Matematyka dyskretna - notatki na kolokwium 1

Michał Puchyr

17 kwietnia 2023

1 Multizbiory

Suma – $\{x \in U : x \in A \ \vee \ x \in B\}$

$$A \cup B = \{ \ (x, f_{A\cup B}(x)) : x \in U \text{ i } f_{A\cup B}(x) = \max(f_A(x), f_B(x)) \ \}$$

Iloczyn – $\{x : x \in U \ \wedge \ x \in A \ \wedge \ x \in B\}$

$$A \cap B = \{ \ (x, f_{A\cap B}(x)) : x \in U \text{ i } f_{A\cap B}(x) = \min(f_A(x), f_B(x)) \ \}$$

Różnica – $\{x : x \in U \ \wedge \ x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$

$$A \backslash B = \{(x, f_{A\backslash B}(x)) : x \in U \text{ i } f_{A\backslash B}(x) = \min(f_a(x), 1 - f_b(x))\}$$

Dopełnienie – $\{x \in U : x \notin A\}$

$$-A = \{(x, f_{-A}(x)) : x \in U \text{ i } f_{-A}(x) = 1 - f_A(x)\}$$

Różnica symetryczna – $\{x : x \in U \ \wedge \ (x \in A \ \wedge \ x \notin B) \ \vee \ (x \in B \ \wedge \ x \notin A)\}$

$$A \div B = \{(x, f_{A\div B}(x)) : x \in U \text{ i } \max(\min(f_A(x), 1 - f_B(x)), \min(f_B(x), 1 - f_A(x)))\}$$

$X \subseteq Y$ - zawieranie, zbiór X zawiera się lub jest równy zbiorowi Y. Dosłownie każdy element X jest w Y.
$X \subset Y$ - zawieranie właściwe, zbiór X zawiera się w Y oraz Y posiada jakiś element który nie należy do X.
Dla dowolnych zbiorów A, B, C:

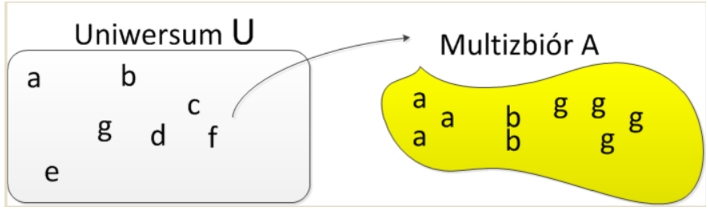
- $\emptyset \subseteq A$
- jeżeli $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$, to $A \subseteq C$

1.1 Zbiór potęgowy

Przykład

$$2^{\{1,2,3\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$
$$2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$$

1.2 Multizbiór



$$U = \{a, b, c, d, e, f, g\} \quad A = \{a, a, a, b, b, g, g, g, g\}$$

Tabela 1: Funkcja charakterystyczna multizbioru $f_a : U \to \{0, 1, ...\}$

x	a	b	c	d	e	f	g
$f_a(x)$	3	2	0	0	0	0	4

$$A = \{(x, fA(x)) : x \in U\} \quad A = \{(a, 3), (b, 2), (c, 0), (d, 0), (e, 0), (f, 0), (g, 4)\}$$

Nierozstrzygalne są : $A \backslash B$ oraz A' (czyli dopełnienie).
Przykład
$A = \{\ (a, 3), (b, 2), (c, 0), (d, 0), (e, 4)\} = \{3a, 2b, 4e\ \}$
$B = \{\ (a, 0), (b, 3), (c, 1), (d, 2), (e, 0)\} = \{3b, c, 2d\ \}$

$A \cap B = \{\ (a, min(3, 0)), (b, min(2, 3)), (c, min(0, 1)), (d, min(0, 2)), (e, min(4, 0))\}$
$= \{\ (a, 0), (b, 2), (c, 0), (d, 0), (e, 0)\ \}$

$A \cup B = \{\ (a, 3), (b, 3), (c, 1), (d, 2), (e, 4)\ \}$

2 Rachunek Gentzena

2.1 Wzory

$$\frac{\phi \to \neg\alpha, \psi}{\phi, \alpha \to \psi} \qquad \frac{\phi \to \alpha \vee \beta, \psi}{\phi \to \alpha, \beta, \psi} \qquad \frac{\phi \to \alpha \wedge \beta, \psi}{\phi, \alpha \to \psi || \phi, \beta \to \psi} \qquad \frac{\phi \to \alpha, \alpha\psi}{\phi \to \alpha, \psi}$$

$$\frac{\phi, \neg\alpha \to \psi}{\phi \to \alpha, \psi} \qquad \frac{\phi, \alpha \vee \beta \to \psi}{\phi, \alpha \to \psi || \phi, \beta \to \psi} \qquad \frac{\phi, \alpha \wedge \beta \to \psi}{\phi, \alpha, \beta \to \psi} \qquad \frac{\phi, \alpha, \alpha \to \psi}{\phi, \alpha \to \psi}$$

$P_1 : (\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta) \qquad P_2 : (\alpha \Leftrightarrow \beta) \Leftrightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha))$

Przykład

$$\to ((p \Rightarrow \neg q) \vee \neg(p \Rightarrow \neg q))$$

Korzystając z praw rachunku zdań eliminujemy te funktory, których nie uwzględniliśmy w podanej liście przekształceń.

Schemat przyjmuje postać:

$$\to ((\neg p \vee \neg q) \vee \neg(\neg p \vee \neg q))$$

prawostronne $\vee$

$$\to (\neg p \vee \neg q),\ \neg(\neg p \vee \neg q)$$

prawostronne $\neg$

$$\neg p \vee \neg q \to \neg p \vee \neg q$$

prawostronne $\vee$

$$\neg p \vee \neg q \to \neg p, \neg q$$

$\vee$ po lewej

$\neg p \to \neg p, \neg q$	$\neg q \to \neg p, \neg q$
$3 \times \neg$	$3 \times \neg$
$q, \underline{p \to p}$	$p, \underline{q \to q}$
Aksjomat	Aksjomat

Z schematu wynika tautologia wtedy kiedy po lewej i po prawej stronie występuje ta sama zmienna np $\alpha \to \alpha, \beta$

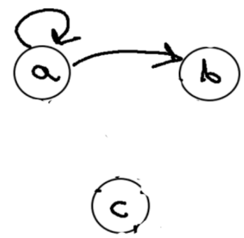
Przykłady

Czy jest tautologią

$p \vee \neg p$	$\neg p \wedge p$
$\to p \vee \neg p$ $\downarrow$ p$\vee$ $\to p, \neg p$ $\downarrow$ p$\neg$ $\underbrace{p \to p}$ aksjomat, więc kończymy $\Downarrow$ Tautologia	$\to \neg p \wedge p$ $\downarrow$ p$\wedge$ $\to \neg p$ $\to p$ nie aksjomat $\downarrow$ p$\neg$ $p \to$ nie ma aksjomatu $\Downarrow$ Nie tautologia (wystarczy, że pojawi się chociaż jeden nie-aksjomat)

R_2	a	b	c
a	1	1	0
b	0	0	0
c	0	0	0

3 Relacje binarne

R_2: 

3.1 Własności relacji

Niech dana będzie relacja binarna na $R \subseteq X \times X$
Za przykładowe uniwersum posłuży nam zbiór $U = \{a, b, c, d\}$

Własności relacji i ich warunki

- Zwrotna – $\forall x \in X(< x, x > \in R)$

  Aby było zwrotna w relacji **musi** znaleźć się $\{< a, a >, < b, b >, < c, c >, < d, d >\}$

- Przeciwsymetryczna (asymetryczna, silnie antysymetryczna) – $\forall x \in X(\neg < x, x > \in R)$

  Aby była przeciwzwrotna to w relacji **nie może** znaleźć się **żadna** z tych par $< a, a >, < b, b >, < c, c >, < d, d >$

- Antysymetryczna (słabo antysymetryczna) – $\forall x \forall y \in X(((x, y) \in R \ \wedge \ (y, x) \in R) \Rightarrow x = y)$

- Symetryczna – $\forall x \forall y \in X(< x, y > \in R \Rightarrow < y, x > \in R)$

  Aby była symetryczna to **każda istniejąca para w relacji** musi mieć swoje lustrzane odbicie. Na przykład: $\{< a, b >, < b, a >, < a, a >, < b, c >, < c, b >\}$

- Asymetryczna – $\forall x \forall y \in X((< x, y > \in R \wedge (y, x) \in R) \Rightarrow x = y)$

- Przeciwsymetryczna – $\forall x \forall y \in X(< x, y > \in R) \Rightarrow \neg < y, x > \in R)$

- Spójna – $\forall x \forall y \in X(< x, y > \in R \vee < y, x > \in R)$ – strzałki muszą być w dwie strony

- Tolerancyjna, podobieństwa – tylko wtedy gdy jest zwrotna i symetryczna

- Przechodnia – $\forall x \forall y \forall z(< x, y > \in R \wedge < y, z > \in R \Rightarrow < x, z > \in R)$

  Na chłopski rozum – relacja jest przechodnia w sytuacji gdy zawsze - "jeśli można przejść z a do b i z b można przejść do c to też można przejść z a do c. Trzeba uważać na to, że definicja jest implikacją. Relacja $R = \{< a, a >\}$ jest przechodnia.

  $R = \{< a, b >, < b, a >\}$ – nie jest zwrotna bo brakuje $\{< a, a >, < b, b >\}$

- Równoważności – musi być zwrotna, symetryczna i przechodnia

3.2 Działania na relacjach

1. Dopełnienie : $\overline{R} = X^2 \backslash R$

   Czyli wszystkie pary, których nie ma w oryginalnej relacji

2. $R \cup Q = \{< x, y > \in R \vee < x, y > \in Q\}$

3. $R \cap Q = \{< x, y > \in R \wedge < x, y > \in Q\}$

4. $R^{-1} = \{< y, x > \in R\}$ – czyli odwracamy strzałki

5. $R^{=} = R \cup \{< x, x >: x \in X\}$ – sprawiamy, że **wszędzie** muszą być pętelki

6. $R^{\neq} = R \backslash \{< x, x >: x \in X\}$ – przeciwieństwo z pkt. 5 – **usuwamy wszędzie** pętelki

7. R^{+} – dopełnienie tranzytywne – sprawiamy, że relacja staje się przechodnia jeśli nią jeszcze nie jest

   Na przykład – $R = \{< a, b >, < b, a >\}$ to $R^{+} = R \cup \{< a, a >, < b, b >\}$

8. R^{-} – redukt tranzytywny

   Algorytm :

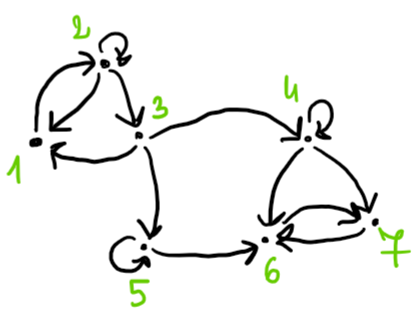
   (a) Znajdź cykle, jeśli jakiś element został już użyty w jakimś cyklu, **nie używaj go ponownie**

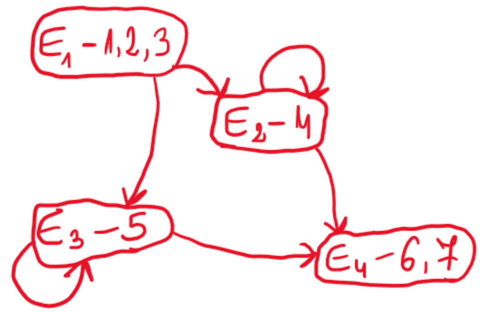
   (b) Jeśli jakiś cykl powstał tylko dlatego, że była na nim pętelka, to dodaj na nim pętelkę

   (c) Usuń z nowo powstałego grafu niepotrzebne strzałki, czyli takie, które duplikują istniejące już przejścia

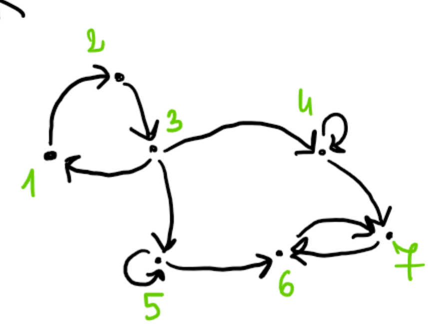
   (d) Wypisz już z powrotem graf tylko z oryginalnymi elementami, z usuniętymi niepotrzebnymi strzałlkami

   Ważne : jeśli jakiś element nie jest z żadnym elementem w cyklu to jest on "w cyklu z samym sobą"

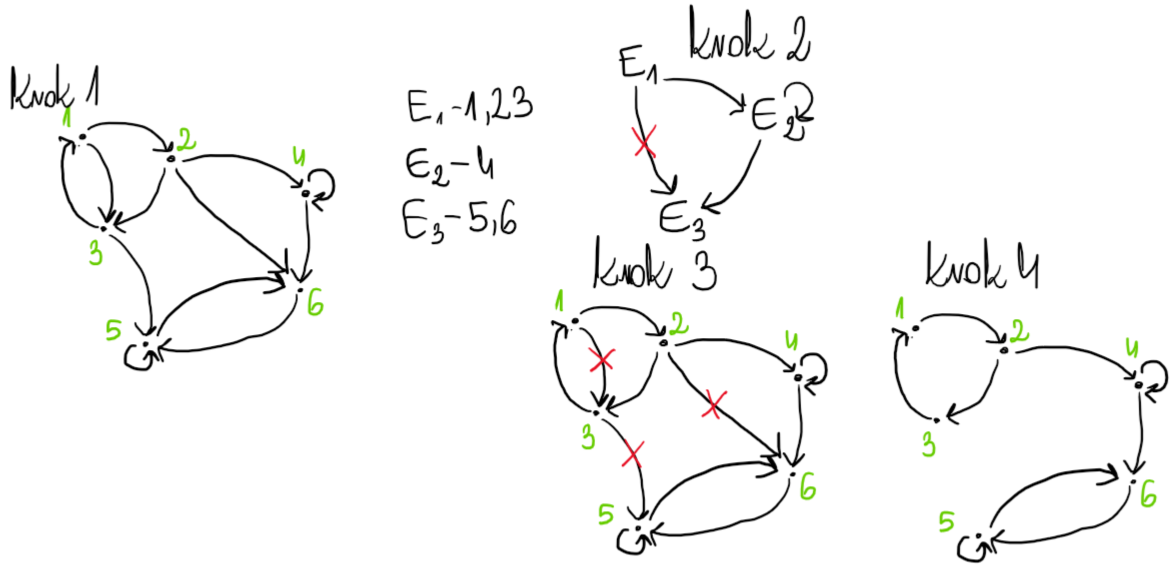




R^-



Przykład 1

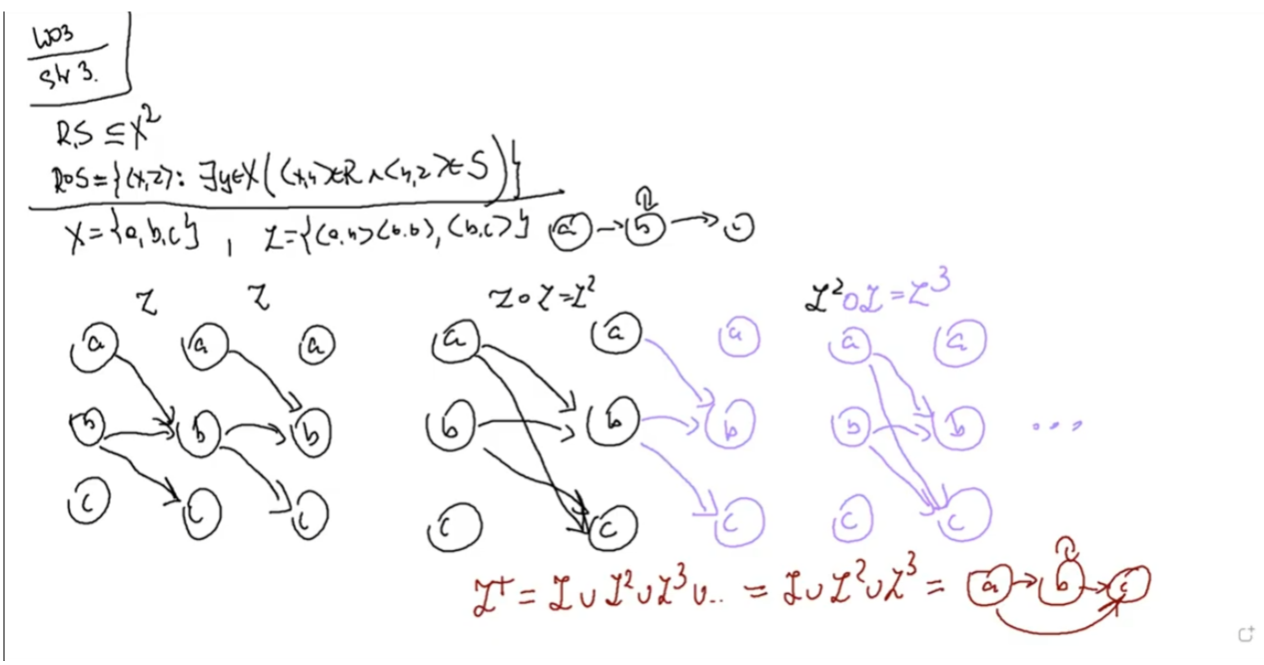


Przykład 2

9. R^* – dopełnienie tranzytywno-zwrotne tj. $R^* = (R^+)^=$

10. $R^\equiv$ – dopełnienie równoważnościowe – sprawiamy, że relacja staje się relacją równoważności, czyli robimy najpierw zwrotną a potem przechodnią, przy okazji symetryczną

Ważne : redukt tranzytywny nie musi się zawierać w relacji pierwotnej, ponieważ tak jak na przykładzie ze zdjęcia, strzałka może iść zamiast z 3 do 5 to może iść z 1 do 5 co przeczy zawieraniu się.



4 Podobieństwo zbiorów klasycznych

Przyjmijmy, że:

$a = |X \cap Y|$
$b = |X \backslash Y|$
$c = |Y \backslash X|$
$d = |\overline{X} \cap \overline{Y}|$

Typ 1 współczynników podobieństwa zbiorów

Jaccard: $P_{Jac}(X,Y) = \frac{|X \cap Y|}{|X \cup Y|} = \frac{a}{a+b+c}$
Dice: $P_{Dic}(X,Y) = \frac{|X \cap Y|}{|X|+|Y|} = \frac{a}{2a+b+c}$
Dice 2: $P_{2Dic}(X,Y) = \frac{2|X \cap Y|}{|X|+|Y|} = \frac{2a}{2a+b+c}$
Overlap: $P_{Overlap}(X,Y) = \frac{|X \cap Y|}{\min\{|X|,|Y|\}}$
Cosinus: $P_{Cosinus}(X,Y) = \frac{|X \cap Y|}{\sqrt{|X|} \cdot \sqrt{|Y|}}$
Sorensen: $P_{Sor}(X,Y) = \frac{4a}{4a+b+c}$
Anderberg: $P_{And}(X,Y) = \frac{8a}{8a+b+c}$
Sneath i Sokal 2: $P_{SS2} = \frac{a}{a+2(b+c)}$
Ochiai: $P_{Och} = \frac{a}{\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{b+c}}$
Kulczyński 2: $P_{Ku2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c}\right)$
Tversky : $P_{Tve} = \frac{a}{a + \alpha \cdot b + \beta \cdot c}$, przy założeniu $\alpha, \beta > 0$

Typ 2 współczynników podobieństwa zbiorów

Rogers i Tamimoto: $P_{RT}(X,Y) = \frac{a+d}{a+2(b+c)+d}$
Sokal i Michener: $P_{SM}(X,Y) = \frac{a+b}{a+b+c+d}$
Sneath i Sokal 1: $P_{SS1}(X,Y) = \frac{a+b}{a+\frac{1}{2}(b+c)+d}$
Russel i Rao: $P_{RR}(X,Y) = \frac{a}{a+b+c+d}$
Yule i Kendall: $P_{YUK}(X,Y) = \frac{a \cdot d}{a \cdot d + b \cdot c}$

Odległość zbiorów klasycznych

Liczność różnicy symetrycznej: $d_{SYM}(X,Y) = card(X \backslash Y) + card(Y \backslash X) = b + c$ (określana także innymi nazwami np. City-block distance, Manhattan distance, Hamming distance.)

Odległość Euklidesowa:
$d_{Euc}(X,Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(u_X(u_i) - u_Y(u_i))^2} = \sqrt{b+c}$, gdzie u_X i u_Y są funkcjami charakterystycznymi odpowiednio zbiorów X i Y.

5 Pomocne

- Ile jest relacji dla $|U|=5$? Odpowiedź : 2^{25}

5.1 Jak rozróżnić należenie od zawierania

- $A = \{\emptyset\}$ i $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ – $A \in B \quad A \subseteq B$
- $A = \{\emptyset\}$ i $B = \{\{\emptyset\}\}$ – $A \in B \quad A \nsubseteq B$
- $A = \{\emptyset\}$ i $B = \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$ – $A \notin B \quad A \subseteq B$
- $A = \{\emptyset\}$ i $B = \{\{\{\emptyset\}\}\}$ – $A \notin B \quad A \nsubseteq B$

5.2 Zbiór potęgowy oraz jego prawdy

- $\emptyset \in 2^{\emptyset}$ – Prawda
- $\emptyset \subseteq 2^{\emptyset}$ – Prawda
- $\emptyset \subset 2^{\emptyset}$ – Fałsz