# Matematyka dyskretna - notatki na kolokwium 1

Michał Puchyr

8 kwietnia 2023

## 1 Multizbiory

$X \subseteq Y$ - zawieranie, zbiór $X$ zawiera się lub jest równy zbiorowi $Y$. Dosłownie każdy element $X$ jest w $Y$.
$X \subset Y$ - zawieranie właściwe, zbiór $X$ zawiera się w $Y$ oraz $Y$ posiada jakiś element który nie należy do $X$.
Dla dowolnych zbiorów $A, B, C$:

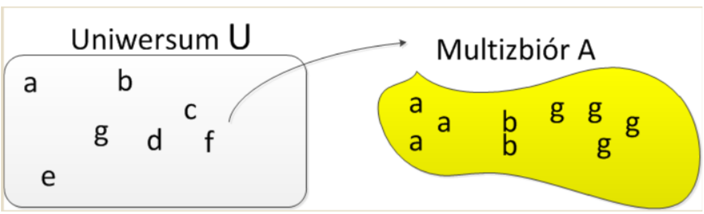
- $\emptyset \subseteq A$
- jeżeli $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$, to $A \subseteq C$

### 1.1 Zbiór potęgowy

Przykład

$$2^{\{1,2,3\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$
$$2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$$

### 1.2 Multizbiór




$$U = \{a, b, c, d, e, f, g\} \quad A = \{a, a, a, b, b, g, g, g, g\}$$

Tabela 1: Funkcja charakterystyczna multizbioru $f_a : U \to \{0, 1, ...\}$

| x | a | b | c | d | e | f | g |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_a(x)$ | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 |

$$A = \{(x, fA(x)) : x \in U\} A = \{(a,3), (b,2), (c,0), (d,0), (e,0), (f,0), (g,4)\}$$

**Iloczyn**

$$A \cap B = \{\ (x, f_{A \cap B}(x)) : x \in U \text{ i } f_{A \cap B}(x) = min(f_A(x), f_B(x))\ \}$$

**Suma**

$$A \cup B = \{\ (x, f_{A \cup B}(x)) : x \in U \text{ i } f_{A \cup B}(x) = max(f_A(x), f_B(x))\ \}$$

**Przykład**
$A = \{\ (a,3),(b,2),(c,0),(d,0),(e,4)\} = \{3a, 2b, 4e\ \}$
$B = \{\ (a,0),(b,3),(c,1),(d,2),(e,0)\} = \{3b, c, 2d\ \}$

$A \cap B = \{\ (a, min(3,0)),(b, min(2,3)),(c, min(0,1)),(d, min(0,2)),(e, min(4,0))\}$
$= \{\ (a,0),(b,2),(c,0),(d,0),(e,0)\ \}$

$A \cup B = \{\ (a,3),(b,3),(c,1),(d,2),(e,4)\ \}$

# 2 Rachunek Gentzena

## 2.1 Wzory

$$\frac{\phi \to \neg\alpha, \psi}{\phi, \alpha \to \psi} \qquad \frac{\phi \to \alpha \vee \beta, \psi}{\phi \to \alpha, \beta, \psi} \qquad \frac{\phi \to \alpha \wedge \beta, \psi}{\phi, \alpha \to \psi || \phi, \beta \to \psi} \qquad \frac{\phi \to \alpha, \alpha\psi}{\phi \to \alpha, \psi}$$

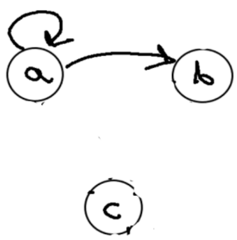
$$\frac{\phi, \neg\alpha \to \psi}{\phi \to \alpha, \psi} \qquad \frac{\phi, \alpha \vee \beta \to \psi}{\phi, \alpha \to \psi || \phi, \beta \to \psi} \qquad \frac{\phi, \alpha \wedge \beta \to \psi}{\phi, \alpha, \beta \to \psi} \qquad \frac{\phi, \alpha, \alpha \to \psi}{\phi, \alpha \to \psi}$$

$P_1 : (\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta) \qquad P_2 : (\alpha \Leftrightarrow \beta) \Leftrightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha))$

# 3 Relacje binarne

| $R_2$ | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | 1 | 1 | 0 |
| b | 0 | 0 | 0 |
| c | 0 | 0 | 0 |

$R_2$:




## 3.1 Własności relacji

Niech dana będzie relacja binarna na $R \subseteq X \times X$
Za przykładowe uniwersum posłuży nam zbiór $U = \{a, b, c, d\}$

Własności relacji i ich warunki

- Zwrotna – $\forall x \in X(< x, x > \in R)$

  Aby było zwrotna w relacji **musi** znaleźć się $\{< a, a >, < b, b >, < c, c >, < d, d >\}$

- Przeciwsymetryczna – $\forall x \in X(\neg < x, x > \in R)$

  Aby była przeciwzwrotna to w relacji **nie może** znaleźć się **żadna** z tych par $< a, a >, < b, b >, < c, c >, < d, d >$

- Symetryczna – $\forall x, y \in X(< x, y > \in R \Rightarrow < y, x > \in R)$

  Aby była symetryczna to **każda istniejąca para w relacji** musi mieć swoje lustrzane odbicie. Na przykład: $\{< a, b >, < b, a >, < a, a >, < b, c >, < c, b >\}$

- Asymetryczna – $\forall x, y \in X((< x, y > \in R \wedge (y, x) \in R) \Rightarrow x = y)$

- Przeciwsymetryczna – $\forall x, y \in X(< x, y > \in R) \Rightarrow \neg < y, x > \in R)$