Notatki na kolokwium z Matematyki dyskretnej – część 2

Michał Puchyr

1 Relacje równoważności

Objaśnienia

Operacja rozbicia - rozdzielanie klas równoważności np. $\{a, b, c\} \xrightarrow{op2} \{a, b\}\{c\}$
Operacja sklejenia - sklejanie klas równoważności np. $\{a, b\}\{c\} \xrightarrow{op1} \{a, b, c\}$

Operacja odłączania - op3 przekształca podział w taki sposób, że usuwa część lub wszystkie obiekty z wybranej klasy podziału i lokuje je w specjalnym buforze pomocniczym. Jeśli bufor pomocniczy jest niepusty, obiekty są do niego dodawane.

Operacja dołączania - op4 przekształca podział w taki sposób, że usuwa część lub wszystkie obiekty z bufora pomocniczego i dołącza je do istniejącej klasy podziału albo tworzy z nich nową klasę podziału.

Przykład

Niech dany będzie zbiór $U = u_1, u_2, ..., u_{10}$ oraz relacje równoważności $P, Q \in \mathbb{E}(U)$ reprezentowane podziałami:

$$\mathbb{K}_P = \{\{u_1, u_2, u_3\}, \{u_4\}, \{u_5, u_6\}, \{u_7, u_8, u_9, u_{10}\}\}$$

$$\mathbb{K}_Q = \{\{u_1\}, \{u_2, u_3, u_4, u_5\}, \{u_6\}, \{u_7, u_8\}, \{u_9, u_{10}\}\}$$

Oblicz $\delta^{1,2}$ (P, Q) oraz $\delta^{3,4}$ (P, Q).
Rozwiązanie

1. $\delta^{1,2} = 4 lub 6$
2. $\delta^{3,4} = 4$

2 Aproksymacje

Przybliżenie zbioru

Mówimy, że dla zadanego uniwersum U, określona została przestrzeń aproksymacyjna $\mathbb{K} = K_1, K_2, ..., K_M$, wtedy i tylko wtedy gdy $\bigcup_{i=1}^{M} K_i = U$ oraz $K_i \cap K_j = \varnothing$ dla $i \neq j$. Przybliżeniem zbioru $D \subseteq U$ w przestrzeni aproksymacyjnej $\mathbb{K}$ (określonym także terminem zbiór przybliżony) nazywamy parę:

$$\mathrm{apr}(D) = (\mathrm{apr}_{\mathbb{K}}, \mathrm{apr}^{\mathbb{K}}(D))$$

gdzie

$$\mathrm{apr}^{\mathbb{K}}(D) = \bigcup_{K \in \mathbb{K},\ K \cap D \neq \varnothing} K \qquad \mathrm{apr}_{\mathbb{K}}(D) = \bigcup_{K \in \mathbb{K},\ K \subseteq D} K$$

$\mathrm{apr}^{\mathbb{K}}(D)$ – przybliżenie zbioru D z góry
$\mathrm{apr}_{\mathbb{K}}(D)$ – przybliżenie zbioru D z dołu

Miary jakości przybliżenia

$$\mathrm{completness}(\mathrm{apr}(Z)) = \frac{|\mathrm{apr}_{\mathbb{K}}(Z)|}{|Z|}$$

$$\mathrm{precision}(\mathrm{apr}(Z)) = \frac{|\mathrm{apr}^{\mathbb{K}}(Z)|}{|Z|}$$

Przykład

Niech $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$ oraz niech $\mathbb{K} = \{\{u_1, u_2\}, \{u_3, u_4, u_5\}, \{u_6, u_7\}\}$
Wyznaczyć dolną i górną aproksymację dla $Z_2 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

K_i	$K_i \cap Z_2$	$K_i \subseteq Z_2$
$\{u_1, u_2\}$	$\{u_1, u_2\}$	$\{u_1, u_2\}$
$\{u_3, u_4, u_5\}$	$\{u_3, u_4\}$	$\varnothing$
$\{u_6, u_7\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

$$\mathrm{apr}_{\mathbb{K}}(Z_2) = \{u_1, u_2\}$$

$$\mathrm{apr}^{\mathbb{K}}(Z_2) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$$

Obliczyć kompletność i miarę jakości przybliżenia dla Z_2.

$$\mathrm{completness}(\mathrm{apr}(Z_2)) = \frac{|\mathrm{apr}_{\mathbb{K}}(Z_2)|}{|Z_2|} = \frac{2}{4} = 0.5$$

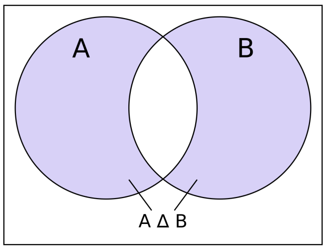
$$\mathrm{precision}(\mathrm{apr}(Z_2)) = \frac{|\mathrm{apr}^{\mathbb{K}}(Z_2)|}{|Z_2|} = \frac{4}{4} = 1$$

Aproksymacje - Na chłopski rozum

Przybliżenie dolne - jest to zbiór elementów, które w całości zawierają się w zbiorze przybliżanym.
Przybliżenie górne - zbiór wszystkich elementów, które mają chociaż jeden element wspólny z przybliżanym zbiorem.
Przybliżenie odgórnie równe jest wtedy kiedy przybliżenia górne zbiorów są takie same. Zapis $X =^{\mathbb{K}} Y$
Przybliżenie oddolnie równe jest wtedy kiedy przybliżenia dolne zbiorów są takie same. Zapis $X =_{\mathbb{K}} Y$
Zbiory równe w przestrzeni aproksymacyjnej $\mathbb{K}$ wtedy i tylko wtedy gdy $X =^{\mathbb{K}} Y$ oraz $X =_{\mathbb{K}} Y$. Piszemy $X = \frac{\mathbb{K}}{\mathbb{K}} Y$

3 Wyznaczanie reprezentanta

Różnica symetryczna zbiorów A i B to zbiór elementów należących do A lub B, ale nie należących do $A \cap B$.



Do wyznaczania podobieństwa można użyć wzór

$$\sigma = \frac{1}{1 + \delta}$$

Przykład

Niech dane będzie uniwersum $U = \{a, b, c, d, e, f\}$ z funkcją odległości $\delta : U \times U \rightarrow R+$ jako makrostrukturą:

δ	a	b	c	d	e	f
a	0	2	3	1	8	6
b	2	0	2	1	10	9
c	3	2	0	2	11	8
d	1	1	2	0	10	6
e	8	10	11	10	0	1
f	6	9	8	6	1	0

a) Wyznacz medoid (medoidy) dla profilu $P = \{2a, b, 3d, e, 2f\}$.

		a	b	c	d	e	f
a	2	0	4	6	2	16	12
b	1	2	0	2	1	10	9
c	0	0	0	0	0	0	0
d	3	3	3	6	0	30	18
e	1	8	10	10	10	0	1
f	2	12	18	16	12	2	0
		25	35	40	25	58	40

Jest to a lub d.

b) Wyznacz centroid (centroidy) dla profilu $P = \{2a, d\}$.

		a	b	c	d	e	f
a	2	0	4	6	2	16	12
b	0	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	0	0	0	0
d	1	1	1	2	0	10	6
e	0	0	0	0	0	0	0
f	0	0	0	0	0	0	0
		1	5	8	2	26	18

Jest to a.

c) Wyznacz reprezentanta profilu $P = \{2a, b, e\}$ w zbiorze $B = \{e, f\}$.

		a	b	c	d	e	f
a	2	0	4	6	2	16	12
b	1	2	0	2	1	10	9
c	0	0	0	0	0	0	0
d	0	0	0	0	0	0	0
e	1	8	10	10	10	0	1
f	0	0	0	0	0	0	0
		10	14	18	13	26	22

Jest to f.

Przykład

Stosując miarę 2Dice wyznaczyć reprezentację zdefiniowanego poniżej profilu zbiorów
Zbiór obiektów: $U - \{a, b, c\}$
Zbiory profilu: $P_1 - \{a\}, P_2 - \{b, c\}, P_3 - \{a, b\}$
Profil: $P = \{2P_1, 3P_2, P_3\}$

$$P_{2Dic} = \frac{2|X \cap Y|}{|X| + |Y|}$$

	P_1	P_2	P_3
P_1	1	0	2/3
P_2	0	1	1/2
P_3	2/3	1/2	1

$$\Sigma \text{ dla } P_1 = \frac{2}{2} \cdot 2 + 0 + \frac{2}{3} = 2\frac{2}{3}$$

$$\Sigma \text{ dla } P_2 = \frac{2 \cdot 0}{2} \cdot 2 + 3 \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{1}{2} = 6\frac{1}{2} \quad \text{MAX}$$

$$\Sigma \text{ dla } P_3 = \frac{2}{3} \cdot 2 + 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{4}{3} + \frac{3}{2} + 1 = \frac{23}{6}$$

Najlepszym reprezentantem jest P_2, bo dla niego uzyskano najwyższe podobieństwo dla całego profilu.

4 Przydatne

Operator min - iloczyn
Operator max - suma