

# Rapport Projet Analyse Numérique

## Modélisation du Stockage du Dioxyde de Carbone dans les Forêts

Elsa Catteau - Perline Costantin - Charlotte Prouzet

Avril 2025 - MAM 3

### 1 Introduction

Le réchauffement climatique et les dérèglements du climat sont la conséquence d'une augmentation du rejet dans l'atmosphère de gaz à effet de serre sous l'impact des activités humaines. Depuis 1750, la concentration en dioxyde de carbone augmente dans l'atmosphère, passant de 280 ppmv avant l'ère industrielle à 381 ppmv en 2006, soit une augmentation de 36%. Depuis le milieu des années 1960, cette augmentation s'est accélérée et continue depuis de s'intensifier (cf Fig.1).

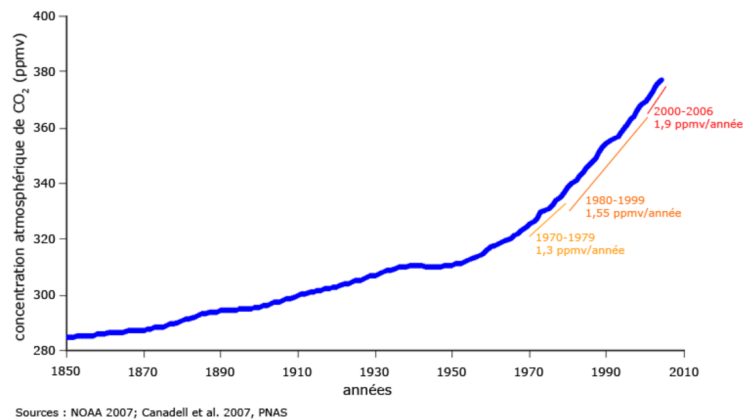


FIGURE 1 – Évolution de la concentration atmosphérique en dioxyde de carbone entre 1850 et 2006.

Trois facteurs principaux expliquent cette accélération :

- une augmentation des émissions de carbone
- une inversion de l'évolution du rapport "émission de carbone/croissance économique",
- une réduction de l'efficacité des puits naturels de carbone.

Or, la séquestration du carbone dans les puits naturels est un processus crucial pour réguler la concentration de dioxyde de CO<sub>2</sub> dans l'atmosphère ainsi et limiter les effets du changement climatique.

Les forêts jouent un rôle essentiel dans le cycle du carbone en absorbant le CO<sub>2</sub> atmosphérique lors de la photosynthèse. Ce CO<sub>2</sub> est ensuite stocké dans les arbres ainsi que dans les sols.

Il est donc essentiel de comprendre la manière dont se font ces échanges pour évaluer leur contribution dans l'atténuation du réchauffement climatique.

### 2 Objectif

Au cours de ce projet, l'objectif est de modéliser les échanges de carbone dans les écosystèmes forestiers à l'aide d'un système d'équations différentielles (donné) et de résoudre ce modèle. Nous considérons les échanges entre 3 réservoirs principaux : l'atmosphère, les arbres et les sols.

Dans un premier temps, nous allons nous servir des méthodes numériques vues en cours pour réaliser un programme python afin de résoudre ce système. Nous devons implémenter au moins une méthode implicite et nous avons décidé d'utiliser la méthode d'Euler implicite. Nous avons également implémenté deux méthodes explicites, à savoir Euler explicite et Runge-Kutta d'ordre 2 afin de comparer les résultats obtenus par les trois

méthodes. Ensuite, nous ferons varier les paramètres  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, K)$  afin d'analyser leur impact sur la quantité de carbone contenue dans les arbres, les sols et l'atmosphère. Enfin, nous proposerons une amélioration du modèle en ajoutant d'autres facteurs qui entrent en jeu dans la séquestration du carbone.

### 3 Contextualisation

Nous devons implémenter en Python la résolution du système d'équations différentielles :

$$\frac{dC_A}{dt} = -S(C_T) + \beta C_T + \delta C_S, \quad (1)$$

$$\frac{dC_T}{dt} = S(C_T) - \beta C_T - \delta C_T - \gamma C_T, \quad (2)$$

$$\frac{dC_S}{dt} = \gamma C_T - \delta C_S + \delta C_T. \quad (3)$$

où :

- (1) modélise la concentration en CO<sub>2</sub> dans l'atmosphère au cours du temps
- (2) modélise la concentration en CO<sub>2</sub> dans les arbres au cours du temps
- (3) modélise la concentration en CO<sub>2</sub> dans les sols au cours du temps

avec :

- $S(C_T) = \alpha C_T \left(1 - \frac{C_T}{K}\right)$  représente le taux de séquestration du carbone dans les arbres,
- $\beta C_T$  décrit l'effet de respiration des arbres vers l'atmosphère,
- $\delta C_T$  décrit l'effet de respiration des arbres vers les sols,
- $\delta C_S$  est l'effet de respiration des sols vers l'atmosphère,
- $L(C_T) = \gamma C_T$  dépeint la litière des arbres (feuilles mortes et débris végétaux en décomposition) vers les sols.

### 4 Choix des valeurs initiales

Comment avons-nous choisi les valeurs initiales ?

Pour déterminer les conditions initiales  $C_A(0)$ ,  $C_T(0)$  et  $C_S(0)$ , nous avons recherché des données récentes en croisant plusieurs sources, notre objectif étant d'estimer au mieux les quantités de carbone présentes actuellement dans les 3 réservoirs.

#### 4.1 Carbone dans l'atmosphère

La figure 1 montre l'évolution de la concentration de dioxyde de carbone mesurée en parties par million (ppm). La valeur actuelle (en 2023) est de 420 ppm. Sachant que 1 ppm correspond à 2,13 GtC (gigatonnes de carbone), la conversion donne :

$$420 \times 2,13 = 895 \text{ GtC}.$$

Par ailleurs, d'après d'autres sources, la quantité de carbone dans l'atmosphère est estimée autour de 750 GtC. En faisant une moyenne de ces différentes estimations, nous avons choisi une valeur initiale de 800 GtC pour l'atmosphère.

#### 4.2 Carbone dans les sols

Les études les plus récentes estiment à 1 500 GtC les réserves mondiales de carbone contenu dans le premier mètre des sols (cf Fig.2). Ces chiffres font des sols le réservoir de carbone le plus important de la planète (après l'hydrosphère, c'est à dire les océans, mers, lacs, rivières). Cela représente 2 fois la quantité de carbone contenue dans l'atmosphère et 3 fois celle contenue dans la végétation.

#### 4.3 Carbone dans les arbres

Selon le Woodwell Climate Research Center (avril 2024), les forêts absorbent environ 16 milliards de tonnes de dioxyde de carbone par an et stockent actuellement 861 GtC dans leur biomasse. Pour notre modèle, nous nous intéressons seulement à la partie correspondant aux arbres vivants, nous avons donc arrondi cette valeur à 500 GtC, valeur qui correspond également à 1/3 fois la quantité de carbone contenue dans les sols.

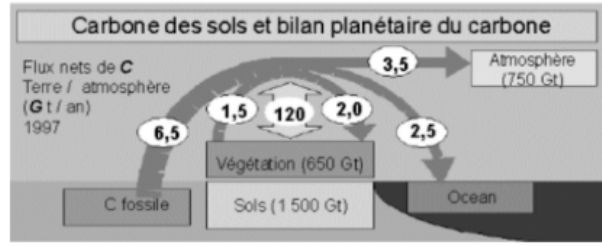


FIGURE 2 – Cycle du carbone

## 4.4 Résumé des conditions initiales

Nous avons donc défini les conditions initiales suivantes (au temps  $t = 0$ ) :

Variable	Réservoir	Valeur (GtC)
$C_A(0)$	Atmosphère	800
$C_T(0)$	Arbres	500
$C_S(0)$	Sols	1500

## 5 Méthode Euler Implicite

### 5.1 Définition

La méthode d'Euler est une méthode numérique élémentaire de résolution d'équations différentielles du premier ordre, de la forme :

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = y_0$$

La méthode d'Euler implicite consiste à chercher la valeur approchée à l'instant  $t_{n+1}$  avec la relation suivante :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$$

En effet, cette méthode consiste à prendre la dérivée à la fin de l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$  au lieu de la prendre au début. La valeur  $y_{n+1}$  est alors obtenue par résolution d'une équation.

Nous avons donc :

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

On a  $y_n \rightarrow y(t_n)$ , donc :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt$$

On utilise ici les rectangles "à droite" et on obtient :

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = hf(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$$

ou encore :

$$y_{n+1} - y_n = hf(t_{n+1}, y_{n+1})$$

Finalement :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$$

Afin de résoudre cette équation (qui n'est pas à confondre avec une affectation), nous allons poser une fonction auxiliaire que l'on notera  $G$  et telle que :

$$G(x) = x - y_n - hf(t_{n+1}, x)$$

Ainsi, résoudre  $G(x)=0$  reviendra à trouver notre solution  $y_{n+1}$ . Afin de résoudre cette équation, plusieurs choix de méthodes s'offrent à nous : la méthode de dichotomie, la méthode du point fixe, la méthode de Newton ou encore directement les fonctions de résolution prédéfinies dans les bibliothèques Python.

Dans ce projet, nous avons décidé de traiter uniquement la méthode de Newton, dont le nombre d'itérations afin de résoudre notre équation était bien inférieur à ceux des méthodes par dichotomie et point fixe.

## 5.2 Résolution de notre équation par la méthode de Newton - partie théorique

### 1) $C_T$

Dans un premier temps, nous allons uniquement considérer  $C_T$  car c'est la seule équation qui ne contient qu'une seule inconnue : elle-même. Nous avons donc l'équation suivante :

$$\frac{dC_T}{dt} = S(C_T) - \beta C_T - \delta C_T - \gamma C_T = \alpha C_T \left(1 - \frac{C_T}{K}\right) - \beta C_T - \delta C_T - \gamma C_T$$

Cela revient donc à résoudre :

$$C_{T_{n+1}} = C_{T_n} + hf(C_{T_{n+1}}) \Leftrightarrow C_{T_{n+1}} - C_{T_n} - hf(C_{T_{n+1}}) = 0$$

On pose donc une fonction auxiliaire  $G$  telle que :

$$G(C_{T_{n+1}}) = C_{T_{n+1}} - C_{T_n} - h(S(C_{T_{n+1}}) - \beta C_{T_{n+1}} - \delta C_{T_{n+1}} - \gamma C_{T_{n+1}})$$

En résolvant  $G(C_{T_{n+1}}) = 0$ , on trouve donc  $C_{T_{n+1}}$ .

**Remarque :** Dans notre programme **Python**, nous noterons  $C_{T_{n+1}}$  sous la forme suivante : **CT.next**.

### 2) $C_S$

Ensuite, une fois  $C_{T_{n+1}}$  connue, nous allons déterminer  $C_{S_{n+1}}$  puisque l'équation ne dépend que de  $C_T$  et de  $C_S$  :

$$\frac{\partial C_S}{\partial t} = \gamma C_T - \delta C_S + \delta C_T$$

En se basant sur le schéma d'Euler implicite, nous avons ici :

$$C_{S_{n+1}} = C_{S_n} + hf(C_{S_{n+1}}) \quad \text{avec} \quad f(C_{S_{n+1}}) = \gamma C_{T_{n+1}} - \delta C_{S_{n+1}} + \delta C_{T_{n+1}}$$

Afin de résoudre cette équation, nous pouvons :

- Réutiliser la méthode de Newton, en se basant sur le schéma d'Euler implicite : on pose de nouveau une fonction auxiliaire  $G_2$  telle que :

$$G_2(C_{S_{n+1}}) = 0 \Leftrightarrow G_2(C_{S_{n+1}}) = C_{S_{n+1}} - C_{S_n} - h(\gamma C_{T_{n+1}} - \delta C_{S_{n+1}} + \delta C_{T_{n+1}})$$

En effet, en résolvant  $G_2(C_{S_{n+1}}) = 0$ , on trouvera directement  $C_{S_{n+1}}$ .

- Résoudre l'équation "à la main". On peut effectivement résoudre  $C_{S_{n+1}}$  facilement car  $C_{T_{n+1}}$  et  $C_{S_n}$  (élément précédant  $C_{S_{n+1}}$ ) sont connus. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} C_{S_{n+1}} &= C_{S_n} + h(\gamma C_{T_{n+1}} - \delta C_{S_{n+1}} + \delta C_{T_{n+1}}) \\ \Leftrightarrow C_{S_{n+1}} + h(\delta C_{S_{n+1}}) &= C_{S_n} + h(\gamma + \delta)C_{T_{n+1}} \\ \Leftrightarrow C_{S_{n+1}}(1 + h\delta) &= C_{S_n} + h(\gamma + \delta)C_{T_{n+1}} \\ \Leftrightarrow C_{S_{n+1}} &= \frac{C_{S_n} + h(\gamma + \delta)C_{T_{n+1}}}{1 + h\delta} \end{aligned}$$

**Remarque :** Dans notre programme **Python**, nous noterons  $C_{S_{n+1}}$  sous la forme suivante : **CS.next**.

### 3) $C_A$

Enfin, nous déterminons  $C_{A_{n+1}}$  en se basant sur  $C_{S_{n+1}}$  et sur  $C_{T_{n+1}}$  :

$$\frac{dC_A}{dt} = -S(C_T) + \beta C_T + \delta C_S$$

$$C_{A_{n+1}} = C_{A_n} + hf(C_{A_{n+1}}) \quad \text{avec} \quad f(C_{A_{n+1}}) = -S(C_{T_{n+1}}) + \beta C_{T_{n+1}} + \delta C_{S_{n+1}}$$

Dans notre programme **Python**, il ne nous reste donc plus qu'à remplacer  $C_{T_{n+1}}$  par **CT.next** et  $C_{S_{n+1}}$  par **CS.next** pour trouver  $C_{A_{n+1}}$ , que l'on nommera **CA.next**.

### 5.3 Résolution de notre équation par la méthode de Newton - partie pratique

Dans un premier temps, nous définissons donc notre fonction auxiliaire  $G(\text{CT\_next}, \text{CT})$ , puis sa dérivée notée  $dG(\text{CT\_next})$ .

Ensuite, nous définissons la méthode de newton qui prend en argument  $\text{CT}$ , le seuil epsilon “eps”, et le nombre d’itération maximum “Nmax”. Nous avons repris la méthode de Newton utilisée lors du TP “résolution de problèmes non linéaires”.

Enfin, nous définissons la méthode **resolution** qui va nous permettre d’obtenir les vecteurs  $\text{CT}$ ,  $\text{CS}$ , et  $\text{CA}$ . Pour commencer, nous déterminons  $\text{CT\_next}$  qui correspond à  $C_{T_{n+1}}$ , en appelant la méthode de Newton définie précédemment. On résout ensuite  $\text{CS\_next}$  “à la main” à l’aide de la formule théorique déterminée. Enfin, on résout  $\text{CA\_next}$  en s’appuyant sur les résolutions de  $\text{CT\_next}$  et  $\text{CS\_next}$  précédentes.

Il ne nous reste ensuite plus qu’à tracer nos trois vecteurs  $C_A$ ,  $C_T$  et  $C_S$  en fonction du temps  $t$ .

## 6 Méthode Euler Explicite

La méthode d’Euler explicite consiste à chercher la valeur approchée à l’instant  $t_{n+1}$  avec la relation suivante :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

Cette méthode consiste donc à prendre la dérivée *au début* de l’intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$ , contrairement à la méthode implicite où on la prend à la fin. La valeur  $y_{n+1}$  est obtenue directement par une formule explicite, sans avoir besoin de résoudre une équation.

Nous avons :

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt$$

En utilisant ici la méthode des rectangles à *gauche*, on obtient l’approximation suivante :

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) \approx hf(t_n, y(t_n))$$

ou encore :

$$y_{n+1} - y_n = hf(t_n, y_n)$$

Finalement :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

Pour le code, nous nous sommes inspirées de la méthode utilisée lors du TP “Etude de schémas numériques pour la résolution d’EDOs”

## 7 Méthode Runge-Kutta

Soit une équation différentielle du premier ordre :

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = y_0$$

En intégrant sur l’intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$ , on a :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt$$

D’après la méthode des trapèzes

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \simeq \frac{h}{2} [f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))]$$

Ici, l'intégrale dépend des valeurs de  $y_n$  et  $y_{n+1}$ , ce qui, si on en restait là, donnerait lieu à une méthode implicite. Pour éviter ces complications, on utilise la méthode d'Euler explicite afin d'estimer la valeur  $y_{n+1}$  qui intervient dans  $f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$ . On obtient le schéma itératif suivant :

$$y_{n+1} = y_n + h \left( \frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2} \right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n + h, y_n + hk_1) \\ y_0 = y(0) \end{cases}$$

Ceci correspond à la méthode de Runge Kutta explicite d'ordre 2.

## 8 Vérification

### 8.1 Somme

Pour vérifier la cohérence de nos méthodes numériques, nous avons calculé à chaque instant la somme des quantités de carbone dans l'atmosphère, les arbres et les sols. Cette somme représente la quantité totale de carbone dans le système. Dans un système fermé, la loi de conservation de la masse stipule que la matière ne peut être ni créée ni détruite. Ainsi, cette somme doit rester constante au cours du temps. Si cette conservation est respectée numériquement, cela confirme que notre modèle est cohérent et que les méthodes utilisées préservent bien la structure physique du système.

### 8.2 Fonction déjà implémentée dans Python

Toujours dans le but de vérifier la cohérence de nos méthodes numériques, nous avons programmé un script Python utilisant la fonction `solve_ivp` de la bibliothèque `SciPy`. Cette fonction permet de résoudre des équations différentielles ordinaires à l'aide de méthodes adaptées, sans avoir à les implémenter manuellement. Nous l'avons utilisée comme solution de référence afin de comparer les résultats obtenus et vérifier que nos propres implémentations donnaient les mêmes tendances.

## 9 Résultats obtenus avec les trois méthodes

En faisant tourner le code avec les trois méthodes et en faisant varier les paramètres (de façon aléatoire), nous observons que l'allure des courbes est la même pour chaque méthode. Exemple :

$\alpha = 0.08, \beta = 0.02, \gamma = 0.01, \delta = 0.005, K = 2000, h = 0.5$

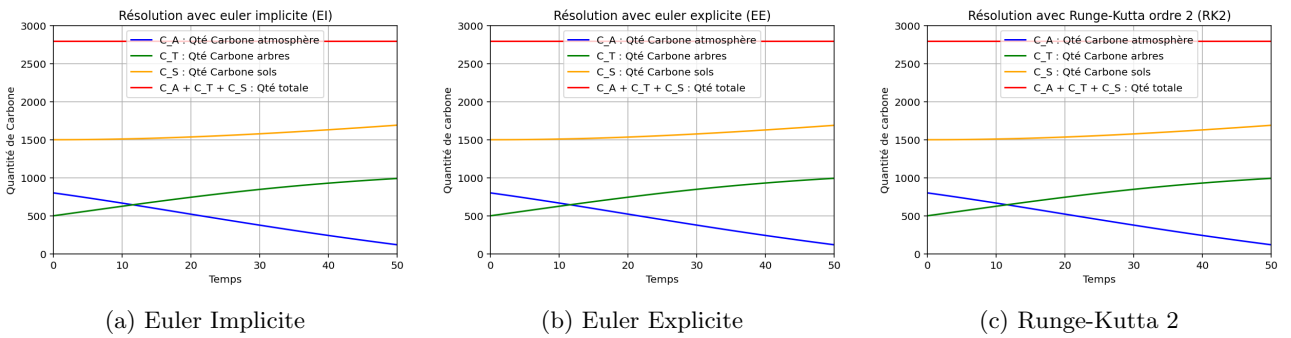


FIGURE 3 – Comparaison des méthodes numériques utilisées pour la résolution du système.

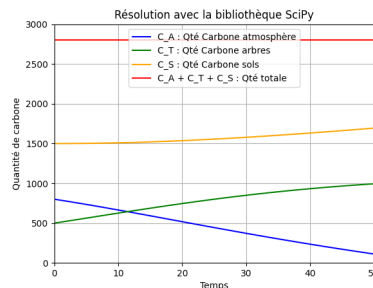


FIGURE 4 – Résultat théorique (avec la bibliothèque SciPy)

On remarque que les 3 méthodes semblent être correctes : en effet, la somme des quantités de carbone dans les trois réservoirs est constante au cours du temps, on a donc bien conservation de la quantité totale de carbone dans le système (fermé).

De plus, en vérifiant avec la fonction Python (point 8.2), on retrouve bien la même allure de graphe avec les trois méthodes.

Comparaison des temps :

Méthode	Temps d'exécution
<i>Euler – Implicite</i>	0.0010006427764892578
<i>Euler – Explicite</i>	0.001004934310913086
<i>Runge – Kutta2</i>	0.0009992122650146484

Les temps d'exécution sont du même ordre de grandeur pour les trois méthodes. Aucune des méthodes n'est significativement plus lente ou plus rapide que les autres dans le cadre de ce projet.

Comparaison de la stabilité : Si on augmente le pas de temps  $h$ , les méthodes d'Euler implicite et explicite sont stables, les valeurs et l'allure des courbes restent les mêmes. En revanche, pour Runge-Kutta, un pas  $h$  trop grand donne des résultats différents. Par exemple, pour  $T=50$  et  $N=5$  ( $h=10$ ), on a le résultat suivant :

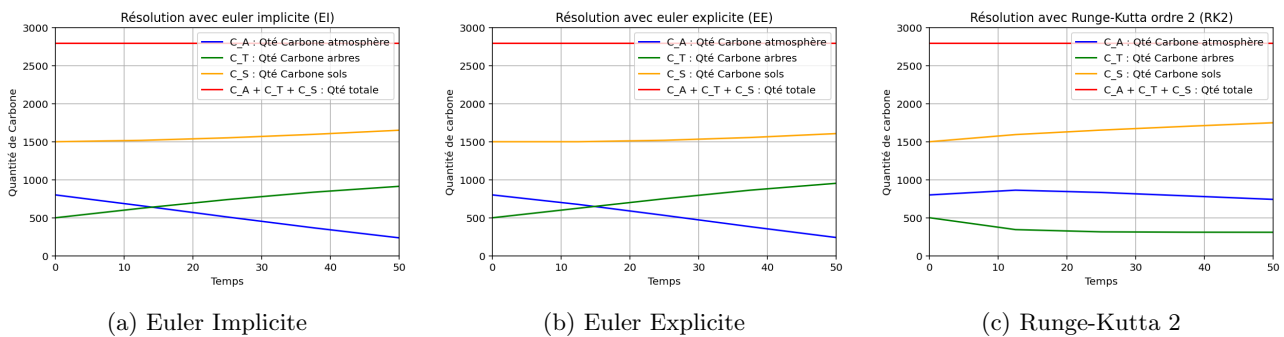


FIGURE 5 – Comparaison de la stabilité des méthodes numériques en faisant varier  $h$ .

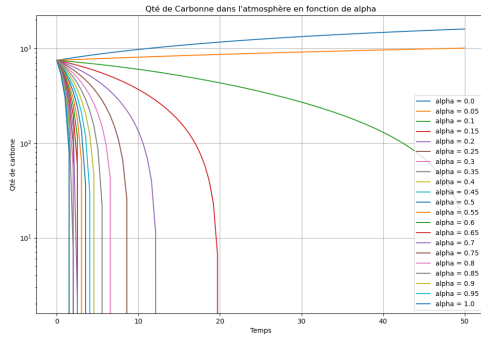
## 10 Analyse des graphes - Variation des paramètres

Intéressons-nous maintenant à nos paramètres  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , et  $K$ .

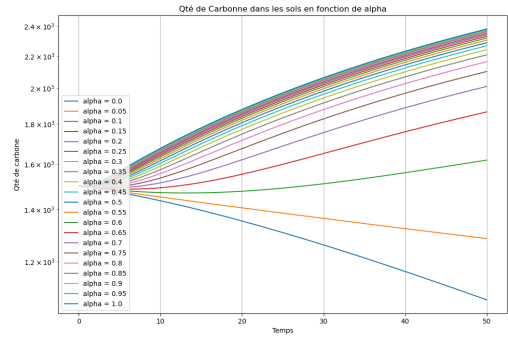
La variation des paramètres a-t-elle un impact sur l'évolution de la quantité de carbone dans l'atmosphère, les sols et les arbres ? Et si oui, quel est-il ?

Afin de visualiser ces résultats, nous avons complété notre code en ajoutant la fonction "plot\_parametre". Cette fonction nous a permis de tracer les graphes de la quantité de carbone, à la fois dans les arbres, les sols et l'atmosphère en fonction du temps, mais aussi en fonction de la valeur prise par chacun de nos paramètres.

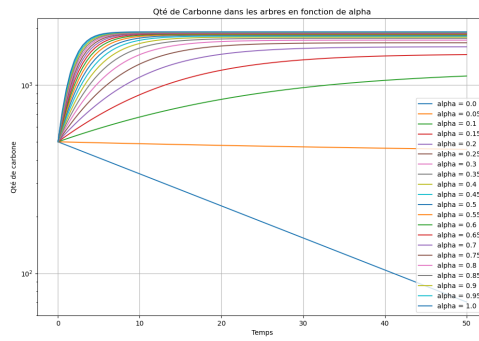
## 1) Variation de $\alpha$



(a)  $C_A$  en fonction de  $\alpha$



(b)  $C_S$  en fonction de  $\alpha$



(c)  $C_T$  en fonction de  $\alpha$

### Interprétation graphique :

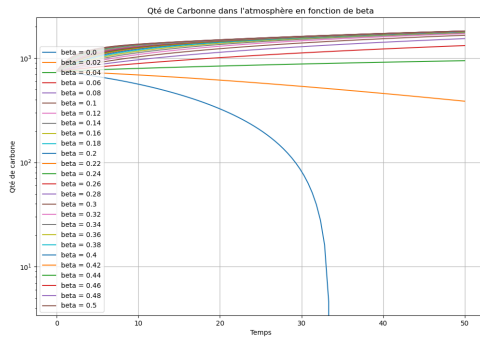
Lorsque  $\alpha$  est bas (environ 0,05), la quantité de carbone dans l'atmosphère augmente légèrement dans le temps, tandis que la quantité de carbone dans les arbres et dans les sols diminue. À contrario, plus notre paramètre  $\alpha$  se rapproche de 1 (soit de 100 %), plus la quantité de carbone dans l'atmosphère approche 0 %. Ainsi, pour tout  $\alpha > 0,75$ , nous observons que la quantité de carbone stockée dans l'atmosphère devient nulle au bout de 10 ans. En parallèle, on observe que la quantité de carbone contenue dans les sols et dans les arbres augmente lorsque  $\alpha > 0,1$ . Pour les arbres, elle atteint son maximum au bout de 10 ans, puis reste constante (environ 2000 GtC, ce qui correspond à notre paramètre  $K$ ). Pour les sols, la quantité de carbone stockée augmente de manière continue au fil des années.

### Interprétation du paramètre :

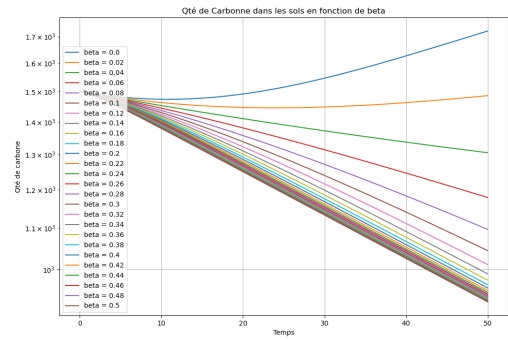
Ayant  $S(C_t) = \alpha C_t \left(1 - \frac{C_t}{K}\right)$ , qui dépend de  $\alpha$  et qui représente le taux de séquestration du carbone dans les arbres, nous pouvons déduire que le paramètre  $\alpha$  contrôle ce taux de séquestration. Plus  $\alpha$  est élevé, plus la capture du  $\text{CO}_2$  atmosphérique est rapide. Cela induit une diminution de la quantité de carbone dans l'atmosphère et donc une augmentation, plus rapide, de la quantité de carbone stockée dans les arbres ( $C_T$ ), et ce, jusqu'à ce que le système approche sa capacité de saturation donnée via le paramètre  $K$ .



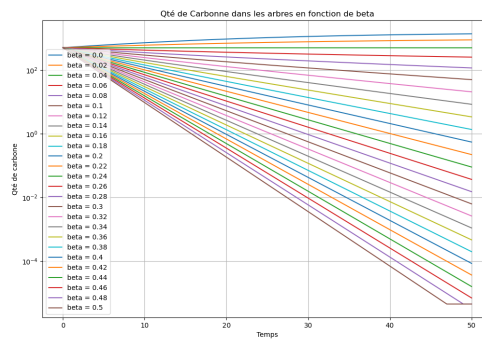
## 2) Variation de $\beta$



(a)  $C_A$  en fonction de  $\beta$



(b)  $C_S$  en fonction de  $\beta$



(c)  $C_T$  en fonction de  $\beta$

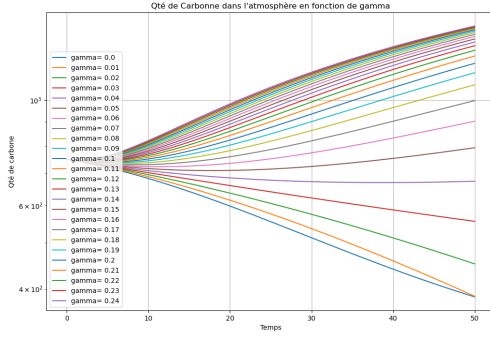
### Interprétation graphique :

Concernant  $\beta$ , on observe que la quantité de carbone dans l'atmosphère atteint sa valeur maximale, soit environ 2000 GT C, à partir de  $\beta = 0,08$ . L'augmentation du paramètre  $\beta$  induit donc une augmentation de la quantité de carbone stockée dans l'atmosphère, et donc une diminution de la quantité de carbone contenue dans les sols et dans les arbres.

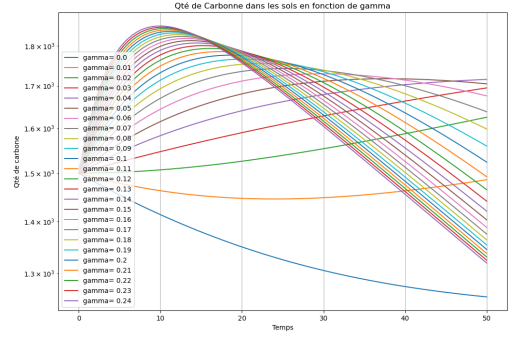
### Interprétation du paramètre :

Comme  $\beta C_T$  décrit "l'effet de respiration des arbres vers l'atmosphère", on peut en déduire que le paramètre  $\beta$  modélise la libération de  $\text{CO}_2$  par les arbres vers l'atmosphère. En effet, plus le paramètre  $\beta$  est élevé, et moins le carbone reste stocké dans les arbres, puisqu'il est libéré dans l'atmosphère.

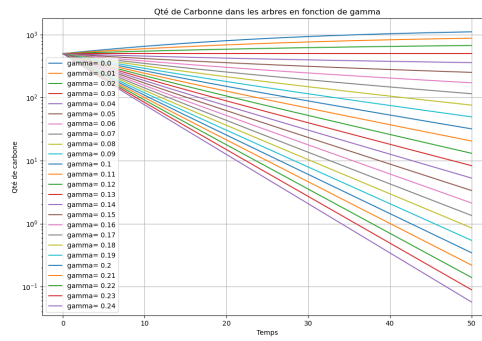
### 3) Variation de $\gamma$



(a)  $C_A$  en fonction de  $\gamma$



(b)  $C_S$  en fonction de  $\gamma$



(c)  $C_T$  en fonction de  $\gamma$

#### Interprétation graphique :

Pour tout  $\gamma < 0,04$ , la quantité de carbone contenue dans l'atmosphère diminue au cours des 50 années à venir. Au-delà de 0,04, le paramètre  $\gamma$  engendre une augmentation de la quantité de carbone stockée dans l'atmosphère.

$\gamma \leq 0,01$  implique une diminution de la quantité de carbone contenue dans les sols au cours des 50 prochaines années.

$0,01 < \gamma \leq 0,04$  induit une augmentation de la quantité de carbone contenue dans les sols au cours de cette même période.

Enfin, pour tout  $\gamma > 0,04$ , on observe que la quantité de carbone contenue dans les sols atteint son pic au bout d'environ 40 ans (10 ans pour  $\gamma > 0,24$ , et 40 ans pour  $\gamma = 0,05$  par exemple), avant de décroître ensuite.

Concernant la quantité de carbone contenue dans les arbres, on observe que celle-ci augmente dans le temps pour tout  $\gamma < 0,04$ , tandis qu'elle diminue pour tout autre  $\gamma$ . Par ailleurs, pour tout  $\gamma > 0,24$ , on observe que la quantité de carbone stockée dans les arbres avoisine les 0 GtC au bout de 50 ans.

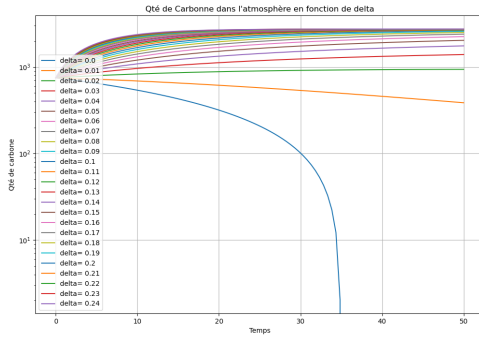
#### Interprétation du paramètre :

$L(C_T) = \gamma C_T$  dépeint la litière des arbres (feuilles mortes et débris végétaux en décomposition) vers les sols. On en déduit ainsi que le paramètre  $\gamma$  correspond au taux de transfert de la litière vers le sol.

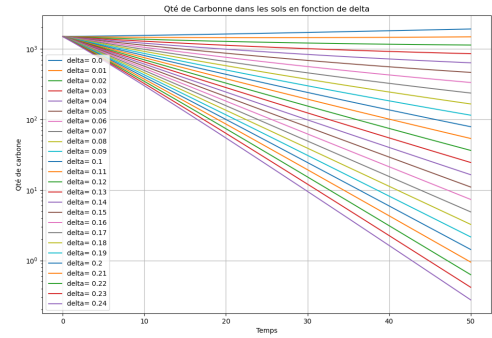
#### Remarque :

Sur nos graphes, il est étonnant d'observer que plus  $\gamma$  augmente, plus le sol reçoit de carbone, et ce, uniquement dans le cadre des 10 prochaines années. En effet, lorsque l'on regarde nos graphes à partir du temps  $t = 20$  (soit dans 20 ans), on observe que le sol relâche le carbone précédemment stocké, augmentant ainsi la quantité de  $\text{CO}_2$  stockée dans l'atmosphère.

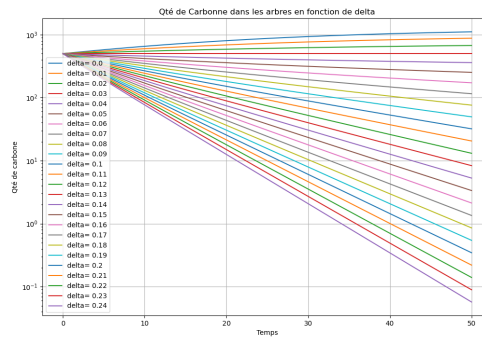
#### 4) Variation de $\delta$



(a)  $C_A$  en fonction de  $\delta$



(b)  $C_S$  en fonction de  $\delta$



(c)  $C_T$  en fonction de  $\delta$

##### Interprétation graphique :

Lorsque l'on fait varier  $\delta$ , on observe que pour tout  $\delta < 0,02$ , la quantité de carbone contenue dans l'atmosphère diminue (elle devient nulle au bout de 35 ans si  $\delta = 0$ ), tandis que la quantité de carbone contenue dans les sols et dans les arbres augmente pour ces valeurs-là de  $\delta$ .

À contrario, pour tout  $\delta > 0,04$ , la quantité de carbone contenue dans l'atmosphère augmente, tandis que celle stockée dans les sols et dans les arbres diminue. Pour des valeurs de  $\delta$  supérieures à 0,20, on observe d'ailleurs que la quantité de carbone contenue dans les arbres et dans les sols tendra vers 0 dans 50 ans.

Remarque : pour  $0,02 \leq \delta \leq 0,04$ , on observe que les quantités de carbone stockées dans l'atmosphère, dans les sols et dans les arbres restent à peu près inchangées au fil du temps.

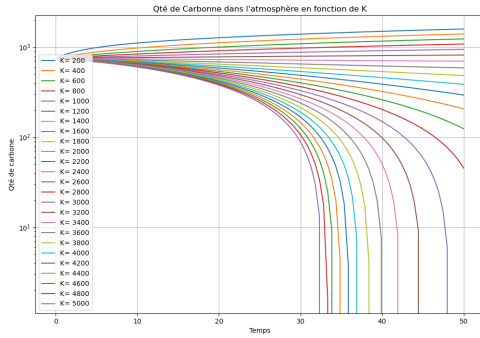
##### Interprétation du paramètre :

On sait que :  $\delta C_T$  décrit l'effet de respiration des arbres vers les sols, tandis que  $\delta C_S$  est l'effet de respiration des sols vers l'atmosphère.

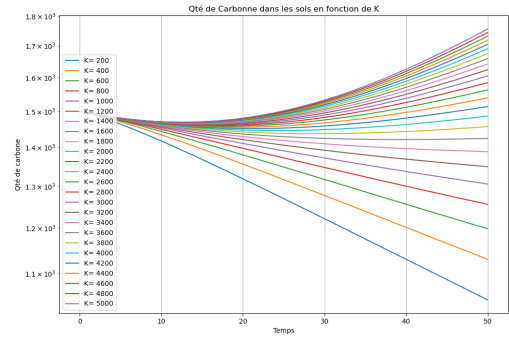
Au vu de nos observations graphiques, nous pouvons donc énoncer qu'un  $\delta$  élevé augmente les pertes de carbone dans les sols et dans les arbres, ce qui a un impact négatif sur la gestion du stockage du  $\text{CO}_2$ .

Au contraire, un  $\delta$  plus faible permet une accumulation de la matière organique stable dans les sols, et donc une baisse de la quantité de carbone dans l'atmosphère.

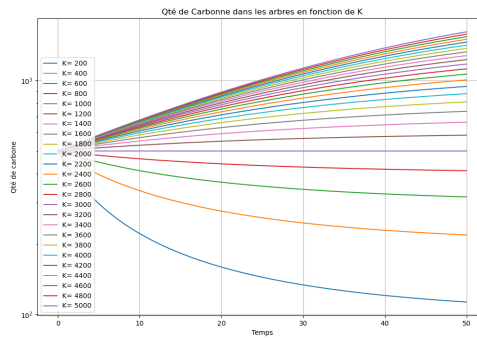
## 5) Variation de $K$



(a)  $C_A$  en fonction de  $K$



(b)  $C_S$  en fonction de  $K$



(c)  $C_T$  en fonction de  $K$

### Interprétation graphique :

En choisissant un paramètre  $K$  important (supérieur à 3000), nous observons que la quantité de carbone stockée dans l'atmosphère diminue dans le temps, jusqu'à devenir nulle avant 50 ans. Cela implique une augmentation de la quantité de carbone contenue dans les sols et dans les arbres. A l'inverse, choisir  $K$  proche de 200 induit l'augmentation de la quantité de carbone contenue dans l'atmosphère, et donc la diminution/stagnation de celle contenue dans les sols et dans les arbres.

### Interprétation du paramètre :

Conformément à notre interprétation du paramètre  $\alpha$ , le paramètre  $K$  joue un rôle dans le taux de séquestration du carbone dans les arbres :  $K$  permet de fixer la limite supérieure de  $C_T$ . En effet, lorsque la concentration de carbone dans les arbres tend vers  $K$ , on observe que la séquestration ralentit. Ainsi, plus l'on choisit un  $K$  grand, et plus les arbres peuvent absorber du  $\text{CO}_2$  (et ce plus longtemps). A contrario, plus l'on choisit un  $K$  petit, et plus la concentration de carbone dans les arbres est freinée : on observe alors une concentration stable, voir diminuée pour de très faibles valeurs de  $K$ .

## 11 Améliorations possibles

Le modèle que nous avons étudié dans ce projet reprend des travaux scientifiques mais reste simplifié afin que nous puissions le résoudre numériquement. Il permet de bien comprendre les échanges de carbone entre les trois compartiments, sauf que, dans la réalité, le cycle du carbone est bien plus complexe.

Nous proposons ici différentes idées afin d'améliorer ce modèle.

### 11.1 Variation des paramètres dans le temps

Le principal problème du modèle est que les trois équations dépendent des paramètres  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  qui sont considérés comme constants. Or ceci est faux : en effet, ces paramètres varient dans le temps et dépendent de nombreux facteurs.

### 11.1.1 La température

La température a un impact direct sur certains processus naturels qui entrent en jeu dans le cycle du carbone comme la photosynthèse ou la décomposition de la litière (feuilles mortes et débris végétaux) vers les sols. Lorsque la température augmente, le taux de photosynthèse s'accroît ce qui améliore la séquestration du carbone donc le paramètre  $\alpha$  augmente. Cependant, une température excessive peut réduire la capacité de séquestration des arbres, diminuant alors  $\alpha$ .

De plus, la respiration des arbres et des sols (modélisés par  $\beta$  et  $\gamma$ ) dépend aussi de la température : plus elle est élevée, plus les émissions de carbone des arbres ou des sols vers l'atmosphère est importante.

### 11.1.2 Les saisons

Les saisons jouent aussi un rôle dans le fonctionnement des écosystèmes forestiers. Elles influencent bien-sûr la température mais également la luminosité. En effet, au printemps et en été, la luminosité est plus forte ce qui favorise la photosynthèse,  $\alpha$  est donc plus élevé durant ces périodes-là. D'autre part, en hiver et en automne, la croissance des arbres est ralentie ce qui se traduit par une diminution de  $\alpha$ . La litière continue de se décomposer ce qui entraîne une augmentation des émissions de CO<sub>2</sub> vers l'atmosphère, et donc une hausse de  $\beta$  et  $\gamma$ .

### 11.1.3 L'humidité

L'humidité du sol a un impact sur les sols ainsi que sur les arbres. Si le sol est trop sec, la photosynthèse se fera plus difficilement et donc la croissance des arbres sera ralentie, réduisant  $\alpha$ . A l'inverse, une humidité importante va accélérer la décomposition de la litière vers le sol et donc avoir un impact sur  $\beta$  et  $\gamma$ .

### 11.1.4 Les catastrophes naturelles

Les incendies, les sécheresses, les épisodes de fortes pluies ou les tempêtes ont des effets soudains sur les forêts et perturbent fortement le cycle du carbone. Ces événements peuvent par exemple détruire certaines parties des écosystèmes, notamment la biomasse végétale ce qui réduit brutalement le paramètre  $K$  ainsi que  $\alpha$ . Lors d'incendies, la combustion augmente les émissions de CO<sub>2</sub> et donc  $\beta$  et  $\delta$  prennent de très grandes valeurs.

### 11.1.5 L'effet de l'activité humaine

L'homme a aussi un impact dans le temps sur les valeurs des paramètres à travers diverses pratiques comme la déforestation, l'urbanisation ou l'utilisation des sols.

→ Une amélioration pertinente du modèle consisterait donc à rendre les paramètres dépendants du temps et de différentes variables environnementales, pour mieux refléter la complexité du cycle réel du carbone.

## 11.2 Système non fermé

Un autre point à améliorer serait le fait que dans le modèle, on suppose que le CO<sub>2</sub> ne provient que d'échanges naturels et que le système est fermé donc qu'il n'y a pas de sources extérieures. Or, les activités humaines sont responsables d'une grande partie des émissions de CO<sub>2</sub> atmosphérique. Cette hypothèse est donc irréaliste, il faudrait prendre cela en compte en ajoutant un terme représentant les apports de CO<sub>2</sub> par l'activité humaine.

## 11.3 Ajout de compartiments

Par ailleurs, lors de nos recherches sur les conditions initiales, nous avons constaté que certains modèles prennent en compte davantage de compartiments : dans notre modèle, les compartiments sont la biomasse vivante (les arbres), l'atmosphère et les sols. Pour rendre le modèle plus réaliste, on pourrait y ajouter d'autres compartiments comme la biomasse morte.

## 11.4 Diversité des forêts

Enfin, le cycle du carbone n'est pas le même dans toutes les forêts de la planète :

- L'âge des forêts a un impact sur la séquestration du carbone ( $\alpha$ ) : plus une forêt est jeune, plus la croissance est alors plus rapide donc plus  $\alpha$  est grand.
- Les différentes espèces présentes dans la forêt n'absorbent pas la même quantité de carbone et ont des croissances différentes. Il y a donc des différences entre le cycle du carbone dans une forêt tropicale ou dans une forêt tempérée.

## 12 Conclusion

Pour conclure, travailler sur ce projet nous a intéressées et nous a permis d'améliorer nos compétences sur plusieurs points. En effet, il nous a donné l'occasion de mettre en œuvre nos connaissances mathématiques à travers la modélisation d'un système, tout en renforçant nos compétences programmation grâce à l'implémentation des méthodes de résolution numérique étudiées au cours du semestre.

De plus, d'un point de vue environnemental, il nous a permis d'en apprendre davantage sur le cycle du carbone et les échanges entre l'atmosphère, les arbres et les sols. Nous avons pris conscience du rôle majeur que jouent les forêts et les sols dans la régulation du CO<sub>2</sub>.

En faisant varier les paramètres, nous avons pu observer à quel point un seul facteur pouvait influencer l'ensemble du cycle. Cela a mis en évidence la fragilité de l'équilibre cet écosystème qu'il faut préserver.

Enfin, nous avons trouvé ce travail enrichissant car il touche à des enjeux actuels, urgents et préoccupants, et c'était motivant de voir que les outils que appris en cours peuvent servir à modéliser des phénomènes aussi importants.

## 13 Annexe

### 13.1 Répartition des tâches

**Matin (Jour 1) :  $\approx 4h$**

Charlotte : Réflexion et implémentation de la méthode de Newton

Réflexion et implémentation de la méthode d'Euler implicite en utilisant Newton

Elsa : Réflexion papier sur Euler-Explicite et Runge-Kutta 2

Réflexion et implémentation de la méthode de Newton

Perline : Implémentation de Euler-Explicite et Runge-Kutta 2

Recherche des conditions initiales (quantités actuelles) dans divers articles

**Après-midi (Jour 2) :  $\approx 4h$**

Toutes les 3 : Mise en commun du code

Tests avec différents paramètres

Correction des bugs

Variation des paramètres (code et graphes)

Réunion avec d'autres groupes (pour comparer les résultats)

**Après-midi (Jour 3) :  $\approx 4h$**

Charlotte : Interprétation de l'influence des paramètres

Elsa : Vérification des méthodes

Perline : Améliorations possibles

Toutes les 3 : Rédaction du rapport

Diaporama

### 13.2 Sources

Les sources utilisées pour trouver les conditions initiales sont les suivantes :

- <https://www.epa.gov/climate-indicators/climate-change-indicators-atmospheric-concentrations-greenhouse-gases/>
- <https://globalcarbonatlas.org/budgets/carbon-budget/>
- <https://www.fao.org/4/y2779f/y2779f03.htm>
- <https://www.ifpenergiesnouvelles.fr/enjeux-et-prospective/decryptages/climat-environnement-et-economie-circulaire/les-sols-puits-carbone-et-acteurs-du-climat>

### 13.3 Recours à l'IA

Nous avons utilisé l'IA afin de nous aider dans la rédaction de notre rapport (code en LaTeX).