Wykład 1 - Analiza matematyczna II

Skrypt wykładu Krzysztofa Michalika

25 marca 2023

1 Całki niewłaściwe I rodzaju

Ustalamy liczbę $a \in \mathbb{R}$. Niech f będzie funkcją całkowalną na każdym przedziale w postaci $[a, T]$ gdzie $T > a$. Definiujemy całkę niewłaściwą pierwszego rodzaju z f na półprostej $[a, \infty]$ jako

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty} \int\limits_a^T f(x)\,dx \text{ , gdy granica po prawej stronie istnieje}$$

Analogicznie, gdy f jest całkowalna na każdym przedziale postaci $[T, b]$, gdzie $T < b$. Definiujemy całkę niewłaściwą pierwszego rodzaju z f na półprostej $[-\infty$, b] jako

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{T\to-\infty} \int\limits_T^b f(x)\,dx \text{ , gdy granica po prawej stronie istnieje}$$

Terminologia dotycząca takich całek jest taka, jak dla ciągów. Są 3 przypadki :

1. Granica z prawej strony jest liczbą. Wtedy mówimy, że całka jest zbieżna.
2. Granica z prawej strony jest równa ∞ lub $-\infty$. Wtedy mówimy, że całka jest rozbieżna (odpowiednio do ∞ lub $-\infty$).
3. Granica z prawej strony nie istnieje. Wtedy mówimy, że całka jest rozbieżna.

Analogicznie dla $\int\limits_\infty^b f(x)\,dx$

Przykłady :

$$\int\limits_0^\infty \sin x\,dx = \lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T \sin x\,dx = \lim_{T\to\infty} [-\cos x]_0^T = \lim_{T\to\infty} (-\cos T - (-\cos 0)) = \lim_{T\to\infty} (1 - \cos T)$$

Granica ta nie istnieje więc całka jest rozbieżna.

$$\int_{-\infty}^{0} 2^x\,dx = \lim_{T\to-\infty}\int_{T}^{0} 2^x\,dx = \lim_{T\to-\infty}\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_T^0 = \lim_{T\to-\infty}\left(\frac{1}{\ln 2}-\frac{2^T}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}$$

Całka jest zbieżna do $\dfrac{1}{\ln 2}$.

Pozostaje przypadek $p = 1$. Wtedy

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|+C, \quad \int_a^T \frac{1}{x}\,dx = [\ln|x|]_a^T = \ln|T|-\ln|a|, \quad \int_a^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{T\to\infty}(\ln|T|-\ln|a|) = \infty$$

Udowodniliśmy zatem ważny wynik

Twierdzenie

Gdy $a > 0$ to całka $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ jest skończona dla $p > 1$ oraz nieskończona dla $p \leqslant 1$.

Podobnie można łatwo pokazać poniższy wynik

Twierdzenie

Gdy $a \in \mathbb{R}$ i $A > 0$ to całka $\displaystyle\int_a^\infty A^x\,dx$ jest skończona dla $0 < A < 1$ oraz nieskończona dla $A \geqslant 1$

Gdy $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$ to

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty} F(T) - \lim_{S\to\infty} F(S)$$

przy czym przynajmniej jedna z granic z prawej strony nie istnieje lub zachodzi przypadek $\infty - \infty$ to $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ jest rozbieżna, a w pozostałych przypadkach całka ma wartość wynikającą z arytmetyki granic.

W przypadku kiedy całki nie da się obliczyć w sposób dokładny można to zrobić w sposób przybliżony, pod warunkiem , że wiemy, że jest zbieżna.
Kryteria zbieżności to twierdzenia opisujące warunki dostateczne zbieżności lub rozbieżności danej klasy całek. Najczęściej mają postać implikacji ale NIE równoważności.

Oznacza to zwykle własności postaci
  warunek zachodzi $\Rightarrow$ całka jest zbieżna/rozbieżna
  warunek nie zachodzi $\Rightarrow$ nic nie wiemy o zbieżności/rozbieżności całki

Popularne kryteria zbieżności całek z ∞

0. Warunek konieczny zbieżności całki

Jeżeli całka $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ jest zbieżna to $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ jest równa 0 lub nie istnieje.

Transpozycja twierdzenia daje następujący wynik:

Jeżeli $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ istnieje i jest różna od 0 to całka $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ nie jest zbieżna, przy czym

- gdy $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) > 0$ to $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \infty$,
- gdy $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) < 0$ to $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = -\infty$,

Uwaga. Warunek konieczny to tylko implikacja!
Jeżeli $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ jest równa 0 lub nie istnieje to jeszcze **NIC NIE WIEMY** o całce,

Na przykład całki $\int\limits_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx,\ a > 0$, mają $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^p} = 0$ dla wszystkich $p > 0$ ale niektóre z tych całek są zbieżne, a niektóre rozbieżne

Ważna klasa całek - całki z funkcji nieujemnych

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx,\ \ f \geqslant 0$$

Wtedy $\int\limits_a^T f(x)\,dx = F(T) - F(a)$ jest funkcją niemalejącą zmiennej T zatem całka $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \lim\limits_{T\to\infty} \int\limits_a^T f(x)\,dx$ zawsze istnieje. Może być to liczba lub ∞.
Zatem brak zbieżności takich całek oznacza rozbieżność do ∞.

Dla całek z funkcji nieujemnych mamy dwa kolejne kryteria zbieżności.

1. Kryterium porównawcze
2. Kryterium ilorazowe

Twierdzenie(kryterium porównawcze)

Dane są dwie całki $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ oraz $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$. Wtedy zachodzą następujące własności

1. (Przypadek zbieżności). Gdy $\forall x \geqslant x_0 \geqslant a\ \ 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ i $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ jest zbieżna to $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ też jest zbieżna. Ponadto $0 \leqslant \int\limits_a^\infty f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^\infty g(x)\,dx$

2. (Przypadek rozbieżności) Gdy $\forall x \geqslant x_0 \geqslant a \;\; 0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$ i $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ jest rozbieżna (więc równa ∞) to $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ też jest rozbieżna (do ∞).

3. **(Przypadek wątpliwy)** Gdy $\forall x \geqslant x_0 \geqslant a \;\; 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ ale $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ jest rozbieżna to **NIC NIE WIEMY** o zbieżności $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.

4. **(Przypadek wątpliwy)** Gdy $\forall x \geqslant x_0 \geqslant a \;\; 0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$ ale $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ jest zbieżna to **NIC NIE WIEMY** o zbieżności $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.

Uwagi:

- $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ jest całką z zadania, $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ tworzymy sami.
- Porównujemy najczęściej z całkami $\int\limits_a^\infty A^x\,dx$ lub $\int\limits_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$. Wtedy f często ma postać ułamków i możemy spróbować wziąć g jako :

  C - iloraz najwyższych potęg z licznika i mianownika f
- Trzeba uważać aby nierówność między f i g była prawdziwa i nie zapomnieć przypadku wątpliwego, bo wtedy **trzeba zaczynać od nowa**.
- Warto sprawdzić opisany wyżej iloraz najwyższych potęg i na tej podstawie przewidzieć czy chcemy udowodnić zbieżność czy rozbieżność. To pomaga skonstruować odpowiednią nierówność między f i g.

Popularny błąd - odpowiedź na podstawie przypadku wątpliwego

Na przykład dla całki $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$:

"Mamy $0 \leqslant \frac{1}{x+\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{x}$ i całka $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ jest rozbieżna zatem całka $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$ jest rozbieżna."

GAME OVER... To jest przypadek nr 3 (wątpliwy)

Przykład

$$\int\limits_4^\infty \frac{2x-3}{x^3-1}\,dx$$

Przewidywanie zbieżności/rozbieżności
Najwyższe potęgi sugerują, że mając

$$\frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}, \qquad \text{a} \quad \int_4^\infty \frac{1}{x^2}\,dx < \infty, \qquad \text{bo} \quad 2 > 1$$

Dowodzimy zbieżność. Trzeba mieć

$$0 \leqslant \frac{2x-3}{x^3-1} \leqslant g(x) = C \cdot \frac{x}{x^3}$$

Jak w twierdzeniu o 3 ciągach

$$0 \leqslant \frac{2x}{x^3 - \frac{1}{2}x^3} = 4 \cdot \frac{x}{x^3} = 4 \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$\int_4^\infty \frac{4}{x^2}\,dx = 4\int_4^\infty \frac{1}{x^2}\,dx < \infty \qquad \left(\frac{1}{2}x^3 > 1 \text{ dla } x \geqslant 4\right)$$

Twierdzenie(kryterium ilorazowe)

Dane są dwie całki $\int_a^\infty f(x)\,dx$ oraz $\int_a^\infty g(x)\,dx$. Ponadto

$$\forall x \geqslant x_0 \geqslant a \quad f(x), g(x) > 0$$

Jeżeli istnieje granica $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ i jest liczbą dodatnią to wtedy obie całki są zbieżne albo obie rozbieżne do ∞.

Uwagi

- Funkcję g tworzymy podobnie jak dla kryterium porównawczego
- Nie ma problemu z nierównościami :) ale za to trzeba umieć liczyć granice
- Granica nie może być ani 0 ani ∞: $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$
- Rozwiązanie musi zawierać wniosek "granica ilorazu jest liczbą dodatnią więc obie całki są zbieżne lub obie rozbieżne" - bez tego będzie niepełne.
- Kryterium zwykle jest wygodniejsze niż porównawcze ale są przykłady, które "idą" z porównawczego ale nie z ilorazowego, bo granica ilorazu nie istnieje

  Np. $\int_1^\infty \frac{2+\sin x}{x}\,dx$

Przykłady

Poprzedni przykład raz jeszcze

$$\int_4^\infty \frac{2x-3}{x^3-1}\,dx$$

$$f(x) = \frac{2x-3}{x^3-1}, \quad x \geqslant 4$$

$$g(x) = \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} > 0$$

$$\lim_{x\to\infty} = \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(2x-3)}{x^3-1} = 2$$

Obie całki zbieżne lub obie rozbieżne do ∞

Przykłady o postaci funkcji złożonej $\int\limits_a^\infty f(g(x))\,dx$ gdzie $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0^+$ oraz $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0^+$

Nową całką jest całka z funkcji wewnętrznej $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$

Liczymy granicę

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(g(x))}{g(x)} = \lim_{t=g(x)\to 0^+} \frac{f(t)}{t} \left[\frac{0}{0}\right]$$

przy użyciu granic podstawowych lub reguły de l'Hospitala.

Na przykład $\int\limits_1^\infty \left(2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1\right)\,dx$

$$\int_1^\infty \left(2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1\right)\,dx$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$$

$$f(x) = 2^x - 1 > 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2^t - 1}{t} \left[\frac{0}{0}\right] = \ln 2 \in (0, \infty)$$

Obie całki zbieżne lub obie rozbieżne

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \infty \quad \text{bo} \quad \frac{1}{2} \leqslant 1$$

Wartość główna całki niewłaściwej I rodzaju

Całka $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ jest rozbiezna, gdyż jako suma całek prowadzi do symbolu $\infty - \infty$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} x\,dx + \int\limits_{0}^{\infty} x\,dx = -\infty + \infty$$

Intuicyjnie oczekwialibyśmy jednak, że jest ona równa 0 - funkcja podcałkowa jest nieparzysta czyli mamy "tyle funkcji na + co na -", a więc wszystko powinno się wzajemnie zrównoważyć. Aby taka całka miała sens trzeba nieco zmodyfikować jej definicję i wprowadzić pojęcie wartości głównej całki niewłaściwej (obustronnej).

Definicja. Wartość główna całki $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ to wielkość

$$\text{P.V.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty} \int\limits_{-T}^{T} f(x)\,dx$$

o ile powyższa granica istnieje.

Oznacza to, że przybliżamy całkę po $\mathbb{R}$ całkami po przedziale symetrycznym względem 0. P.V. jest skrótem od angielskiego "Principal Value".

Na przykład

$$\text{P.V.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \lim_{T\to\infty} \int\limits_{-T}^{T} x\,dx = \lim_{T\to\infty} 0 = 0$$

Zauważmy, że gdy $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ to

$$\text{P.V.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty} \int\limits_{-T}^{T} f(x)\,dx = \lim T \to infty(F(T) - F(-T))$$

Jeżeli teraz ma sens wyrażenie $\lim\limits_{T\to\infty} F(T) - \lim\limits_{T\to\infty} F(-T)$ to biorąc $S = -T \to -\infty$ dostajemy

$$\text{P.V.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty} (F(T) - F(-T)) = \lim_{T\to\infty} F(T) - \lim_{T\to\infty} F(-T) =$$

$$= \lim_{T\to\infty} F(T) - \lim_{S\to-\infty} F(S) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

Udowodniliśmy zatem poniższe twierdzenie.

Jeżeli całka $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ istnieje w zwykłym sensie (jako suma odpowiednich całek jednostronnych jest liczbą lub jedną z nieskończoności) to również jej wartość główna istnieje i jest równa tej całce.

Natomiast może się zdarzyć, że wartość główna całki istnieje ale sama całka jest rozbieżna (był przykład).
W szczególności gdy funkcja jest na $\mathbb{R}$ ciągła i nieparzysta to wartość główna całki z tej funkcji jest zawsze 0 niezależnie od zbieżności samej całki.

2 Całki niewłaściwe II rodzaju

Ustalamy liczby $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. Niech f będzie funkcją całkowalną na każdym przedziale postaci $[a, T]$, gdzie $a < T < b$. Definiujemy całkę niewłaściwą drugiego rodzaju z f na przedziale $[a, b)$ jako

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{T\to b^+} \int_a^T f(x)\,dx, \quad \text{gdy granica po prawej stronie istnieje.}$$

Analogicznie, gdy f jest całkowalna na każdym przedziale postaci $[T, b]$, gdzie $a < T < b$. to definiujemy całkę niewłaściwą pierwszego rodzaju z f na przedziale $(a, b]$ jako

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{T\to a^+} \int_T^b f(x)\,dx, \quad \text{gdy granica po prawej stronie istnieje.}$$

Terminologia dotycząca takich całek jest taka, jak dla całek niewłaściwych 1 rodzaju. Są 3 przypadki :

1. Granica z prawej strony jest liczbą. Wtedy całka jest zbieżna (do tej granicy).
2. Granica z prawej strony jest równa ∞ lub $-\infty$. Wtedy całka jest rozbieżna do ∞ lub $-\infty$.
3. Granica z prawej strony nie istnieje. Wtedy mówimy, że całka jest rozbieżna.

Interpretacja geometryczna.

Podobnie jak dla zwykłej całki oznaczonej, jeżeli $f \geqslant 0$ na $(a, b]$ lub $[a, b)$ to całka niewłaściwa 2 rodzaju $\int_a^b f(x)\,dx$ daje pole obszaru ograniczonego osią X, wykresem f oraz prostymi $x = a$ oraz $x = b$.
Najczęściej definiujemy tego typu całkę w przypadku gdy f ma asymptotę pionową $x = a$ lub $x = b$. Wtedy ten obszar nie jest ograniczony z góry bądź z dołu.

Na przykład

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{T\to 0^+} \int_T^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \lim_{T\to 0^+} [2\sqrt{x}]_T^1 = \lim_{T\to 0^+} (2 - 2\sqrt{T}) = 2$$

Całka jest zbieżna do 2.

Wersja całki obustronnej

Ustalamy liczby $a, b, c \in \mathbb{R},\ a < c < b$. Niech f będzie funkcją całkowalną na każdym przedziale postaci $[a, T]$, $T < c$, oraz $[T, b]$, $T > c$. Definiujemy całkę niewłaściwą 2 rodzaju z f na zbiorze $[a, c) \cup (c, b]$ jako sumę dwóch całek niewłaściwych. tzn.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

przy czym gdy przynajmniej jedna z całek z prawej strony nie istnieje lub zachodzi przypadek $\infty - \infty$ to $\int_a^b f(x)\,dx$ jest rozbieżna, a w pozostałych przypadkach całka ma wartość wynikającą z arytmetyki granic.

Najczęściej takie całki pojawiają się, gdy f ma asymptotę w $x = c$.

Twierdzenie
Istnieją podstawienia, które każdą całkę niewłaściwą 2 rodzaju sprowadzają do przypadku całki niewłaściwej 1 rodzaju.
W szczególności

- dla całki $(a, b]$ możemy wziąć $t = \dfrac{1}{x-a}$ co daje $x = a + \dfrac{1}{t}$ oraz

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_C^\infty \frac{1}{t^2} f\left(a + \frac{1}{t}\right) dt \quad \text{, gdzie} \quad C = \frac{1}{b-a}$$

- dla całki na $[a, b)$ możemy wziąć $t = \dfrac{1}{b-x}$ co daje $t = b - \dfrac{1}{t}$ oraz

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_C^\infty \frac{1}{t^2} f\left(b - \frac{1}{t}\right) dt \quad \text{, gdzie} \quad C = \frac{1}{b-a}$$

Na przykład dla $p > 0$ biorąc $t = \dfrac{1}{x}$ mamy

$$\int_0^b \frac{1}{x^p}\,dx = \int_{\frac{1}{b}}^\infty \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^p} dt = \int_{\frac{1}{b}}^\infty \frac{1}{t^{2-p}}\,dt$$

Podstawienie to oznacza też, że mamy analogiczne kryteria zbieżności dla całek 2 rodzaju - porównawcze i ilorazowe, przy czym dla kryterium ilorazowego liczymy granicę ilorazu funkcji w odpowiednim końcu zadanego przedziału.

Na koniec, wartość główna całki $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ na $[a,c)\cup(c,b]$ to wielkość

$$\text{P.V.}\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{T\to 0^+}\left(\int\limits_a^{c-T} f(x)\,dx + \int\limits_{c+T}^b f(x)\,dx\right)$$

o ile powyższa granica istnieje.
Oznacza to, że odpowiednie końce przedziałów całkowania są w jednakowej odległości od c i zbiegają do c.

Zbieżność bezwględna całek niewłaściwych

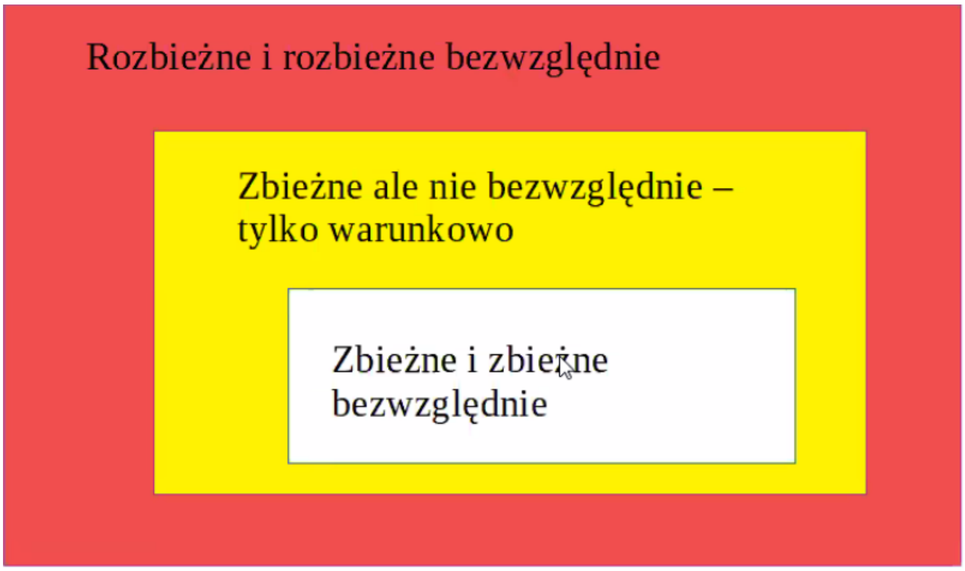
Definicja. Całka $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ jest zbieżna bezwględnie, gdy zbieżna jest całka $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$.
Analogiczne definicje mamy dla pozostałych całek 1 rodzaju oraz dla całek 2 rodzaju.

Uwagi

- Gdy f jest nieujemna to mamy $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ i definicja nie wnosi nic nowego. Sytuacja się zmienia, gdy są przedziały na którym f ma różne znaki.
- Nierówność $\left|\int\limits_a^T f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^T |f(x)|\,dx$ daje $\left|\int\limits_a^\infty f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^\infty |f(x)|dx$ ale gdy są przedziały na którym f ma różne znaki to równość nie zachodzi. Zatem, ogólnie, $\left|\int\limits_a^\infty f(x)\,dx\right|$ i $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ to nie to samo.

Twierdzenie
Jeżeli całka niewłaściwa jest bezwględnie zbieżna to jest zbieżna (w zwykłym sensie).
Transpozycja tego twierdzenia daje warunek równoważny :
Jeżeli całka $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ nie jest zbieżna to również nie jest zbieżna bezwględnie,
co oznacza $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx = \infty$.
Analogicznie dla pozostałych typów całek niewłaściwych.

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Są całki zbieżne ale nie bezwględnie, np. $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$.
Takie całki to tzw. całki zbieżne warunkowo.
Są więc 3 możliwe sytuacje - 3 rozłączne podzbiory całek niewłaściwych:



Przykład

Całka $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}}\,dx$ jest zbieżna bezwględnie, bo biorąc $\int\limits_1^\infty \left|\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}}\right| dx$ i używając kryterium porównawczego mamy

$$0 \leqslant \left|\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}}\right| = \frac{|\sin x|}{x^{\frac{4}{3}}} \leqslant \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$$

a całka $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}\,dx$ jest zbieżna bo $\frac{4}{3} > 1$. Zatem $\int\limits_1^\infty \left|\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}}\right| dx$ jest zbieżna, a stąd $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}}\,dx$ też jest zbieżna.

3 Szeregi liczbowe

Dany jest ciąg liczbowy $a_1, a_2, ..., a_n, ...$
Tworzymy jego ciąg sum częściowych :

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Jeżeli istnieje granica $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ (skończona lub nieskończona) to oznaczamy ją symbolem $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

W ogólnym przypadku możemy wziąć ciąg, który zaczyna się od dowolnej liczby całkowitej n_0 : $a_{n_0}, a_{n_0+1}, ..., a_n, ...$ i jego sum częściowych

$$S_n = a_{n_0}, \quad S_{n_0+1} = a_{n_0} + a_{n_0+1}, \quad S_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + ... + a_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k, \;\; n \geqslant n_0$$

$S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ jest oznaczana przez $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$.

Definicja. Dla ustalonego $n_0 \in \mathbb{Z}$ obiekt $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$ nazywamy szeregiem liczbowym, a wartość S (gdy istnieje) jego sumą, oznaczaną także przez $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$. Mamy wtedy

$$S_n = a_{n_0}, \quad S_{n_0+1} = a_{n_0} + a_{n_0+1}. \; S_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + ... + a_n + ... = \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=n_0}^{n} a_k = \lim_{n \to \infty} S_n$$

gdzie

- S_n to n - ta suma szeregu,
- a_n to n - ty wyraz szeregu.

Terminologia dotycząca sumy S jest taka, jak dla ciągów. Są 3 przypadki :

1. S jest liczbą. Wtedy dany szereg jest zbieżny (do S).
2. $S = \infty$ lub $S = -\infty$. Wtedy dany szereg jest rozbieżny (do ∞ lub $-\infty$).
3. $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$ nie istnieje. Wtedy dany szereg jest rozbieżny.

Przykłady

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{ - szereg zbieżny do 1}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ... = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ - szereg rozbieżny do } \infty$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \text{ - szereg rozbieżny}$$

Uwaga. Każdy szereg zaczynający się od indeksu $n_0 \in \mathbb{Z}$ można przekształcić tak, by zaczynał się od indeksu 1. Wynika to z równości

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+n_0-1}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ... = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

Obliczanie sum szeregów

Jest to zadanie trudne, a najczęściej niemożliwe, gdyż trudno jest znaleźć bezpośredni wzór na sumy częściowe S_n.

Niektóre przypadki szczególne.

1. Ciąg geometryczny i szereg geometryczny.

   - $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, gdzie q jest ilorazem ciągu (czyli $a_{n+1} = a_n \cdot q, \; n \geqslant 1$).
     Wtedy
     $$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1 \; oraz \; S_n = na_1, \; q = 1$$
     To oznacza, że dla $a_1 \neq 0$,
   - szereg jest zbieżny dla $-1 < q < 1$ i jego suma jest $S = \dfrac{a_1}{1-q}$,
   - szereg jest rozbieżny do ∞ lub $-\infty$ dla $q \geqslant 1$, znak zależy od znaku a_1,
   - szereg jest rozbieżny (suma nie istnieje) dla $q \leqslant -1$

   Stąd np.
   $$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1 \text{ , bo tutaj } a_1 = q = \frac{1}{2}$$

2. Szeregi o wyrazie ogólnym postaci
   $a_n = f(n+1) - f(n)$ lub $a_n = f(n) - f(n+1)$, gdzie f jest pewną funkcją.
   W bardziej ogólnej postaci
   $a_n = f(n+k) - f(n)$ lub $a_n = f(n) - f(n+k)$, gdzie $k \in \mathbb{N}^+$ to tzw. krok.

   Takie szeregi to tzw. szeregi teleskopowe (telescoping series).
   Przykłady
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \text{ - tutaj } f(x) = \frac{1}{x}$$
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) \text{ - tutaj } f(x) = \sqrt{x}$$
   $$\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{arc\,tg}(n) - \operatorname{arc\,tg}(n+2)) \text{ - tutaj } f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$$
   Dla takich szeregów łatwo wyznacza się wzór na S_n. Wyrazy wewnętrzne się upraszczają i zostaje:
   suma k pierwszych wartości, f suma k ostatnich wartości f (lub na odwrót)

Na przykład dla $\sum n = 1^{\infty} (f(n) - f(n+1)))$ mamy

$$S_n = f(1) - f(2) + f(2) - f(3) + f(3) - f(4) + ... + f(n) - f(n+1) = f(1) - f(n+1)$$

.
Jeżeli istnieje granica $G = \lim_{x \to \infty} f(x)$ to mamy

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} (f(1) - f(n+1)) = f(1) - G$$