo nie ma pojedynczej funkcji elementarnej mniejszej od  $\ln x$  i pozostaje oszacowanie przez stałą np.

$$\ln n \geq \frac{1}{2}, \quad n \geq 2$$

To daje oszacowanie dla dowolnego  $p > 0$ :

$$\frac{1}{2} \leq \ln n \leq C \cdot n^p, \quad n \geq 2$$

Tutaj  $C = \frac{1}{p \cdot e}$ , a dla  $p \geq \frac{1}{e}$  wystarczy wziąć  $C = 1$ .

Często to oszacowanie pozwala uniknąć kryterium całkowego i zastąpienie go porównawczym, potrzeba tylko wziąć odpowiednio małe  $p$ .

Przykład

Dla szeregu  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n \sqrt[5]{n}}$  z kryterium porównawczego mamy

$$0 < \frac{\ln n}{n \sqrt[5]{n}} \leq \frac{C n^p}{n \sqrt[5]{n}} = \frac{C n^p}{n \cdot n^{0,2}} = \frac{C}{n^{1,2-p}}$$

Wystarczy teraz wziąć  $p < 0,2$  czyli np.  $p = 0,1$  i zbadać szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{C}{n^{1,2-0,1}} = C \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C}{n^{1,1}} \text{ — zbieżny, bo } 1,1 > 1$$

Zatem wyjściowy szereg jest zbieżny

## Zbieżność bezwzględna szeregów

Definicja. Szereg  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  jest zbieżny bezwzględnie, gdy zbieżny jest szereg  $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ .

Uwagi

- Gdy wszystkie wyrazy  $a_n$  są nieujemne to mamy  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$  i definicja nie wnosi nic nowego. Sytuacja się zmienia gdy szereg ma zarówno wyrazy dodatnie jak i ujemne.
- Z nierówności  $|S_n| = |a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_n| \leq |a_{n_0}| + |a_{n_0+1}| + \dots + |a_n|$  wynika nierówność  $\left| \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$  ale równość nie musi zachodzić.

Np. dla  $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$  mamy  $\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| = \frac{2}{3}$  ale  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = 2$

Zatem  $\left| \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \right|$  i  $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$  **to nie to samo**.

## Twierdzenie

Jeżeli szereg jest bezwzględnie zbieżny to jest zbieżny (w zwykłym sensie).

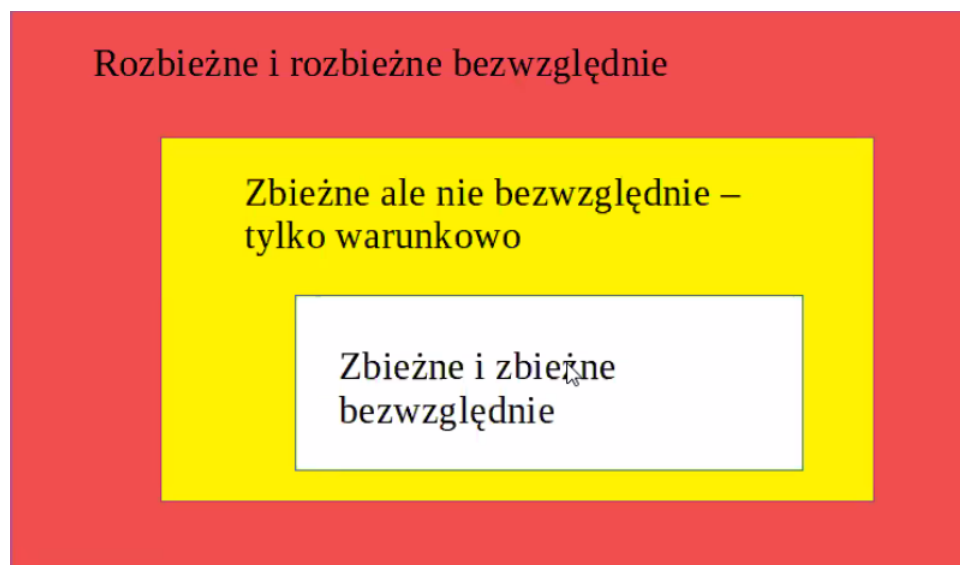
Transpozycja tego twierdzenia daje warunek równoważny:

Jeżeli szereg  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  nie jest zbieżny to również nie jest zbieżny bezwzględnie, co oznacza

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| = \infty.$$



Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Są szeregi zbieżne ale nie bezwzględnie, np.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ .  
 Takie szeregi to tzw. szeregi zbieżne warunkowo.



Przykład

Szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^4}}$  jest zbieżny bezwzględnie, bo biorąc  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^4}} \right|$  i używając kryterium porównawczego mamy

$$0 \leq \left| \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^4}} \right| = \frac{|\sin n|}{n^{\frac{4}{3}}} \leq \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$$

a szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$  jest zbieżny, bo  $\frac{4}{3} > 1$ .

Zatem  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^4}} \right|$ , a stąd  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^4}}$  też jest zbieżny.

## Szeregi naprzemienne

Są to szeregi, w których na zmianę dodajemy i odejmujemy wyrazy dodatnie:

$a_{n_0} - a_{n_0+1} + a_{n_0+2} - a_{n_0+3} + \dots$  lub  $-a_{n_0} + a_{n_0+1} - a_{n_0+2} + a_{n_0+3} + \dots$  gdzie  $a_n > 0$ .

Postać ogólna :

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n \quad \text{lub} \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$$

Przykłady

$$\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4} - \sqrt{5} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Definicja

Szereg naprzemienny  $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$  lub  $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$  nazywany jest szeregiem Leibniza, jeżeli  $a_n$  jest ciągiem nierosnącym i zbieżnym do 0.

Na przykład  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  jest szeregiem Leibniza, bo tutaj  $a_n = \frac{1}{n}$  jest malejący i zbieżny do 0.

### Twierdzenie (Leibnitz)

Każdy szereg Leibniza jest zbieżny.

Uwagi

- Twierdzenie to daje tylko zbieżność warunkową, nie gwarantuje bezwzględnej
- Gdy ciąg  $a_n$  nie dąży do 0 to szereg naprzemienny  $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$  jest rozbieżny, gdyż  $(-1)^n a_n$  też nie dąży do 0. Wynika to z twierdzenia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$$

- Wystarczy, by ciąg  $a_n$  był nierosnący dla  $\forall n \geq k \geq n_0$ .
- Gdy ciąg  $a_n$  zbiega do 0 ale nie jest nierosnący to **NIC NIE WIEMY** o zbieżności szeregu.
- Do badania czy  $a_n$  jest nierosnący można próbować rozszerzyć  $a_n$  do funkcji  $f$  tak by  $f(n) = a_n$ . Potem — pochodna itd. Gdy szereg naprzemienny jest zbieżny bezwzględnie to tw. Leibniza nie jest potrzebne.

**Popularny błąd :** opisanie "badanie" monotoniczności ciągu, bez obliczeń.

Na przykład dla ciągu  $a_n = \frac{n}{1000n+1}$  :

"Ciąg  $a_n$  jest **malejący**, bo mianownik **szybciej rośnie niż licznik**."

GAME OVER... Takie "rozwiązanie" jest jak **pisanie bajek** — nie musi mieć **nic wspólnego z prawdą**.

Dla powyższego ciągu mianownik rzeczywiście szybciej rośnie niż licznik (i to 1000 razy!), a mimo to ciąg ten jest rosnący.

Przykład

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \ln n}{n}$$

Tutaj  $a_n = \frac{\ln n}{n}$ . Rozszerzamy go do funkcji  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ,  $x \geq 2$ .

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0 \Leftrightarrow x > e \approx 2,72$$

Zatem  $f$  jest malejąca dla  $x \in (e, \infty)$  czyli  $a_n$  jest malejący dla  $n \geq 3$ .  
Ponadto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] [H] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

Zatem  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Mamy więc szereg naprzemienny, który z tw. Leibnitza jest zbieżny.

Nie jest jednak zbieżny bezwzględnie bo dla  $\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n \cdot \ln n}{n} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$  mamy z kryterium porównawczego  $0 < \frac{0,5}{n} < \frac{\ln n}{n}$ , a szereg  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{0,5}{n}$  jest rozbieżny.

Jest to więc szereg zbieżny warunkowo.

Podsumowanie : które kryterium zbieżności kiedy?

- P — porównawcze
- I — ilorazowe
- C - Cauchy'ego
- A - d'Alemberta
- $\int$  — całkowe
- ZB — zbieżność bezwzględna
- L - twierdzenie Leibnitza

Wyrażenia występujące w $a_n$	Sugerowane kryterium dla $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$
Tylko potęgi $n$ lub pierwiastki z potęg $n$	P <b>I</b> ale <b>NIGDY C A</b>
<u>Te same</u> najwyższe potęgi $a_n$ w <u>liczniku i mianowniku</u>	P <b>I</b> ale <b>NIGDY C A</b>
<u>Różne</u> najwyższe potęgi $a_n$ w <u>liczniku i mianowniku</u>	P I <b>C A</b>
funkcja złożona $f(b_n)$ , $b_n \rightarrow 0$	<b>I</b> P
$n!$	<b>A</b> P
$n$ - ta sama potęga: $(\dots)^n$	C
Ciągi bez granicy, np. $\sin n$	P (+ inne, gdy trzeba)
$\ln n$	<b>P</b> $\int$
$(-1)^n$ i ogólne $a_n$ , o różnych znakach	ZB (+ inne, gdy trzeba) L

Przykłady do samodzielnego policzenia :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+3}}{n^3+2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+5}{n!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{n^2 \cdot 3^n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+7 \cdot 3^n}{5^n-4^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\cos(n^2)}{\sqrt[3]{n}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2+2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2)}{2^n}$$

## 4 Szeregi potęgowe

Definicja

Szereg potęgowy zmiennej  $x$  to szereg postaci

$$c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \dots + c_n(x-x_0)^n + \dots$$

gdzie  $x_0 \in \mathbb{R}$  to tzw. środek/centrum a  $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$  to współczynniki szeregu.

Dla  $x \neq x_0$  mamy zapis sumy jako  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ . Dla  $x = x_0$  przyjmujemy  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = c_0$

i wtedy wyjściowa suma jest równa  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$  dla wszystkich  $x$

Gdy  $x_0 = 0$  to szereg nazywamy szeregiem Maclaurina.

Przykłady

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Jest to szereg geometryczny o ilorazie  $x$ . Tutaj  $\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = 1$  oraz  $x_0 = 0$ .

$$(x-1) - \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{(x-1)^5}{5} - \frac{(x-1)^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot (x-1)^{2n+1}$$

Tutaj  $x_0 = 1$  oraz  $c_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ ,  $c_{2n} = 0$

Uwaga. Indeks współczynnika **musi się zgadzać** (być równy) z wykładnikiem potęgi o podstawie  $x - x_0$ .

## Zbieżność szeregów potęgowych

Szereg  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$  jest zawsze zbieżny dla  $x = x_0$  i wtedy jego suma to  $c_0$ .

Dla pozostałych  $x \neq x_0$  szereg może być zbieżny lub nie. Są 3 przypadki

1. Szereg jest zbieżny tylko dla  $x = x_0$  np.  $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$  – zbieżny tylko dla  $x = 0$ . Jest to szereg bezużyteczny w praktyce.
2. Szereg jest bezwzględnie zbieżny dla wszystkich  $x$ , np.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ . Jest to najlepsza sytuacja.
3. Szereg jest bezwzględnie zbieżny na przedziale otwartym postaci  $(x_0 - R, x_0 + R)$  oraz – być może – zbieżny także na końcach tego przedziału. Dla pozostałych  $x$  nie jest zbieżny.  
Np.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  jest zbieżny dla  $x \in [-1, 1)$ .

Liczbę  $R > 0$  nazywamy promieniem zbieżności szeregu potęgowego, a zbiór  $x$  dla których szereg jest zbieżny – przedziałem zbieżności szeregu.

$R$  – połowa długości przedziału zbieżności.

Aby mieć promień zbieżności dla wszystkich szeregów definiujemy dodatkowo  $R = 0$  dla szeregów z przypadku 1 oraz  $R = \infty$  dla szeregów z przypadku 2.

## Wyznaczanie promienia zbieżności i przedziału zbieżności

Szereg jest zbieżny dla  $x = x_0$  i pytanie co dla pozostałych  $x$ .

Metoda jak najbardziej ogólna, działająca dla wszystkich typów szeregów potęgowych :

dla szeregu  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$  przyjmujemy  $a_n = c_n(x - x_0)^n$ ,  $x \neq x_0$ . Zmienna  $x$  staje się parametrem.

Ponieważ  $a_n$  zawiera  $n$  – tą potęgę więc korzystamy z kryterium Cauchy'ego lub d'Alemberta. Liczymy

$$q = q(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad \text{lub} \quad q = q(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

W zdecydowanej większości przypadków granica ta istnieje i prowadzi do najczęstszych sytuacji

1.  $q$  nie zależy od  $x$  i jest  $> 1$ . Wtedy szereg jest zbieżny tylko dla  $x = x_0$ .
2.  $q$  nie zależy od  $x$  i jest  $< 1$ . Wtedy szereg jest zbieżny dla wszystkich  $x$ .
3.  $q$  zależy od  $x$ . Wtedy mamy zbieżność dla  $q < 1$  i rozbieżność dla  $q > 1$  oraz

•

$$q < 1 \Leftrightarrow |x - x_0| < R \Leftrightarrow x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

”wstępny” przedział zbieżności,  $R$  – promień zbieżności

•

$$q > 1 \Leftrightarrow |x - x_0| > R \Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, \infty)$$

rozbieżność poza głównym przedziałem

•

$$q = 1 \Leftrightarrow |x - x_0| = R \Leftrightarrow x = x_0 \pm R$$

przypadek ”wątpliwy” na końcach przedziału. Dla tych  $x$  trzeba użyć **innego kryterium**

## Zastosowanie metody w praktyce

- Liczymy  $q$  i rozwiązujemy nierówność  $q < 1$ . Dostajemy wstępny (otwarty) przedział zbieżności.
- Zbieżność na końcach analizujemy osobno – wstawiamy każdy z końców i dostajemy szereg liczbowy, który analizujemy ale **NIGDY** z kryterium Cauchy’ego lub d’Alemberta bo **ZAWSZE** wyjdzie  $q = 1$ .

## Popularny błąd :

” ... wstępny przedział zbieżności to  $(-1, 1)$ .

Badam zbieżność dla  $x = 1$  z **kryterium d’Alemberta**”

**STRATA CZASU I ENERGII**. Będzie przypadek wątpliwy i  $q = 1$  a jeżeli przypadkiem wyjdzie  $q \neq 1$  to na pewno **gdzieś jest błąd**.

Przykłady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Tutaj  $a_n = \frac{x^n}{n!}$  oraz  $x_0 = 0$ . Używamy kryterium d’Alemberta  $a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$  oraz dla  $x \neq 0$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \right|$$

Stąd

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0 < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Tutaj  $a_n = \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$  oraz  $x_0 = 1$ . Korzystając z kryterium Cauchy'ego mamy dla  $x \neq 1$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left| \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}} \right|} = \sqrt[n]{\frac{|(x-1)^n|}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt[n]{|x-1|^n}}{\sqrt[n]{\sqrt{n}}} = \frac{|x-1|}{\sqrt[n]{n^{\frac{1}{2}}}}$$

Stąd

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x-1|$$

Teraz

$$q < 1 \Leftrightarrow |x-1| \leq 1 \Leftrightarrow x \in (0, 2)$$

Zatem wstępny przedział zbieżności to  $(0, 2)$ , a  $R = 1$ .

Badamy zbieżność na końcach tego przedziału.

$$x = 2 \text{ daje } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} - \text{rozbieżny bo } \frac{1}{2} \leq 1.$$

$$x = 0 \text{ daje } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(0-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} - \text{zbieżny z twierdzeniem Leibnitza, bo jest naprzemienny a ciąg } \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ jest malejący i dąży do } 0.$$

Zatem przedział zbieżności tego szeregu to  $[0, 2)$ .

### **Twierdzenie**

Gdy szereg  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$  ma wszystkie współczynniki  $c_n \neq 0$  i istnieje granica

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \text{ lub } q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \text{ to promień zbieżności wynosi}$$

- $R = \frac{1}{q}$  gdy  $q$  jest liczbą dodatnią,
- $R = 0$ , gdy  $q = \infty$ ,

- $R = \infty$ , gdy  $q = 0$ .

Uwaga. Twierdzenie to bywa **źle stosowane**.

Nie można go bezpośrednio stosować do np. szeregów potęgowych gdzie występują tylko potęgi parzyste lub tylko potęgi nieparzyste, bo wtedy  $q$  **nie istnieje**.

**Popularny błąd:**

”Dla szeregu  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot x^{2n+1}$  mamy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}}$

Stąd  $R = 2$ ,  $x \in (-2, 2)$ ”

**Źle jest wyznaczony  $c_n$ .** Tutaj  $\frac{1}{2^n} = c_{2n+1}$  ale  $c_{2n} = 0$  i  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$  nie istnieje.

Ten szereg jest szeregiem geometrycznym o ilorazie  $\frac{x^2}{2}$  i jest zbieżny dla  $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  czyli  $R = \sqrt{2}$ .

**Definicja**

Jeżeli szereg  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$  jest zbieżny przynajmniej na  $(x_0 - R, x_0 + R)$ ,  $R > 0$  to jego sumę  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$  nazywamy rzeczywistą funkcją analityczną, a szereg – szeregiem Taylora.

## Własności szeregów potęgowych

1. Gdy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

to  $f$  ma pochodne dowolnego rzędu w  $x_0$  oraz

$$c_0 = f(x_0), \quad c_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, \quad c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \dots, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Stąd wynikają rozwinięcia popularnych funkcji w szereg Maclaurina ( $x_0 = 0$ ).

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad x \in (-1, 1]$$



$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!} x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} x^3 + \dots, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad x \in [-1, 1]$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad x \in [-1, 1]$$

2. Jeżeli mamy dwa szeregi o tym samym środku i przedziałach zbieżności  $I_1$  i  $I_2$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \quad x \in I_1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n, \quad x \in I_2$$

to

- dla dowolnego  $c \in \mathbb{R}$  zachodzi  $c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c \cdot c_n (x - x_0)^n$
- dla  $x \in I_1 \cap I_2$  mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \pm d_n) (x - x_0)^n$$

Mamy

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1, 1]$$

Stąd

$$x \cos x = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} x \cdot \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n)!}$$

oraz dla  $x \in \mathbb{R} \cap [-1, 1] = [-1, 1]$

$$x \cos x + \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n}{(2n)!} + \frac{(-1)^n}{2n+1} \right) x^{2n+1}$$

3. W miejsce  $x$  w szeregu Maclaurina można podstawić wyrażenie potęgowe  $ax^k$ ,  $k \in \mathbb{N}^+$ . Daje to nowy szereg nowej funkcji z nowym przedziałem zbieżności. Ten nowy przedział można wyznaczyć na podstawie przedziału zbieżności wyjściowego szeregu

### Przykłady

a) Szereg Maclaurina dla funkcji  $\ln(1 + 3x)$ .

Używamy rozwinięcia

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad x \in (-1, 1]$$

Aby dostać  $\ln(1 + 3x)$  w miejsce  $x$  trzeba wstawić  $3x$  ( $x := 3x$ ). To daje

$$\ln(1 + 3x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3x)^{n+1}}{n+1}, \quad 3x \in (-1, 1]$$

Po uproszczeniu

$$\ln(1 + 3x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^{n+1}}{n+1} x^{n+1}$$

$$3x \in (-1, 1] \Leftrightarrow -1 < 3x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

b) Szereg Maclaurina dla funkcji  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Używamy rozwinięcia

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$$

Wstawiając  $x := (-x)$  dostajemy

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

To daje

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n!} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2n!} - \frac{(-1)^n}{2n!} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1 - (-1)^n}{2n!} \right) x^n \end{aligned}$$

Współczynnikiem tego szeregu jest więc

$$c_n = \frac{1 - (-1)^n}{2n!} = \begin{cases} 0, & n = 2k, \quad k \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{n!} = \frac{1}{(2k+1)!}, & n = 2k+1, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Stąd

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$$

c) Szereg Maclaurina dla funkcji  $\frac{x}{3+x^4}$

W przypadku funkcji wymiernej **zawsze** korzystamy z szeregu geometrycznego

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad x \in (-1, 1)$$

Doprowadzamy wyrażenie do postaci stała  $\cdot \frac{1}{1 - \text{"coś"}}$  i za  $x$  wstawiamy to "coś".

Zatem

$$\frac{x}{3+x^4} = \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^4}{3}} = \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x^4}{3}\right)}$$

Czyli "coś"  $= -\frac{x^4}{3}$  i to daje

$$\frac{x}{3+x^4} = \frac{x}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x^4}{3}\right)^n = \frac{x}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} x^{4n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{3} \cdot \frac{(-1)^n}{3^n} x^{4n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^{4n+1}$$

Przedział zbieżności wynika z warunku

$$-1 < -\frac{x^4}{3} < 1 \Leftrightarrow -3 < x^4 < 3 \Leftrightarrow -3 < x^4 \wedge x^4 < 3$$

Pierwsza z tych nierówności jest zawsze prawdziwa. Rozwiązanie drugiej daje  $-\sqrt[4]{3} < x < \sqrt[4]{3}$ . Czyli przedział zbieżności to  $(-\sqrt[4]{3}, \sqrt[4]{3})$ .

4. Gdy  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ ,  $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$  to  $f$  ma pochodną dowolnego rzędu i zachodzi wzór

$$f'(x) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n(x-x_0)^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(x-x_0)^{n-1}$$

Jest to rozszerzenie wzoru "pochodna sumy = suma pochodnych" na nieskończoną ilość składników