Уравнения математической физики

Содержание

1. Вводные понятия и определения

1.1. Уравнения в частных производных 2-го порядка

Уравнением с частными производными 2-го порядка с двумя независимыми переменными x, y называется соотношение между неизвестной функцией $u(x,y)$ и её частными производными до 2-го порядка включительно:

$$F(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})=0$$

Уравнение называется *линейным относительно старших производных*, если оно имеет вид

$$a\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+c\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F(x,y,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})=0 \tag{1}$$

где коэффициенты a,b,c являются функциями от x, y.

Если коэффициенты a,b,c зависят не только от x и y, а являются, подобно F, функциями x,y,z,u_x,u_y, то такое уравнение называется *квазилинейным*.

Уравненение называется *линейным*, если оно линейно как относительно старших производных u_{xx},u_{xy},u_{yy}, так и относительно функции u и её первых производных u_x, u_y[1]

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu+f=0$$

Уравнение называется *однородным*, если $f(x,y)=0$.

В уравнении (1) сделаем замену $\xi=\varphi(x,y)$ $\eta=\psi(x,y)$.

$$\bar a\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\bar b\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}+\bar c\,\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\bar F=0$$

где

$$\begin{aligned}
\bar a&=a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2b\,\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\\
\bar b&=a\,\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+b\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)+c\,\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\\
\bar c&=a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+2b\,\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+c\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2
\end{aligned}$$

а функция $\bar F$ не зависит от вторых производных.

$$a\,dy^2-2b\,dydx+c\,dx^2=0 \tag{2}$$

Уравнение (2) называется *характеристическим уравнением*, а решения этого уравнения называются *характеристиками*.

---

[1]

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}\quad u_y=\frac{\partial u}{\partial y}\quad u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad u_{xy}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\quad u_{yy}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Пусть $\xi(x,y) = C = 0 \Rightarrow \bar{a} = 0$. Также если $\psi(x,y) = C = 0 \Rightarrow \bar{c} = 0$
Уравнение (2) распадается на два:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \tag{3}$$

Знак подкоренного выражения определяет тип уравнения:

$D > 0$ – **Гиперболического типа** Канонический вид: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = F(x, y, u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y})$

$D = 0$ – **Параболического типа** Канонический вид: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y, u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y})$

$D < 0$ – **Эллиптического типа** Канонический вид: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y, u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y})$

1.2. Приведение линейного уравнения второго порядка к каноническому виду

1.2.1. Общий метод

Всякое дифференциальное уравнение второго порядка с двумя неизвестными переменными может быть записано в виде

$$A_{11}u_{xx} + 2A_{12}u_{xy} + A_{22}u_{yy} + B_1u_x + B_2u_y + Cu + f(x,y) = 0 \tag{4}$$

где $A_{11}, A_{12}, A_{22}, B_1, B_2, C, f$ — заданные функции от x и y (в частном случае постоянные).
С помощью соответствующего преобразования переменных уравнение приводится к одной из простейших форм:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu + f = 0 \qquad \text{(эллиптический тип)}$$

$$\begin{cases} u_{\xi\eta} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu + f = 0 \\ u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu + f = 0 \end{cases} \qquad \text{(гиперболический тип)}$$

$$u_{\xi\xi} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu + f = 0 \qquad \text{(параболический тип)}$$

Попытаемся упростить это уравнение с помощью замены переменных

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases} \tag{5}$$

Здесь ξ, η — новые независимые переменные. Функции φ и ψ, связывающие новые переменные со старыми переменными, будут подобраны позднее. Считаем, что отображение является взаимно однозначным.

$$u(x,y) = \tilde{u}(\xi(x,y), \eta(x,y))$$

Сделаем требуемую замену переменных

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi\,\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi\,\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\,\partial y} + \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right]$$

Правые части формул представляют собой линейные функции относительно частных производных $u_\xi, u_\eta, u_{\xi\xi}, u_{\eta\eta}, u_{\xi\eta}$. Подставляя найденные производные в уравнение (4), мы получим снова *линейное уравнение второго порядка* с неизвестной функцией u и независимыми переменными ξ и η

$$\bar{A}_{11}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + 2\bar{A}_{12}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi\,\partial \eta} + \bar{A}_{22}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + f\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \tag{6}$$

где

$$\bar{A}_{11} = A_{11}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2A_{12}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + A_{22}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2$$
$$\bar{A}_{12} = A_{11}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + A_{12}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right) + A_{22}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}$$
$$\bar{A}_{22} = A_{11}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2A_{12}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + A_{22}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2$$

а функция f линейна относительно $\tilde{u}, \tilde{u}_\xi, \tilde{u}_\eta$.
Уравнение (6) становится особенно простым, если коэффициенты $\bar{A}_{11}$ и $\bar{A}_{22}$ окажутся равными нулю. Для того чтобы первоначально заданное уравнение (4) можно было привести к такому простому виду, надо в нём сделать замену переменных (5), подобрав функции φ и ψ так, чтобы они являлись ренеиями уравнения

$$A_{11}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2A_{12}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + A_{22}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0. \tag{7}$$

Это уравнение является линейным уравнением в частных производных первого порядка.

Теорема 1.1. *Для того, чтобы функция $z = f(x, y)$ во всех точках области Ω удовлетворяла уравнению* (7)*, необходимо и достаточно, чтоюы семейство $f(x, y) = const$ было общим интегралом уравнения*

$$a(dy)^2 - 2bdxdy + c(dx)^2 = 0 \tag{8}$$

в той же области Ω.

Благодаря этой теореме мы можем упростить исходное уравнение (4), воспользовавшись *методом характеристик*. Уравнение (8) есть обычное дифференциальное уравнение первого порядка, но второй степени. Разрешая его относительно производной y', получим два уравнения

$$y' = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} \tag{9}$$
$$y' = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} \tag{10}$$
$$\tag{11}$$

Если общий интеграл уравнения (9) имеет вид $\varphi(x, y) = const$, то полагая $\xi = \varphi(x, y)$, мы обращаем в нуль коэффициент при производной $u_{\xi\xi}$. Если $\psi(x, y) = const$ является общим,интегралом уравнения (10), независимым от интеграла $\varphi(x, y) = const$, то полагая $\eta = \psi(x, y)$, мы обратим в нуль также и коэффициент при производной $u_{\eta\eta}$.

1.2.2. Пример приведения линейного уравнения к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 5\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$dy^2 + 4dxdy + 5dx^2 = 0$$
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4\frac{dy}{dx} + 5 = 0$$

Найдём корни:

$$\frac{dy_1}{dx} = -2 + i \quad y_1 + 2x - ix = C_1$$
$$\frac{dy_2}{dx} = -2 - i \quad y_2 + 2x + ix = C_2$$

Сделаем замену:

$$\begin{cases} \xi(x) = \frac{C_1+C_2}{2} = y + 2x \\ \eta(x) = \frac{C_1-C_2}{2i} = -x \end{cases}$$

Найдём производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\,\partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}$$

Подставим в исходное уравнение:

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} - 8\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0$$

В итоге

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$$

Получившееся уравнение является уравнением эллиптического типа.

1.3. Система уравнений типа Ковалевской. Теорема Ковалевской.

Определение 1.1 (Аналитическая функция). Функция в точке $(t, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ аналитическая, если в окрестности этой точки её можно разложить в равномерно сходящийся ряд:

$$f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k_0 k_1 \ldots k_n = 0}^{\infty} C_{k_0 k_1 \ldots k_n} \prod_{k=1}^{n} (x_i - x_i^0)^{k_i} (t - t_0)^{k_0}$$

где

$$C_{k_0 k_1 \ldots k_n} = \frac{1}{k_0! k_1! \ldots k_n!} \frac{\partial^{k_0 + k_1 + \cdots + k_n} f}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$$

Определение 1.2 (Система уравнений типа Ковалевской[2]). Система уравнений типа Ковалевской имеет вид:

$$\frac{\partial^{n_i} f_i}{\partial t^{n_i}} = F\left(t, x, f, \ldots, \frac{\partial^{k_0 + k_1 + \cdots + k_n} f}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right) \tag{1}$$

где

$$k_0 + k_1 + \cdots + k_n \leqslant n_i$$
$$k_0 < n_i$$

Обычно t играет роль времени, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — пространственные координаты. При $t = t_0$ задаются значения неизвестных функций f_i и производных порядка $n_i - 1$.

$$\left.\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k}\right| = \varphi_i^{(k)}(x), \quad k = 0, 1, \ldots, n_i - 1 \tag{2}$$

$\varphi_i^{(k)}$ заданы в $G \subset R^n$

При этих условиях уравнение (1) называется *уравнением нормального вида*, а задача решения уравнения (1), удовлетворяющего начальным условиям (2), называется *задачей Коши*.

Систему уравнений Ковалевской можно свести к системе уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_1 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + a_3 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_4 \dfrac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial x} + a_5 \dfrac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial y} + b_1 \dfrac{\partial u}{\partial t} + b_2 \dfrac{\partial u}{\partial x} + b_3 \dfrac{\partial u}{\partial y} + Cu + f \\ u(t_0) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=t_0} = \xi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Замены: $\frac{\partial u}{\partial t} = u_0 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = u_1 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_3$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = a_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + a_3 \frac{\partial u_2}{\partial y} + a_4 \frac{\partial u_0}{\partial x} + a_5 \frac{\partial u_0}{\partial y}$$

$$t = t_0 \quad u_0 = \xi(x, y)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial y} \quad u_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)$$

[2]Известный русский математик Софья Васильевна Ковалевская

Теорема 1.2 (Теорема Ковалевской[3]). *Если в некоторой точке* $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *все функции, входящие в систему — аналитические, то в малой окрестности точки существует решение задачи Коши и при этом — единственное.*

Доказательство.
Без доказательства ◀

[3] Теорема была представлена в 1874 году в Гёттингенский университет (вместе с двумя другими работами) под названием "Zur Theorie der partiellen Differential-Gleichungen" в качестве докторской диссертации и опубликованная в 1875 году в "Journal fur die reine und angewandte Mathematik" (Berlin. Bd. 80. S. 1—32), она явилась первым значительным результатом в общей теории уравнений с частными производными. До тех пор глубоко изучались главным образом уравнения математической физики, то есть отдельные примеры уравнений с частными производными, возникающие в конкретных физических задачах, как, например, уравнение теплопроводности, описывающее распределение тепла в нагретом теле, уравнение колебания струны или мембраны, уравнение распространения звуковых колебаний, уравнение Лапласа, описывающее многие физические процессы электропроводимости, гидродинамики, стационарной теплопроводности и др. Можно считать, что работа Ковалевской положила начало развитию общей теории уравнений с частными производными.

1.4. Пример (теорема Ковалевской не работает)

С.В. Ковалевская, построив пример, показала, что если уравнение не имеет нормальной формы, то теорема может быть неверна. Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

с начальным условием

$$t = 0, \quad u = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

не имеет аналитического решения в окрестности начала координат, так как, если такое решение существует, оно должно представляться рядом который, однако, расходится в любой точке при $t = 0$.

Рассмотрим этот пример

Пусть $u = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x)t^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)nt^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^2 a_n}{dx^2} t^n$$

$$(n+1)a_{n+1}(x) = \frac{d^2 a_n}{dx^2}, \quad n = 0, 1 \ldots$$

Из начального условия: $a_0 = \frac{1}{1-x}$

$$a_0' = \frac{1}{(1-x)^2} \quad a_0'' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$a_1 = \tfrac{2}{(1-x)^3}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \tfrac{(2n)!}{n!(1-x)^{2n+1}}$$

Решением является:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n!}{n!} \frac{t^n}{(1-x)^{2n+1}}$$

Исследуем ряд на сходимость, используя признак Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2n+2)!}{2n!} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{(1-x)^{2n+1}t}{(1-x)^{2n+3}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2n+2)(2n+1)t}{(n+1)(1-x)^2} \right| = +\infty$$

Ряд расходится всюду, кроме $t = 0$.

1.5. Задача Штурма-Лиувилля

1.5.1. Общий вид

Рассмотрим уравнение[4]

$$L_\lambda y \equiv \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right] - [\lambda r(x) - q(x)]y = 0, \tag{3}$$

содержащее некоторый числовой параметр λ. Здесь функции $p(x), q(x), r(x)$ действительные, а число λ может быть, вообще говоря, и комплексным. Краевая задача (3), (4) при $A = B = 0$ является однородной. Поэтому при любых λ она имеет тривиальное решение. Нас будут интересовать такие значения λ, при которых эта задача обладает не только тривиальными решениями.
Будем задавать линейные краевые условия вида

$$\begin{cases} l_1 y \equiv \alpha_1 y(x) + \alpha_2 y'(a) = A, \\ l_2 y \equiv \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = B \end{cases} \tag{4}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, A, B$ - заданные числа, причем по крайней мере одно из чисел α_1, α_2, и одно из чисел β_1, β_2, отличны от нуля. Если в (4) хотя бы одно из чисел A и не равно нулю, то краевые условия называют неоднородными. Если $A = B = 0$, то условия (4) называются однородными.

Задача Штурма-Лиувилля. *Найти те значения параметра λ, при которых уравнение* (3) *имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее однородным краевым условиям* (4). *В дальнейшем будем ее записывать в виде*

$$L_\lambda y = 0, l_1 y = 0, l_2 y = 0.$$

Те значения параметра λ, при которых задача Штурма-Лиувилля имеет ненулевое решение, называются *собственными значениями* (*собственными числами*) задачи, а сами эти решения - *собственными функциями*. Задачу Штурма-Лиувилля называют также задачей на собственные значения. В силу однородности уравнения и краевых условий собственные функции задачи Штурма-Лиувилля определены с точностью до постоянного множителя. Это означает, что если $y(x)$ -собственная функция при некотором значении λ, то произведение $Cy(x)$, где C - произвольная постоянная, также является собственной функцией при том же значении параметра λ. В связи с этим часто в качестве собственной функции рассматривают нормированную функцию $y(x)$, у которой $||y(x)|| = 1$. Такая собственная функция определена, по существу, однозначно (с точностью до знака $\pm$). Далее рассмотрим наиболее простой случай задачи Штурма-Лиувилля, когда уравнение имеет вид

$$y'' + \lambda y = 0. \tag{5}$$

Из множества краевых условий вида (4) ограничимся тремя частными случаями:

1) краевые условия первого рода
$$y(a) = y(b) = 0$$

2) краевые условия второго рода
$$y'(a) = y'(b) = 0$$

3) краевые условия третьего рода
$$\begin{cases} y'(a) = \sigma_1 y(a) \\ y'(b) = \sigma_2 y(b), \quad \sigma_1 > 0, \quad \sigma_2 > 0. \end{cases}$$

[4] Источник

1.5.2. Ортогональность собственных функций

Теорема 1.3. *Система собственных функций регулярной задачи Штурма-Лиувилля ортогональна на* $[a, b]$ *с весом* $r(k)$[5]*:*

$$\int\limits_a^b r(x) y_m y_k \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ ||y_n||^2, & m = k \end{cases}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \left[p(x)X_m'(x)\right]' + \left[\lambda_m r(x) - q(x)\right] X_m(x) = 0 \quad &\Big| \cdot X_k \\ \left[p(x)X_k'(x)\right]' + \left[\lambda_k r(x) - q(x)\right] X_k(x) = 0 \quad &\Big| \cdot X_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_k(x)\left[p(x)X_m'(x)\right]' - X_m(x)\left[p(x)X_k'(x)\right]' + (\lambda_m - \lambda_k) r(x) X_k(x) X_m(x) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\left(X_m' X_k - X_m X_k'\right)\right] + (\lambda_m - \lambda_k) r(x) X_k(x) X_m(x) = 0 \\ \underbrace{p(x)\left(X_m' X_k - X_m X_k'\right)\Big|_a^b}_{=0 \quad \text{для ур-й 1, 2, 3 рода}} + (\lambda_m - \lambda_k) \int\limits_a^b r(x) X_k(x) X_m(x) = 0 \end{aligned}$$

Следовательно

$$(\lambda_m - \lambda_k) \int\limits_a^b r(x) X_k(x) X_m(x) = 0$$

$$\int\limits_a^b r(x) y_m y_k \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ ||y_n||^2, & m = k \end{cases}$$

◀

[5] Источник

2. Уравнения гиперболического типа.

2.1. Уравнение колебания струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

Простейшее уравнение гиперболического типа (1) называют *уравнением колебаний струны*.

Рассмотрим наиболее простую задачу о колебаних струны. Будем предполагать, что смещения струны лежат в одной плоскости и что вектор смещения u перпендикулярен в любой момент времени к оси x; тогда процесс колебания можно описать одной функцией $u(x,t)$, характеризующей вертикальное перемещение струны. Будем рассматривать струну как гибкую упругую нить. Математическое выражение понятия гибкости заключается в том, что напряжения, возникающие в струне, всегда направлены по касательным к её мгновенному профилю (рис. 1). Это условие выражает собой то, что струна не сопротивляется изгибу.

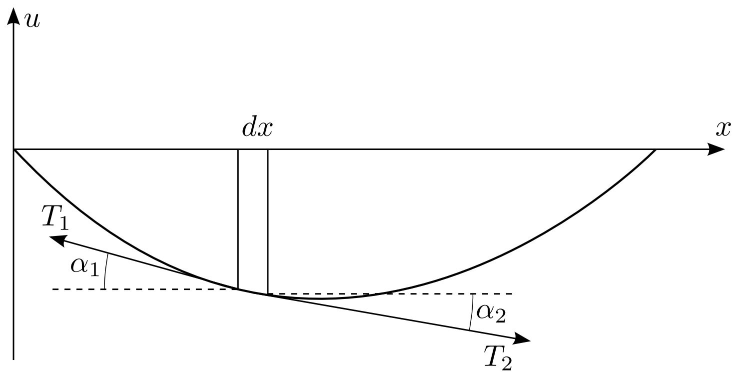


Рис. 1.

Пусть ρ — линейная плотность струны, a — ускорение вдоль оси x:

$$dm = \rho\, dx \quad a = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

Выделим бесконечно малый элемент струны и запишем II закон Ньютона:

$$\rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} dx = T_2 \cos\alpha_2 - T_1 \cos\alpha_1 = 0$$

Пусть $\alpha_2, \alpha_1 \ll 1$, тогда $\cos\alpha = 1 + O(\alpha^2)$. $\quad T_2 = T_1 = T$

Так как $\sum F_u \neq 0$, то

$$T_2 \sin\alpha_2 - T_1 \sin\alpha_1 = T(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Переходим к

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = T(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) \approx T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_2 - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_1\right)$$

Получаем уравнение вида:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

В случае постоянной плотности $\rho = const$ это уравнение записывается в таком виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

2.2. Задача Коши для волнового уравнения.

Дифференциальные уравнения с обыкновенными и, тем более, с частными производными имеют, вообще говоря, бесчисленное множество решений. Поэтому в том случае, когда физическая задача приводится к уравнению с частными производными, для однозначной характеристики процесса необходимо к уравнению присоединить некоторые условия.

В случае дифференциального уравнения 2-го порядка решение может быть определено начальными условиями, т. е. заданием значений функций и её первой производной при «*начальном*» значении аргумента (задача Коши).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in R,\, t = 0$$

Начальные условия

$$t = 0 \quad u(0, x) = f(x)$$
$$t = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x)$$

Если струна закреплена, то должны выполняться «*граничные условия*»

Задача **первого** типа $\begin{matrix} u(t,0) = \varphi(t) \\ u(t,l) = \xi(t) \end{matrix}$ – заданный режим

Задача **второго** типа $\begin{matrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \varphi(t) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,l) = \xi(t) \end{matrix}$ – заданная сила

Задача **третьего** типа $\begin{matrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \alpha(u+\varphi) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,l) = \beta(u+\xi) \end{matrix}$ – упругое закрепление

2.3. Редукция общей краевой задачи

При решении сложной задачи естественно стремиться свести её решение к решению более простых задач. С этой целью представим решение общей краевой задачи в виде суммы решений ряда частичных краевых задач.

Пусть $u_i(x,t) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$ — функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + f^i(x,t) \tag{1}$$

при $0 < x < l, t > 0$ и дополнительным условиям

$$\left.\begin{aligned} u_i(0,t) &= \mu_1^i(t),\\ u_i(l,t) &= \mu_2^i(t);\\ u_i(x,0) &= \varphi^i(x),\\ \frac{\partial u_i}{\partial t}(x,0) &= \psi^i(x). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Очевидно, что имеет место суперпозиция решений, т.е. функция

$$u^{(0)}(x,t) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x,t) \tag{3}$$

удовлетворяет аналогичному уравнению с правой частью

$$f^{(0)}(x,t) = \sum_{i=1}^{n} f^i(x,t) \tag{4}$$

и дополнительным условиям, правые части которых суть функции

$$\left.\begin{aligned} \mu_k^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \mu_k^i \quad (t)(l = 1, 2),\\ \varphi^{(0)}(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i(x),\\ \psi^{(0)}(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi^i(x). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Указанный принцип суперпозиции относится, очевидно, не только к данной задаче, но и к любому линейному уравнению с линейными дополнительными условиями.

Решение общей краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,y)\\ (0 < x < l, t > 0);\\ u(0,t) = \mu_1(t),\\ u(l,t) = \mu_2(t);\\ u(x,0) = \varphi(x),\\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

может быть представлено в виде суммы

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) + u_4(x,t)$$

где $u_1, u_2, u_3, u_4,$ – решения следующих частных краевых задач:

$$\left.\begin{array}{llll} u_1(0,t) = 0, & u_2(0,t) = \mu_1(t), & u_3(0,t) = 0, & u_4(0,t) = 0, \\ u_1(l,t) = 0; & u_2(l,t) = 0; & u_3(l,t) = \mu_2(t); & u_4(l,t) = 0; \\ u_1(x,0) = \varphi(x), & u_2(x,0) = 0, & u_3(x,0) = 0, & u_4(x,0) = 0, \\ u_{1t}(x,0) = \psi(x); & u_{2t}(x,0) = 0; & u_{3t}(x,0) = 0; & u_{4t}(x,0) = 0; \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Аналогичная редукция может быть произведена и для предельных случаев общей краевой задачи.

2.4. Метод распространяющихся волн

2.4.1. Уравнение колебания бесконечной струны (Формула Даламбера)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

Начальные условия

$$u(x,0) = f(x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$$

Преобразуем это уравнение к каноническому виду, содержащему смешанную производную. Уравнение характеристик

$$dx^2 - a^2\, dt^2 = 0$$

распадается на два уравнения:

$$dx - a\, dt = 0, \quad dx + a\, dt = 0.$$

Характеристиками уравненения являются две прямые:

$$\xi = x - at = C_1$$
$$\eta = x + at = C_2$$

Приводим к каноническому виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial \eta} - a\frac{\partial u}{\partial \xi} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$4a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} = 0$$

В итоге уравнение колебаний струны преобразуется к виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} = 0$$

Найдём общий интеграл последнего уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \chi \quad \frac{\partial \chi}{\partial \xi} = 0$$

$$\chi = V(\eta) \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = V(\eta)$$

$$u(\xi,\eta) = \int\limits_{\eta_0}^{\eta} V(\tau)d\tau + \psi(\xi)$$

$$u(\xi,\eta) = \varphi(\eta) + \psi(\xi)$$

Функция

$$u(x,t) = \varphi(x+at) + \psi(x-at) \tag{2}$$

является общим интегралом уравнения (1).

Решение задачи называется корректным если оно существует, единственно и устойчиво.

Существование
$\varphi(x+at)$ и $\psi(x-at)$ - должны допускать непрерывные частные производные.

Единственность
Пусть $u(x,t)=\varphi(x+at)+\psi(x-at)$. Определим $f(x)$ и $g(x)$ таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия:

$$u(x,0)=\varphi(x)+\psi(x)=f(x) \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=a\varphi'(x)-a\psi'(x)=g(x)$$

Интегрируя второе равенство, получим:

$$a\varphi(x)-a\psi(x)=\int\limits_{x_0}^{x} g(\tau)d\tau+C \tag{4}$$

где x_0 и C - постоянные. Из (3) и (4) находим:

$$2\varphi(x)=f(x)+\frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} g(\tau)d\tau+\frac{C}{2}$$

$$2\psi(x)=f(x)-\frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} g(\tau)d\tau-\frac{C}{2}$$

$$\begin{cases} \varphi(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} g(\tau)d\tau \\ \psi(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} g(\tau)d\tau \end{cases} \tag{5}$$

Таким образом, мы определили функции φ и ξ через заданные f и g, причём равенства (5) должны иметь место для любого значения аргумента[6].

$$u(x,t)=\frac{f(x+at)+f(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} g(\tau)d\tau \tag{6}$$

Формулу (6), называемую *формулой Даламбера*, мы получили, предполагая существование решения поставленной задачи. Эта формула доказывает единственность решения. Если бы существовало второе решение задачи (1), то оно представлялось бы формулой (6) и совпадало бы с решением.

Устойчивость
Рассмотрим решение возмущённой задачи $\tilde{u}$:

$$\tilde{u}=f(x)+\varepsilon_1 \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x,0)=g(x)+\varepsilon_2$$

[6]В формуле (2) функции φ и ξ определены неоднозначно. Если от φ отнять, а к ξ прибавить некоторую постоянную C_1, то u не изменится. В формуле (5) постоянная C не определяется через φ и ξ, однако мы можем её отбросить, не меняя значения u. При сложении φ и ξ слагаемые $\frac{C}{2}$ и $-\frac{C}{2}$ уничтожаются.

Рассмотрим разность решений исходной и возмущённой задач

$$|u(x,t) - \tilde{u}(x,t)| \leq |\varepsilon_1| + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \varepsilon_2 \, dt \leq \sigma(1+t) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ можно подобрать $\sigma : \sigma \leq \frac{\varepsilon}{1+t}$
Следовательно решение устойчиво.

2.4.2. Вывод уравнения Даламбера классическим способом

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h(x,t)$$

$$-\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

Начальные условия:

$$u(x,0) = f(x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$$

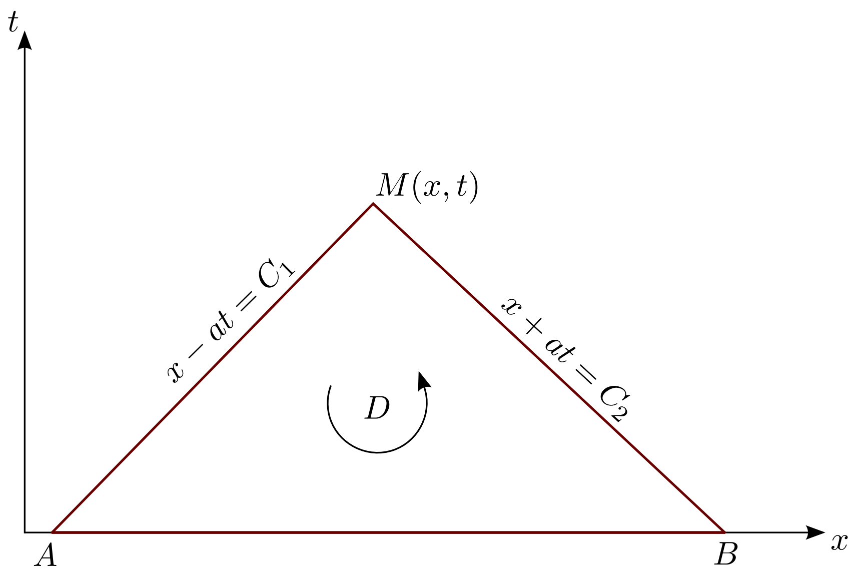


Рис. 2. Характеристический треугольник

Проинтегрируем обе части уравнения по области, заключённой внутри характеристического треугольника и разделим обе части на $2a$.

$$\frac{1}{2a}\iint\limits_D \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dxdt = \frac{a}{2}\iint\limits_D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dxdt + \frac{1}{2a}\iint\limits_D h(x,t) dxdt$$

Вспомним формулу Эйлера, которая помогает заменить интеграл по области на интеграл по границе. По формуле Грина

$$\iint\limits_D \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dxdt = -\oint\limits_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial x} dt \qquad \iint\limits_D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dxdt = \oint\limits_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial x} dt$$

$$-\oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial t} = -\left[\int\limits_A^B \frac{\partial u}{\partial t} dx + \int\limits_B^M \frac{\partial u}{\partial t} dx + \int\limits_M^A \frac{\partial u}{\partial t} dx\right] =$$

$$= -\int\limits_A^B \frac{\partial u}{\partial t} dx + a\int\limits_B^M \frac{\partial u}{\partial t} dt - a\int\limits_M^A \frac{\partial u}{\partial t} dt =$$

$$= -\int\limits_A^B \frac{\partial u}{\partial t}dx + 2au(M) - au(A) - au(B)$$

$$\oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial x}dt = \cancelto{0}{\int\limits_A^B \frac{\partial u}{\partial x}dt} + \int\limits_B^M \frac{\partial u}{\partial x}dt + \int\limits_M^A \frac{\partial u}{\partial x}dt = -\frac{1}{a}\int\limits_B^M \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{1}{a}\int\limits_M^A \frac{\partial u}{\partial x}dx =$$

$$= -\frac{2}{a}u(M) + \frac{(u(A)+u(B))}{a} = \frac{1}{2a}\int\limits_A^B \frac{\partial u}{\partial t}dx + u(m) - \frac{u(B)+u(A)}{2} =$$

$$= -u(M) + \frac{u(B)+u(A)}{2} + \frac{1}{2a}\iint\limits_D h(x,t)dxdt$$

$$2u(M) = \frac{1}{2a}\int\limits_A^B \frac{\partial u}{\partial t}dx + u(A) + u(B) + \frac{1}{2a}\iint\limits_D h(x,t)dxdt$$

$$x_m - at_m = C_1 = x - at \Rightarrow x_A = x_m - at_m$$

$$x_m + at_m = C_2 = x + at \Rightarrow x_B = x_m - at_m$$

Получим:

$$u(M) = \frac{u(x_m + at_m) + u(x_m - at_m)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_m - at_m}^{x_m + at_m} g(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\iint\limits_D h(x,t)dxdt$$

2.4.3. Полубесконечная струна и метод продолжений

Рассмотрим задачу о распространении волн на полуограниченной прямой $x \geqslant 0$. Эта задача имеет особенно важное значение при изучении процессов отражения волн от конца и ставится следующим образом:

найти решение уравнения колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при $0 < x < \infty, \quad t > 0$,
удовлетворяющее граничному условию

$$u(0,t) = \mu(t) \text{ (или } \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \nu(t)) \quad t \geqslant 0$$

и начальным условиям

$$u(x,0) = f(x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$$

$0 \leqslant x < \infty$.

Отметим две леммы о свойствах решений уравнений колебаний, определённых на бесконечной прямой.

1) *Если начальные данные в задаче о распространении колебаний на неограниченной прямой (задача (1)) являются нечётными функциями относительно некоторой точки x_0, то соответствующее решение в этой точке x_0 равно нулю.*

2) *Если начальные данные в задаче о распространении колебаний на неограниченной прямой (задача (1)) являются чётными функциями относительно некоторой точки x_0, то производная по x соответствующего решения в этой точке равна нулю.*

Примем x_0 за начало координат, $x_0 = 0$. В этом случае условия нечётности начальных данных ($f(x)$ и $g(x)$ - нечётные) запишутся в виде

$$f(x) = -f(-x); \quad g(x) = -g(-x).$$

Функция $u(x,t)$, определяемая формулой (6), при $x = 0$ и $t > 0$ равна

$$u(0,t) = \frac{f(at) + f(-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{-at}^{at} g(\xi) d\xi = 0$$

так как первое слагаемое равно нулю в силу нечётности $f(x)$, а второе равно нулю, поскольку интеграл от нечётной функции в пределах, симметричных относительно начала координат, всегда равен нулю.

Аналогично для второй леммы. Условия чётности начальных данных имеют вид

$$f(x) = f(-x); \quad g(x) = g(-x).$$

Заметим, что производная чётной функции является функцией нечётной

$$\varphi'(x) = -\varphi'(-x)$$

Из формулы (6) следует:

$$u_x(0,t) = \frac{f'(at) + f'(-at)}{2} + \frac{1}{2a}[g(at) - g(-at)] = 0, \quad t > 0,$$

так как первое слагаемое равно нулю в силу нечётности $f'(x)$, а второе - в силу чётности $g(x)$.
Рассмотрим граничное условие

$$u(0,t) = 0, \quad t > 0$$

Функцию $f(x)$ можно продолжить нечётным образом:

$$f_1(x) = sgn(x) \cdot f(|x|)$$

Аналогично для

$$g_1(x) = sgn(x) \cdot g(|x|)$$

1) $x - at > 0;$ – решение записывается в обычном виде
(в области $t < \frac{x}{a}$ влияние граничных условий не сказывается и выражение для $u(x,t)$ совпадает с решением (6) для бесконечной прямой.)

2) $x - at < 0; \quad x > 0, \quad t > \frac{x}{a}$

Получим решение уравнения колебаний

$$u(x,t) = \frac{f_1(x+at) + f_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_0^{x+at} g_1(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{0} g_1(\xi)\,d\xi =$$

$$= [-z = \xi \quad -dz = d\xi] = \frac{f_1(x+at) + f_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_0^{x+at} g_1(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2a}\int\limits_0^{at-x} g_1(z)\,dz$$

или

$$u(x,t) = \frac{f_1(x+at) + f_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} g_1(\xi)\,d\xi$$

Сформулируем метод продолжений:

Для решения задачи на полубесконечной прямой с граничным условием $u(0,t) = 0$ начальные данные надо продолжить на всю прямую нечётно.
Для решения задачи на полубесконечной прямой с граничным условием $u_x(0,t) = 0$ начальные данные надо продолжить на всю прямую чётно.

2.5. Метод Фурье для уравнения колебания струны

Метод разделения переменных или метод Фурье, является одним из наиболее распространённых методов решения уравнений с частными производными. Изложение этого метода проведём для задачи о колебаниях струны, закреплённой на концах.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

Начальные условия:

$$u(x,0) = f(x) \tag{2}$$
$$u_t(x,0) = g(x) \tag{3}$$

Граничные условия:

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \tag{4}$$

Уравнение (1) линейно и однородно, поэтому сумма частных решений также является решением этого уравнения. Имея достаточно большое количество частных решений, можно попытаться при помощи суммирования их с некоторыми коэффициентами найти искомое решение.

Поставим основную вспомогательную задачу:
найти решение уравнения (1) *не тождественное нулю, удовлетворяющее однородным граничным условиям*

$$u(0,t) = 0$$
$$u(l,t) = 0$$

и представимое в виде произведения

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{5}$$

где $X(x)$ *— функция только переменного* x, $T(t)$ *— функция только переменного* t.

Подставляя предполагаемую форму решения (5) в уравнение (1), получим:

$$X''T = \frac{1}{a^2} T''X$$

после деления на XT

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = -k^2$$

Из этого соотношения получаем обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций $X(x)$ и $T(x)$

$$X''(x) + kX(x) = 0, \quad X(x) \not\equiv 0 \tag{6}$$
$$T''(t) + a^2kT(t) = 0, \quad T(t) \not\equiv 0 \tag{7}$$

Приходим к задаче о собственных значениях (задаче *Штурма—Лиувилля*).

$$\begin{cases} X'' + kX = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

При $k < 0$ и $k = 0$ задача не имеет нетривиальных решений. Это можно проверить найдя решения этих двух случаев, общий вид которых $X(x) = C_1 e^{\sqrt{-k}x} + C_2 e^{-\sqrt{-k}x}$ и $X(x) = C_1 x + C_2$ соответственно. Рассмотрим случай при $k > 0$.
Общее решение ищется в виде

$$X_k = C^*_{1k}\cos kx + C^*_{2k}\sin kx$$

Граничные уловия дают:

$$X(0) = 0 \Rightarrow C^*_1 = 0$$

$$X(l) = 0 \Rightarrow C^*_{2k}\sin kl = 0$$

$$kl = \pi n \Rightarrow k_n = \pi\frac{n}{l}$$

k_n – собственные числа.
Этим собственным числам соответствую собственные функции ($n \in N$)

$$X_n = C^*_{2n}\sin\frac{\pi n}{l}x$$

Этим же значениям k_n соответствуют решения уравнения (7)

$$T_n = A_k\cos\frac{a\pi k}{l}t + B_k\sin\frac{a\pi k}{l}t,$$

где A_k и B_k – произвольные постоянные.

$$A_n C^*_{2n} = C_{1n}$$
$$B_n C^*_{2n} = C_{2n}$$

Функции

$$u_n(x,t) = \left(C_{1n}\cos\frac{a\pi n}{l}t + C_{2n}\sin\frac{a\pi n}{l}t\right)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

являются частными решениями уравнения (1), удовлетворяющими граничным условиям (4). Эти решения могут удовлетворить начальным условиям нашей исходной задачи только для частных случаев начальных функций $f(x)$ и $g(x)$.

В силу линейности и однородности уравнения (1) сумма частных решений

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{1n}\cos\frac{a\pi n}{l}t + C_{2n}\sin\frac{a\pi n}{l}t\right)\sin\frac{\pi n}{l}x \tag{8}$$

также удовлетворяет этому уравнению и граничным условиям.
Начальные условия позволяют определить C_{1n} и C_{2n}. Потребуем, чтобы функция (8) удовлетворяла условиям (3):

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n}\sin\frac{\pi n}{l}x, \\ u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n}{l}aC_{2n}\sin\frac{\pi n}{l}x. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Из теории рядов Фурье известно, что произвольная кусочно-непрерывная и кусочно-дифференциируемая функция $\varphi(x)$, заданная в промежутке $0 \leqslant x \leqslant l$, разлагается в ряд Фурье

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

где

$$b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi$$

Найдём коэффициенты C_{1n}

$$C_{1n} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\, dx$$

Коэффициенты C_{2n} находят из 2-го условия $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g(x)$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{2n}\cos\frac{a\pi n}{l}t + C_{1n}\sin\frac{a\pi n}{l}t\right)\frac{a\pi n}{l}\sin\frac{\pi n}{l}x\Bigg|_{t=0}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n}\frac{a\pi n}{l}\sin\frac{\pi n}{l}x$$

$$\frac{2}{l}\int\limits_0^l g(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx = \frac{a\pi n}{l}C_{2n}$$

$$C_{2n} = \frac{2}{a\pi n}\int\limits_0^l g(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\, dx$$

В итоге

$$C_{1n} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\, dx$$

$$C_{2n} = \frac{2}{a\pi n}\int\limits_0^l g(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\, dx$$

Проверим, совпадает ли данное решение с решением Д'Аламбера.

$$u(x,t) = \frac{f(x+at)+f(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} g(\xi)\, d\xi$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n}\sin\frac{\pi n}{l}x \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n}\frac{a\pi n}{l}\sin\frac{\pi n}{l}x$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} C_{1n}\sin\frac{\pi n}{l}(x-at) + \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n}\sin\frac{\pi n}{l}(x+at)\right] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\sum_{n=1}^{\infty} C_{2n}\frac{a\pi n}{l}\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n}\sin\frac{\pi n}{l}x\cos at\frac{\pi n}{l} + \frac{\pi}{a2l}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{x-at}^{x+at} C_{2n}n\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n}\sin\frac{\pi n}{l}x\cos\frac{a\pi n}{l}t - \frac{a\pi}{a2l}\sum_{n=1}^{\infty} C_{2n}\frac{l}{\pi}\cos\frac{\pi n}{l}\Bigg|_{x-at}^{x+at} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{1n}\sin\frac{\pi n}{l}x\cos\frac{a\pi n}{l}t + C_{2n}\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\sin\frac{\pi na}{l}t\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{1n}\cos\frac{\pi na}{l}t + C_{2n}\sin\frac{\pi na}{l}t\right)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

Таким образом убедились в правильности решения.

2.6. Метод Фурье для неоднородного уравнения колебания струны

Рассмотрим неоднородное уравнение колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad a^2 = \frac{k}{\rho}, \quad 0 < x < l \tag{10}$$

с начальными условиями

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x), \\ u_t(x,0) &= \psi(x), \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant x \leqslant l \tag{11}$$

и однородными граничными условиями

$$\left.\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \\ u(l,t) &= 0, \end{aligned}\right\} \quad t > 0. \tag{12}$$

Будем искать решение задачи в виде разложения в ряд Фурье по x

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \tag{13}$$

рассматривая при этом t как параметр. Для нахождения $u(x,t)$ надо определить функцию $u_n(t)$. Представим функцию $f(x,y)$ и начальные условия в виде рядов Фурье:

$$\left.\begin{aligned} f(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi,t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi; \\ \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \qquad \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi \\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \qquad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Подставляя предполагаемую форму решения (13) в исходное уравнение (10)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{l} x \left\{ -a^2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 u_n(t) - \ddot{u}_n(t) + f_n(t) \right\} = 0,$$

видим, что оно будет удовлетворено, если все коэффициенты разложения равны нулю, т.е.

$$\ddot{u}_n(t) + \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 u_n(t) = f_n(t). \tag{15}$$

Для определения $u_n(t)$ мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Начальные условия дают:

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{u}_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

откуда следует:

$$\left.\begin{aligned} u_n(0) &= \varphi_n, \\ \dot{u}_n(0) &= \psi_n. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Эти дополнительные условия полностью определяют решение уравнения (15). Функцию $u_n(t)$ можно представить в виде

$$u_n(t) = u_n^{(\mathrm{I})}(t) + u_n^{(\mathrm{II})}(t)$$

где

$$u_n^{(\mathrm{I})}(t) = \frac{1}{\pi n a} \int\limits_0^t \sin \frac{\pi n}{l} a(t-\tau) \cdot f_n(\tau)\, d\tau \tag{17}$$

есть решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями и

$$u_n^{(\mathrm{II})}(t) = \varphi_n \cos \frac{\pi n}{l} at + \frac{1}{\pi n a} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} at \tag{18}$$

— решение однородного уравнения с заданными начальными условиями. Таким образом, искомое решение запишется в виде

$$\begin{aligned} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n a} \int\limits_0^t \sin \frac{\pi n}{l} a(t-\tau) \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot f_n(\tau)\, d\tau + \\ + \int\limits_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos \frac{\pi n}{l} at + \frac{1}{\pi n a} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \end{aligned}$$

Вторая сумма представляет решение задачи о свободных колебаниях струны при заданных начальных условиях и была решена ранее. Обратимся к первой сумме, представляющей вынужденные колебания струны под действием внешней силы при нулевых начальных условиях. Пользуясь выражением (14) для $f_n(t)$, находим:

$$\begin{aligned} u_n^{(\mathrm{I})}(x,t) &= \int\limits_0^t \int\limits_0^l \left\{ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi n a} \sin \frac{\pi n}{l} a(t-\tau) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi \right\} f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau = \\ &= \int\limits_0^t \int\limits_0^l G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau, \end{aligned}$$

где

$$G(x,\xi,t-\tau) = \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{l} a(t-\tau) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi.$$

2.7. Пример некорректно поставленной задачи

Рассмотрим пример некорректно поставленной задачи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$u(x,0) = \frac{\sin \lambda x}{\lambda}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Решением является

$$u(x,t) = \frac{1}{\lambda} \sin \lambda x \operatorname{ch} \lambda t$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda \sin \lambda x \operatorname{ch} \lambda t \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\lambda \sin \lambda x \operatorname{ch} \lambda t$$

$$u(x,0) = \frac{\sin \lambda x}{\lambda} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin \lambda x \operatorname{sh} 0 = 0$$

$$\lambda \to \infty \Rightarrow u(x,0) \to 0$$

Тогда, $u_1 = 0$ - решение уравнения:

$$|u(x,0) - u_1(x,0)| < \sigma_1$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) - \frac{\partial u_1}{\partial t} \right| < \sigma_2$$

$$|u(x,t) - u_1(x,t)| = \left| \frac{1}{\lambda} \sin \lambda x \frac{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}{2} \right|$$

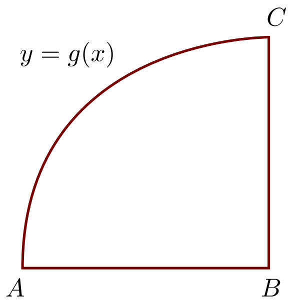
– сколь угодно большое число.
Следовательно решение является неустойчивым и, значит, задача поставлена некорректно.

2.8. Метод Римана решения волновых уравнений

Установим некоторые вспомогательные формулы, нужные для представления решений краевых задач в интегральной форме. Пусть

$$L[u]=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u$$

– линейный дифференциальный оператор, соответствующий уравнению гиперболического типа. Характеристиками уравнения являются $y=C_1$ и $x=C_2$. Начальные условия будем задавать на кривой $y=g(x)\quad(x=\eta(y))$.



$$u|_{y=g}=g(x)$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|=\psi(x)$$

$$L[u]=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u$$
$$L^*[v]=\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}(av)-\frac{\partial}{\partial y}(bv)+cv$$

$$vL[u]-uL^*[v]=v\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-u\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+av\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial}{\partial x}(av)+bv\frac{\partial u}{\partial y}+u\,(bv)=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}+2auv\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}+2buv\right)$$

Пришли к *дивергентному виду*.
Из этого следует, что L^* – сопряжённый оператор.

$$vL[u]-uL^*[v]=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}+2auv\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}+2buv\right)$$

$$\iint\limits_D[vL[u]-uL^*[v]]=\frac{1}{2}\oint\left[\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}+2auv\right)dy-\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}+2buv\right)dx\right]=$$
$$=-\frac{1}{2}\int\limits_A^B\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}+2buv\right)dx+\frac{1}{2}\int\limits_B^C\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}+2auv\right)dy+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_C^A\left[\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}+2uva\right)dy+\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}+2buv\right)dx\right]=$$
$$=-\frac{1}{2}uv\Big|_A^B+\frac{1}{2}\int\limits_A^B u\left(2\frac{\partial v}{\partial x}-2bv\right)dx+\frac{1}{2}uv\Big|_B^C+\frac{1}{2}\int\limits_B^C u\left(-2\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy+\frac{1}{2}\int\limits_A^C[\ldots]\,dxdy$$

Потребуем $\frac{\partial v}{\partial x} - bv = 0\Big|_{y=Y_0}$, $\quad \frac{\partial v}{\partial y} - av = 0\Big|_{x=X_0}$

$$v = Ce^{\int\limits_{x_0}^{x} b\,dx} \qquad v = Ce^{\int\limits_{y_0}^{y} a\,dy} \tag{19}$$

где $C = 1$.
$v(x, y, x_0, y_0)$ – *функция Римана.*

Для функции Римана должно выполняться $v(x_0, y_0, x_0, y_0) = 1$ и она должна удовлетворять $L^*(v) = 0$. Известно, что $L[u] = f(x, y)$, тогда

$$vL[u] = vf(x, y)$$

Тогда для интеграл принимает вид

$$\iint\limits_D vf(x,y)\,dxdy = \frac{1}{2}\left(uv\Big|_A - uv\Big|_B\right) + \frac{1}{2}\left(uv\Big|_C - uv\Big|_B\right) + \frac{1}{2}\int\limits_C^A [\ldots]\,dxdy$$

Для

$$B = (x_0, y_0) \Rightarrow v\Big|_B = 1,$$

мы получаем

$$vu(B) = \frac{uv\big|_A + uv\big|_B}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_C^A \left[\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y} + 2auv\right)\,dy + \left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x} + 2buv\right)\,dx\right] - \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$$

Пример. *Телеграфное уравнение*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (RC + LG)\frac{\partial u}{\partial t} + RGu$$

Начальные условия ($t = 0$):

$$u = f(x);$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(x)$$

$$a_0 = LC, \quad RC - LG = 2b_0, \quad RG = C_0$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b_0\frac{\partial u}{\partial t} + C_0 u$$

Будем искать u в виде

$$u = e^{-\frac{b_0}{a_0}t} \cdot w(x,t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-\frac{b_0}{a_0}t}\frac{\partial w}{\partial x} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-\frac{b_0}{a_0}t}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{b_0}{a_0}e^{-\frac{b_0}{a_0}t}w(x,t) + e^{-\frac{b_0}{a_0}t}\frac{\partial w}{\partial t} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{b_0^2}{a_0^2}e^{-\frac{b_0}{a_0}}w(x,t) - 2\frac{b_0}{a_0}\frac{\partial w}{\partial t}e^{-\frac{b_0}{a_0}t} + e^{-\frac{b_0}{a_0}}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = a_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \cancel{2b_0\frac{\partial w}{\partial t}} + \frac{b_0^2}{\cancel{a_0}}w - \cancel{2}\frac{b_0^2}{a_0}w + \cancel{2b_0\frac{\partial w}{\partial t}} + c_0 w$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = a_0\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(c_0 - \dfrac{b_0^2}{a_0}\right)w \\ t = 0 \quad w(x,0) = f(x) \quad \frac{\partial w}{\partial t} = g(x) + \frac{b_0}{a_0}f(x) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{1}{a_0}}_{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{b_0 - a_0 c_0}{a_0^2}}_{b^2}w$$

Итак

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + b^2 w \\ t = 0 \quad w(x,0) = f(x) \quad \frac{\partial w}{\partial t} = g(x) + \frac{b_0}{a_0}f(x) \end{cases}$$

Вернёмся к характеристическим переменным:

$$\begin{cases} \xi = \frac{b}{a}(x + at) \\ \eta = \frac{b}{a}(x - at) \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \frac{\xi - \eta}{2b} \\ x = \frac{(\xi+\eta)}{2}\frac{a}{b} \end{cases}$$

тогда

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial w}{\partial \eta}\right)b \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = b^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial \xi\,\partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{b}{a}\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta}\right) \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial \xi\,\partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right)$$

В итоге

$$4b^2\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\,\partial\eta}+b^2w=0$$

Следовательно

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\,\partial\eta}=-\frac{w}{4}$$

Пример. *Решение линейного уравнения гиперболического типа*
Найдём решение линейного уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\,\partial\eta}+\frac{1}{4}w=0$$

удовлетворяющее начальным условиям на кривой $S\,(t=0)$,

$$\xi=\eta\quad x=\frac{a}{b}\xi\quad w=f\left(\frac{a}{b}\xi\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial\xi}-\frac{\partial w}{\partial\eta}=g\left(\frac{a}{b}\xi\right)+\frac{b_0}{a_0}f\left(\frac{a}{b}\xi\right)$$

$$L[w]=\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\,\partial\eta}+\frac{w}{4}\qquad L^*[v]=L[v]=\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\,\partial\eta}+\frac{v}{4}$$

$$vL[w]-wL[v]=v\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\,\partial\eta}-w\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\,\partial\eta}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(v\frac{\partial w}{\partial\eta}\right)-\cancel{\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial w}{\partial\eta}}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(v\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)-\cancel{\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial\eta}\frac{\partial w}{\partial\xi}}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(w\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)+\cancel{\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial v}{\partial\eta}}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(w\frac{\partial v}{\partial\xi}\right)+\cancel{\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial w}{\partial\eta}}=$$

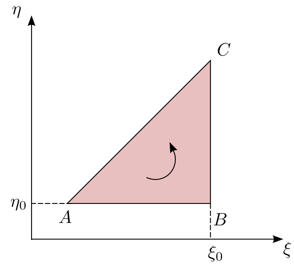
$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(v\frac{\partial w}{\partial\eta}-w\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(v\frac{\partial w}{\partial\xi}-w\frac{\partial v}{\partial\xi}\right)=0.$$

$$L[w]=L[v]=0\quad \text{(т.к. правая часть отсутствует.)}$$

Проинтегрируеем дивиргентное уравнение по области D. Нам надо найти решение в точке (ξ_0,η_0):

$$\oint\limits_{\partial D}\left(v\frac{\partial w}{\partial\eta}-w\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)d\eta-\left(v\frac{\partial w}{\partial\xi}-w\frac{\partial v}{\partial\xi}\right)d\xi=0$$

$$\oint=\int\limits_A^B+\int\limits_B^C+\int\limits_C^A=0$$



$$\oint\limits_{\partial D}\left(v\frac{\partial w}{\partial\eta}-w\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)d\eta-\left(v\frac{\partial w}{\partial\xi}-w\frac{\partial v}{\partial\xi}\right)d\xi=$$

$$=-\int\limits_A^B\left(v\frac{\partial w}{\partial\xi}-w\frac{\partial v}{\partial\xi}\right)d\xi+\int\limits_B^A\left(v\frac{\partial w}{\partial\eta}-w\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)d\eta+\int\limits_C^A\left[\left(v\frac{\partial w}{\partial\eta}-w\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)d\eta-\left(v\frac{\partial w}{\partial\xi}-w\frac{\partial v}{\partial\xi}\right)d\xi\right]=$$

$$=-wv\Big|_A^B+2\int\limits_A^B w\frac{\partial v}{\partial\xi}d\xi+vw\Big|_B^C-2\int\limits_B^C w\frac{\partial v}{\partial\eta}\,d\eta+\int\limits_C^A[\ldots]=-2wv\Big|_B+wv\Big|_A+wv\Big|_C+\int\limits_C^A[\ldots]=0$$

$$wv\Big|_B = \frac{wv\Big|_A + wv\Big|_C}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_C^A \left[\left(v\frac{\partial w}{\partial \eta} - w\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) - \left(v\frac{\partial w}{\partial \xi} - w\frac{\partial v}{\partial \xi}\right) d\xi\right]$$

Найдём функцию Римана.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\, \partial \eta} + \frac{1}{4}v = 0$$

Будем искать v в виде $v = \Phi(\lambda)$; $\quad \lambda = \sqrt{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0))}$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \Phi'(\lambda)\frac{\partial \lambda}{\partial \xi} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi\, \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(f'(\lambda)\frac{\partial \lambda}{\partial \xi}\right) = \Phi''\frac{\partial \lambda}{\partial \xi}\frac{\partial \lambda}{\partial \eta} + \Phi'\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \xi\, \partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \xi\, \partial \eta} = \frac{(\xi - \xi_0)}{2\sqrt{(\xi -' xi_0)(\eta - \eta_0)}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi - \xi_0}{\eta - \eta_0}}\frac{\partial \lambda}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta - \eta_0}{\xi - \xi_0}}$$

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \xi\, \partial \eta} = \frac{1}{4\sqrt{(\xi -' xi_0)(\eta - \eta_0)}} = \frac{1}{4\lambda}$$

$$\Phi'' + \frac{\Phi'}{\lambda} + \Phi = 0 \tag{20}$$

Уравнение (20) является уравнением Бесселя нулевого порядка.

$$\Phi = J_0(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}}{2k!!}, \qquad \Phi(0) = 1$$

Итак, искомая функция Римана $v = J_0(\lambda)$
на прямой AB

$$\lambda = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial \xi} = J_0'(\lambda)\frac{\partial \lambda}{\partial \xi}\Big|_{\eta=\eta_0} = 0$$

на прямой BC

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = J_0'(\lambda)\frac{\partial \lambda}{\partial \eta}\Big|_{\xi=\xi_0} = 0$$

В точке B $v(b) = 1 = v(A) = v(c)$. Так как $\xi = \eta \Rightarrow d\xi = d\eta$, тогда

$$w(B) = \frac{w(A) + w(C)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_C^A \left[v\left(\frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{\partial w}{\partial \xi}\right) - w\left(\frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \xi}\right)\right] d\xi$$

Известно, что

$$b\left(\frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{\partial w}{\partial \xi}\right) = -g\left(\frac{a}{b}\xi\right) - \frac{b_0}{a_0}f\left(\frac{a}{b}\xi\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = J_0'(\lambda)\frac{(\xi - \xi_0)}{\sqrt{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}} \qquad \frac{\partial v}{\partial \xi} = J'(\lambda)\frac{\eta - \eta_0}{\sqrt{(\eta - \eta_0)(\xi - \xi_0)}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \xi} = J_0'(\lambda)\frac{(\eta_0 - \xi_0)}{\sqrt{(\eta - \eta_0)(\xi - \xi_0)}}$$

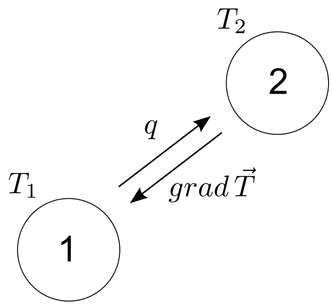
В итоге получаем

$$w(\xi_0, \eta_0) = \frac{f\left(\frac{a}{b}\eta_0\right) + f\left(\frac{a}{b}\xi_0\right)}{2} +$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0}\left\{J_0(\lambda)\left(-\frac{1}{b}\right)\left(g\left(\frac{a}{b}\xi\right) + \frac{b_0}{a_0}f\left(\frac{a}{b}\xi\right)\right) - f\left(\frac{a}{b}\xi\right)\frac{J'(\lambda)(\eta_0 - \xi_0)}{\sqrt{(\eta - \eta_0)(\xi - \xi_0)}}\right\} d\xi \tag{21}$$

3. Уравнения параболического типа.

3.1. Вывод уравнения теплопроводности

Уравнения с частными производными 2-го порядка параболического типа часто встречаются при изучении процессов теплопроводности и диффузии.

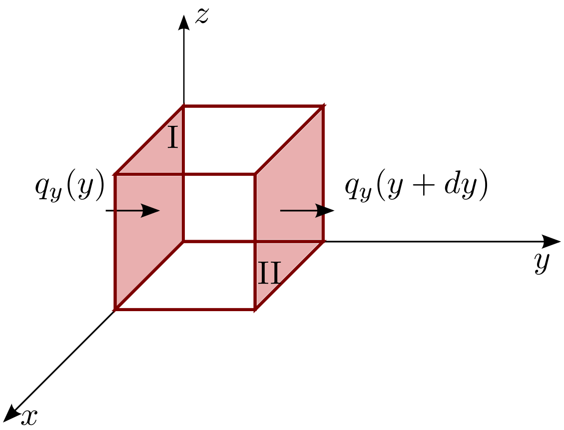


При постоянных температурах T_1 и T_2 тепло перетекает от более нагретого участка к менее нагретому. Градиент направлен в сторону возрастания тепла.
Закон Фурье:

$$q = -k\,\mathrm{grad}T$$

Поток тепла пропорционален градиенту температуры. q - количество тепла, протекающего за единицу времени через единицу площади. q — коэффициент теплопроводности материала.
Возьмём бесконечно малый объём. Рассмотрим грани куба. Перпендикулярно оси x через грань II выходит тепловой поток. Найдём разность между тепловым потоком, вошедшим в I и вышедшим из II.
За время dt в куб входит количество тепла $q_y\,dxdzdt$, а выходит $-q_y(y+dy)\,dxdzdt$.

$$q_y(y)\,dxdzdt = -q_y(y+dy)\,dxdzdt$$



Мы можем разложить функцию в ряд Тейлора, пользуясь малостью dy:

$$q_y(y)\,dxdzdt - q_y(y+dy)\,dxdzdt - \frac{\partial q_y}{\partial y}(y)\,dxdydz$$

Пренебрегая малыми 2-го порядка мы получили формулу тепла, которое осталось внутри куба.

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x}q_x - \frac{\partial}{\partial y}q_y - \frac{\partial}{\partial z}q_z\right)\,dxdydzdt$$

Количество тепла, которое нужно сообщить одному телу, чтобы повысить его температуру на ΔT равно

$$Q = cm\Delta T$$

где $m = c\rho\,dxdydzdT$.
Подставляем Q

$$c\rho\,dTdxdydz = \left(-\frac{\partial}{\partial x}q_x - \frac{\partial}{\partial y}q_y - \frac{\partial}{\partial z}q_z\right)\,dxdydzdt.$$

Приходим к следующей формуле

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}q_x + \frac{\partial}{\partial y}q_y + \frac{\partial}{\partial z}q_z\right)$$

Из закона Фурье определим проекции q_x, q_y, q_z

$$\overrightarrow{\text{grad}}T = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k}$$

$$q = -k\overrightarrow{\text{grad}}T$$

$$q_x = -k_x\frac{\partial T}{\partial x} \qquad q_y = -k_y\frac{\partial T}{\partial y} q_z = -k_z\frac{\partial T}{\partial z}$$

Наше тело изотропно, то есть зависит от времени

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right), \quad k_x = k_y = k_z = k = const$$

$$\frac{k}{c\rho} = a^2$$

где a — коэффициент температуропроводности, а c — коэффициент теплоёмкости. Будем рассматривать уравнение в одномерном случае:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

Уравнение (1) называется *уравнением теплопроводности*.

3.2. Метод Фурье для уравнения теплопроводности

Однородная краевая задача для уравнения теплопроводности на отрезке:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad (0 < x < l, t > 0) \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{2}$$

и граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} u(0,t) = \mu_1(t), \\ u(l,t) = \mu_2(t) \end{aligned}\right\} \quad (t \geqslant 0). \tag{3}$$

Изучение общей первой краевой задачи начнём с решения следующей простейшей задачи I:
найти непрерывное в замкнутой области $(0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T)$ *решение однородного уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{4}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l \tag{5}$$

и однородным граничным условиям

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{6}$$

Для решения этой задачи рассмотрим, как принято в методе разделения переменных, сначала основную вспомогательную задачу:
найти решение уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx},$$

не равное тождественно нулю, удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \tag{7}$$

и представимое в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{8}$$

где $X(x)$ *– функция только переменного* x, $T(t)$ *– функция только переменного* t.
Подставляя предполагаемую форму решения (9) в уравнение (4) и производя деление обеих частей равенства на a^2XT, получим:

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \tag{9}$$

где $\lambda = const$, так как левая часть равенства зависит только от t, а правая – только от x. Отсюда следует, что

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{10}$$

$$T' + a^2\lambda T = 0 \tag{11}$$

Граничные условия (7) дают:

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \tag{12}$$

Таким образом, для определения функции $X(x)$ мы получили задачу о собственных значениях (задачу Штурма — Лиувилля)

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, X(l) = 0, \tag{13}$$

исследованную при решении уравнения колебаний. При этом было показано, что только для значений параметра λ, равных

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

существуют нетривиальные решения уравнения (9), равные

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{14}$$

Этим значениям λ_n соответствуют решения уравния (11)

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2\lambda_n t},$$

где C_n – не определённые коэффициенты.
Возвращаясь к основной вспомогательной задаче, видим, что функции

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = C_n e^{-a^2\lambda_n t}\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

являются частными решениями уравнения (4), удовлетворяющими нулевым граничным условиям.

Обратимся теперь к решению задачи (I). Составим формально ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2\lambda_n t}\sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{15}$$

Функция $u(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям, так как им удовлетворяют все члены ряда. Требуя выполнения начальных условий, получаем:

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{16}$$

т.е. C_n являются коэффициентами Фурье функции $\varphi(x)$ при разложении её в ряд по синусам на интервале $(0,l)$:

$$C_n = \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi. \tag{17}$$

Рассмотрим теперь ряд (15) с коэффициентам C_n, определяемыми по формуле (17), и покажем, что этот ряд удовлетворяет всем условиям задачи (I). Для этого надо доказать, что функция $u(x,t)$, определяемая рядом (15), дифференциируема, удовлетворяет уравнению в области $0 < x < l, \quad t > 0$ и непрерывна в точках границы этой области (при $t = 0, x = 0, x = l$).
Так как уравнение (4) линейно, то в силу принципа суперпозиции ряд, составленный из частных решений, также будет решением, если он сходится и его можно дифференциировать почленно дважды по x м один раз по t. Покажем, что при $t \geqslant t > 0$ (t – любое вспомогательное число) ряды производных

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial u_n}{\partial t} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$$

сходится равномерно. В самом деле,

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| = \left|-C_n\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2n^2e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2a^2t}\sin\frac{\pi n}{l}x\right| < |C_n|\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\cdot a^2n^2e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2a^2t}$$

В дальнейшем будут сформулированы дополнительные требования, которым должна удовлетворять фукнция $\varphi(x)$. Предположим сначала, что $\varphi(x)$ ограничена, $|\varphi(x)| < M$; тогда

$$|C_n| = \left|\frac{2}{l}\right|\left|\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi\right| < 2M$$

откуда следует, что

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| < 2M\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2n^2e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2a^2\bar{t}} \quad \text{для} \quad t \geqslant \bar{t}$$

и аналогично

$$\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right| < 2M\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2n^2e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2a^2\bar{t}} \quad \text{для} \quad t \geqslant \bar{t}.$$

Вообще

$$\left|\frac{\partial^{k+1} u_n}{\partial t^k\,\partial x^l}\right| < 2M\left(\frac{\pi}{l}\right)^{2k+l}\cdot n^{2k+l}\cdot a^{2k}\cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2a^2\bar{t}} \quad \text{для} \quad t \geqslant \bar{t}.$$

Исследуем сходимость мажорантного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$, где

$$\alpha_n = Nn^q e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2a^2\bar{t}}. \tag{18}$$

По признаку Далабмера ряд сходится, так как

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^q}{n^q}\frac{e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2a^2(n^2+2n+1)\bar{t}}}{e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2a^2n^2\bar{t}}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^q e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2a^2(2n+1)\bar{t}} = 0.$$

Отсюда вытекает возможность почленного дифференциирования ряда (15) любое число раз в области $t \geqslant \bar{t} > 0$. Далее, пользуясь принципом суперпозиции, заключаем, что функция определённая этим рядом, удовлетворяет уравнению (4). В силу произвольности $\bar{t}$ это имеет место для всех $t > 0$. Тем самым доказано, что при $t > 0$ ряд (15) представляет функцию, дифференциируемую нужное число раз и удовлетворяющую уравнению (4).

Если функция $\varphi(x)$ непрерывная, имеет кусочно-непрерывную производную и удовлетворяет условиям $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(l) = 0$, от ряд (15)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2\lambda_n t}\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

определяет непрерывную функцию при $t \geqslant 0$.

Действительно, из неравенства

$$|u_n(x,t)| < |C_n| \quad (\text{при} t \geqslant 0, 0 \leqslant x \leqslant l)$$

сразу же следует равномерная сходимость ряда (15) при $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$, что и доказывает справедливость сделанного выше утверждения, если учесть, что для непрерывной и кусочно-гладкой функции $\varphi(x)$ ряд из модулей коэффициентов Фурье сходится, если $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

Итак, задача нахождения решения прямой краевой задачи для однородного уравнения с нулевыми граничными условиями и непрерывным, кусочно-гладким начальным условием решена полностью.

3.3. Задача Коши для бесконечного стержня

Рассмотрим задачу Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0$$

Начальное условие:

$$u(x,0) = f(x)$$

$$ta^2 = T \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial T} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Будем искать ограниченное нетривиальное решение уравнения методом разделения переменных, представимое в виде

$$u = X(x)Y(t)$$

Подставляя это выражение в исходное уравнение, получаем:

$$\frac{X''}{X} = \frac{Y'}{Y} = -\lambda^2,$$

где λ^2 — параметр разделения.
Частные решения находятся в таком виде

$$X(x) = \alpha(\lambda)\sin\lambda x + \beta(\lambda)\cos\lambda x$$
$$Y(t) = e^{-\lambda^2 t}$$

Общее решение

$$u(x,t) = (\alpha(\lambda)\sin\lambda x + \beta(\lambda)\cos\lambda x)e^{-\lambda^2 t}$$

Запишем интегральный вид уравнения

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\alpha(\lambda)\sin\lambda x + \beta(\lambda)\cos\lambda x)e^{-\lambda^2 t}\, d\lambda$$

Из начальных условий найдём неизвестные

$$u(x,0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\alpha(\lambda)\sin\lambda x + \beta(\lambda)\cos\lambda x)d\lambda = f(x)$$

$$\alpha(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\, d\xi$$

$$\beta(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\, d\xi$$

Подставляя в уравнение и меняя порядок интегрирования получим

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{R^2} f(\xi)(\sin\lambda x\sin\lambda\xi + \cos\lambda x\cos\lambda\xi)e^{-\lambda^2 t}\, d\lambda d\xi$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{R^2} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)e^{-\lambda^2 t}\, d\lambda d\xi$$

Произведём замену переменных

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos\lambda(x-\xi)e^{-\lambda^2 t}\,d\lambda = \left[\begin{array}{l}\lambda\sqrt{t}=\sigma\\ \lambda(x-\xi)=\sigma\omega\end{array}\right] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos\sigma\omega e^{-\sigma^2}\frac{d\sigma}{\sqrt{t}}$$

Возьмём этот интаграл. Для удобства обозначим его как

$$I(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega\sigma e^{-\sigma^2}\,d\sigma$$

Найдём производную по ω

$$\frac{dI}{d\omega}=-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sigma\sin\sigma\omega e^{-\sigma^2}d\sigma-\frac{\omega}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos\sigma\omega e^{-\sigma^2}d\sigma$$

$$I(\omega)=\sqrt{\pi}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4}}=\sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

В итоге получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos(x-\xi)e^{-\lambda^2 t}\,d\lambda=\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}$$

Подставим в общее решение

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{\pi}{t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,d\xi\cdot\frac{1}{2\pi}$$

Окончательное решение:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,d\xi$$

Проверим, что это действительно решение:

$$t=0\qquad\lim_{t\downarrow 0}u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\delta(\xi-x)\,d\xi=f(x)$$

$$G(x,\xi,t)=\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}$$

Продифференциируем функцию $G(x,\xi,t)$

$$\frac{\partial G}{\partial t}=\left(\frac{(x-\xi)^2}{2\cdot 4a^3t^2\sqrt{t}}-\frac{1}{4at\sqrt{\pi t}}\right)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$$
$$\frac{\partial G}{\partial x}=-\frac{\cancel{2}(x-\xi)^2}{4a^2t}\cdot\frac{1}{\cancel{2}a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$$
$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}=\left(\frac{2(x-\xi)^2}{16a^5\sqrt{\pi t}t^2}-\frac{1}{4a^3t\sqrt{\pi t}}\right)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$$

Функция удовлетворяет уравнению теплопроводности по переменным (x, t).
Итак, мы пришли к интегральному представлению искомого решения

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) G(\xi, x, t)\, d\xi,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \tag{19}$$

Функцию $G(x, \xi, t)$, определяемую формулой (19), часто называют фундаментальным решением уравнения теплопроводности.

3.4. Автомодельные решения задачи теплопроводности.

Некоторые задачи представляют в виде функции от комбинации переменных x и t.
Рассмотрим пример: пусть $z = \frac{x}{2\sqrt{t}}$, задача теплопроводности имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Начальные условия:

$$u(x,t) = u_0 f(z)$$

$$\begin{aligned} &u = u_0, \quad x \geqslant 0, \\ &u = 0, \quad\ \ x < 0 \end{aligned}$$

Считаем частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_0 \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{x}{4t\sqrt{t}} u_0 \frac{df}{dz}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_0 \frac{df}{dz}\frac{1}{2\sqrt{t}} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_0 \frac{d^2 f}{dz^2} \cdot \frac{1}{4t}$$

Подставляем в уравнение теплопроводности

$$\cancel{-u_0}\frac{x}{\cancel{4t}\sqrt{t}}\frac{df}{dz} = \cancel{u_0}\frac{1}{\cancel{4t}}\frac{d^2 f}{dt^2}$$

$$-2z\frac{df}{dz} = \frac{d^2 f}{dz^2}$$

Получили дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + 2z\frac{df}{dz} = 0$$

Порядок уравнения можно понизить до первого следующей заменой:

$$\frac{df}{dz} = \varphi \Rightarrow \frac{d\varphi}{dz} = -2z\varphi$$

Полученное уравнение легко интегрируется

$$\ln \varphi = C - z^2 \Rightarrow \varphi = Ce^{-z^2}$$

$$f(z) = C\int\limits_0^z e^{-\xi^2} d\xi$$

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = u_0 \Rightarrow \lim_{t\to 0} f(z) = 1 \Rightarrow C = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

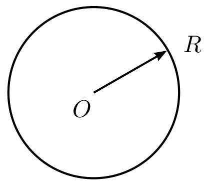
Окончательно получаем:

$$u(x,t) = \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{-\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi$$

3.5. Задача теплопроводности в цилиндрической системе координат

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \\ u(R,t) = f(t) = 0 \\ u(r,0) = \varphi(p) \end{aligned}\right\}$$

Будем искать решение в виде функции



$$u = X(p)\cdot Y(t)$$

Подставляем в уравнение

$$X(p)Y'(t) = Y(t)X''(p) + \frac{1}{p}Y(t)X'(p)$$

Получаем следующее соотношение

$$\frac{Y'(t)}{Y(t)} = \frac{X''(p) + \frac{1}{p}X'(p)}{X(p)} = -k^2$$

Для X получаем дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$X'' + \frac{1}{p}X' + k^2X = 0$$

Сделаем замену $\xi = kp$

$$\frac{d^2X}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{dX}{d\xi} + X = 0$$

Будем искать решение в виде

$$X(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\xi^k$$

Находим первые две производные

$$X'(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k\xi^{k-1}$$

$$X''(\xi) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k(k-1)k\xi^{k-2}$$

и подставляем в полученное уравнение

$$a_0 + a_1\xi + a_1\frac{1}{\xi} + \sum_{k=2}^{\infty}(a_k(k-1)k\xi^{k-2} + a_kk\xi^{k-2} + a_k\xi^k) = 0$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях ξ, находим a_i

$$\frac{1}{\xi}a_1 = 0 \quad \xi^0 : a_0 + 4a_2 = 0$$

$$\xi^1 a_1 + 3a_3 + 6a_3 = 0 \Rightarrow a_{2k+1} = 0 \quad k \in N \cup 0$$

Получаем

$$X(p) = \sum (-1)^n \frac{\xi^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

−функция Бесселя нулевого порядка.

Исследуем ряд на сходимость:
Достаточно показать, что n-ый член (при $n \to \infty$) стремится к 0.

$$X(p) = I_0(kp) = \sum (-1)^n \frac{(kp)^2 n}{2^{2n}(n!)^2}$$

В итоге получаем

$$u_n(p,t) = c_n e^{-k_n^2 t} J_0(k_n p)$$

Решение исходной задачи будет представляться в таком виде

$$u(p,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(p,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-k_n^2 t} J_0(k_n p)$$

Определим k_n: $u(R,0) = 0 \Rightarrow J_0(k_n R) = 0$
Уравнение решается и имеет счётное количество корней - k_n.

$$t = 0 \quad u(\rho, 0) = \varphi(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n J_0(k_n \rho) e^0$$

Для функции Бесселя:

$$\int\limits_0^R J_0(k_n p) I_0(k_m p) p dp = \begin{cases} \frac{1}{2} J_0'^2(k_n R) & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$$

Это свойство можно использовать для нахождения коэффициентов C_n следующим образом

$$\int\limits_0^R \rho \varphi(\rho) J_0(k_N \rho) d\rho = C_n \int_0^R \rho J_0^2(k_n \rho) d\rho$$

$$C_n = \frac{\int\limits_0^R \rho \varphi(\rho) J_0(k_n \rho) d\rho}{\int\limits_0^R \rho J_0^2(k_n \rho) d\rho}$$

4. Уравнения эллиптического типа.

4.1. Вывод уравнения

При исследовании стационарных процессов различной физической природы (колебания, теплопроводность, диффузия, и др.) обычно приходят к уравнениям эллиптического типа. Наиболее распространённым уравнением этого типа является *уравнение Лапласа*

$$\Delta u = 0$$

Функция u называется *гармонической* в области Ω, если она непрерывна в этой области вместе со своими производными до 2-го порядка и удовлетворяет уравнению Лапласа.

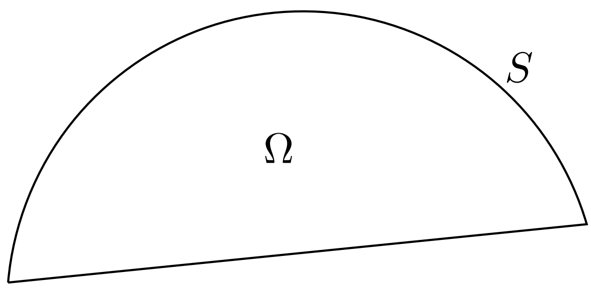
Представления в различных системах координат

В декартовой $\quad \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

В цилиндрической $\quad \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

В сферической $\quad \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2 \sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \dfrac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \dfrac{1}{r^2 \sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$

Рассмотрим некоторый объём Ω, ограниченный поверхностью S.



Задача о стационарном распределении температуры $u(x, y, z)$ внутри тела Ω формулируется следующим образом:

Найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую внутри Ω уравнению

$$\Delta u = -f(x, y, z)$$

и граничному условию, которое может быть взято в одном из следующих видов:

I.	$u_g = f(x, y, z)$	первая краевая задача
II.	$\dfrac{\partial u}{\partial n} = g(x, y, z)$	вторая краевая задача
III.	$\dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = h(x, y, z)$	третья краевая задача

где f, g, h — заданные функции, $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по внешней нормали к поверхности S.

Первую краевую задачу называют *задачей Дирихле*, вторую *задачей Неймана*. Третья задача — задача *смешанная*.

4.2. Метод Фурье в задачах эллиптического типа

Решение краевых задач для уравнений Лапласа может быть найдено методом разделения переменных в случае некоторых простейших областей (круг, прямоугольник, шар и цилиндр и др.). Получающиеся при этом задачи на собственные значения (задачи Штурма—Лиувилля) приводят к различным классам специальных функций. Рассмотрим задачу Дирихле, при решении которой используются только тригонометрические функции.

4.2.1. Первая краевая задача для круга

$$\Delta u = 0 \quad \textit{внутри круга}$$

Граничное условие

$$u\big|_{\Gamma} = f(\theta)$$

Γ — окружность радиуса R

$$u|_{r=k} = f(\theta)$$

тогда в полярной системе координат

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

$$u = F(r)\cdot G(\theta)$$

$$F''G + \frac{1}{r}F'G + \frac{1}{r^2}FG'' = 0 \quad \Bigg| \frac{r^2}{FG}$$

$$\frac{r^2F'' + rF'}{F} = -\frac{G''}{G} = \lambda$$

Получаем уравнения вида

$$G''(\theta) = -\lambda G(\theta)$$

$$r^2F''(r) + rF'(r) = \lambda F(r)$$

$$\lambda > 0 \quad \lambda = \gamma^2 > 0 \quad \gamma = n$$

$$r^2F''(r) + rF'(r) - n^2F(r) = 0$$

Решения

$$G = A\cos\gamma\theta + B\sin\gamma\theta$$

Функцию F будем искать в виде $R(r) = r^{\mu}$. Подставляя в уравнение и сокращая на r^{μ}, найдём

$$n^2 = \mu^2 \quad \text{или} \quad \mu = \pm n (n > 0).$$

Следовательно

$$F = C_1 r^n + C_2 r^{-n}$$

Для решения внутренней задачи надо положить $R = C_1 r^n$ $(\mu = n)$, так как, если $C_2 \neq 0$, то функция $u = F(r)G(\theta)$ обращается в бесконечность при $r = 0$ и не является гармонической функцией вокруг круга. Для решения внешней задачи, наоборот, надо брать $R = C_2 r^{-n}$ $(\mu = -n)$, так как решение внешней задачи должно быть ограничено в бесконечности.

Так как G должна иметь период 2π, то $\gamma = n$.

$$G = A\cos n\theta + B\sin n\theta, \quad n \in \mathbb{N}$$

Таким образом частное решение для $r \leqslant R$ имеет вид

$$u_m = (C_1 A\cos n\theta + C_1 B\sin n\theta)r^n$$

Сумма решения

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}(C_{1n}\cos n\theta + C_{2n}\sin n\theta)r^n$$

Найдём коэффициенты используя граничное условие

$$u(\theta, R) = C_{10} + \sum_{n=1}^{\infty}(C_{1n}\cos n\theta + C_{2n}\sin n\theta)R^n = f(\theta) \tag{1}$$

Возьмём разложение $f(\theta)$ в ряд Фурье

$$f(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos n\theta + \beta_n\sin n\theta) \tag{2}$$

где

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\,d\psi$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\cos n\psi\,d\psi \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\sin n\psi\,d\psi \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Сравнивая (1) и (2), получаем

$$C_{10} = \frac{\alpha_0}{2}, \quad C_{1n} = \frac{\alpha_n}{R^n}, \quad C_{2n} = \frac{\beta_n}{R^n}$$

Таким образом, мы получили формальное решение первой внутренней задачи для круга в виде ряда

$$u(\theta, r) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos n\theta + \beta_n\sin n\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^n \tag{3}$$

4.2.2. Интеграл Пуассона

С помощью преобразований (3) получим решение в виде *интеграла Пуассона*.
Подставляя выражения для кожффициентов Фурье в формулу (3) и меняя порядок суммирования и интегрирования, будем иметь:

$$u(\theta, r) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n(\cos n\psi\cos n\theta + \sin n\psi\sin n\theta)\right\}d\psi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n(\theta - \psi)\right\}d\psi \tag{4}$$

Произведём следующие тождественные преобразования:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}t^n\cos n(\theta-\psi) &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}t^n\left[e^{in(\theta-\psi)}+e^{-in(\theta-\psi)}\right]= \\ &= \frac{1}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(te^{i(\theta-\psi)}\right)^n+\left(te^{-i(\theta-\psi)}\right)^n\right]\right\}= \\ &= \frac{1}{2}\left[1+\frac{te^{i(\theta-\psi)}}{1-te^{i(\theta-\psi)}}+\frac{te^{-i(\theta-\psi)}}{1-te^{-i(\theta-\psi)}}\right]= \\ &= \frac{1}{2}\frac{1-t^2}{1-2t\cos(\theta-\psi)+t^2} \qquad \left(t=\frac{r}{R}<1\right).\end{aligned}$$

Подставляя полученные результаты в равенство (4), получаем:

$$u(\theta,r)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(\psi)\frac{R^2-r^2}{r^2-2rR\cos(\theta-\psi)+R^2}\,d\psi \tag{5}$$

Полученная формула, дающая решение первой краевой задачи внутри круга, называется *интегралом Пуасссона*, подинтегральное выражение

$$K(r,\theta,R,\psi)=\frac{R^2-r^2}{r^2-2rR\cos(\theta-\psi)+R^2}$$

– *ядром Пуассона*.

4.2.3. Задача Дирихле для прямоугольной области.

$$\Delta u = 0$$

$$u|_{x=0} = \varphi_1(y) \quad u|_{y=0} = \psi_1(x)$$
$$u|_{x=a} = \varphi_2(y) \quad u|_{y=b} = \psi_2(x)$$

Разбивают задачу на две части

$$u = u_1 + u_2$$

$$\Delta u_1 = 0$$

$$u|_{x=0} = 0 \quad u|_{y=0=\psi_1(x)}$$
$$u|_{x=a} = 0 \quad u|_{y=b=\psi_1(x)}$$

$$\Delta u_2 = 0$$

$$u|_{x=0} = \varphi_1(y)$$
$$u|_{x=a} = \varphi_2(y)$$
$$u|_{y=0} = 0$$
$$u|_{y=b} = 0$$

Решим задачу методом разделения переменных

$$u_1 = \Phi_1(x) G_1(y)$$

$$\Phi_1'' G_1 + \Phi_1 G_1'' = 0$$
$$\frac{\Phi_1''}{\Phi_1} = -\frac{G_1''}{G_1} = -\gamma^2$$

$$\Phi_1'' + \gamma^2 \Phi_1 = 0 \quad \Phi_1(x) = A\cos\gamma x + B\sin\gamma x$$
$$G_1'' - \gamma^2 G_1' = 0 \quad G_1(y) = C_1 \operatorname{ch}\gamma y + C_2 \operatorname{sh}\gamma y$$

$$\Phi_1(0) = A = 0$$

$$\Phi_1(a) = B\sin\gamma a = 0$$

$$\gamma a = \pi n \quad \gamma = \frac{\pi n}{a}$$

У нас получилось счётное количество частных решений, поэтому мы их суммируем.

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_{1n} \operatorname{ch}\frac{n\pi}{a} y + C_{2n} \operatorname{sh}\frac{\pi n}{a} y) \sin\frac{\pi n}{a} x$$

$$u_1(x,0) = \psi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} \sin\frac{\pi n}{a} x \quad \Bigg| \sin\frac{m\pi}{a} x$$

$$\int_0^a \psi_1(x) \sin\frac{m\pi}{a} x\, dx = C_{1m} \int_0^a \sin^2\frac{m\pi}{a} x\, dx = C_{1m} \int_0^a \frac{1 - \cos 2\frac{m\pi}{a} x}{2}\, dx = C_{1m}\frac{a}{2}$$

$$C_{1n} = \frac{2}{a}\int\limits_0^a \varphi_1(x)\sin\frac{\pi n}{a}x\,dx$$

$$u_1(x,b) = \psi_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(C_{1n}\operatorname{ch}\frac{\pi n}{a}b + C_{2n}\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}b)\sin\frac{\pi n}{a}x$$

$$C_{1n}\operatorname{ch}\frac{\pi n}{a}b + C_{2n}\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}b = \frac{2}{a}\int\limits_0^a \psi_2(x)\sin\frac{\pi n}{a}x\,dx$$

$$u_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}(C_{1n}\operatorname{ch}\frac{\pi n}{a}x + C_{2n}\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}x)\sin\frac{\pi n}{a}y$$

$$C_{1n} = \frac{2}{b}\int\limits_0^b \varphi_1(y)\sin\frac{\pi n}{b}y\,dy$$

$$C_{1n}\operatorname{ch}\frac{\pi n}{b}a + C_{2n}\operatorname{sh}\frac{\pi n}{b}a = \frac{2}{b}\int\limits_0^b \varphi_2(y)\sin\frac{\pi n}{b}y\,dy$$

$$C_{2n} = \frac{2}{b}\int\limits_0^b \varphi_2(y)\sin\frac{\pi n}{b}y\,dy - C_{1n}\operatorname{ch}\frac{\pi n}{b}a$$

Если $\Delta u = h(x,y)$, то решение найдём в виде

$$h(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(y)\sin\frac{\pi n}{a}x$$

$$H_n(y) = \frac{2}{a}\int\limits_0^a h(x,y)\sin\frac{\pi n}{a}x\,dx$$

тогда $u_1 = G(y)\sin\frac{\pi n}{a}x$

$$G'' - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 G = H_n(y)$$

$$G_{res} = C_1\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}y + C_2\operatorname{ch}\frac{\pi n}{a}y + G_{part}$$

4.3. Устойчивость решения задачи Дирихле

Задача Дирихле: Дана область Ω, ограниченная поверхностью Σ. Требуется найти функцию $u(M)$, которая

1) определена и непрерывна в замкнутой области $\bar{\Omega} = \Omega + \Sigma$;

2) удовлетворяет в открытой области Ω уравнению Лапласа: $\Delta u = 0$;

3) принимает на поверхности Σ заданное значение: $u\Big|_{\Sigma} = f(p), \quad p \in \Sigma$.

Теорема 4.1 (Единственность решения задачи Дирихле). *Первая внутренняя краевая задача для уравнения Лапласа имеет единственное решение.*

Доказательство. (от противного)
Допустим, что существуют два решения $u_1(M)$ и $u_2(M)$ первой краевой задачи.

Рассмотрим их разность: $u(M) = u_1(M) - u_2(M)$.

Функция $v(M)$ удовлетворяет требованиям 1 и 2 решения задачи Дирихле: v - определена и непрерывна в $\bar{\Omega}$; $\Delta v = 0$ в Ω. На границе получаем: $v\Big|_{\Sigma} = 0$.

Функция v в замкнутой области достигает своего максимального значения.

Если предположить, что $v > 0$ хотя бы в одной внутренней точке, то получим, что максимальное значение v достигается внутри Ω, что противоречит принципу максимума (так как $v\Big|_{\Sigma} = 0$) для гармонических функций.

Аналогичные рассуждения можно провести для случая, когда $v < 0$ в Ω. Получим противоречие с принципом минимума для гармонических функций. ◂

Теорема 4.2 (Устойчивость решения задачи Дирихле). *Задача Дирихле устойчива относительно малый возмущений на границах области.*

Доказательство. u_1 и u_2 — гармонические функции.

$$\Delta u_1 = 0 \Delta u_2 = 0$$
$$u_1\Big|_S = f u_2\Big|_S = f + \varepsilon$$

$$\varepsilon \ll 1, |u_1 - u_2| < \varepsilon$$

◂

4.4. Фундаментальное решение уравнения Лапласа

Большой интерес представляют решения уравнения Лапласа, обладающие сферической или цилиндрической симметрией, т.е. зависящие только от одно переменной r или ρ.
Решение уравнения Лапласа $u = U(r)$, обладающие сферической симметрией, будет определяться из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right) = 0$$

Интегрируя это уравнение, находим:

$$U = \frac{C_1}{r} + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Полагая, например, $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, поулчаем функцию

$$U_0 = \frac{1}{r}, \tag{6}$$

которую называют *фундаментальным решением уравнения Лапласа в пространстве*.
Аналогично, полагая

$$u = U(\rho)$$

и пользуясь уравнением Лапласа в цилиндрических координатах

$$\Delta_{\rho,\varphi,z}u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

найдём решение, обладающее цилиндрической или круговой симметрией (в случае двух независимых переменных), в виде

$$U(\rho) = C_1 \ln\rho + C_2.$$

Выбирая $C_1 = -1$ и $C_2 = 0$, будем иметь:

$$U_0 = \ln\frac{1}{\rho}$$

Функцию $U_0(\rho)$ часто называют *фундаментальным решением уравнения Лапласа на плоскости* (для двух независимых переменных).

4.5. Принцип максимума уравнения Лапласа

Теорема 4.3. *Если функция $u(M)$, определённая и непрерывная в замкнутой области $T+\Sigma$, удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ внутри T, то максимальные и минимальные значения функции достигаются на поверхности Σ (**принцип максимального значения**).*

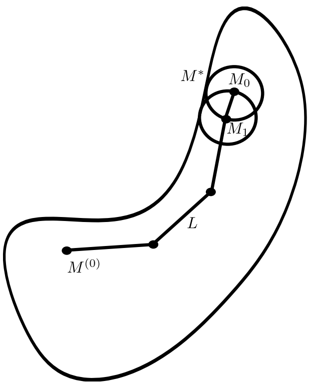
Доказательство. Допустим, что функция $u(M)$ достигает максимального значения в некоторой внутренней точке M_0 области T, так что $u_0 = y(M_0) \geqslant u(M)$, где M — любая точка области T. Окружим точку M_0 сферой Σ_ρ радиуса ρ, целиком лежащей внутри области T. Поскольку, по предположению, $u(M_0)$ есть наибольшее значение функции $u(M)$ в $T+\Sigma$, то $u|_\Sigma \leqslant u(M_0)$. Пользуясь формулой среднего значения

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2}\iint\limits_{\Sigma_a} u\,d\sigma$$

и заменяя под интегралом всюду $u(M)$ значением $u(M_0)$, получим:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi\rho^2}\iint\limits_{\Sigma_\rho} u(M)\,d\sigma_M \leqslant \frac{1}{4\pi\rho^2}\iint\limits_{\Sigma_\rho} u(M_0)\,d\sigma = u(M_0).$$

Если предположить, что хотя бы в одной точке M сферы Σ_ρ $u(M) M u(M_0)$, то очевидно, что вместо знака $\leqslant$ будем иметь знак $<$, что приводит к противоречию. Таким образом, на всей поверхности $\Sigma_\rho \quad u(M) \equiv u(M_0)$.
Если ρ_0^m — минимальное расстояние от M_0 до поверхности Σ, то $u(M) \equiv u(M_0)$ для всех точке, лежащих внутри $\Sigma_{\rho_0^m}$. Отсюда следует, что в точках M^*, принадлежащих общей части $\Sigma_{\rho_0^m}$ и Σ, по непрерывности $u(M^*) \equiv u(M_0)$. Это и доказывает теорему, поскольку мы убедились, что максимальное хначение $u(M_0)$ достигается в точках границы M^*.



Нетрудно убедиться, что если область T связная и максимальное значение достигается хотя бы в одной внутренней точке M_0, то $u(M) \equiv u(M_0)$ во всей области. Пусть $M^{(0)}$ — какая-либо другая точка области T. Соединим точку $M^{(0)}$ с точкой M_0 ломаной линией L, длину которой обозначим l. Пусть M_1 есть последняя точка выхода линии L из Σ_{ρ^m}. В этой точке $u(M_1) = u(M_0)$. Опишем из этой точки сферу Σ_{ρ^m} радиуса ρ_1^m, касающуюся Σ, и пусть M_2 — последняя точка выхода L из $\Sigma_{\rho_1^m}$; в этой точке $u(M_2) = u(M_0)$. Продолжая этот процесс далее получим, что не более чем через $p = l/\rho^{(m)}$ шагов, где $\rho^{(m)}$ — минимальное расстояние от L до Σ, одна из этих сфер захватит точку $M^{(0)}$, откуда следует, что $u(M^{(0)}) = u(M_0)$. В силу произвольности $M^{(0)}$ и непрерывности $u(M)$ в замкнутой области $T+\Sigma$, заключаем, что $u(M) \equiv u(M_0)$ всюду, включая точки границы. Таким образом, из всех гармонических функций только постоянная может достигать своего максимального значения во внутренних точках области. ◀

4.6. Формулы Грина

Интегральное представление гармонических функций является основным аппаратом для изучения свойств гармонических функций. Одним из важнейших следствий интегральной формулы является принцип максимального значения, часто используемый при решении краевых задач и доказательстве теоремы единственности.

4.6.1. Вывод формул

Формулы Грина являются прямым следствием формулы Остроградского. Формула Остроградского в простейшем случае имеет вид

$$\iiint\limits_W \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_S R\cos\gamma\,d\sigma \tag{7}$$

где W — некоторый объём, ограниченный достаточно гладкой поверхностью S, $R(x,y,z)$ — произвольная функция, непрерывная внутри $W+S$ и имеющая непрерывные производные внутри W, γ — угол между направлением оси z и внешней нормалью к S. В справедливости этой формулы нетрудно убедиться, проинтегрировав по z.

Формулу Остроградского обычно записывают в виде

$$\iiint\limits_W \left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)d\tau = \iint\limits_S \{a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma\}\ d\sigma \tag{8}$$

Если a_x, a_y, a_z рассматривать как компоненты некоторого вектора $A = a_x i + a_y j + a_z k$, то формулу Остроградского (8) можно записать следующим образом

$$\iint\limits_W \operatorname{div} A\,d\tau = \iint\limits_S A_n\,d\sigma \tag{9}$$

где

$$\operatorname{div}\bar{A} = \frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$$

и

$$A_n = a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma$$

— составляющая вектора A вдоль внешней нормали.

Перейдём к выводу формул Грина.
Пусть $u=(x,y,z)$ и $v=v(x,y,z)$ — функции. непрерывные вместе со своими первыми производными внутри $W+S$ и имеющие непрерывные вторые производные внутри W.
Полагая

$$a_x = u\frac{\partial v}{\partial x}\quad a_y = u\frac{\partial v}{\partial y}\quad a_z = u\frac{\partial v}{\partial z}$$

и пользуясь формулой Остроградского (9), приходим к так называемой *первой формуле Грина*

$$\iiint\limits_W u\Delta v\,d\tau = \iint\limits_S \frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma - \iiint\limits_W \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)d\tau \tag{10}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа, $\frac{\partial}{\partial n} = \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}$ — производная по направлению внешней нормали. Если учесть соотношение

$$\operatorname{grad} u \operatorname{grad} v = \nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}$$

то формулу Грина можно представить в виде

$$\iiint\limits_W u\Delta v\, d\tau = -\iiint\limits_W \nabla u \nabla v\, d\tau + \iint\limits_S u\frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma$$

Меняя местами функции u и v, будем иметь

$$\iiint\limits_W v\Delta u\, d\tau = -\iiint\limits_W \nabla v \nabla u\, d\tau + \iint\limits_S v\frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma$$

Вычитая эти равенства, получаем *вторую формулу Грина*

$$\iint\limits_S \left(u\frac{dv}{dn} - v\frac{du}{dn}\right) d\sigma = \iiint\limits_W (u\Delta v - v\Delta u)\, d\tau \tag{11}$$

Основная интегральная формула Грина

$$\Omega \cdot u(A) = \iint\limits_S \left[\frac{1}{R_{AP}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{AP}}\right)\right] d\sigma_P - \iiint\limits_W \frac{\Delta u(P)}{R_{AP}}\, d\tau_P \tag{12}$$

где Ω принимает значения

$$\Omega = \begin{cases} 4\pi & \text{если точка } A \text{ лежит внутри } W \\ 2\pi & \text{если точка } A \text{ лежит на границе } S \\ 0 & \text{если точка } A \text{ лежит вне } W \end{cases}$$

Аналогичная формула существует и для гармонических функций двух независимых переменных. Пусть S — область на плоскости (x, y), ограниченная контуром C, а n — направление нормали к этому контуру, внешнее по отношению к области S.

Полагая во второй формуле Грина $v = \ln\frac{1}{R_{AP}}$, где $R_{AP} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ — расстояние P от A, получаем

$$\Omega \cdot u(A) = \int\limits_S \left[\ln\frac{1}{R_{AP}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\ln\frac{1}{R_{AP}}\right)\right] dS_P - \iint\limits_S \frac{\Delta u(P)}{\ln R_{AP}}\, dS_P \tag{13}$$

где Ω принимает значения

$$\Omega = \begin{cases} 2\pi & \text{если точка } A \text{ лежит внутри } S \\ \pi & \text{если точка } A \text{ лежит на границе } C \\ 0 & \text{если точка } A \text{ лежит вне } S \end{cases}$$

4.6.2. Метод Грина для задачи Дирихле в трёхмерном случае

Вторая формула грина:

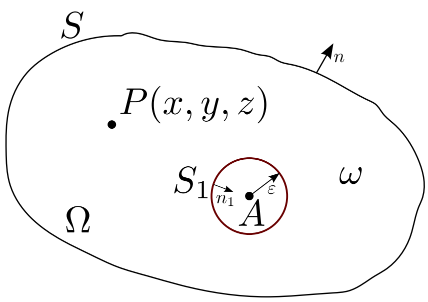
$$\iint\limits_S \left(u\frac{dv}{dn} - v\frac{du}{dn}\right) d\sigma = \iiint\limits_W (u\Delta v - v\Delta u)\, d\tau$$

Рассмотрим трёхмерную задачу Дирихле.

$$\Delta u = 0$$

$$u\big|_S = f$$

Применим вторую формулу Грина к этой задаче.



В области Ω возьмём $(\cdot)A(x_0, y_0, z_0)$ и произвольную $(\cdot)P(x, y, z)$.

$$r_{AP} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \quad \text{радиус между } A \text{ и } P$$

Покажем, что $w = \frac{1}{r_{AP}}$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Найдём вторые производные и подставим в уравнение:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{r_{AP}^2}\frac{\partial r_{AP}}{\partial x} = -\frac{1}{r_{AP}^2}\frac{(x-x_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} = -\frac{(x-x_0)}{r_{AP}^3}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{1}{r_{AP}^3} + \frac{3(x-x_0)}{r_{AP}^5}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{1}{r_{AP}^3} + \frac{3(y-y_0)}{r_{AP}^5}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -\frac{1}{r_{AP}^3} + \frac{3(z-z_0)}{r_{AP}^5}$$

$$\Delta u - \frac{3}{r_{AP}^3} + \frac{3[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]}{r_{AP}^5} \equiv 0$$

Действительно $w = \frac{1}{r_{AP}}$ удовлетворяет уравнению Лапласа, то есть является гармонической.

Должное решение в $(\cdot)A$ имеет особенность. Окружаем $(\cdot)A$ сферой малого радиуса ε. w — область между двумя сферами. Тогда формула Грина принимает вид:

$$\iint\limits_S \left(u\frac{dv}{dn} - v\frac{du}{dn}\right) dS + \iint\limits_{S_1} \left(u\frac{dv}{dn_1} - v\frac{du}{dn_1}\right) dS_1 = \iiint\limits_\omega (u\Delta v - v\Delta u)\, d\omega$$

Функция w в области ω не имеет особенностей. Во всей области строим решение w_1, которое имеет особенность.
Потребуем, чтобы $\Delta w_1 = 0; w_1\big|_S = W\big|_S$. Построим функцию Грина:

$$G(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = w_1 - w$$

Тогда на границе:

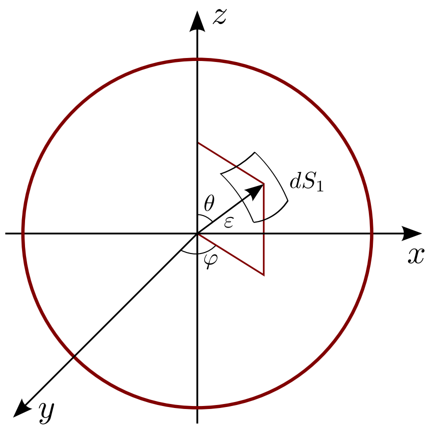
$$G\big|_S = 0$$

Предположим, что в формуле Грина $v = G$.

$$\iint\limits_S \left(u\frac{dv}{dn} - v\underbrace{\frac{du}{dn}}_{0} \right) dS + \iint\limits_{S_1} \left(u\frac{dv}{dn_1} - v\frac{du}{dn_1} \right) dS_1 = 0$$

Получаем

$$\iint\limits_S u\frac{\partial G}{\partial n}\, dS + \iint\limits_{S_1} \left(u\frac{dG}{dn_1} - G\frac{du}{dn_1} \right) dS_1 = 0$$



Перейдём к сферической системе координат во втором интеграле:

$$dS_1 = \varepsilon^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi$$
$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi; \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$
$$\frac{\partial}{\partial n_1} = -\frac{\partial}{\partial r}$$

$$\iint\limits_{S_1} \left(u\frac{dG}{dn_1} - G\frac{du}{dn_1} \right) dS_1 = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \left(-u\frac{dG}{dr} + G\frac{du}{dr} \right) \varepsilon \sin\theta\, d\theta$$

$$G = w_1 - \frac{1}{r_{AP}}$$

$$\iint\limits_{S_1} \left(u\frac{\partial G}{\partial n_1} - G\frac{\partial u}{\partial n_1} \right) dS = \iint\limits_{S_1} \left(-u\frac{\partial}{\partial r}\Big(w_1 - \frac{1}{\underbrace{r_{AP}}_{r}} \Big) + \Big(w_1 - \frac{1}{\underbrace{r_{AP}}_{r}} \Big)\frac{\partial u}{\partial r} \right) dS =$$

$$= \iint\limits_{S_1} \left(-u\frac{\partial w_1}{\partial r} - \frac{1}{r^2}u + w_1\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \right) dS =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \left\{ -u\frac{\partial w_1}{\partial r} - \frac{1}{\varepsilon^2}u + w_1\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial r} \right\} \varepsilon^2 \sin\theta$$

Будем устремлять радиус ε к 0:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{S_1} \left(u\frac{\partial G}{\partial n_1} - G\frac{\partial u}{\partial n_1} \right) dS = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\pi} d\theta \sin\theta \left\{ -u\frac{\partial w_1}{\partial r} - \frac{1}{\varepsilon^2}u + w_1\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial r} \right\}$$

$$\varepsilon^2 u\frac{\partial w}{\partial r} \to 0\Big|_{\varepsilon\to 0}$$

$$\varepsilon^2 w_1\frac{\partial u}{\partial r} \to 0; \quad \varepsilon\frac{\partial u}{\partial r} \to 0$$

Получаем

$$-\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \sin\theta u - u(x_0, y_0, z_0) \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta = -4\pi u(x_0, y_0, z_0)$$

Подставляем в формулу Грина:

$$\iint\limits_S u\frac{\partial G}{\partial n}\,dS - 4\pi u(x_0,y_0,z_0) = 0$$

$$u(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S f\frac{\partial G}{\partial n}\,dS$$

4.6.3. Метод Грина для задачи Дирихле в двумерном случае

$$u(x_0,y_0,z_0) = \iint\limits_S \left(u\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n}\right)\,dS + \iiint\limits_\Omega F\,d\Omega = \begin{cases} 2\pi u & A\in\Omega \\ \pi u & A\in S \\ 0 & A\notin\Omega \end{cases}$$

где $F(x,y,z) = \Delta u$.

В плоском случае фундаментальным решением задачи Лапласа является $\ln\frac{1}{r}$. Рассмотрим задачу.

$$\Delta u = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

$$u = \ln\frac{1}{r} = -\ln r$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2(x-x_0)} \\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^2} + \frac{2(y-y_0)^2}{r^4} \\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2}{r^2} + \frac{2\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right]}{r^4} = -\frac{2}{r^2} + \frac{2}{r^2} = 0
\end{aligned}$$

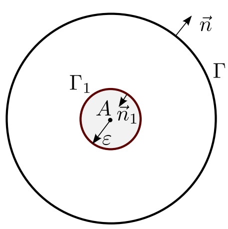
$$\Delta G = 0$$

$$G\big|_\Gamma = 0$$

$$G = W - \ln\frac{1}{r_A P}$$

$$\oint\limits_\Gamma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\,d\gamma = \iint\limits_S (u\Delta - v\Delta u)\,dS$$

Радиус окружности $\Gamma_1 = \varepsilon$.



$$\oint\limits_{\Gamma} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) \, d\gamma + \oint\limits_{\Gamma_1} \left(u\frac{\partial v}{\partial n_1} - v\frac{\partial u}{\partial n_1} \right) \, d\gamma = 0$$

$$v = G$$

Нас интересует интеграл вида

$$\oint\limits_{\Gamma_1} \left(u\frac{\partial G}{\partial n_1} - G\frac{\partial u}{\partial n_1} \right) \, d\gamma$$

Если интеграл берётся по окружности радиуса ε, то:

$$\frac{\partial}{\partial n_1} = -\frac{\partial}{\partial r}, \qquad dr = \varepsilon \, d\theta$$

$$\iint\limits_{0}^{2\pi} \left(-u\frac{\partial G}{\partial r} + G\frac{\partial u}{\partial r} \right) \varepsilon d\theta = \int\limits_{0}^{2\pi} \left(-u\frac{\partial w}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial r} + u\frac{\partial}{\partial r} \left(\ln\frac{1}{r} \right) - \ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \right) \cdot \varepsilon$$

$$(-\ln r)' = -\frac{1}{r}$$

Перейдём к пределу:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \oint\limits_{\Gamma_1} \left(u\frac{\partial G}{\partial n_1} - G\frac{\partial u}{\partial n_1} \right) = \; = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{0}^{2\pi} \left(-u\frac{\partial w}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial r} \right) \, d\theta - \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \int\limits_{0}^{2\pi} \left[u\frac{1}{\varepsilon} + \frac{\partial u}{\partial r} \ln\varepsilon \right] \, d\theta$$

Так как u, w — непрерывно гладкие функции, то

$$\varepsilon \ln \varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$$

В итоге получаем

$$-\int\limits_{0}^{2\pi} u \, d\theta$$

Значит:

$$\oint\limits_{\Gamma} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) \, d\gamma - \underbrace{\int\limits_{0}^{2\pi} u \, d\theta}_{u(x_0,y_0)2\pi} = 0$$

так как интегрируем в малой области.

4.7. Функция источника

Метод функции источника даёт удобный аппарат для аналитического представления решения краевых задач.

4.7.1. Функция источника для уравнения $\Delta u = 0$ и её основные свойства.

Для всякой функции u, непрерывной вместе с первыми производными в замкнутой области W, ограниченной достаточно гладкой поверхностью S, и имеющей вторые производные внутри W, имеет место представление

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left[\frac{1}{R_{PA}} \frac{\partial u}{\partial n} - u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{PA}} \right) \right] d\sigma_p - \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_W \frac{\Delta u}{R_{MA}}\, d\tau_M. \tag{14}$$

Если функция $u(A)$ гармоническая, то объёмный интеграл равен нулю; если же $u(A)$ удовлетворяет уравнению Пуассона, то объёмный интеграл является известной функцией.
Пусть $v(A)$ – некоторая гармоническая функция, непрерывная в $W+S$ вместе с первыми производными, не имеющая нигде особенностей. Вторая формула Грина даёт

$$0 = \iint\limits_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma - \iiint\limits_W v \Delta u \, d\sigma \tag{15}$$

Складывая основную формулу Грина (12) и (15) получаем

$$u(A) = \iint\limits_S \left[G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right] d\sigma - \iiint\limits_W \Delta u \cdot G \, d\tau \tag{16}$$

где

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{AP}} + v \tag{17}$$

– функция двух точек. Точка A фиксирована, и поэтому x, y, z играют роль параметров.

Формула (16) содержит $u\big|_S$ и $\frac{\partial u}{\partial n}\big|_S$. При решении первой краевой задачи задаётся лишь $u\big|_S$, а при решении второй – значение $\frac{\partial u}{\partial n}\big|_S$. Функция v выбирается таким образом, чтобы $G|_S = 0$ для первой краевой задачи $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\big|_S = 0 \text{ для второй краевой задачи} \right)$. Определим функцию $G(A, P)$ при помощи условий:

1) $G(A, P)$ как функция точки $P(\xi, \eta, \sigma)$ при фиксированной точке $A(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа
$$\Delta G = G_{\xi\xi} + G_{\eta\eta} + G_{\sigma\sigma} = 0, \quad P \neq A$$
во всех точках P области W, кроме точки $P = A$.

2) $G(A, P)$ при совпадении аргументов ($A = P$) обращается в бесконечность и представима в виде (17), где $v = v(A, P)$ – гармоническая всюду в W функция.

3) $G(A, P)$ на границе обращается в нуль:
$$G(A, P) = 0, \quad \text{если} \quad P \in S$$
Этому условию можно удовлетворить, потребовав, чтобы
$$v\big|_S = -\frac{1}{4\pi R}$$

Функцию G, определённую таким образом, будем называть *функцией точечного источника первой краевой задачи для уравнения* $\Delta u = 0$. В самом деле, формула (16) даёт:

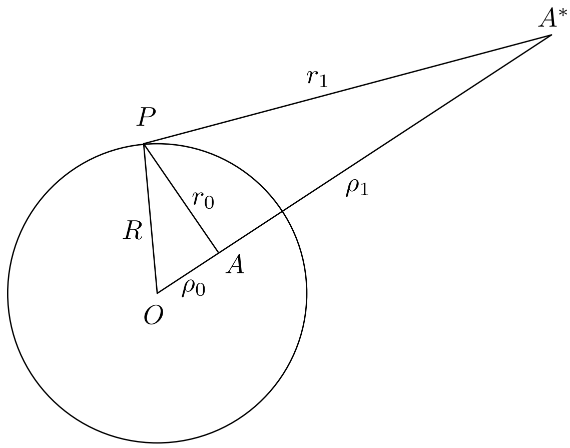
$$u(A) = -\iint\limits_S u\frac{\partial G}{\partial n}\,d\sigma = -\iint\limits_S f\frac{\partial G}{\partial n}\,d\sigma \quad (f = u\big|_s) \tag{18}$$

Формула (18) построена с помощью формулы Грина, предполагающей выполнение определённых условий в отношении функций u и G и поверхности S. В формулу (18) входит выражение $\frac{\partial G}{\partial n}$, существование которого на поверхности S не следует непосредственно из определения функции G.

4.7.2. Функция источника для круга

Функция источника для круга может быть получена таким же способом, как и функция для сферы. В этом случае функцию следует искать в виде

$$G = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r} + v \tag{19}$$



Поместим в точку A единичный заряд и отложим на радиусе, проходящем через точку A, такой отрезок OA^*, что

$$\rho_0\rho_1 = R^2, \tag{20}$$

где $\rho_0 = OA$, $\rho_1 = OA^*$. Преобразование (20), ставящее в соответствие точке A определённую точку A^*, является преобразованием обратных радиусов, а сама точка $A*$ называется *сопряжённой* с точкой A.

Докажем, что для всех точек P, расположенных на сфере, расстояния до A и A^* пропорциональны. Для этого рассмотрим треугольники OPA и OPA^*; они подобны, так как угол при O общий, а прилежащие к нему стороны пропорциональны:

$$\frac{\rho_0}{R} = \frac{R}{\rho_1} \quad \text{или} \quad \frac{OA}{R} = \frac{R}{OA^*}$$

Из подобия треугольников следует:

$$\frac{r_0}{r_1} = \frac{\rho_0}{R} = \frac{R}{\rho_1}, \tag{21}$$

где $r_0 = \left|\overrightarrow{AP}\right|$, $r_1 = \left|\overrightarrow{A^*P}\right|$. Из пропорции (21) получаем:

$$r_0 = \frac{\rho_0}{R}r_1$$

для всех точек круга. Поэтому гармоническая функция $v = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_1}$ на круге принимает то же значение, что и функция $\frac{1}{r_0}$. Она представляет, очевидно, потенциал заряда величины $-\frac{R}{\rho_0}$ помещённого в точку A^*.

Таким образом, функция

$$G(P, A) = \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r_0} - \ln\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_1}\right], \tag{22}$$

где $\rho_0 = OA$, $r_0 = AP$, $r_1 = A^*P$, $R = OP$ – радиус круга.

Нетрудно убедиться в том, что определённая таким образом гармоническая функция обращается в нуль на границе

$$G|_{r=R} = 0$$

Для решения краевой задачи надо вычислить значения $\frac{\partial G}{\partial n}$ на окружности C.

$$\frac{\partial G}{\partial n}\bigg|_C = -\frac{1}{2\pi R}\frac{R^2-\rho_0}{r_0^2}.$$

Пусть (ρ,θ) — полярные координаты точки P, лежащей на окружности, а (ρ,θ_0) — координаты точки A, тогда

$$r_0^2 = R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0).$$

Подставляя в формулу

$$u(\rho_0,\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_C u(P)\frac{R^2-\rho_0^2}{r_0^2}\frac{ds}{R}$$

это выражение для r_0 и принимая во внимание, что

$$u(P)\big|_C = f(\theta) \quad \text{и} \quad ds = R\,d\theta$$

приходим для функции $u(A)$ к выражению

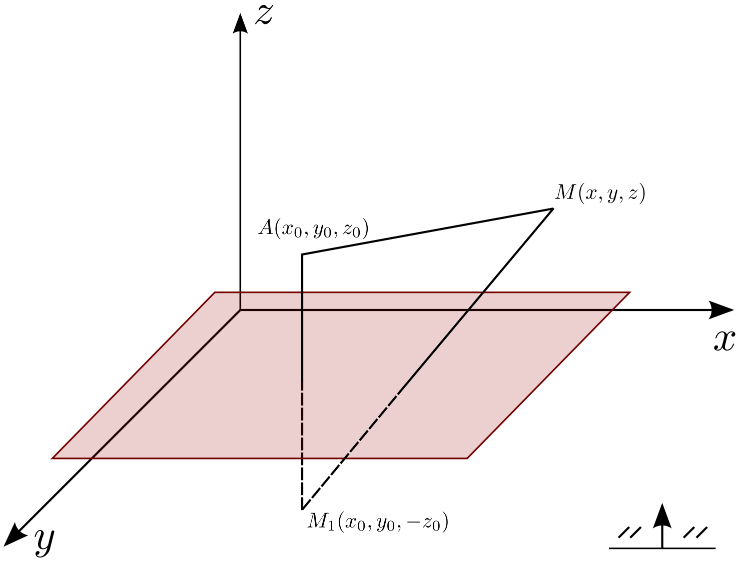
$$u(\rho_0,\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho_0^2}{R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0)}f(\theta)\,d\theta \tag{23}$$

называемому *интегралом Пуассона для круга*. Эта же формула с точностью до знака даёт решение внешней задачи.

4.7.3. Функция источника для полупространства

Понятие функции источника и формула (18) имеют место и для неограниченного пространства, если рассматривать функции, регулярные на бесконечности. Найдём функцию источника для полупространства $z > 0$. Поместим в точку $A(x_0, y_0, z_0)$ единичный заряд, который создаёт в неограниченном пространстве поле, потенциал которого определяется функцией

$$\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{AM}}, \quad \text{где} \quad R_{AM} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \tag{24}$$



Нетрудно видеть, что «индуцированное поле» v является полем отрицательного единичного заряда, помещённого в точку $M_1(x_0, y_0, -z_0)$, являющуюся зеркальным изображением точки M_0 в плоскости $z = 0$. Функция G, равная

$$G(M, A) = \frac{1}{4\pi R_0} - \frac{1}{4\pi R_1}$$

где

$$R_0 = \left|\overrightarrow{AM}\right| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \tag{25}$$

$$R_1 = \left|\overrightarrow{M_1M}\right| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2} \tag{26}$$

обращается в нуль при $z = 0$ и имеет ненужную особенность в точке A.
Вычислим $\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_{z=0} = -\frac{\partial G}{\partial z}\Big|_{z=0}$. Очевидно, что

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{z-z_0}{R_0^3} + \frac{z+z_0}{R_1^3}\right].$$

Полагая $z = 0$, находим:

$$\frac{\partial G}{\partial n}\bigg|_{z=0} = -\frac{G}{z}\bigg|_{z=0} = -\frac{z_0}{2\pi R_0^3}.$$

Решение первой краевой задачи даётся формулой

$$u(A) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \frac{z_0}{R_{AP}} f(p)\, d\sigma_P$$

где S — плоскость $z = 0$, $f(P) = u|_{z=0}$, или

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{z_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2]^{\frac{3}{2}}} f(x, y)\, dxdy$$

4.8. Задача Неймана.

В отличие от задачи Дирихле на границе задаётся нормальная производная. В задаче Неймана на f накладываются ограничения. То есть не при любых значениях f задача имеет решения.[7]

Задача Неймана на границе задаётся нормальной производной

$$\Delta u = 0 \quad v = G \quad \Delta G = 0$$

На границе u нам неизвестно.

$$\Delta u = 0$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f$$

Мы можем решать задачу только при $v = 1$; $\quad -\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0 \quad \iint\limits_S f dS = 0$

$$G = W - \frac{1}{r_{AP}} = \frac{B}{r_{AP}} - \frac{1}{r_{AP}}$$

$$r_{AP} = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\psi}$$

$$r_{A^2P} = \sqrt{r^2 + r_*^2 - 2rr_*\cos\psi}$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial r} = -\frac{B}{r_{A_*^2P}\frac{\partial r_{A*P}}{\partial r} + \frac{1}{r_{AP}}} \left.\frac{\partial r_{AP}}{\partial r}\right|_{r=R} = 0$$

$$-\frac{B}{\frac{R^3}{r_0^3} r_{AP}^3}(R - r_*\cos\psi) + \left.\frac{r - r_0\cos\psi}{r_{AP}^3}\right|_{r=R} = 0$$

Отсюда $B = \varphi(\psi)$.

Требовать на границе равной нулю производной мы не можем, потому, что в таком случае мы не сможем решить задачу.

Задача Неймана имеет решение с точностью до аддитивной составляющей(прибавлять константу).

Если воспользовать представлением функции Грина в виде разности , то потребовав

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial W}{\partial n}\right|_S = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{AP}}\right)$$

$$\Delta W = 0$$

---

[7] Вспомним

Первая формула Грина

$$\iint\limits_S u\frac{\partial v}{\partial u} dS = \iiint\limits_W u\Delta v dS - \iint\limits_S \nabla u \nabla v\, dS$$

Вторая формула Грина

$$\iint\limits_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS = \iiint\limits_W (u\Delta v - v\Delta u)\, d\omega$$

Третья формула Грина

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S f\frac{\partial G}{\partial n}\, dS \quad \Delta v = 0$$

$$\left.\frac{\partial W}{\partial n}\right|_S = \left(\frac{1}{r_{AP}}\right)$$

$$\iint\limits_S \frac{W}{n} = 0 \quad \iint\limits_S \left(\frac{1}{r_{AP}}\right) = 0$$

Вернёмся к третьей формуле Грина:

$$1 = \frac{1}{4\pi} \iint \Delta \frac{\partial v}{\partial n} dS = 0$$

Таким образом нужно приравнять к константе.

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = C$$

Тогда

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S uCdS - \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S GfdS = \frac{C}{4\pi} \iint\limits_S GfdS$$

$$\frac{Cu_{middle}}{\cancel{4\pi}} \cancel{4\pi} R^2 \quad C = \frac{1}{R^2}$$

4.9. Третья краевая задача.

Рассмотрим задачу для пространственной области. Третья краевая задача отличается от первых двух краевыми условиями:

$$\Delta u = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} + hu\Big|_S = f$$

Функцию Грина ищем в таком виде

$$G = W - \frac{1}{r_{AP}}$$

Потребуем,чтобы на границе

$$\frac{\partial G}{\partial n} + hG|_S = 0$$

Тогда формулу Грина можно переписать

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left(u\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left(u\frac{\partial G}{\partial n} + uhG - uhG - G\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS =$$
$$= \frac{\partial 1}{\partial 4\pi}\iint\limits_S \left[u\left(\frac{\partial G}{\partial n} + hG\right) G\left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\right] dS = -\frac{1}{4\pi}\iint GfdS$$

До сих пор мы рассматривали задачу для $(x_0, y_0, z_0) \subset \Omega \backslash S, S = \partial\Omega$. Рассмотрим предельный случай, когда точка a находится на границе области. Будем огрничивать особую точку полусферой
Площадь полусферы $2\pi R^2$.

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi}\iint \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial i}{\partial n}\right) dS - \frac{1}{2\pi}\iiint\limits_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\, d\Omega$$

Если $a \notin \Omega$, то

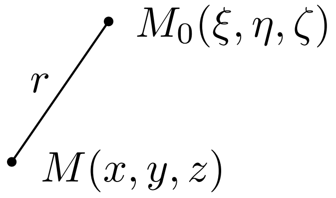
$$\iint\limits_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS - \iiint\limits_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\, d\Omega = 0$$

$$u(x_0, y_0, z_0) = \begin{cases} 4\pi u & A \in \Omega \\ 2\pi u & A \in S \\ 0 & A \notin \Omega \end{cases}$$

4.10. Теория потенциала

4.10.1. Общие понятия

Функция $\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$, представляющая потенциал поля единичной массы (заряда), помещённой в точке $M_0(\xi,\eta,\zeta)$ является решением уравнения Лапласа, зависящим от параметров ξ,η,ζ. Интегралы от этой функции по параметрам называются *потенциалами* и имеют существенное значение с точки зрения непосредственных приложений в физике, а так же и с точки зрения развития методов решения краевых задач.



Пусть в некоторой точке $M_0(\xi,\eta,\zeta)$ помещена масса M. По закону всемирного тяготения на массу m, помещённую в точке $M(x,y,z)$, действует сила притяжения

$$F = -\gamma\frac{mM}{R^2}r$$

где $r = \frac{1}{R}$ — единичный вектор в направлении $\overrightarrow{M_0M}$, а γ — гравитационная постоянная. Сила называется потенциальной, если существует функция, через которую она выражается как градиент некоторой потенциальной фукнции:

$$F = \mathrm{grad}\Pi$$

Покажем, что при $\gamma M = 1$ сила выражается так

$$F = \mathrm{grad}\left(\frac{m}{r}\right)$$

Силовое поле описывается потенциалом $\frac{m}{r}$. Если будет n точек, то $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{M_i}{r_i}$.

Если масса распределена непрерывно, то

$$\iiint\limits_{\omega}\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\,d\omega$$

В дальнейшем ρ мы будем называть плотностью потенциала. Плотность может распределяться не только по объёму, но и по поверхности. Помимо объёмного потенциала будем рассматривать поверхностный потенциал:

$$\iint\limits_{S}\frac{\nu(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,dS;$$

$$\iint\limits_{S}\mu(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial\vec{n}}\frac{1}{R}\,dS.$$

где ν,μ — плотности. Особая точка (ξ,η,ζ). Тогда $\Omega = \omega_1+\omega_2$.

$$V_1 = \iiint\limits_{\omega_1} \qquad V_2 = \iiint\limits_{\omega_2}$$

Рассмотрим объём V_2:

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2} = \iiint\limits_{\omega_2}\rho(\xi,\eta,\zeta)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right)d\omega_2 = 0$$

Теперь рассмотрим V_1:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \iiint\limits_{\omega_1} \rho_0(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\, d\omega_1$$

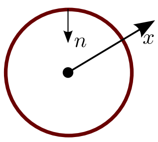
Аналогично по y и по z:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^3}(x\xi) = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Функция ρ — непрерывная по Ω.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\iiint\limits_{\omega_1} \rho(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right)\, d\omega_1 = -\iiint\limits_{\omega_1}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\rho\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\right] d\omega_1 =$$

$$-\iiint\limits_{\omega_1} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\rho}{r}\right) d\omega_1 + \frac{\partial \rho_{\text{сред}}}{\partial \xi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \frac{1}{\varepsilon}\varepsilon^2 \sin\theta =$$



ε — радиус малой сферы $\omega_1 \to 0$. Применим теорему Остроградского—Гаусса и перейдём к интегралу по поверхности:

$$= -\iint\limits_{s_1} \frac{\rho}{r}\cos dS_1$$

α — угол между n и x.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\iint\limits_{s_1} \rho(\xi,\eta,\zeta)\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) dS_1 = \iint\limits_{S_1} \frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)\cos\alpha}{r^2}\cos\theta dS_1 = -\iint\limits_{S_1}\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)\cos^2\alpha}{r^2}\, dS_1$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\iint\limits_{S_1}\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)\cos^2\beta}{r^2}\, dS_1$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\iint\limits_{S_1}\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)\cos^2\gamma}{r^2}\, dS_1$$

$$\delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\iint\limits_{S_1}\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r^2}(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)dS_1 = -\iint\limits_{S_1}\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r^2}\, dS_1$$

Воспользуемся теоремой о среднем:

$$-\iint\limits_{S_1}\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r^2}dS_1 = -\rho_{\text{ср}}(\xi,\eta,\zeta)\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{1}{\varepsilon^2}\sin\theta\varepsilon^2\, d\theta = -4\pi\rho(\xi,\eta,\zeta)$$

Обозначим $\rho = \frac{f}{4\pi}$ и поулчим:

$$\Delta V = \Delta V_2 + \Delta V_2 = -f$$

Объёмный потенциал является решением неоднородного уравнения Лапласа.

$$V = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\omega}\frac{f(\xi,\eta,\zeta)}{r}d\Omega$$

Теперь рассмотрим поверхностный интеграл.
Потенциал простого слоя:

$$\iint\limits_S \mu(\xi,\eta)\frac{1}{r}\,dS$$

Потенциал двойного слоя:

$$\iint\limits_S \nu(\xi,\nu)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\,dS$$

Вспомним формулу Грина:

$$\iint\limits_S \left(u\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS - \iiint\limits_\omega (u\Delta G - G\Delta u)d\Omega = \begin{cases} 4\pi u & \text{внутри} \\ 2\pi u & \text{на границе} \\ 0 & \text{снаружи} \end{cases}.$$

Пусть $G = \frac{1}{r}$ в качестве возьмём $u = \nu_0$

$$\Delta\nu_0 = 0 \qquad \frac{\partial \nu_0}{\partial n} = 0$$

$$\nu_0 = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\nu_0}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\,dS$$

$$\iint\limits_S \left(\nu_0\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right)\,dS = \begin{cases} 4\pi\nu_0 \\ 2\pi\nu_0 \\ 0 \end{cases}$$

$$W^0_{\text{в}} = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \nu_0\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{}{n}\right)\,dS$$

$$W^0_{\text{ср}} = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \nu_0\left(\frac{1}{r}\right)\,dS$$

$$W^0_{\text{н}} = 0$$

$$W^0_{\text{в}} = W_0 + 2\pi\nu_0$$

$$W^0_{\text{н}} = W_0 - 2\pi\nu_0$$

При переходе через границу потенциал двойного слоя терпит разрыв

$$I = \iint\limits_S (\nu-\nu_0)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS = \iint\limits_{S_1}(\nu-\nu_0)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS + \iint\limits_{S-S_1}(\nu-\nu_0)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS$$

$$\iint\limits_S (\nu-\nu_0)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS \leqslant \varepsilon\iint\limits_{S_1}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\,dS$$

$$\varepsilon \iint\limits_{S_1} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS = -\varepsilon \iint\limits_{S_1} \frac{\cos\alpha}{r^2}\, dS = -\varepsilon \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta$$

$$W_{\text{в}} = \iint\limits_S \left[\nu\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} - \nu_0\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} + \nu_0\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right] dS = \iint\limits_S \nu_0\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} dS = I + W_{\text{в}}^0 = \underbrace{I + W_0(\nu_0)}_{W_0(\nu)} - 2\pi\nu_0$$

$$W_{\text{в}} = W_0(\nu) - 2\pi\nu$$

$$W_{\text{н}} = W_0(\nu) + 2\pi\nu$$

$$W_{\text{в}}(M) = \iint\limits_S \nu\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} - 2\pi\nu\big|_S$$

$$\Delta W = 0 \quad W = -\iint\limits_S \nu(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} dS$$

на границе $W|_S = f$

$$W_{\text{в}} = \iint\limits_S \nu\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} - 2\pi\nu = f$$

$$\nu(P_0) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \nu(P)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} dS = -\frac{1}{2\pi} f(P_0) \qquad (1)$$

Уравнение (1) является уравнением Фредгольма 2-го рода.
Из него можем определить плотности поверхностного потенциала ν

$$W_{\text{в}} = \oint \nu\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right) dl$$

$$\nu(P_0) - \frac{1}{\pi}\oint \nu(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right) dl = -\frac{1}{\pi} f(P_0)$$

$$W_{\text{в}} - \oint \nu\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right)$$

На границе должно выполняться:

$$\nu(p_0) - \frac{1}{\pi}\oint \nu(p)\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right) dl = -\frac{1}{\pi} f(p_0)$$

4.10.2. Примеры краевых задач

Пример. *Первая краевая задача для круга.*
Уравнение Фредгольма можно переписать

$$\nu(S_0) - \frac{1}{\pi}\oint \nu(S)\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right)dS = -\frac{1}{\pi}f(S_0)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}$$

$$\nu(S_0) - \frac{1}{\pi}\oint \nu(S)\frac{\cos\varphi}{r}dS = -\frac{1}{\pi}f(S_0)$$

$$\cos\varphi = \frac{r}{2R}$$

$$\nu(S_0) - \frac{1}{\pi}\oint \frac{\nu(S)}{2R}dS = -\frac{1}{\pi}f(S_0)$$

$$\nu(S) = -\frac{1}{\pi}f(S) + A$$

$$-\frac{1}{\pi}\cancel{f(S_0)} + A - \frac{1}{2R\pi}\oint\left(A - \frac{1}{\pi}f(S)\right)dS = -\frac{1}{\pi}\cancel{f(S_0)}$$

$$-\oint_G \nu(p)\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right)d\gamma + \pi\nu(P_0) = f(P_0)$$

$$\oint_G \nu(P)\frac{\cos\varphi}{r}d\gamma + \pi\nu(P_0) = f(P_0)$$

$$\oint_G \nu(p)\frac{\partial\gamma}{\partial 2R} + \pi\nu(P_0) = f(P_0)$$

$$\pi\nu(P_0) + \int\limits_0^{2\pi}\nu(\theta)\frac{d\theta}{2} = f(P_0)$$

$$\oint_G \frac{\nu(S)}{2R}dS + \pi\nu(S_0) = f(S_0)$$

$$\nu(S) = \frac{f(S)}{\pi} + A$$

$$\oint_G \frac{A + \frac{f(s)}{\pi}}{2R}dS + \pi(A + \frac{\cancel{f}(S_0)}{\pi}) = \cancel{f}(S_0)$$

$$\oint_G \frac{A}{2P}dS + \oint_G \frac{f(S)}{2\pi R}dS + \pi A = 0$$

Итак, у нас получилось такое уравнение

$$\frac{A}{2R}\oint dS + \oint_G \frac{f(\xi)d\xi}{2\pi R} + \pi A = 0$$

$$\frac{A\cdot 2\pi R}{2R} + \oint_G \frac{f(\xi)d\xi}{2\pi R} + \pi A = 0$$

$$\nu(S) = \frac{1}{4\pi^2 R}\oint f(\xi)d\xi + \frac{f(S)}{\pi}$$

$$u(M) = -\oint_G \left[\frac{f(S)}{\pi} - \frac{1}{4\pi^2 R}\oint f(\xi)d\xi\right]\frac{1}{r}\cos\varphi dS$$
$$\cos\varphi = \frac{r}{R}$$

$$= \oint_G \frac{f(S)}{\pi}\frac{\cos\varphi}{r}dS - \frac{1}{4\pi^2 R}\oint_G f(\xi)d\xi \oint_G \frac{\cos\varphi}{r}dS =$$
$$= \oint_G \left(\frac{f(S)}{\pi}\frac{\cos\varphi}{r} - \frac{1}{2\pi^2 R}f(S)\right)dS = \frac{1}{\pi}\oint f(S)\left[\frac{\cos\varphi}{r} - \frac{1}{2R}\right]dS$$

$$r^2 = R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0)\frac{\cos\varphi}{r}dS - \frac{1}{4\pi^2 R}$$
$$u(\theta) = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{f(\theta)(R^2-\rho_0^2)d\theta}{(R^2\rho_0^2 - 2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0))}$$

Пример. *Первая краевая задача для полупространства.*
Найти гармоническую функцию, непрерывную всюду в области $z \geqslant 0$, принмающую на границе $z = 0$ заданное значение $f(x, y)$.

$$W(x,y,z) = -\iint\limits_S \nu(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS$$
$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\theta)^2}$$
$$-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \nu(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS + \nu(P_0) = f(P_0)$$
$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \nu(P)\frac{\cos\varphi}{r^2}dS + \nu(P_0) = \frac{1}{2\pi}f(P_0)$$
$$\cos\varphi = \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{2z}{2\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\theta)^2}} = \frac{z}{r}$$
$$z = 0 \quad \cos\varphi = 0$$
$$\nu(P) = \frac{1}{2\pi}f(P)$$
$$u = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S f(P)\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial z}dS = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S f(P)\frac{z}{r^3}dS$$
$$u(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)\frac{z}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}d\xi d\eta$$

Вторая задача (задача Неймана) находится в виде потенциала простого слоя. Потенциал простого слоя удовлетворяет уравнению Лапласа. Осталось удовлетворить краевым условиям.

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \iint\limits_S \mu(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS$$

$$-\iint\limits_S \mu \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS + 2\pi\mu(P_0) - f(P_0) = 0$$

$$\iint\limits_S \mu \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS - 2\pi\mu(P_0) = -f(P_0)$$

$$-\iint\limits_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS = -f$$

$$\iint\limits_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS + 2\pi\mu(P_0) = -f$$

$$\mu(P_0) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n} dS = -\frac{1}{2\pi} f$$

5. Применение вариационных методов в решение задач математической физики

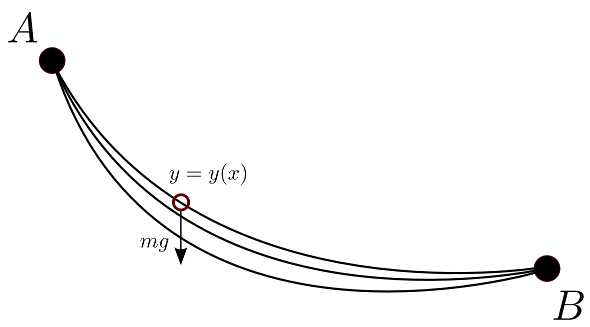
5.1. Вариационная формулировка краевых задач

Введём понятие функционала. $y = f(x)$ — отображение числового множества $r \in X$ на числовое множество $y \in Y$ — функция. X — конечномерное множество

$$\mathrm{I}[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\, dx \tag{1}$$

Функционал (1) отображает множество функций на числовое множество. Множество функций является областью определения.

Задача Бернулли



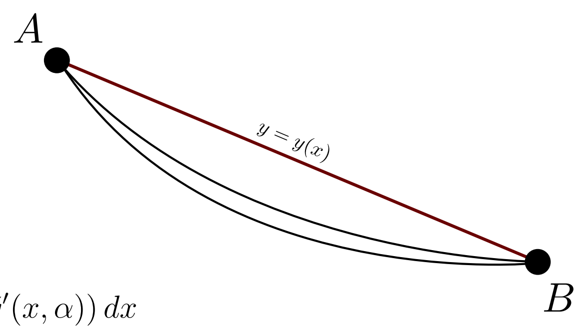
Требуется найти кривую $y(x)$, чтобы шарик попал из $(\cdot)A$ в $(\cdot)B$ с наименьшей скоростью

$$t = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\, dx$$

Найдо найти экстремум функционала $\mathrm{I}[y(x)]$ на множестве непрерывно дифференциируемых функций: $y(x) \in C_1$. Предположим, что искомая кривая — прямая, соединяющая A и B Рассмотрим множество кривых. Их можно описать уравнением

$$\tilde{y}(x, \alpha) = y(x) + \alpha\eta(x), \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

$$\eta \in C_1 \qquad \eta(a) = \eta(B) = 0$$



Необходимо рассмотреть функционал на однопараметрическом семействе кривых:

$$\mathrm{I}[\tilde{y}(x, \alpha)] = \int_a^b F(x, \tilde{y}(x, \alpha), \tilde{y}'(x, \alpha))\, dx$$

Искомая кривая будет получаться при $\alpha = 0$. Предположим нам удалось взять интеграл в аналитическом виде, когда x у нас пропадает и получаем функцию зависящую только от α:

$$\tilde{\mathrm{I}}(\alpha)$$

Необходимое условие экстремума функционала:

$$\delta \mathrm{I} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\partial \tilde{\mathrm{I}}}{\partial \alpha} = 0$$

— *первая вариации функционала.*

$$\frac{\partial \tilde{\mathrm{I}}}{\partial \alpha} = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial \tilde{y}'}{\partial \alpha} \right) dx$$

$$\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \alpha} = \eta(x) \qquad \frac{\partial \tilde{y}'}{\partial \alpha} = \eta'(x)$$

Таким образом

$$\frac{\partial \tilde{\mathrm{I}}}{\partial \alpha} = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}} \eta'(x) \right) dx.$$

Переходим к пределу, чтобы получить первую вариацию:

$$\delta \mathrm{I} \lim_{\alpha\to 0} \frac{\partial \tilde{\mathrm{I}}}{\partial \alpha} = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y} \eta'(x) \right) = 0$$

$$\int\limits_a^b \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x)\, dx + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta(x) \Big|_a^b - \int\limits_a^b \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta(x)\, dx = 0$$

На концах отрезка произвольная функция обращается в 0.

$$\delta I = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta(x)\, dx = 0$$

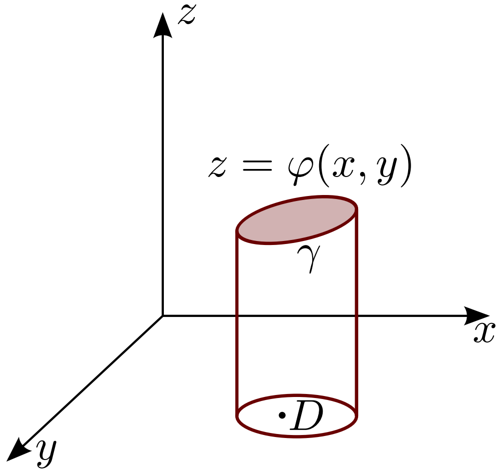
Так как $\eta(x)$ — произвольная, то $\int = 0$ только в случае, когда выражение в скобках $= 0$

Окончательное условие для функционала записывается в виде уравнения Эйлера:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

5.1.1. Вариационная задача с кратным интегралом.

Возьмём на плоскости xOy область D и на ней построим цилиндр, покрытый поверхностью $z = \varphi(x, y)$:



$$\begin{aligned} \mathrm{I}[\varphi(x,y)] &= \iint\limits_S F(x, y, \varphi(x,y), \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y})\, dxdy + \\ &+ \int\limits_\gamma G(\varphi(x,y), \varphi'(x,y))\, d\gamma = \\ &= \int\limits_D \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - c\varphi^2 - 2f\varphi \right) dxdy + \\ &+ \int\limits_\gamma \left(\sigma\varphi^2 - c\varphi \right)\, d\gamma \end{aligned}$$

Мы должны рассмотреть однопараметрическое семейство плоскостей:

$$\tilde{\varphi}(x,y)=\varphi(x,y)+\alpha\eta(x,y),$$

выходящих из контура γ: $r\big|_{\gamma}=0$

$$\mathrm{I}[\tilde{\varphi}(x,y)]=\iint\limits_{S}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x}(\varphi+\alpha r)\right]^2+[\varphi+\alpha r]^2-c[\varphi+\alpha r]^2-2f(\varphi+\alpha r)\right\}dxdy+$$

$$+\int\limits_{\gamma}\left[\sigma(\varphi+\alpha r)^2-c(\varphi+\alpha r)\right]\,d\gamma=$$

$$=\iint\limits_{S}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\alpha\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\alpha\frac{\partial r}{\partial y}\right)-c(\varphi+\alpha r)^2-2f(\varphi+\alpha r)\right\}dxdy+$$

$$+\int\limits_{\gamma}\left[\sigma(\varphi+\alpha r)^2-c(\varphi+\alpha r)\right]\,d\gamma$$

$$\frac{\partial I}{\partial\alpha}\iint\limits_{D}\left\{2\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\alpha\frac{\partial r}{\partial x}\right]\frac{\partial r}{\partial x}+2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\alpha\frac{\partial r}{\partial y}\right)\frac{\partial r}{\partial y}-2c(\varphi+\alpha r)r-2fr\right\}dxdy+$$

$$+\int\limits_{\gamma}\left\{2\left[\sigma\left(\varphi+\alpha r\right)r\right]-cr\right\}\,d\gamma$$

$$\delta\mathrm{I}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\partial\tilde{\mathrm{I}}}{\partial\alpha}=2\iint\limits_{D}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial y}-c\varphi-fr\right\}dxdt+\int\limits_{\gamma}(2\sigma\varphi r-cr)\,d\gamma=0$$

$$\delta\mathrm{I}=2\iint\limits_{D}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}r\right]-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}r+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}r\right)-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}r-c\varphi r-fr\right\}dxdy=\int\limits_{\gamma}\left[w\sigma\varphi r-cr\right]\,d\gamma$$

$$\iint\limits_{D}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}r\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)r\right]\,dxdy=\int\limits_{\gamma}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}r\cos(nx)+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}r\right)\cos(ny)\right]\,d\gamma=$$

$$=\int\limits_{\gamma}\overrightarrow{\mathrm{grad}\varphi}\vec{n}r\,d\gamma=\int\limits_{\gamma}\frac{\partial\varphi}{\partial n}r\,d\gamma$$

$$\delta\mathrm{I}=2\iint\limits_{D}\left[-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)-c\varphi-f\right]r\,dxdy+\int\limits_{\gamma}(2\sigma\varphi-c+2\frac{\partial\varphi}{\partial n})r\,d\gamma=0$$

5.1.2. Вариационная формулировка задач

Третья краевая задача для уравнения эллиптического типа:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+c\varphi-f=0\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}+\sigma\varphi-\dfrac{c}{2}=0\Big|_{\Gamma}\end{cases}$$

Решить краевую задачу и минимизировать функционал

$$\mathrm{I}[\varphi(x,y)] = \iint\limits_{D} \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 - c\varphi^2 - 2f\varphi \right\} dxdy + \int\limits_{\gamma} \left(\sigma\varphi^2 - c\varphi\right)\, d\gamma$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -1$$

$$|x| \leqslant 1 \qquad |y| \leqslant 1$$

$$u\Big|_{\gamma} = 0$$

Задача Дирихле для уравнения Пуассона

$$\mathrm{I}[\varphi(x,y)] = \iint\limits_{D} \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 - 2u \right\} dxdy$$

5.2. Метод Ритца

Метод Ритца служит для приближенного решения вариационной задачи. Описание.
Пример. *Найти решение с помощью метода Ритца*
Подобрать полную систему линейно независимых функций $\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y), \ldots \varphi_n(x,y)$, удовлетворяющих граничному условию $\varphi_i|_\gamma = 0$ (все функции на границе должны быть равны 0).
Чаще всего это тригонометрические или степенные функции. В нашем случае удобнее выбрать степенные:

$$(1-x^2)(1-y^2) = \varphi_1$$
$$(1-x^2)(1-y^2)x = \varphi_2$$

Искомую функцию u мы будем искать в виде ряда

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \varphi_k(x,y)$$

где C_k — неизвестные константы.

$$\iint\limits_D \left\{ \left(\sum_{k=1}^{n} C_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} C_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \right)^2 - 2\sum_{k=1}^{n} C_k \varphi_x(x,y) \right\} dxdy =$$
$$= \iint\limits_D \left\{ \sum_{k=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C_k C_m \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C_k C_m \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}\frac{\partial \varphi_m}{\partial y} - 2\sum_{k=1}^{n} C_k \varphi_k(x,y) \right\} dxdy$$

Так как сумма конечная, меняем местами знаки суммы и интеграла:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C_k C_m \left[\underbrace{\iint\limits_D \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x}\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}\frac{\partial \varphi_m}{\partial y} \right) dxdy}_{a_{km}} \right] - 2\sum_{k=1}^{n} C_k \underbrace{\iint\limits_D \varphi_k(x,y)\,dxdy}_{b_k}$$

В итоге получили

$$I[u] = \sum_{k=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C_k C_m a_{km} - 2\sum_{k=1}^{n} C_k b_k$$

Константы $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — должны быть подобраны так, чтобы функционал $I[C_1, C_2, \ldots, C_n]$ принимал минимальные значения.

$$\frac{\partial I}{\partial C_1} = 0 \quad \frac{\partial I}{\partial C_2} = 0 \quad \frac{\partial I}{\partial C_n} = 0$$

В результате получаем СЛАУ:

$$a_{11}C_1 + a_{12}C_2 + \ldots + a_{1n}C_n = 2b_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1}C_1 + a_{n2}C_2 + \ldots + a_{nn}C_n = 2b_n$$

Пусть решение состоит из 1-го слагаемого:

$$u(x,y) = C_1(1-x^2)(1-y^2)$$

Требуется найти C_1:

$$\iint\limits_D \left\{ \left[C_1(1-y^2)(-2x)\right]^2 + \left[C_1(1-x^2)(-2y)\right]^2 - 2C_1(1-x^2)(1-y^2) \right\} dxdy =$$

$$= 4C_1^2 \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \left[x^2(1-y^2)^2 + y^2(1-x^2)^2\right] dxdy - 2C_1 \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)(1-y^2)\, dxdy =$$

$$= 8C_1^2 \int\limits_{-1}^{1} \left[x^2\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{5}\left(1-2x^2+x^4\right)\right] dx - 4C_1 \int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)\left(1-\frac{1}{3}\right) dx =$$

$$= 16C_1^2 \left\{ \left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}\left(x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5\right) \right\} \Bigg|_0^1 - 8C_1\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 16C_1^2 \left\{ \frac{1}{3}\frac{8}{15} + \frac{1}{3}\frac{8}{15} \right\} - 8C_1\left(\frac{4}{9}\right)$$

$$\frac{16\cdot 16}{3\cdot 15}C_1^2 - \frac{32}{9}C_1$$

$$C_1 = \frac{5}{16}$$

$$u(x,y) = \frac{5}{16}(1-x^2)(1-y^2)$$

Точность 1.5%.

6. Распространение волн в пространстве

6.1. Задача о колебании квадратной пластинки.

Пусть в плоскости (x, y) расположена прямоугольная пластинка со сторонами a и b, закреплённая по краям и возбуждаемая с помощью начального отклонения и начальной скорости. Для нахождения функции $u(x, y, t)$ мы должны решить уравнение колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \qquad x \in [0, a], y \in [0, b]$$

Начальные условия при $t = 0$

$$u = f(x, y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(x, y)$$

Граничные условия

$$\begin{array}{llll} x = 0 & u = 0, & x = a & u = 0 \\ y = 0 & u = 0, & y = b & u = 0 \end{array}$$

Будем искать решение методом Фурье в виде

$$u(x, y, t) = T(t) \cdot G(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T''G; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = T\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}$$

$$T''G = a^2 T \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) \quad \Bigg| \, \frac{1}{TG}$$

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = \frac{1}{G} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) = -\lambda^2$$

Такое равенство возможно в единственном случае

$$T'' + a^2\lambda^2 T = 0 \qquad \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \lambda^2 G = 0$$

G представим в виде произведения двух функций:

$$G(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \lambda^2 = 0$$

Это возможно, только если обе функции равны одной константе.

$$[X = -k^2 \quad Y = -n^2]$$

$$-k^2 - n^2 + \lambda^2 = 0$$

Таким образом получили следующие дифференциальные уравнения

$$\begin{cases} T'' + a^2\lambda^2 T = 0 \\ X'' + k^2 X = 0 \\ Y'' + n^2 Y = 0 \\ p^2 = k^2 + n^2 \end{cases}$$

Найдём решение в виде

$$u(x, y, t) = T(x) \cdot X(x) \cdot Y(y)$$

$$x = 0 : u = T(t)X(0)Y(y) = 0 \Rightarrow$$

$$X(0) = 0 \quad X(a) = 0 \quad Y(0) = 0 \quad Y(b) = 0$$

Решим задачу Штурма—Лиувилля. Из граничных условий найдём k и n:

$$\begin{array}{ll} X'' + k^2 X = 0 & Y'' + n^2 Y = 0 \\ X(0) = 0 \quad X(a) = 0 & Y(0) = 0 \quad Y(a) = 0 \\ X(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx & Y(x) = C_3 \cos nx + C_4 \sin nx \\ C_1 = 0 \quad \sin ka = 0 & C_3 = 0 \quad \sin ka = 0 \\ ka = mt; \quad k = \dfrac{m\pi}{a} m = 1, 2 \ldots & n = \dfrac{l\pi}{b} l = 1, 2 \ldots \\ X(x) = C_2 \sin \dfrac{m\pi}{a} x & Y(y) = C_4 \sin \dfrac{l\pi}{b} x \end{array}$$

Решениям уравнений соответствуют собственные значения

$$\lambda_{m,l} = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{b}\right)^2$$

Решим последнее уравнение, подставив $\lambda_{m,l}$

$$T'' + a^2 \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{b}\right)^2\right] T = 0$$

Решением будет являтся

$$T = A_{m,l} \cos a \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{b}\right)^2} + B_{m,l} \sin \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{b}\right)^2}$$

$$u_{m,l}(x, y, t) = \left[A_{m,l} \cos a \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{b}\right)^2} + B_{m,l} \sin a \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{b}\right)^2} t\right] \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{l\pi}{b} y$$

Полученное уравнение удовлетворяет краевым условиям. Неизвестные константы найдём из начальных условий.

$$t = 0; \quad u(x, y, 0) = f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} A_{m,l} \sin \frac{m\pi}{a} \sin \frac{l\pi}{b} y \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = g(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{b}\right)^2} B_{m,l} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{l\pi}{b} y \tag{2}$$

Видно, что (1) и (2) это ряды Фурье, коэффициенты которых определяются по формулам:

$$A_{m,l} = \frac{4}{ab}\int\limits_0^a\int\limits_0^b f(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{l\pi}{b}y\,dxdy$$

$$B_{m,l} = \frac{4}{a\sqrt{(b\pi p)^2+(a\pi l)^2}}\int\limits_0^a\int\limits_0^b g(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{l\pi}{b}y\,dxdy$$

Это легко показать, так как

$$\int\limits_0^a\int\limits_0^b f(x,y)\sin\frac{\pi m}{a}\sin\frac{\pi l}{b}y\,dxdy = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}A_{m,l}\int\limits_0^a\int\limits_0^b \sin\frac{\pi m}{a}x\sin\frac{\pi M}{a}x\sin\frac{\pi l}{b}y\sin\frac{\pi L}{b}y\,dxdy =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}A_{m,l}\int\limits_0^a \sin\frac{\pi m}{a}x\sin\frac{\pi M}{a}x\,dx\int\limits_0^b \sin\frac{\pi l}{b}y\sin\frac{\pi L}{b}y\,dy =$$

$$= A_{m,l}\int\limits_0^a \sin^2\frac{\pi m}{a}x\,dx\int\limits_0^b \sin^2\frac{\pi l}{b}y\,dy = A_{m,l}\frac{a}{2}\frac{b}{2}\cdot\int\limits_m^M\cdot\int\limits_l^L$$

6.2. Задача о колебании круглой пластинки.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

Начальные условия ($t = 0$)

$$u = f(r)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(r)$$

Граничные условия

$$r = 0 \quad u \neq \infty$$
$$r = R \quad u = 0$$

Как и в случае прямоугольной мембраны, мы прибегаем к методу Фурье. Решение ищем в виде

$$u = T(t)\cdot V(r)$$

Подставляем в уравнение

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = \frac{V'' + \frac{1}{r}V'}{V} = -\gamma^2$$
$$T = A\cos a\gamma + B\sin a\gamma$$
$$V'' + \frac{1}{r}V' + \gamma^2 V = 0 \quad V(r) = I_0(\gamma r)$$
$$V(r = R) = 0 \Rightarrow I_0(\gamma R) = 0 \Rightarrow \mu_n = \gamma_n R \Rightarrow I_0(\mu_n) = 0$$
$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\gamma_n at + B_n\sin\gamma_n at)I_0(\gamma_n r)$$

Из начальных условий

$$\frac{\partial u}{\partial t}(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n a B_n I_0(\gamma_0 r) = g(r)$$

$$\int\limits_0^R rI_0(\gamma_n r)I_0(\gamma_k r)dr$$

$$rI_0''(\gamma_n r) + I_0'(\gamma_n r) + 2\gamma_n^2 I_0(\gamma_n r) = 0 \quad |I_0(\gamma_k r)\,dr$$
$$rI_0''(\gamma_k r) + I_0'(\gamma_k r) + 2\gamma_k^2 I_0(\gamma_k r) = 0 \quad |I_0(\gamma_n r)\,dr$$

$$\int\limits_0^1 \{2[I_0''(\gamma_n r)I_0(\gamma_k r) + I_0'(\gamma_n r)I_0(\gamma_k r) + \gamma_n^2 I_0(\gamma_n r)I_0(\gamma_k r) -$$
$$- I_0''(\gamma_k r)I_0(\gamma_n r) - I_0'(\gamma_k r)I_0(\gamma_n r) - \gamma_k^2 I_0(\gamma_n r)I_0(\gamma_k r)]\}dr = 0$$

$$\mu = \gamma r$$

$$\int\limits_0^R rJ_0(\gamma_k r)I_0(\gamma_n r)dr = \lim_{n\to k}\frac{RI_0(\gamma_n R)\frac{dI_0}{dr}(\gamma_k r)\big|_{r=R}}{(\gamma_n^2 - \gamma_k^2)} = \frac{\gamma I_0'(\gamma_k R)}{2\gamma} = \frac{1}{2}RI_0'(\gamma_n R)$$

Пользуясь ортоганальностью можно получить константы:

$$A_n \frac{R I_0'(\gamma_n R)}{2} = \int\limits_0^R r f(r) I_0(\gamma_n r)\, dr$$

$$B_n a \gamma_n \frac{R I_0'(\gamma_n R)}{2} = \int\limits_0^R r g(r) I_0(\gamma_m r)\, dr$$

7. Специальные функции

7.1. Уравнение Бесселя. Функции Бесселя.

7.1.1. Уравнение Бесселя. Вывод функции Бесселя.

При решении многих задач математической физики приходят к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx}+\left(1-\dfrac{n^2}{x^2}\right)y=0 \\ \text{или} \\ \dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{dy}{dx}\right)+\left(1-\dfrac{n^2}{x^2}\right)y=0 \end{array}\right\}$$

называемому *уравнением цилиндрических функций n-ого порядка*. Это уравнение часто также называют *уравнением Бесселя n-го порядка*.

Характерными задачами, приводящими к цилиндрическим функциям, являются краевые задачи для уравнения

$$\Delta u+k^2u=0 \tag{1}$$

вне и внутри круга (вне или внутри цилиндра в случае трёх независимых переменных). Вводя полярные координаты, преобразуем уравнение (1) к виду

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+k^2u=0. \tag{2}$$

Полагая $u=R\Phi$ и разделяя в (2) переменные, получаем:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\left(k^2-\frac{\lambda}{r^2}\right)R=0$$

и

$$\Phi''+\lambda\Phi=0.$$

Условие периодичности для $\Phi(\varphi)$ даёт $\lambda=n^2$, где n — целое число. Полагая затем $x=kr$, приходим к уравнению цилиндрических функций

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0, \quad R(r)=y(kr)$$

или

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0$$

В случае решений волнового уравнения (1), обладающих радиальной (цилиндрической) симметрией, мы получим *уравнение Бесселя нулевого порядка*

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{y}{x}\right)+y=0 \quad \text{или} \quad y''+\frac{1}{x}y'+y=0.$$

Функции Бесселя

Уравнение Бесселя ν-го порядка

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0 \tag{3}$$

(ν — произвольное действительное или комплексное число, действительную часть которого мы можем считать неотрицательной) имеет особую точку при $x = 0$. Поэтому решение $y(x)$ следует искать в виде степенного ряда

$$y(x) = x^{\sigma}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots), \tag{4}$$

начинающегося с x^{σ},, где σ — характеристический показатель, подлежащий определению. Подставляя ряд (4) в уравнение (3) и приравнивая нулю коэффициенты для определения σ и систему уравнений для определения коэффициентов a_k:

$$\left.\begin{aligned} a_0(\sigma^{@} - \nu^2) = 0\\ a_1[(\sigma+1)^2 - \nu^2] = 0\\ a_2[(\sigma+2)^2 - \nu^2] + a_0 = 0\\ \ldots\\ a_k[(\sigma+k)^2 - \nu^2] + a_{k-2} = 0\\ (k = 2, 3, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Так как мы можем предположить, что $a_0 \neq 0$, то из первого уравнения (5) следует, что

$$\sigma^2 - \nu^2 = 0 \quad \text{или} \quad \sigma = \pm\nu. \tag{6}$$

Перепишем k-е уравнение (5) $k > 1$ в виде

$$(\sigma + k + \nu)(\sigma + k - \nu)a_k + a_{k-2} = 0. \tag{7}$$

Оставим в стороне тот случай, когда $\sigma+\nu$ или $\sigma-\nu$ (и соответственно -2ν или 2ν) равно отрицательному целому числу.
Тогда из уравнения (5), в силу (6), будем иметь

$$a_1 = 0$$

Уравнение (7) даёт рекурентную формулу для определенния a_k через a_{k-2}:

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{(\sigma + k + \nu)(\sigma + k - \nu)}.$$

Отсюда каждый чётный коэффициент может быть выражен через предыдущий

$$a_{2m} = -a_{2m-}\frac{1}{2^2m(m+\nu)}.$$

Положим, что

$$a_0 = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}$$

Воспользовавшись свойством гамма функции $\Gamma(s+1) = s!$ найдём коэффициенты

$$a_{2k} = (-1)^k\frac{1}{2^{2k+\nu}\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}.$$

Ряд, соответствующий $\sigma = \nu \geqslant 0$

$$J_{\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \tag{8}$$

называется *функцией Бесселя первого рода ν-го порядка*. Ряд

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu} \tag{9}$$

соответствующий $\sigma = -\nu$, представляет второе решение уравнения (3), линейно независимое от $J_{\nu}(x)$.

7.1.2. Ортогональность функций Бесселя

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, интегрируемые на $[a,b]$ называются *ортогональными* на $[a,b]$, если

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = 0.$$

Система функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \dots,\ \varphi_n(x),\ \dots$$

интегрируемых на $[a,b]$ называется *ортогональной* $[a,b]$, если

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_k\,dx = \begin{cases} 0 & i \neq k, \\ > 0 & i = k. \end{cases}$$

Функции Бесселя ортогональны

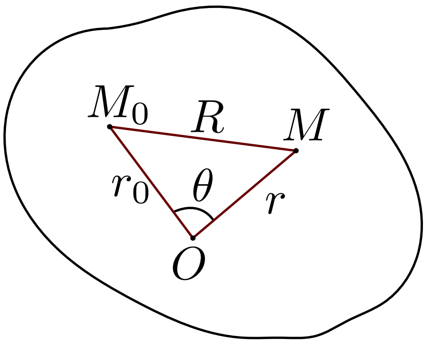
$$\int_a^b rJ_\nu(x)J_\nu(x)\,dx = \begin{cases} 0 & k \neq m, \\ \neq 0 & k = m. \end{cases}$$

$$y = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 t + \dots$$

7.2. Полиномы Лежандра.

7.2.1. Производящая функция и полиномы Лежандра

Полиномы Лежандра применяются при решении задачи Штурма-Лиувилля, тесно связаны с решением уравнения Лапласа $\frac{1}{R}$, R - расстояние точки M от фиксированной M_0.



Пусть r и r_0 — радиусы векторы точек M и M_0, а θ - угол между ними. Используя теорему косинусов представим R через r

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + r^2 - 2rr_0\cos\theta}}$$

Рассмотрим два случая

$$\begin{array}{lll} r > r_0 & \frac{r_0}{r} < 1 & \frac{r_0}{r} = \rho < 1 \\ r < r_0 & \frac{r_0}{r} < 1 & \frac{r}{r_0} = \rho < 1 \end{array}$$

$$1)\frac{1}{R} = \frac{1}{r\sqrt{1+\rho^2-2\rho\cos\theta}}$$
$$2)\frac{1}{R} = \frac{1}{r_0\sqrt{1+\rho^2-2\rho\cos\theta}}$$

$$\psi(\rho,\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho\cos\theta}}$$

Функция

$$\psi(\rho,z) = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho z}} \tag{10}$$

называется *производящей функцией* полиномов Лежандра.

$$\psi(\rho,z) = \left[1+(\rho^2-2\rho z)\right]^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}(\rho^2-2\rho z) - \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right)(\rho^2-2\rho z)^2 + \ldots =$$
$$= 1 + z\rho + \left(\frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}\right) + \rho^2 + \ldots \tag{11}$$

Получим разложение функции ψ в ряд.

$$\psi(\rho,z) = \left[1+(\rho^2-2\rho z)\right]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\rho^n$$

$$\psi(\rho,z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\rho^n \tag{12}$$

Коэффициенты разложения (12) при одинаковых степенях ρ образуют *полиномы Лежандра*. Обратимся к формуле (10)

$$z=1, \quad \psi(\rho,1) = (1+\rho^2-2\rho)^{-\frac{1}{2}} = (1-\rho)^{-1} = 1+\rho+\rho^2+\ldots \Rightarrow P_n(1) = 1$$

В дальнейшем получим рекуррентное соотношение.

7.2.2. Рекуррентные формулы

Выведем три рекуррентные формулы.
Продифференцируем ψ по ρ

$$\frac{\partial\psi}{\partial\rho}=\frac{2\rho-2z}{2(1+\rho^2-2\rho z)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-(\rho-z)}{(1+\rho^2-2pz)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(1+\rho^2-2\rho z)\frac{\partial\psi}{\partial\rho}=-(\rho-z)\psi \tag{13}$$

Запишем формулу в виде степенного ряда относительно ρ, подставив в неё ряд (12)

$$(1+\rho^2-2\rho z)\left[\ldots+(n-1)P_{n-1}\rho^{n-2}+nP_n\rho^{n-1}+(n+1)P_{n+1}\rho^n+\ldots\right]=$$
$$=-(\rho-z)\left(\ldots+P_{n-1}\rho^{n-1}+P_n\rho^n+P_{n+1}\rho^{n+1}+\ldots\right)$$

Приведём подобные

$$(n+1)P_{n+1}+(n-1)P_{n-1}-2nzP_n=-P_{n-1}+zP_n$$
$$(n+1)P_{n+1}+nP_{n-1}-(2n+1)zP_n=0$$

Получим **первую** рекуррентную формулу

$$(n+1)P_{n+1}-z(2n+1)P_n+nP_{n-1}=0 \tag{14}$$

Продифференцируем ψ по z.

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}=\frac{\rho\psi}{(1+\rho^2-2\rho z)}$$

$$(1+\rho^2-2\rho z)\frac{\partial\psi}{\partial z}=\rho\psi \tag{15}$$

$$\begin{cases}\rho z\psi=z(1+\rho^2-2\rho z)\frac{\partial\psi}{\partial z}\\ \rho^2\psi=\rho(1+\rho^2-2\rho z)\frac{\partial\psi}{\partial z}\end{cases}$$

$$\rho\cancel{(1+\rho^2-2\rho z)}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}=(z-\rho)\cancel{(1+\rho^2-2\rho z)}\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

$$\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}=(z-\rho)\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{16}$$

В равенство (16) подставляем выражение (12)

$$\rho\left[\ldots+(n-1)P_{n-1}\rho^{n-2}+nP_n\rho^{n-1}+(n+1)P_{n+1}\rho^n+\ldots\right]=$$
$$=(z-\rho)\left[\ldots+P'_{n-1}\rho^{n-1}+P'_n\rho^n+P'_{n+1}\rho^{n+1}+\ldots\right]$$

Получили **вторую** рекурентную формулу

$$nP_n=zP'_n-P'_{n-1} \tag{17}$$

Имеется

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\psi)=\rho^2\frac{\partial\psi}{\partial\rho}+\rho\psi$$

$$\rho(\rho\psi)=\rho(z-\rho)\frac{\partial\psi}{\partial z}+(1+\rho^2-2\rho z)\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

Снова используем (12).

$$\rho\psi = \rho(\ldots + P_{n-1}\rho^{n-1} + P_n\rho^n + P_n + \rho^{n+1}) = \ldots + P_{n-1}\rho^n P_n\rho^{n+1} P_{n+1}\rho^{n+1}$$

$$\frac{\partial(\rho\psi)}{\partial} = (\ldots +)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}(\rho z - \rho^2 + 1\rho^2 - 2\rho z) = (1\rho z)\frac{\partial\psi}{\partial z} = (1-\rho z)(P'_{n-1}\rho^{n-1} + P'_n\rho^n + P'_{n+1}\rho^{n+1} + \ldots)$$

$$nP_{n-1}\rho^n + (n+1)P_n\rho^{n+1} + (n+2)P_{n+1}\rho^{n+2} = P'_n\rho^n - zP'_{n-1}\rho^n + \ldots$$

Получаем **третью** рекуррентную формулу

$$nP_{n-1} = P'_n - zP'_{n-1} \tag{18}$$

7.2.3. Уравнение Лежандра

Найдём дифференциальное уравнение, решением которого явялется $P_n(z)$. Реккурентные соотношения для полиномов Лежандра:

$$(n+1)P_{n+1}(z) - z(2n+1)P_n(z) + nP_{n-1}(z) = 0 \tag{1}$$

$$nP_n(z) - zP'_n(z) + P_{n-1}(z) = 0 \tag{2}$$

$$nP_{n-1}(z) - P'_n(z) + zP'_{n-1}(z) = 0 \tag{3}$$

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n(z)P_m(z)\,dz = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & n = m \end{cases}$$

Рассмотрим дифференциальную форму полиномов Лежандра:

$$y = (z^2-1)^n; \qquad \frac{dy}{dz} = 2nz(z^2-1)^n$$

$$\frac{dy}{dz}(z^2-1) - 2nzy = 0$$

Продифференциируем полученное уравнение $(n+1)$ раз:

$$\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\left[(z^2-1)\frac{dy}{dz} - 2n\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}(zy(z))\right] = 0$$

$$\begin{aligned} (u\cdot v)' &= u'v + uv' \\ (u\cdot v)'' &= u''c + 2u'v' + v'' \\ (u\cdot v)''' &= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + v''' \end{aligned}$$

Тогда

$$(u\cdot v)^n = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)} + \ldots + uv^{(n)} \tag{4}$$

$$\left[\frac{d^{n+2}}{dz^{n+2}}(z^2-1) + (n+1)\frac{d^{n+1}y}{dz^{n+1}}2z + n(n+1)\frac{d^n y}{dz^n}\right] - 2n\left[\frac{d^{n+1}y}{dz^{n+1}}z + (n+1)\frac{d^n y}{dz^n}\right] = 0$$

$$(z^2-1)\frac{d^{n+2}y}{dz^{n+2}}+\frac{d^{n+1}y}{dz^{n+1}}[\cancel{2nz}+2z-\cancel{2nz}]+\frac{d^ny}{dz^n}[n^2+n-2n^2-2n]=0$$

$$(1-z^2)\frac{d^{n+2}y}{dz^{n+2}}-2z\frac{d^{n+1}y}{dz^{n+1}}+n(n+1)\frac{d^ny}{dz^n}=0 \tag{5}$$

Пусть $\frac{d^ny}{dz^n}=P_n$, тогда

$$(1-z^2)\frac{d^2P_n}{dz^2}-2z\frac{dP_n}{dz}+n(n+1)P_n=0$$

Получили *дифференциальное уравнение Лежандра*, которому удовлетворяет P_n:

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{dP_n}{dz}\right]+n(n+1)P_n=0 \tag{6}$$

где P_n — полиномы Лежандра:

$$P_n(z)=\frac{d^ny}{dz^n}=C\frac{d^n}{dz^n}\left[(z^2-1)^n\right]$$

так как $y=(z^2-1)^n$, а по свойствам полиномов Лежандра $P_n(1)=1$

$$\frac{d}{dz}\left[(z^2-1)^n\right]=2z(z^2-1)^{n-1}n$$
$$\frac{d^2}{dz^2}\left[(z^2-1)^n\right]=2n(z^2-1)^{n-1}+2n(n-1)z^2(z^2-1)^{n-2}$$
$$\frac{d^n}{dz^n}\left[(z^2-1)^n\right]=2^nz^nn(n-1)(n-2)\dots(z^2-1)+a(z^2-1)z^{n-1}+b(z^2-1)^2z^{n-2}$$

Тогда при $z=1$

$$P_n(1)=C\frac{d^n}{dz^n}\left[(z^2-1)^n\right]\Big|_{z=1}=C2^nn!=1$$

и следовательно

$$C=\frac{1}{2^nn!}.$$

Полиномы Лежандра можно представить в дифференциальной форме

$$P_n(z)=\frac{1}{2^nn!}\frac{d^n}{dz^n}\left[(z^2-1)^n\right] \tag{7}$$

Формула (7) называется *формулой Родригера*.

7.2.4. Ортогональность полиномов Лежандра

Докажем ортогональность полиномов Лежандра на отрезке $[-1,1]$

$$(1-z^2)P_n''-2zP_n+n(n+1)P_n=0|P_m(z)dz$$
$$(1-z^2)P_m''-2zP_m+n(m+1)P_m=0|P_n(z)dz$$

$$\int\limits_{-1}^{1}\left\{P_m\frac{d}{dz}\left((1-z^2)\frac{dP_n}{dz}\right)+n(n+1)P_nP_m-P_n\frac{d}{dz}\left((1-z^2)\frac{dP_n}{dz}\right)-m(m+1)P_nP_m\right\}dz$$

От первого и третьего слагаемого возьмём интеграл по частям
Если $n \neq m$ интеграл $= 0$

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n P_m \, dz = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \neq 0 & n = m \end{cases}$$

$$P_n(z) = a_{nn} z^n + a_{nn-1} z^{n-2} + \dots$$

Полиномы Лежандра содержат только чётные, либо только нечётные коэффициенты степени z

$$P_{n-1}(z) = a_{n-1n-1} z^{n-1} + a_{n-1n-2} z^{n-3} + \dots$$

Из равенства (14)

$$(n+1)a_{n+1n+1} - (2n+1)a_{nn} = 0$$

Теперь построим такую функцию

$$Q(z) = P_n(z) - \frac{a_{nn}}{a_{n-1n+1} z P_{n-1}(z)} = b_1 z^{n-2} + b_2 z^{n-4} = \sum_{n=0}^{n-2} b_n P_k(z)$$

$$N_n = \int\limits_{-1}^{1} P_n(z) P_n(z) \, dz = \int\limits_{-1}^{1} P_n(z) \left(Q(z) + \frac{a_n n}{a_{n-1}} z P_{n-1} \right) dz =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} P_n Q(z) \, dz + \frac{a_n n}{a_{n-1n-1}} \int\limits_{-1}^{1} P_n z P_{n-1} \, dz \quad (8)$$

Воспользуемся равенством (14)

$$z P_n = \frac{n P_{n-1} + (n+1) P_{n+1}}{2n+1}$$

Получаем

$$N_n \int\limits_{-1}^{1} P_n(z) P_n(z) \, dz = \frac{a_{nn}}{a_{n-1n-1}} \int\limits_{-1}^{1} P_{n-1} \left(\frac{n P_{n-1} + (n+1) P_{n+1}}{2n+1} \right) dz = \frac{a_{nn}}{a_{n-1n-1} \frac{n}{2n+1}} \int\limits_{-1}^{1} P_{n-1}^2 \, dz$$

$$N_n = \frac{2n-1}{2n+1} N_{n-1}$$

$$N_0 = \int\limits_{-1}^{1} dz = 2$$

$$N_1 = \int\limits_{-1}^{1} z^2 dz = \frac{2}{3}$$

$$N_2 = \frac{2}{5}$$

$$N_3 = \frac{3}{7}$$

По аналогии

$$N_n = \frac{2}{2n+1}$$

7.3. Присоединённые функции Лежандра.

7.3.1. Присоединённые функции

В задачах *Штурма-Лиувилля* в многомерном случае уравнение Лежандра принимает вид

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{dy}{dz}\right]+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]y=0 \tag{1}$$

где m — константа.
Будем искать решение y в виде

$$y=(1-z)^{\frac{m}{2}}v(z)$$

Найдём первую производную

$$\frac{dy}{dz}=\frac{m}{2}(1-z^2)^{\frac{m-2}{2}}(-2z)v+(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\frac{dv}{dz}$$

Умножим на $(1-z^2)$

$$(1+z^2)\frac{dy}{dz}=-mz(1-z^2)^{\frac{m}{2}}v+(1-z^2)^{\frac{m+2}{2}}\frac{dv}{dz}$$

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{dy}{dz}\right]=-m(1-z^2)^{\frac{m}{2}}v+m\frac{m}{2}z(2z)(1-z^2)^{\frac{m-2}{2}}v-mz(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\frac{dv}{d}- \\ -\frac{m+2}{2}(2z)(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\frac{dv}{dz}+(1-z^2)^{\frac{m+2}{2}}\frac{d^2v}{dz^2}$$

Подставим в формулу (1)

$$(1-z^2)^{\frac{m+2}{2}}\frac{d^2v}{dz^2}+\frac{dv}{dz}\left[-mz(1-z^2)^{\frac{m}{2}}+(m+2)z(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\right]+ \\ +v\left[-m(1-z^2)^{\frac{m}{2}}+m^2z^2(1-z^2)^{\frac{m-2}{2}}+n(n+1)(1-z^2)^2\frac{m}{2}-\frac{m^2}{1-z^2}(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\right]=0,$$

сократим на $(1-z^2)^{\frac{m}{2}}$

$$(1-z^2)\frac{d^2v}{dz^2}-2z(m+1)\frac{dv}{dz}+\left[n(n+1)-m(m+1)\right]v=0 \tag{2}$$

Возьмём

$$(1-z^2)\frac{d^2y^*}{dz^2}-2z\frac{dy^*}{dz}+n(n+1)y^*=0, \qquad y^*=P_n(z)$$

Возьмём первую производную
первое слагаемое

$$\frac{d^m}{dz^m}\left[(1-z^2)\frac{d^2y^*}{dz^2}\right]=\frac{d^{m+2}y^*}{dz^{m+2}}+m\frac{d^{m+1}y^*}{dz^{m+1}}(-2z)+\frac{m(m-1)}{2}\frac{d^my^*}{dz^m}(-2)=0$$

второе слагаемое

$$\frac{d^m}{dz^m}\left[z\frac{dy^*}{dz}\right]=\frac{d^{m+1}y^*}{dz^{m+1}}z+m\frac{d^my^*}{dz^m}$$

$$\frac{d^{m+1}y^*}{dz^{m+1}}(-2z)+\frac{m(m+1)}{2}\frac{d^my^*}{dz^m}$$

$$(1-z^2)\frac{d^{m+2}y^*}{dz^{m+2}} - 2z(m+1)\frac{d^{m+1}y^*}{dz^{m+1}} + \left[-m^2+m-2m+n(n+1)\right]\frac{d^m y^*}{dz^m} = 0 \tag{3}$$

Если $v = \frac{d^m y^*}{dz^m}$, то (2) = (3)

$$v = \frac{d^m y^*}{dz^m} = \frac{d^m}{dz^m}\left(P_n(m)\right)$$

Подставив в уравнение (1), получим решение

$$y = (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^m}{dx^m}P_n(z) = P_n^{(m)}(z) \tag{4}$$

(4) – присоединённые полиномы Лежандра

7.3.2. Ортогональность

Рассмотрим норму присоединённых полиномов Лежандра

$$N_{n,k}^{(m)} = \int\limits_{-1}^{1} P_n^{(m)}(z)P_k^{(m)}(z)\,dz = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ \neq 0 & n = k \end{cases}$$

$$N_{n,k}^{(m)} = \int\limits_{-1}^{1}(1-z^2)\frac{d^m}{dz^m}(P_n)(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dz^m}(P_k)\,dz = \int\limits_{-1}^{1}\underbrace{(1-z^2)^m\frac{d^m}{dz^m}P_n(z)}_{\text{u}}\cdot\underbrace{\frac{d^m}{dz^m}P_k(z)}_{\text{dv}}\,dz$$

Интегрируем по частям

$$v = \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}P_k(z)$$
$$du = \frac{d}{dz}\left[(1-z^2)^m\frac{d^m}{dz^m}P_n(z)\right]$$

$$\int\limits_{-1}^{1}(1-z^2)^m\frac{d^m}{dz^m}P_n(z)\frac{d^m}{dz^m}P_k(z)\,dz =$$

$$= (1-z^2)^m\frac{d^m}{dz^m}P_n(z)\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}P_k(z)\Big|_{-1}^{1} - \int\limits_{-1}^{1}\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)^m\frac{d^m}{dz^m}P_n(z)\right]\frac{d^{m-1}P_k(z)}{dz^{m-1}}\,dz$$

Оставшийся интеграл подставим в (3) и умножим на $(1-z^2)$:

$$(1-z^2)^m\frac{d^{m+2}}{dy^{m+2}} - 2(m+1)z(1-z^2)^m\frac{d^{m+1}}{dy^{m+1}} + (1-z^2)^m[n(n+1)-m(m+1)]\frac{\partial^m y}{\partial z^m} = 0$$

$$\frac{d}{dz}\left\{(1-z^2)^m\frac{d^{m+1}}{dy^{m+1}}\right\} = -(1-z^2)^m\left[n(n+1)-m(m+1)\right]\frac{d^m y}{dz^m} \tag{5}$$

Перепишем формулу (5) $m = m'+1 \Rightarrow m' = m-1$

$$\frac{d}{dz}\left\{(1-z^2)^m\frac{d^m}{dy^m}\right\} = -(1-z^2)^{m-1}\left[n(n+1)-m(m-1)\right]\frac{d^{m-1}y}{dz^{m-1}}$$

$$n^2 + n - m^2 + m = (n+m) + (n^2 - m^2) = (n+m)(n-m+1)$$

$$N_{n,k}^{(m)} = \int\limits_{-1}^{1} (1-z^2)^m \frac{d^m}{dz^m} P_n(z) \frac{d^m}{dz^m} P_k(z)\, dz =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} (1-z^2)^{m-1} \left[(n+m)(n-m+1) \frac{d^{m-1} P_n(z)}{dz^{m-1}} \right] \frac{d^{m-1} P_k(z)}{dz^{m-1}}\, dz =$$

$$= [(n+m(n-m+1))] \int\limits_{-1}^{1} (1-z^2)^{m-1} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} P_n(z) \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} P_k(z)\, dz =$$

$$= [(n+m)(n-m+1)] N_{n,k}^{(m-1)} = (n+m)(n-m+1)(n-m+2) N_{n,k}^{m-2} =$$

$$= (n+m)(n+m-1)\ldots(n+1)(n-m+1)(n-m+2)\ldots n N_{n,k}^{(0)}$$

Вспомним определение факториала

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$$

$$\frac{n(n-1)(n+2)\ldots(n-m+2)(n-m+1)(n-m)(n-m+1)}{(n-m)(n-m-1)} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$\frac{(n+m)(\ldots)(n+1)\ldots(n)(n-1)\ldots 1}{n(n-1)\ldots 1} = \frac{(n+m)!}{n!} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$N_{n,k}^{(m)} = \frac{(n+m)!n!}{(n-m)!n!} N_{n,k}^{(0)}$$

Окончательно получаем:

$$N_{n,k}^{(m)} = \int\limits_{-1}^{1} (1-z^2)^m \frac{d^m}{dz^m} P_n(z) \frac{d^m}{dz^m} P_k(z)\, dz = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} N_{n,k}^{(0)} \tag{6}$$

Используя свойство ортогональности

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n^{(m)}(z) P_k^{(m)}\, dz = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & k = m \end{cases}$$

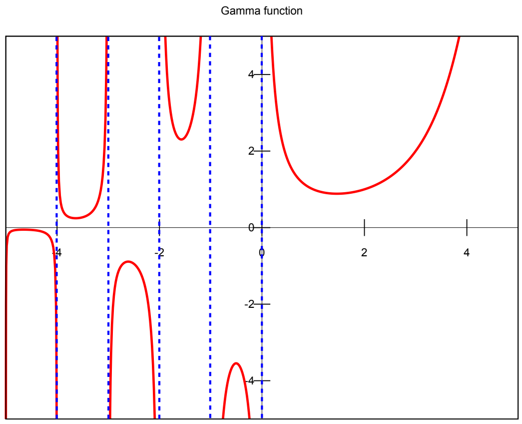
последнее равенство может быть представлено так:

$$N_{n,k}^{(m)} = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{2}{2n+1}, \qquad \text{если} \quad m = k \tag{7}$$

7.4. Гамма функция.

$$\Gamma(s+1)=\int\limits_0^\infty e^{-x}x^s\,dx \tag{8}$$

Функция (8) – гамма-функция.
Свойства:



- $\Gamma(1-s)\Gamma(s)=\dfrac{\pi}{\sin\pi s}$
- $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$
- $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$
- $\Gamma'(x)=\psi(x)\Gamma(x)$

Проинтегрируем по частям

$$\Gamma(s+1)=-e^{-x}x^s|_0^\infty+\int\limits_0^\infty e^{-x}sx^{s-1}\,dx=s\int\limits_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$$

$$\Gamma(1)=\int\limits_0^\infty e^{-x}x^0\,dx=\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx=e^{-x}|_0^\infty=1$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\int\limits_0^\infty e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}\,dx\left[\begin{array}{cc} x=z^2 & \sqrt{x}=z \\ dx=2zdz & \end{array}\right]=\int\limits_0^\infty\frac{e^{-z^2}}{z}2z\,dz=2\int\limits_0^\infty e^{-z^2}\,dz=\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(1)=1\quad\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Гамма-функции встречаются в уравнениях Бесселя.

7.5. Сферические функции

Сферические функции проще всего могут быть выведены при решении уравнения Лапласа для шаровой области методом разделения переменных (метод Фурье).
Мы рассмотрим вывод на примере решения задачи теплопроводности.
Будем искать решение уравнения в переменных r, θ, φ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right)$$

$$0 \leqslant r \leqslant R$$
$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$
$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

Связь с декартовой системой координат

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

Положим

$$u(t, r, \theta, \varphi) = T(t)v(r, \theta, \varphi)$$

Решим задачу теплопроводности

$$T'v = a^2 T\Delta_{r,\theta\varphi} v \Big| \frac{1}{a^2 vT}$$

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{\Delta_{r,\theta,\varphi} v}{v} = -k^2$$

$$\frac{T'}{a^2 T} = -k^2$$

$$\Delta_{r,\theta\varphi} v = -k^2 v$$

$v(r, \theta, \varphi)$ будем искать в виде

$$v(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$$

Составим уравнение

$$R''Y + \frac{2}{r}R' + \left[\frac{1}{r^2 \sin v}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right] R(r) = -k^2 RY \quad \Big| \frac{r^2}{RY}$$

$$\frac{r^2 R'' + 2rR'}{R} + k^2 r^2 = -\frac{\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]}{Y} = \lambda^2$$

$$R'' + \frac{2}{r}R' + \left(k^2 - \frac{\lambda^2}{r^2}\right) R = 0 \tag{9}$$

Уравнение (9) сводится к уравнению Бесселя.

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda^2 Y = 0$$

Решение задачи $Y(\theta, \varphi)$ также ищем методом разделения переменных

$$Y_\lambda = F(\varphi)P(\theta)$$

$$P''F + \cos\theta P'F + \frac{1}{\sin^2\theta}F''P + \lambda^2 FP = 0 \quad \Big| \frac{\sin^2\theta}{PF}$$

Разделим переменные

$$\frac{\sin^2\left[P'' + \cos\theta P'\right]}{P} + \lambda^2 \sin^2\theta = -\frac{F''}{F}$$

В итоге получим

$$-\frac{F''}{F} = m^2$$

m^2 – константа

F удовлетворяет уравнению

$$F'' + m^2 F = 0$$

Решается в виде

$$F = A_m \sin m\varphi + B_m \cos m\varphi$$

$$\sin^2\theta P'' + \sin\theta\cos\theta(\lambda^2\sin^2\theta - m^2)P = 0 \quad \big| Y_\lambda = F(\varphi)P(\theta)$$

Замена

$$\cos\theta = z \quad \sin^2\theta = (1 - z^2)$$

Найдём производные

$$\frac{dP}{d\theta} = \frac{dP}{dz}\frac{dz}{d\theta} = -\sin\theta\frac{\partial P}{\partial z}$$
$$\frac{d^2P}{d\theta^2} = -\cos\theta\frac{dP}{dz} + \sin^2\theta\frac{d^2P}{dz^2}$$

$$P'' + \cos P' + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 v}\right)P = 0$$

$$(1 - z^2)P''_{zz} - \cos\theta\frac{dP}{dz} + \cos\theta\,(-\sin\theta)\,\frac{dP}{dz} + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - z^2}\right)P$$

В итоге получили

$$(1 - z^2)\frac{d^2P}{dz^2} - 2z\frac{dp}{dz} + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - z^2}\right)P = 0$$

А. Приложение

А.1. Вопросы по курсу

1) Уравнение малых поперечных колебаний струны. с. 14
2) Уравнение теплопроводности. с. 38
3) Дифференциальные уравнения с двумя независимыми переменными. с. 4
4) Оператор Лапласа в декартовых, полярных, цилиндрических и сферических координатах. с. 105
5) Определения линейных, квазилинейных, однородных и неоднородных уравнений. с. 106
6) Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. с. 4
7) Приведение уравнений с двумя независимыми переменными к каноническому виду. с. 6
8) Постановка задачи Коши для волнового уравнения. Метод Даламбера для бесконечной струны. с. 16
9) Начальные и граничные условия для полубесконечной струны. Метод Даламбера для полубесконечной струны. с. 24
10) Метод разделения переменных или метод Фурье. Задача о колебаниях струны с закрепленными концами. с. 26
11) Метод разделения переменных или метод Фурье. Задача для гиперболического неоднородного уравнения с начальными и однородными граничными условиями. Функция влияния. с. 30
12) Редукция общей краевой задачи для волнового уравнения. с. 17
13) Определение сопряженных дифференциальных операторов. с. 107
14) Колебания прямоугольной пластины с начальными и однородными граничными условиями. с. 85
15) Задача Штурма-Лиувилля. Ортогональность собственных функций. с. 12
16) Метод Фурье в задаче Коши для уравнения параболического типа. с. 40
17) Фундаментальное решение уравнения теплопроводности. с. 43
18) Редукция общей задачи теплопроводности для конечного стержня. с. **??**
19) Вывод формул Грина. с. 58
20) Фундаментальное решение уравнения Лапласа. с. 56
21) Принцип максимума уравнения Лапласа. с. 57
22) Единственность и устойчивость краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа. с. 55
23) Задача Неймана для уравнения Лапласа. с. 69
24) Первая краевая задача для круга. с. 65
25) Метод функции Грина для задачи Дирихле в трехмерном случае. с. 60
26) Метод функции Грина для задачи Дирихле в двумерном случае. с. 62
27) Уравнение Лежандра. Полиномы Лежандра. с. 93
28) Ортогональность функций Лежандра. с. 96
29) Присоединенные функции Лежандра. с. 98
30) Ортогональность присоединенных функций Лежандра. с. 99
31) Уравнение Бесселя. Функции Бесселя. с. 90
32) Ортогональность Функций Бесселя. с. 92
33) Гамма функция. Основные свойства Гамма функции. с. 101
34) Разделение переменных в трехмерном уравнении Лапласа в сферических координатах. с. 102
35) Вариационная формулировка краевых задач. с. 79
36) Вариационный метод Ритца. с. 83

A.2. Оператор Лапласа

Оператор Лапласа (лапласиан, оператор дельта) — дифференциальный оператор, действующий в линейном пространстве гладких функций и обозначаемый символом Δ.
Функции F он ставит в соответствие функцию

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right) F$$

Оператор Лапласа эквивалентен последовательному взятию операций градиента и дивергенции: $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$, таким образом значение оператора Лапласа в точке может быть истолковано как плотность источников (стоков) потенциального векторного поля в этой точке. В декартовой системе координат оператор Лапласа часто обозначается следующим образом

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2,$$

то есть в виде скалярного произведения оператора набла на себя.

Представления в различных системах координат

Двумерное

В декартовой $$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

В полярной $$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

Трёхмерное

В декартовой $$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

В цилиндрической $$\Delta f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

В сферической $$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

А.3. Линейные, квазилинейные, однородные и неоднородные уравнения

Уравненение называется *линейным*, если оно линейно как относительно старших производных u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, так и относительно функции u и её первых производных u_x, u_y

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0$$

Уравнение называется *квазилинейным*, если коэффициенты a, b, c зависят не только от x и y, а являются, подобно F, функциями x, y, z, u_x, u_y.

Уравнение называется *однородным*, если $f(x, y) = 0$.

А.4. Сопряжённые дифференциальные операторы

$$\mathscr{L}[u] = u_{xx} - u_{yy} + au_x + bu_x + cu \tag{1}$$

— линейный дифференциальный оператор, соответствующий линейному уравнению гиперболического типа, а $a(x, y), b(x, y), c(x, y)$ — дифференциируемые фукнции. Умножая $\mathscr{L}[u]$ на некоторую функцию v, запишем отдельные слагаемые в виде

$$\begin{aligned} vu_{xx} &= (vu_x)_x - (v_x u)_x + uv_{xx}, & vbu_y &= (bvu)_y - u(bv)_y, \\ vu_{yy} &= (vu_y)_y - (v_y u)_y + uv_{yy} & vcu &= ucv. \\ vau_x &= (avu)_x - u(av)_x, & & \end{aligned}$$

Суммируя отдельные слагаемые, получаем:

$$v\mathscr{L}[u] = u\mathscr{M}[v] + \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y}, \tag{2}$$

где

$$\mathscr{M}[v] = v_{xx} - v_{yy} - (av)_x - (bv)_y + cv$$

$$\begin{aligned} H &= vu_x - v_x u + avu = (vu)_x - (2u_x - av)u = -(vu)_x + (2u_x + au)v, \\ K &= -vu_y + v_y u + bvu = -(vu)_y + (2v_y + bv)u = (uv)_y - (2u_y - by)v. \end{aligned}$$

Два дифференциальных оператора называются *сопряжёнными*, если разность

$$v\mathscr{L}[u] - u\mathscr{M}[v]$$

является суммой частных производных по x и y от некоторых выражений H и K.
Рассматриваемые нами операторы $\mathscr{L}[u]$ и $\mathscr{M}[v]$, очевидно, являются *сопряжёнными*.
Если $\mathscr{L}[u] = \mathscr{M}[u]$, то оператор $\mathscr{L}[u]$ называется *самосопряжённым*.

Б. Примеры

Б.1. Задачи на метод Ритца

При изучении колебаний заделанного клина приходится исследовать функцию на экстремумы
Пример.

$$I = \int_0^1 (ax^3 y''^2 - bxy^2)\, dx$$

$$y(1) = 0$$
$$y'(1) = 0$$

Координат функция удовлетворяет начальным условиям

$$(x-1)^2$$
$$(x-1)^2 x$$
$$(x-1)^2 x^3$$
$$\dots$$
$$(x-1)^2 x^{n-1}$$

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x-1)^2 x^{k-1}$$

$$J_2 = (x-1)^2(\alpha_1 + \alpha_2 \lambda)$$

$$J_2 = J(y_2) = \int_0^1 \left[ax^3(6\alpha_2 x + 2\alpha_1 - 6\alpha_2)^2 - bx(x-1)^n(\alpha_1 + \alpha_2 x)\right]\, dx$$

Раскрыв скобки и проинтегрировав получим

$$a\left[(\alpha_1 - 2\alpha_2)^2 + \frac{24}{5}\alpha_2(\alpha_1 - 2\alpha_2) + 6\alpha_2\right] - b\left[\frac{\alpha_1^2}{30} + 2\frac{\alpha_1\alpha_2}{105} + \frac{\alpha_2^2}{280}\right]$$

Необходимое условие экстремума

$$\frac{\partial I_2}{\partial \alpha_1} = 0 \quad \frac{\partial I_2}{\partial \alpha_2} = 0$$

$$\left(a - \frac{b}{30}\right)\alpha_1 + \left(\frac{2}{5}a - \frac{b}{105}\right)\alpha_2 = 0$$

$$\left(\frac{2}{5}a - \frac{b}{105}\right)\alpha_1 + \left(\frac{2}{5}a - \frac{b}{280}\right)\alpha_2 = 0$$

Для получения колебаний необходиимо, чтобы был детерминант

$$\begin{vmatrix} a - \frac{b}{30} & \frac{2}{5}a - \frac{b}{105} \\ \frac{2}{5} - \frac{b}{105} & \frac{2}{5}a - \frac{b}{280} \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(a-\frac{b}{30}\right)\left(\frac{2}{5}a-\frac{b}{280}\right)$$

Здесь применяются вариационные методы.

1) Нужно подобрать функцию
2) Составить экстремум функции
3) Решить задачу

Пример. *Найти экстремум функционала*

$$I(y(x),z(x))=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(y'^2+z'^2+2yz)\,dx$$

$$y(0)=0$$
$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$
$$z(0)=0$$
$$z\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

Система уравнений Эйлера имеет вид

$$\begin{cases}F_y-\frac{d}{dx}F'_y=0\\ F_z-\frac{d}{dy}F'_z=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}z=y''\\ y-z''=0\end{cases}$$

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}C_3\cos x+C_4\sin x$$

Решение

$$\begin{cases}y=\sin x\\ z=-\sin x\end{cases}$$

Пример. *Исследовать на экстремум функционал*

$$I(y,z)=\int\limits_0^1(y'^2+z'^2)\,dx$$

Начальные условия

$$\begin{matrix}y(0)=0 & y(1)=1\\ z(0)=0 & z(1)=2\end{matrix}$$

$$y'' = 0$$
$$z'' = 0$$

$$C_1 = 1 \quad C_3 = 2$$

$$\begin{cases} y = x \\ z = 2x \end{cases}$$

Получили прямую
Исследуем на экстремумы

$$F_{y'y'} = 2 \quad F_{y'z'} = 0$$
$$F_{z'y'} = 0 \quad F_{z'z'} = 2$$

Усиленное условие Лежандра выполняется

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

Пример. *Исследовать на экстремум функционал*

$$I(y,z) = \int\limits_0^1 (y'^2 + z'^2 + 4z)\,dz$$

Начальные условия

$$y(0) = 0 \quad y(1) = 1$$
$$z(0) = 0 \quad z(1) = 0$$

$$\begin{cases} y = x \\ z = x^2 - x \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

Пример. *Исследовать на экстремум функционал*

$$I(y) = \int\limits_0^2 (e^{y'} + 3)\,dx$$

Сборная солянка из материалов книги А.Н. Тихонов, А.А. Самарский «Уравнения математической физики» и курса лекций, прочитанного студентам потоку «Прикладная математика и информатика» СГАУ им. ак. С.П. Королёва в 2011 году.