# Introduction aux équations aux dérivées partielles

Charlotte Prouzet Safia Zaari Jabri Camille Ansel

# Sommaire

# Sommaire

# Introduction

Dans de nombreux domaines des sciences et de l'ingénierie, nous rencontrons des phénomènes où l'évolution d'une quantité dépend de plusieurs variables. Que ce soit pour modéliser la propagation de la chaleur, l'écoulement des fluides ou la dynamique des populations, les **Équations aux Dérivées Partielles** (**EDP**) constituent un outil mathématique essentiel pour décrire et analyser ces systèmes complexes.

# Sommaire

# Objectif

L'objectif de cette présentation est de montrer comment les **EDP** apparaissent naturellement dans les **modèles physiques** et comment elles peuvent être abordées à travers des méthodes numériques, en tenant compte des processus de **diffusion**, de **convection** et des sources externes.

# Sommaire

# D'où viennent les EDPs ?

Les EDP naissent de la nécessité de décrire mathématiquement des phénomènes réels comme :

- Le transport : convection de chaleur dans un liquide, convection d'un polluant dans l'atmosphère
- La diffusion : diffusion de la chaleur dans un solide ...
- Les vibrations : son dans l'air, vibration des structures ...
- L'équilibre : calcul de l'équilibre d'une structure soumise à des forces

Chaque EDP traduit une relation entre les variations temporelles et spatiales de quantités physiques, et constitue un outil puissant pour analyser, comprendre, et prédire des systèmes complexes.

# Modèles d'EDP : Convection-Diffusion

Dans cette section, nous présentons les équations de convection-diffusion en 1D et 2D.

**1. Modèle en 1D :**

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + C\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = f(x,t),$$

où :

- $u(x,t)$ : quantité inconnue (température, concentration, etc.)
- $D$ : coefficient de diffusion
- $C$ : vitesse de convection
- $f(x,t)$ : terme source

**2. Modèle en 2D :**

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - D\triangle u(x,t) + C \cdot \nabla u(x,t) = f(x,t),$$

où :

- $\triangle u(x,t)$ : Laplacien de $u$,
- $\nabla u(x,t)$ : gradient de $u$.

# Convection-Diffusion en 1D : Description

L'équation de convection-diffusion en 1D s'écrit :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + C\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = f(x,t).$$

- Le terme diffusion $-D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
  $\rightarrow$ Modélise l'étalement de la quantité $u(x,t)$ dans l'espace.
- Le terme convection $+C\frac{\partial u}{\partial x}$
  $\rightarrow$ Modélise le transport de la quantité $u(x,t)$ le long de l'espace.
- Le terme source $f(x,t)$
  $\rightarrow$ Modélise des apports externes de la quantité $u(x,t)$.

# Sommaire

# Approximation numérique : Fonction source

Pour résoudre numériquement une EDP, nous déterminons le terme source $f(x,t)$ à partir de l'équation et d'une solution exacte donnée.

- Fixer une solution exacte $u(x,t)$.
- Calculer les dérivées nécessaires de $u(x,t)$ :
  - $\rightarrow$ $\frac{\partial u}{\partial t}$,
  - $\rightarrow$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,
  - $\rightarrow$ $\frac{\partial u}{\partial x}$.
- Substituer ces dérivées dans l'EDP :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t).$$

# Exemple 1 : $u(x,t) = \sin(\pi x) \cdot (1+t)$

Soit $u(x,t) = \sin(\pi x) \cdot (1+t)$.

**Calcul des dérivées :**

- $\frac{\partial u}{\partial t} = \sin(\pi x)$,
- $\frac{\partial u}{\partial x} = \pi \cos(\pi x)(1+t)$,
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\pi^2 \sin(\pi x)(1+t)$.

**Expression de $f(x,t)$ :**

$$f(x,t) = \sin(\pi x) + D(\pi^2 \sin(\pi x)(1+t)) + C(\pi \cos(\pi x)(1+t)).$$

# Exemple 2 : $u(x,t) = t \cdot e^{-x^2}$

**Calcul des dérivées :**

- $\frac{\partial u}{\partial t} = e^{-x^2}$,
- $\frac{\partial u}{\partial x} = -2xte^{-x^2}$,
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = te^{-x^2}(4x^2 - 2)$.

**Expression de $f(x,t)$ :**

$$f(x,t) = e^{-x^2} - D\big(2te^{-x^2}(2x^2 - 1)\big) + C\big(-2xte^{-x^2}\big).$$

# Exemple 3 : $u(x,t) = \exp(-tx^2)$

**Calcul des dérivées :**

- $\frac{\partial u}{\partial t} = -x^2 \exp(-tx^2)$,
- $\frac{\partial u}{\partial x} = -2tx \exp(-tx^2)$,
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \exp(-tx^2)(2t - 4t^2x^2)$.

**Expression de $f(x,t)$ :**

$$f(x,t) = -x^2 \exp(-tx^2) + D\big(2t \exp(-tx^2) - 4t^2x^2 \exp(-tx^2)\big)$$
$$-C\big(2tx \exp(-tx^2)\big)$$

# Exemple 4 : $u(x,t) = \sin(\pi x)\exp(-t)$

**Calcul des dérivées :**

- $\frac{\partial u}{\partial t} = -\sin(\pi x)\exp(-t)$,
- $\frac{\partial u}{\partial x} = \pi\cos(\pi x)\exp(-t)$,
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\pi^2\sin(\pi x)\exp(-t)$.

**Expression de $f(x,t)$ :**

$$f(x,t) = -\sin(\pi x)\exp(-t) + D\left(\pi^2\sin(\pi x)\exp(-t)\right)$$

$$+C\left(\pi\cos(\pi x)\exp(-t)\right).$$

# Sommaire

**Comparaison entre la solution numérique et la solution exacte :**

On pose L=1 et T=10

$$u_{\text{exacte}}(x,t) = \sin(\pi x) \cdot (1+t)$$

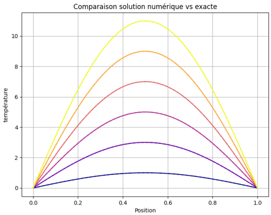


Figure: C=0

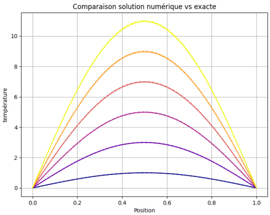


Figure: C=D=0.1

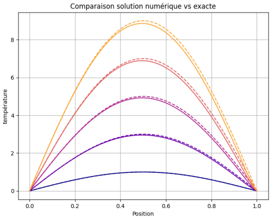


Figure: C=0.1 et D=0.01

# Cas test 1

## Erreur absolue et erreur relative :

$$u_{\text{exacte}}(x, t) = \sin(\pi x) \cdot (1 + t)$$

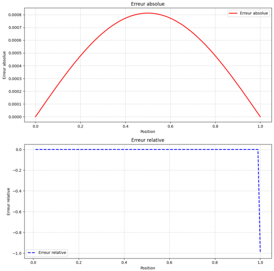


Figure: C=0

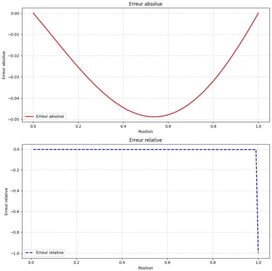


Figure: C=D=0.1

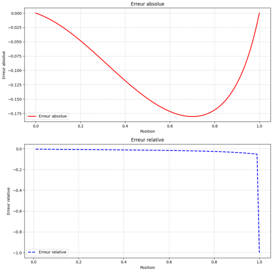


Figure: C=0.1 et D=0.01

# Cas test 1

**Diffusion de la chaleur :**

$$u_{\text{exacte}}(x,t) = \sin(\pi x)\cdot(1+t)$$

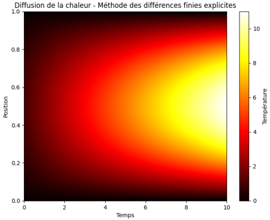


Figure: C=0

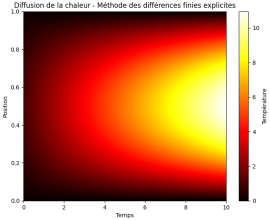


Figure: C=D=0.1

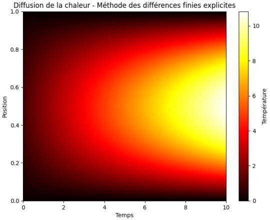


Figure: C=0.1 et D=0.01

**Étude de** $E(\Delta t, \Delta x)$ **:** $E(\Delta t, \Delta x) = O(\Delta t^p) + O(\Delta x^q)$

$$E(\Delta x) = \mathrm{C}\ \Delta x^q$$

$$\ln(\mathrm{E}) = \mathrm{C} + \mathrm{q}\ \ln(\Delta x)$$

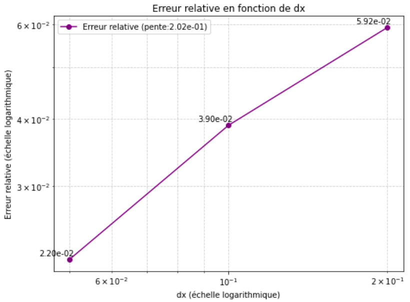


Figure: Erreur relative en fonction de dx

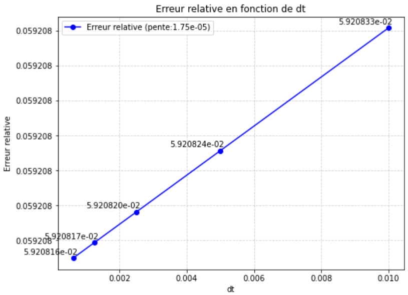


Figure: Erreur relative en fonction de dt

# Sommaire

**Comparaison entre la solution numérique et la solution exacte :**

On pose L=10 et T=10

$$u_{\text{exacte}}(x,t) = t \cdot \exp(-x^2)$$

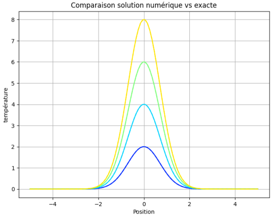


Figure: C=0

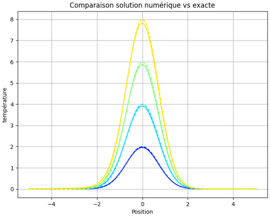


Figure: C=D=1

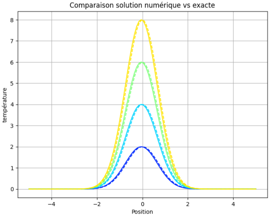


Figure: C=0.1 et D=0.01

# Cas test 2

## Erreur absolue et erreur relative :

$$u_{\text{exacte}}(x, t) = t \cdot \exp(-x^2)$$

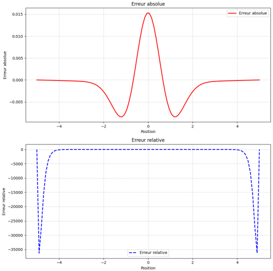


Figure: C=0 et D=1

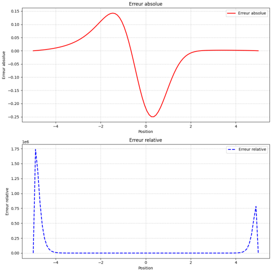


Figure: C=D=1

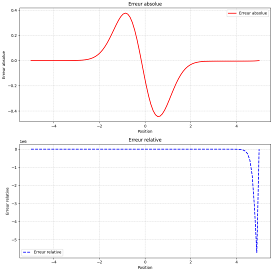


Figure: C=0.1 et D=0.01

# Cas test 2

**Diffusion de la chaleur :**

$$u_{\text{exacte}}(x,t) = t \cdot \exp(-x^2)$$

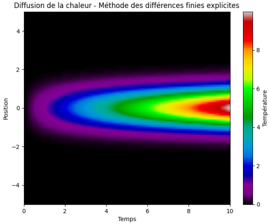


Figure: C=0

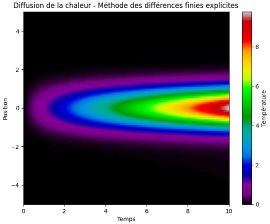


Figure: C=D=1

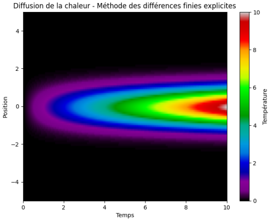


Figure: C=0.1 et D=0.01

**Étude de $E(\Delta t, \Delta x)$ :**

$$u_{\text{exacte}}(x,t) = t \cdot \exp(-x^2)$$

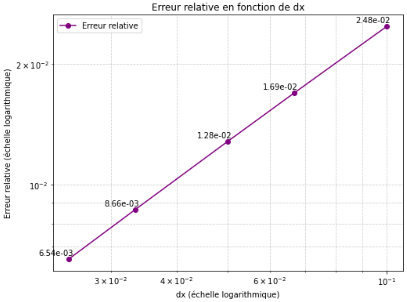


Figure: Erreur relative en fonction de dx

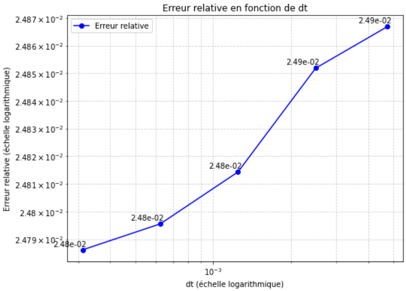


Figure: Erreur relative en fonction de dt

# Sommaire

**Comparaison entre la solution numérique et la solution exacte :**

On pose L=10 et T=10

$$u_{\text{exacte}}(x, t) = \exp(-t \cdot x^2)$$

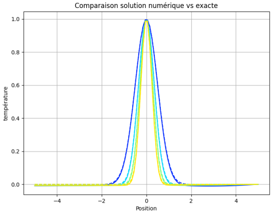


Figure: C=0

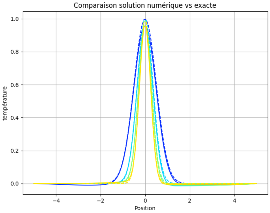


Figure: C=D=1

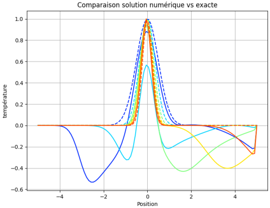


Figure: C=0.1 et D=0.01

# Cas test 3

**Erreur absolue et erreur relative :**

$$u_{\text{exacte}}(x,t) = \exp(-t \cdot x^2)$$

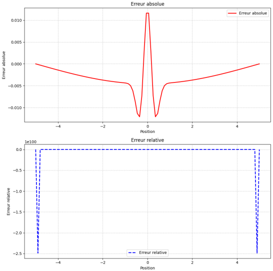


Figure: C=0 et D=1

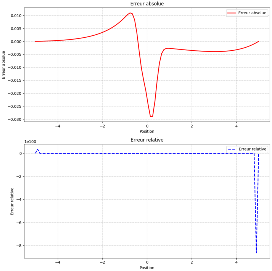


Figure: C=D=1

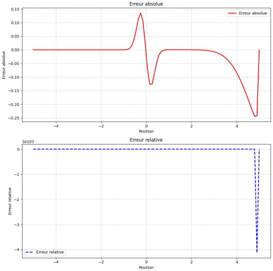


Figure: C=0.1 et D=0.01

**Diffusion de la chaleur :**

$$u_{\text{exacte}}(x, t) = \exp(-t \cdot x^2)$$

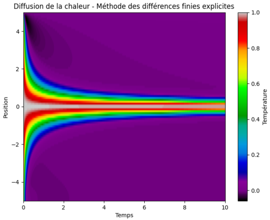


Figure: C=0

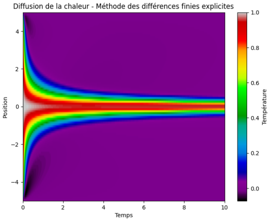


Figure: C=D=1

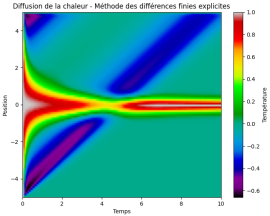


Figure: C=0.1 et D=0.01

# Cas test 3

**Étude de $E(\Delta t, \Delta x)$ :**

$$u_{\text{exacte}}(x,t) = \exp(-t \cdot x^2)$$

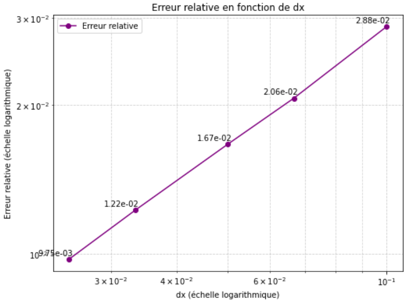


Figure: Erreur relative en fonction de dx

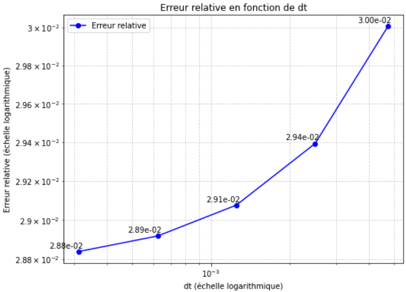


Figure: Erreur relative en fonction de dt

# Sommaire

**Comparaison entre la solution numérique et la solution exacte :**

On pose L=10 et T=10

$$u_{\text{exacte}}(x,t) = \sin(\pi x) \cdot \exp(-t)$$

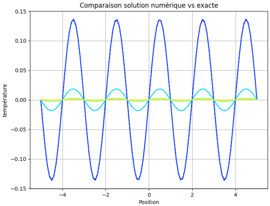


Figure: C=0

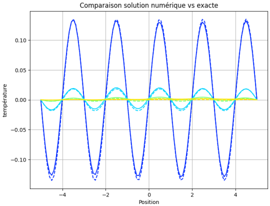


Figure: C=D=1

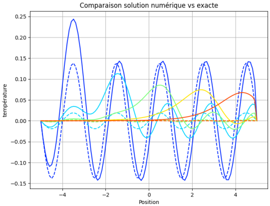


Figure: C=1 et D=0.01

# Cas test 4

**Erreur absolue et erreur relative :**

$$u_{\text{exacte}}(x,t) = \sin(\pi x)\cdot\exp(-t)$$

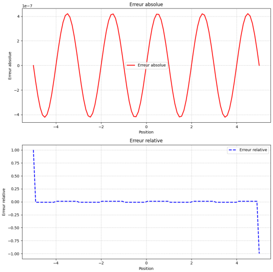


Figure: C=0

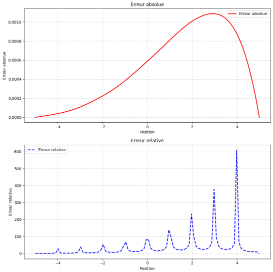


Figure: C=D=1

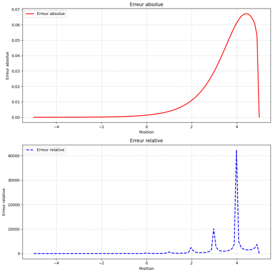


Figure: C=1 et D=0.01

# Cas test 4

**Diffusion de la chaleur :**

$$u_{\text{exacte}}(x,t) = \sin(\pi x) \cdot \exp(-t)$$

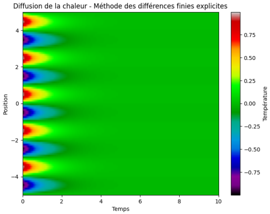


Figure: C=0

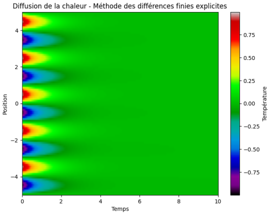


Figure: C=D=1

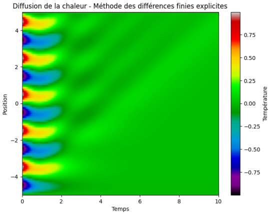


Figure: C=1 et D=0.01

## Étude de $E(\Delta t, \Delta x)$ :

$$u_{\text{exacte}}(x,t) = \sin(\pi x) \cdot \exp(-t)$$

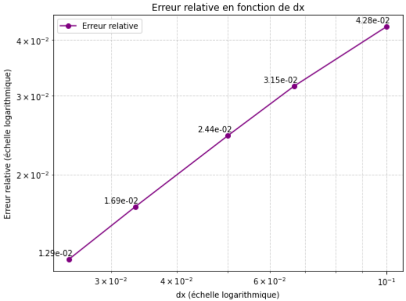


Figure: Erreur relative en fonction de dx

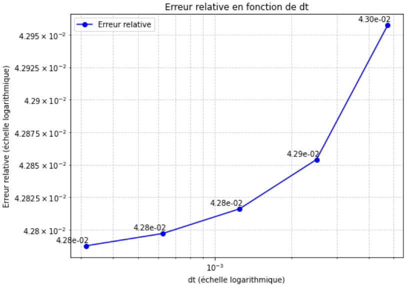


Figure: Erreur relative en fonction de dt

# Sommaire

# Conclusion

conclusion