

## Практическая работа №7

### Работа с красно черным деревом

Рассматривается красно черное дерево (КЧД) как самобалансирующееся дерево структура для решения задачи поиска. Рассматриваются возможности балансировки красно черного дерева при вставке и удалении элементов дерева

Вопросы:

1. Основные сведения о красно черных деревьях.
2. Вставка элементов в красно черное дерево (3 случая)
3. Удаление элементов из красно черного дерева (5 случаев)
4. Задание

1. Основные сведения о красно черных деревьях

См. в презентации лекции

2. Вставка элементов в красно черное дерево

Выполняется по следующему алгоритму;

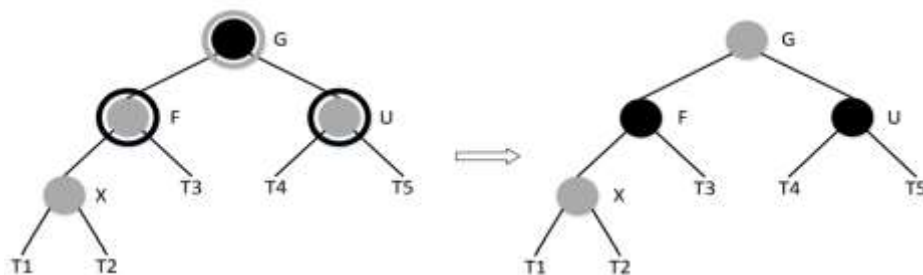
Находим лист для вставки нового элемента

Создаем элемент и окрашиваем его в **красный** цвет

Перекрашивая узлы и выполняя повороты, восстанавливаем структуру красно-черного дерева

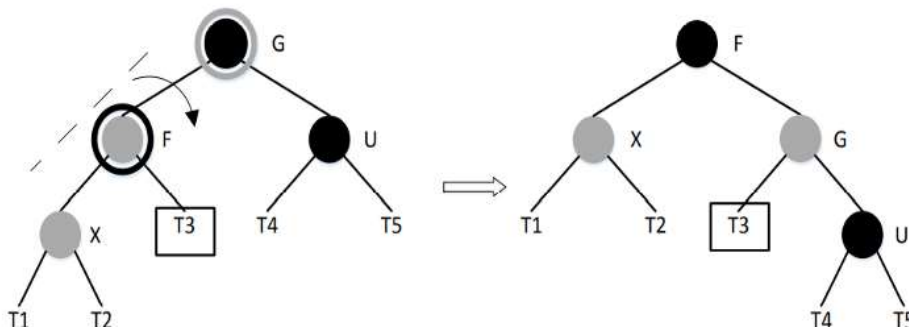
При вставке узла **z (красного)** в КЧД возможны 6 случаев, нарушающих свойства КЧД при этом 3 случая **симметричны** другим трем:

**Случай 1** Дядя  $U$  добавляемого узла  $X$  красный  
*Решение:*  
перекраска  $F$  и  $U$  в черный цвет, а  $G$  в красный



Далее балансировка выполняется относительно узла  $G$

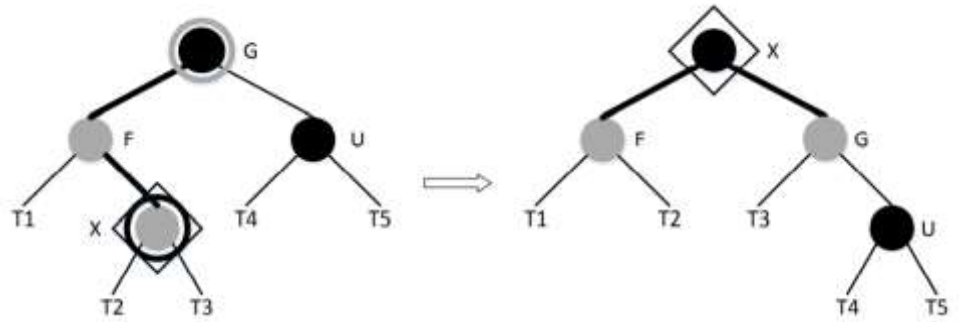
**Случай 2** Дядя  $U$  добавляемого узла  $X$  черный и при этом цепочка узлов  $X$ - $F$ - $G$  образует прямую линию  
*Решение:*  
перекраска  $F$  и  $G$  и одинарный правый поворот



Правый поворот выполняется «вокруг» связи между  $G$  и  $F$ , делая  $F$  новым корнем поддерева, правым дочерним узлом которого становится  $G$ , а бывший

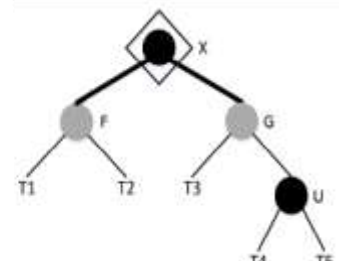
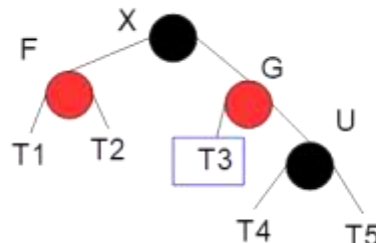
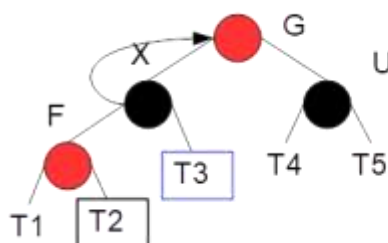
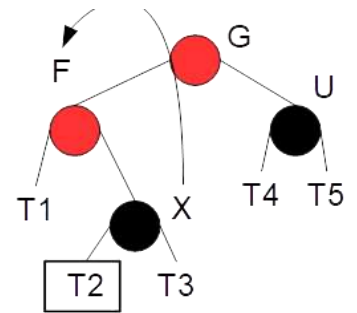
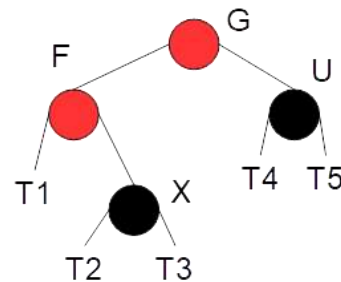
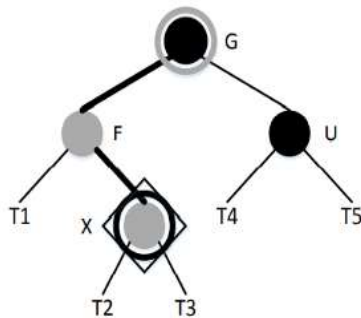
правый потомок узла  $F$  ( $T3$ ) - левым потомком  $G$ .

**Случай 3** Дядя  $U$  добавляемого узла  $X$  черный и при этом цепочка узлов  $X$ - $F$ - $G$  образует угол  
Решение :  
Перекраска  $X$  и  $G$ , и двойной (левый и правый) поворот комбинации  $X$ - $F$ - $G$ , когда нижний узел ( $X$ ) оказывается наверху комбинации.




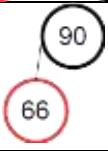
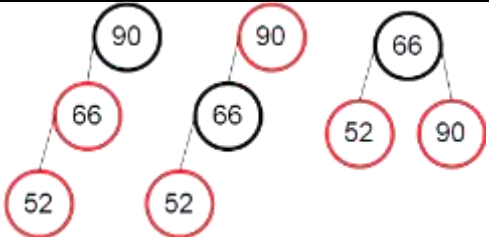
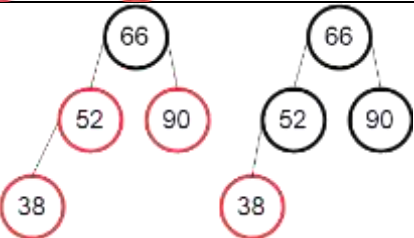
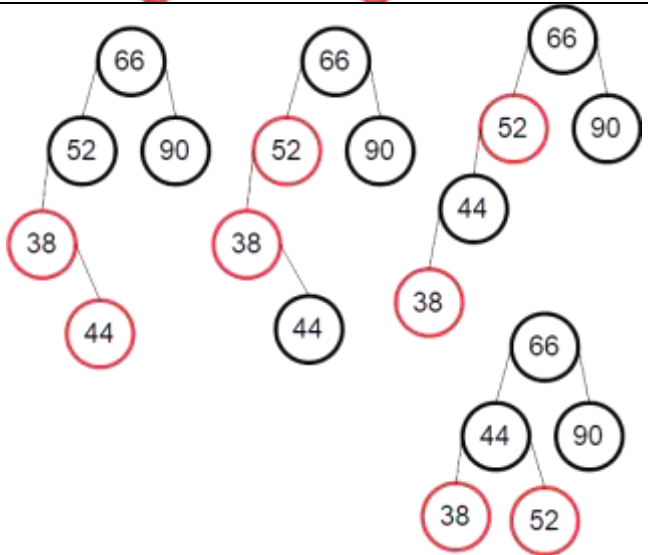
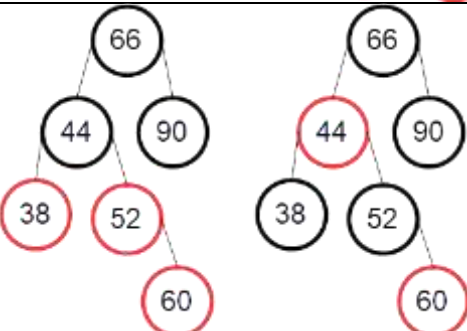
Левый поворот выполняется «вокруг» связи между  $F$  и  $X$ , делая  $X$  новым корнем поддерева, левым дочерним узлом которого становится  $F$ , а бывший левый потомок узла  $X$  ( $T2$ ) - правым потомком  $F$

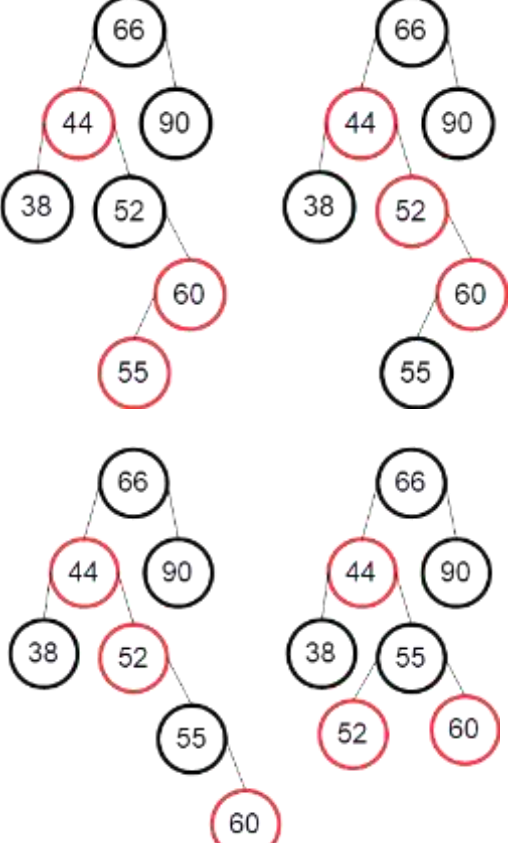
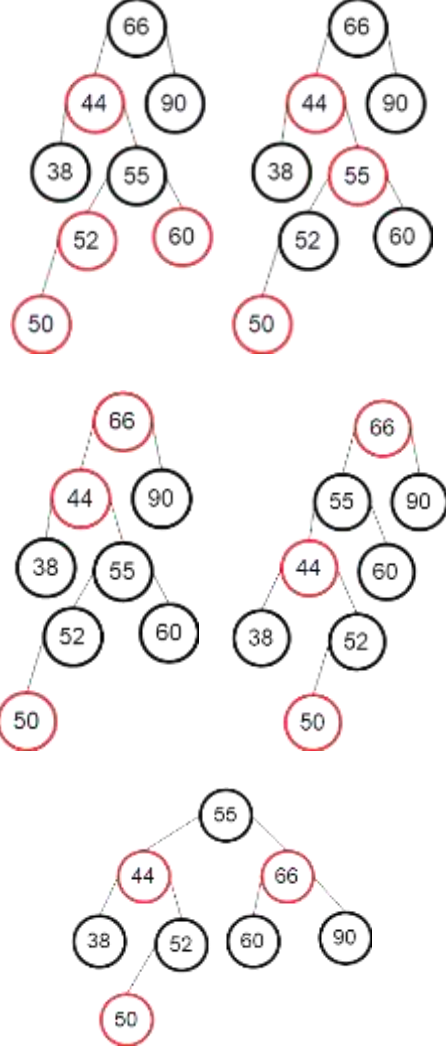
Правый поворот выполняется «вокруг» связи между  $G$  и  $X$ , делая  $X$  новым корнем поддерева, правым дочерним узлом которого становится  $G$ , а бывший правый потомок узла  $X$  ( $T3$ ) - левым потомком  $G$



Рассмотрим примеры вставки узлов в красно-черное дерево

1. Покажем процесс построения красно-черного дерева для следующего множества элементов: 90, 66, 52, 38, 44, 60, 55, 50

	<p>Вставляем элемент 90. Случай 1 – перекраска в черный цвет</p>
	<p>Вставляем элемент 66. Он становится левым сыном элемента 90. Так как родитель черный, нет нарушений ничего не меняем.</p>
	<p>Вставляем элемент 52. Он становится левым сыном элемента 66. Случай 2 так как его родитель красный, перекраска и правый поворот</p>
	<p>Вставляем элемент 38. Он становится левым сыном элемента 52 Случай 1 перекраска отца 52 и дяди 90 и деда 66 и перекраска корня 66</p>
	<p>Вставляем элемент 44. Он становится правым сыном элемента 38 Случай 3 так 38 красный и 44, 38 и 52 образуют угол. Перекраска 44 и 52, левый поворот 38 и 44 и правый поворот 44 и 52.</p>
	<p>Вставляем элемент 60. Он становится правым сыном элемента 52 Случай 1 так как дядя красный - перекраска 44 и 38 и 52</p>

	<p>Вставляем элемент 55. Случай 3 становится левым сыном элемента 60., угол 55,60 и 52 Перекраска 55 и 52 Симметрично: Правый поворот 55 и 60 и левый поворот 55 и 52.</p>
	<p>Вставляем элемент 50 – левым сыном 52 Случай 1 перекраска 52 и 60 и 55. Красно красное нарушение для 55 и 44. – Случай 3 – перекраска и два поворота          Левый поворот выполняется «вокруг» связи между 44 и 55, делая 55 новым корнем поддерева, левым дочерним узлом которого становится 44, а бывший левый потомок узла 55 (52, 50) - правым потомком 44          Правый поворот выполняется «вокруг» связи между 66 и 55, делая 55 новым корнем поддерева, правым дочерним узлом которого становится 66, а бывший правый потомок узла 55 (60) - левым потомком 66</p>

## 1. Удаление элементов из красно черного дерева

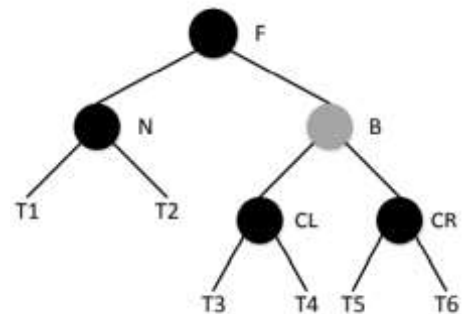
Удаление узла из КЧД, так же, как и вставка узла производится в два этапа: собственно удаление с помощью алгоритма удаления из BST, и восстановление свойств дерева, если они были нарушены.

Если удаляемый узел из дерева **красный**, красно-черные свойства дерева сохраняются.

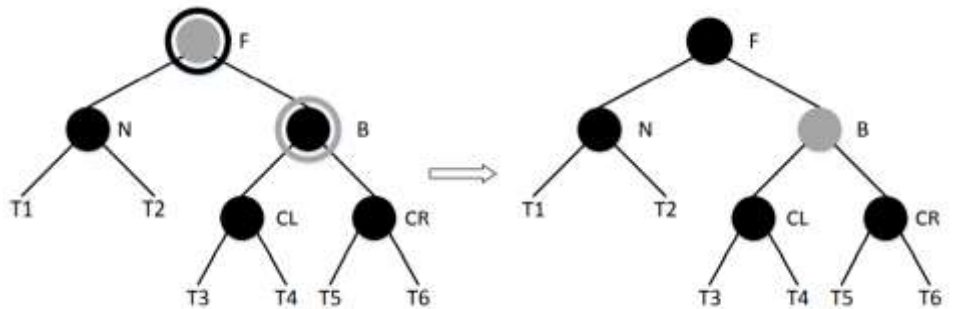
Таким образом, восстановление свойств дерева может понадобиться только в том случае, если удаляемый узел – *черный*. Если при этом сын удаляемого узла *красный*, то после удаления достаточно будет перекрасить сына удаленного узла в черный цвет, чтобы восстановить количество черных узлов на этом пути.

Рассмотрим 5 случаев конфигурации дерева после удаления черного узла, у которого сын – черный.

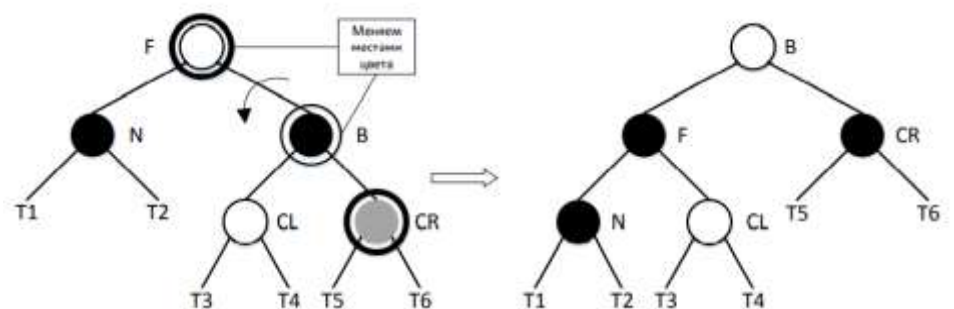
Обозначим сына удаленного узла за  $N$ , а отца удаленного узла за  $F$ . После удаления  $F$  стал новым отцом  $N$ . Обозначим за  $B$  нового брата  $N$ , а за  $CL$  и  $CR$  – левого и правого сыновей  $B$ , соответственно. На то, какой именно будет процедура восстановления, влияет только комбинация из этих 5 узлов. Будем считать, что  $N$  – левый сын  $F$ . В противном случае, все изображения будут симметричными относительно вертикальной оси, проходящей через  $F$ .

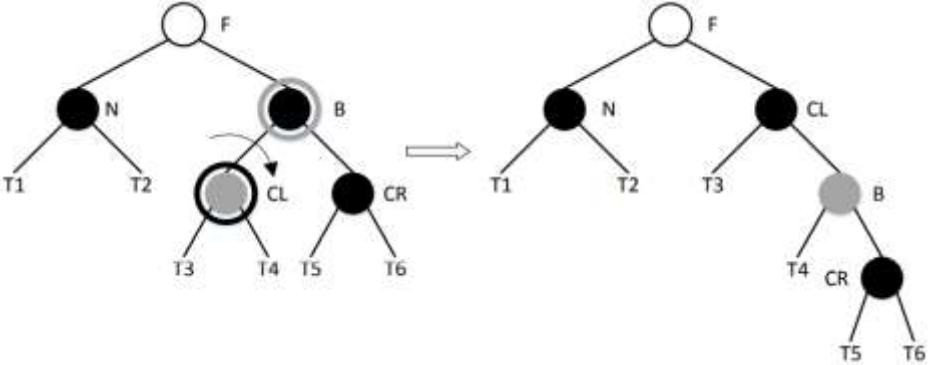
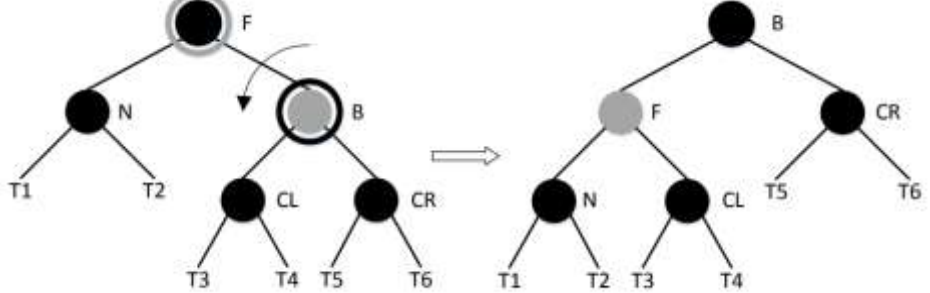


**Случай 1.** Отец  $F$  узла  $N$  красный, остальные узлы черные. (*Отец  $F$  узла  $N$  красный: перекраска  $B$  и  $F$* )



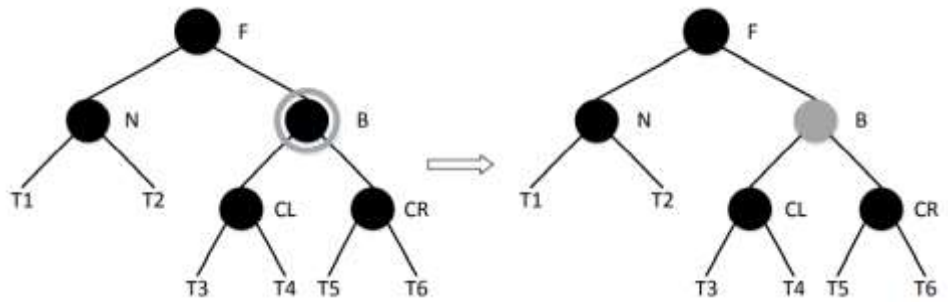
**Случай 2.** Брат  $B$  узла  $N$  черный, а его правый сын  $CR$  красный. В этом случае, независимо от того, является ли  $F$  черным или красным, свойства КЧ-дерева



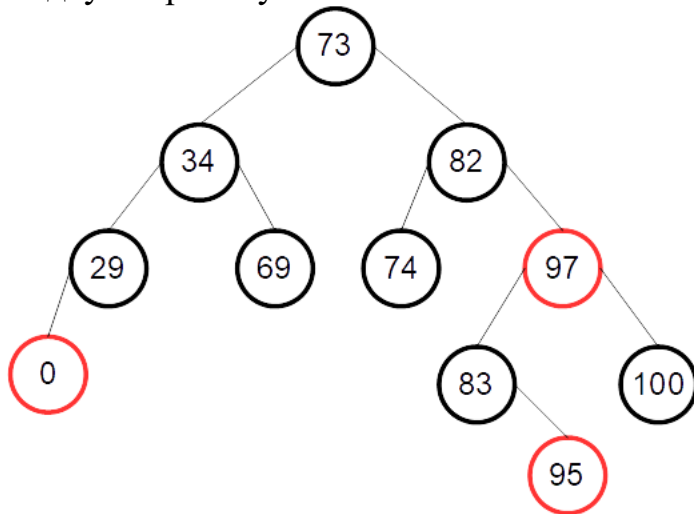
<p>восстанавливаю тся после <b>левого</b> поворота <math>F</math> вокруг <math>B</math>, перекраски <math>CR</math> в черный цвет и обмена цветами <math>F</math> и <math>B</math>.</p>	
<p>Левый поворот выполняется «вокруг» связи между <math>F</math> и <math>B</math>, делая <math>B</math> новым корнем поддерева, левым дочерним узлом которого становится <math>F</math>, а бывший левый потомок узла <math>B</math> (<math>CL</math>) - правым потомком <math>F</math>.</p>	
<p><b>Случай 3.</b> Брат <math>B</math> узла <math>N</math> черный, его правый сын <math>CR</math> черный, а левый сын <math>CL</math> красный. (<i>Брат <math>B</math> узла <math>N</math> черный, его левый сын красный, а правый – черный: поворот <math>CL</math> вокруг <math>B</math>, перекраска <math>CL</math> и <math>B</math>)</i>)</p>	
<p>Правый поворот выполняется «вокруг» связи между <math>B</math> и <math>CL</math>, делая <math>CL</math> новым корнем поддерева, правым дочерним узлом которого становится <math>B</math>, а бывший правый потомок узла <math>CL</math> (<math>T4</math>) - левым потомком <math>B</math></p>	
<p><b>Случай 4.</b> Брат <math>B</math> узла <math>N</math> красный. (<i>Брат <math>B</math> узла <math>N</math> красный: поворот <math>F</math> вокруг <math>B</math> и перекраска <math>F</math> и <math>B</math>)</i>) В этом случае <math>F</math>, <math>CL</math> и <math>CR</math> могут быть только черными</p>	
<p><b>Левый поворот</b> выполняется «вокруг» связи между <math>F</math> и <math>B</math>, делая <math>B</math> новым корнем поддерева, левым дочерним узлом которого становится <math>F</math>, а бывший левый потомок узла <math>B</math> (<math>CL</math>) - правым потомком <math>F</math></p>	



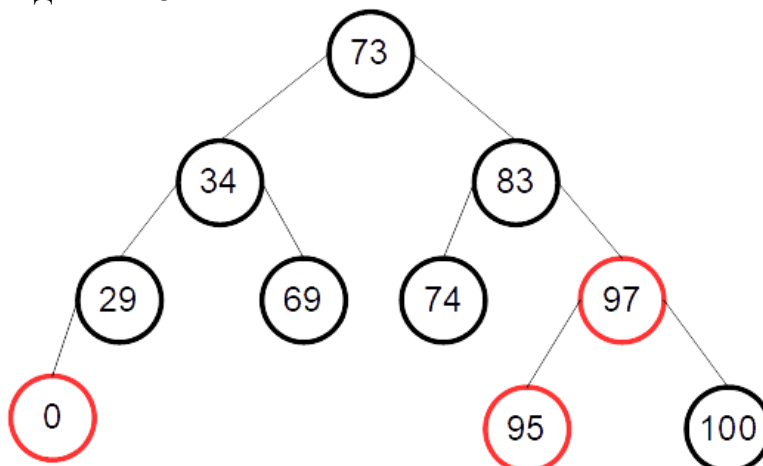
**Случай 5.** Все узлы комбинации (брат B, его дети CL и CR, а также отец F узла N) черные. (Все узлы комбинации черные: перекраска B в красный цвет и продолжение процедуры наверх)



Покажем процесс удаления из красно черного дерева 29 82 73 97 69 34 0 74 83 100 95 двух черных узлов 82 и 73

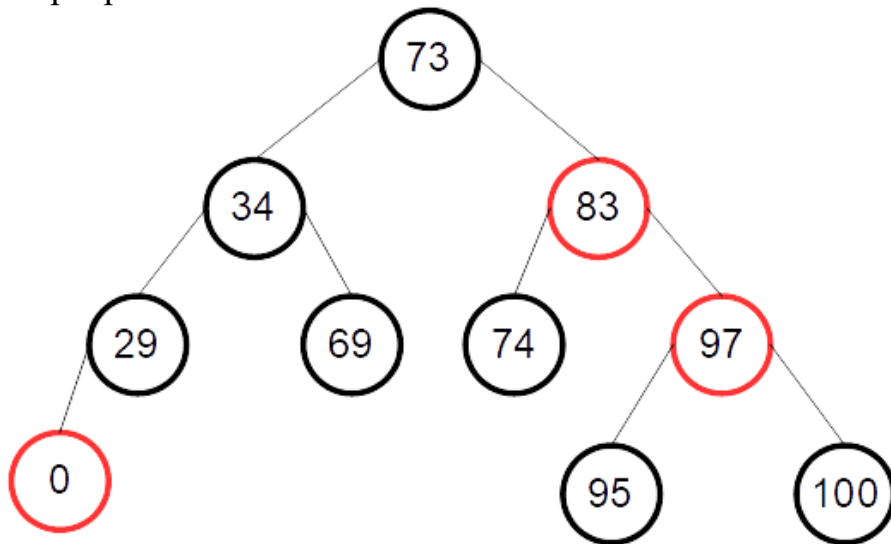


Удаляем 82.

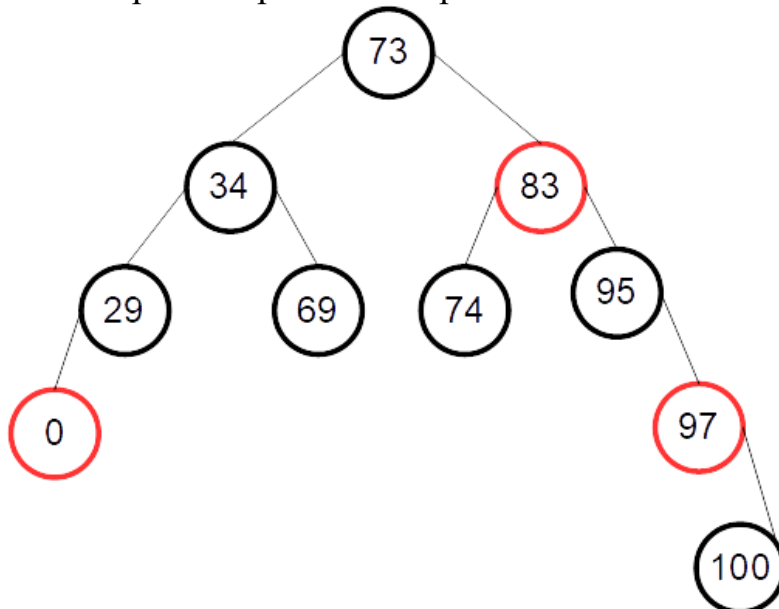


Красно-красное нарушение 95 и 97 и элементы 95, 97, 83 образуют угол как при вставке перекраска и два поворота .

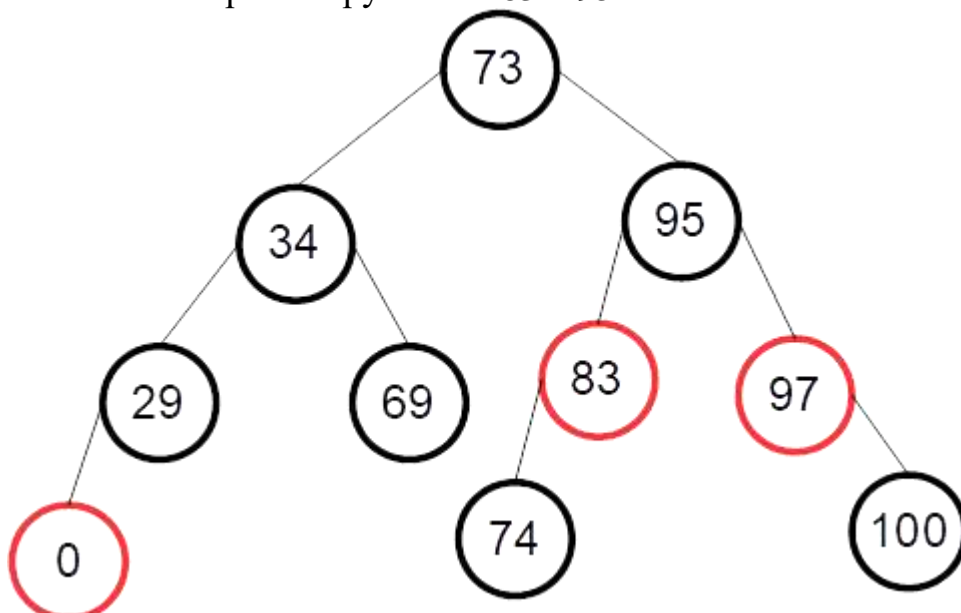
Перекраска 95 и 83



Симметрично правый поворот 97 и 95



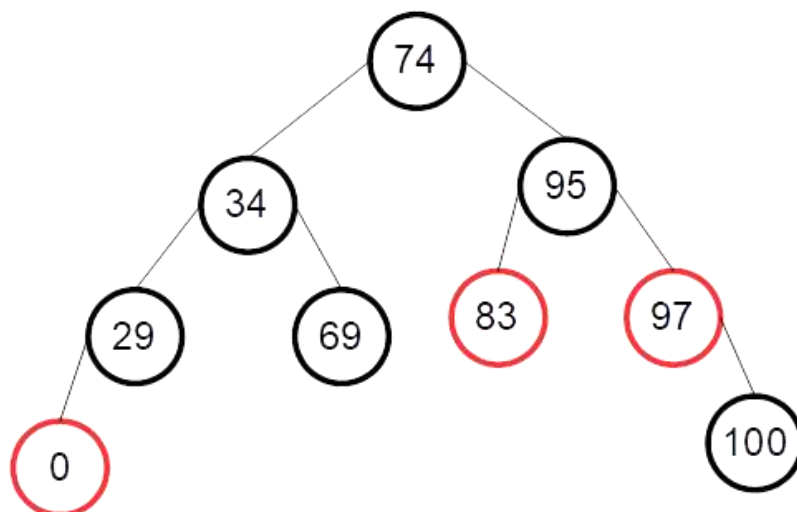
И левый поворот вокруг связи 83 и 95



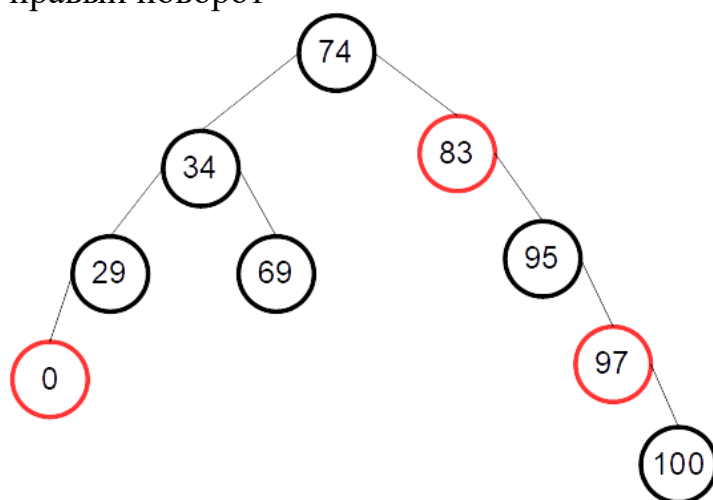
Удаляем узел 73

По правилу бинарного дерева





Нарушение черной высоты для узла 83 (случай 3) – перекраска 83 и 95 и правый поворот



### Задание:

1. Построить красно черное дерево по вариантам заданий. При выполнении построения обязательно при каждой вставке элемента описывать, на какую позицию становится элемент, почему возникает тот или иной случай и как этот случай нужно разрешить (так как это показано в примере)
2. Поочередно удалить из построенного красно-черного дерева три черных элемента, включая корневой

Варианты заданий:

Вариант	Последовательность
1	81, 42, 57, 87, 25, 52, 6, 32, 91
2	87, 50, 11, 49, 23, 15, 44, 1, 27
3	93, 78, 23, 47, 4, 80, 44, 56, 58
4	98, 29, 97, 37, 55, 4, 34, 96, 97
5	96, 81, 34, 4, 82, 41, 79, 52, 84
6	87, 23, 36, 22, 56, 44, 25, 73, 11
7	90, 29, 76, 21, 30, 15, 82, 67, 85
8	84, 85, 54, 35, 5, 60, 20, 43, 1
9	70, 64, 36, 3, 41, 50, 2, 55, 11
10	90, 30, 65, 88, 41, 21, 38, 78, 14

11	86, 65, 7, 33, 54, 29, 11, 91, 12
12	86, 80, 19, 86, 55, 7, 60, 48, 51
13	90, 12, 68, 63, 3, 47, 50, 61, 41
14	98, 40, 42, 88, 61, 87, 79, 97, 82
15	70, 80, 61, 92, 12, 23, 67, 65, 50
16	29, 1, 24, 69, 52, 97, 27, 10, 88
17	95, 43, 98, 41, 68, 67, 10, 7, 69
18	61, 32, 27, 45, 75, 58, 5, 50, 99
19	78, 77, 4, 62, 8, 69, 46, 11, 49
20	28, 76, 27, 10, 5, 35, 95, 16, 33
21	31, 40, 22, 50, 53, 68, 97, 12, 15
22	18, 20, 2, 88, 61, 17, 79, 97, 82

Отчет должен содержать:

1. Контрольный пример по вариантам заданий и выводы по практической работе №7